

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0057

LOG Titel: Sechstes Kapitel. Topologie.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Gleichung $b = B$. In Abb. 268 sind zwei solche Hyperbeln und ihre Brennpunkte gezeichnet.

Beim Abschroten ändert sich die *gegenseitige* Stellung der beiden Hyperboloide nicht. Hält man also das eine fest, so beschreibt die Rotationsachse des zweiten eine Drehung D um die Rotationsachse des ersten. Der Bewegungsvorgang wird erheblich vereinfacht, wenn wir der ersten Fläche die zu D inverse Drehung um die Rotationsachse erteilen. Dann bleibt die Achse des zweiten Hyperboloids (und ebenso natürlich die des ersten) im Raum fest. Wir erhalten also die Abschrotung dieser beiden Flächen, indem wir sie so aneinanderlegen, daß sie einander längs einer Geraden berühren, und sie dann beide um ihre Rotationsachsen in geeignetem Geschwindigkeitsverhältnis drehen.

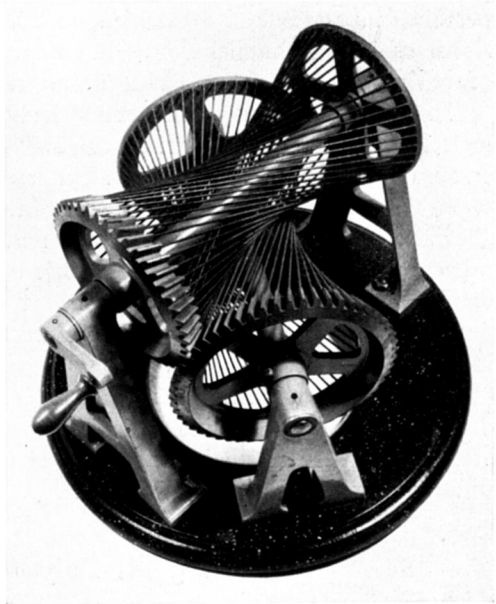


Abb. 269.

Hieraus ergibt sich eine technisch verwendbare Methode der Zahnradübertragung zwischen windschiefen Achsen. Da beim gegenseitigen Gleiten das Material leidet, muß man sich auf den Fall kongruenter Hyperboloide beschränken. Eine solche Übertragung ist in Abb. 269 dargestellt.

Sechstes Kapitel.

Topologie.

Schon die projektive Geometrie hat uns auf Erscheinungen geführt, die sich ohne Vergleichung von Längen und Winkeln feststellen lassen und die dennoch präzisen geometrischen Charakter haben. In der Topologie handelt es sich nun um geometrische Tatsachen, zu deren Erfassung nicht einmal der Begriff der Geraden und der Ebene herangezogen wird, sondern allein der stetige Zusammenhang zwischen den Punkten einer Figur. Wir denken uns eine Figur aus beliebig deformier-

barem, aber völlig unzerreißbarem und unverkittbarem Material hergestellt und werden Eigenschaften kennenlernen, die erhalten bleiben, wenn man eine aus solchem Material hergestellte Figur beliebig verzerrt. Z. B. kommen alle topologischen Eigenschaften der Kugel in gleicher Weise auch dem Ellipsoid oder dem Würfel oder Tetraeder zu. Dagegen bestehen topologische Unterschiede zwischen der Kugel und dem Torus. Denn es ist anschaulich klar, daß man eine Kugel ohne Zerreißung oder Verkittung nicht in einen Torus verwandeln kann.

In der Entwicklung der geometrischen Wissenschaft traten topologische Probleme naturgemäß noch später auf als projektive; nämlich erst im 18. Jahrhundert. Später zeigte sich, daß die topologischen Aussagen trotz ihrer scheinbaren Unbestimmtheit gerade mit den genauesten abstrakten Grenaussagen der Mathematik zusammenhängen, nämlich mit der Algebra und Funktionentheorie der komplexen Zahlen und mit der Gruppentheorie. In der Gegenwart gehören unter allen Zweigen der Mathematik die topologischen Forschungen zu den fruchtbarsten und erfolgreichsten.

Wir müssen uns im folgenden auf einige Fragen aus der Topologie der Flächen des dreidimensionalen Raums beschrnken¹. Wir beginnen mit denjenigen Flächen, die sich topologisch am einfachsten untersuchen lassen: den Polyedern.

§ 44. Polyeder.

Unter einem Polyeder verstehen wir jedes System von Polygonen, die so angeordnet sind, daß einerseits an jeder Kante zwei und nur zwei Polygone (unter einem Winkel) zusammenstoßen und daß man andererseits durch berschreiten von Kanten von jedem Polygon des Systems zu jedem anderen gelangen kann.

Die einfachsten und wichtigsten Polyeder sind die „simplen“. So nennen wir ein Polyeder, wenn es durch stetige Deformation in eine Kugel verwandelt werden kann. Beispiele simpler Polyeder sind die regulären Polyeder (§ 14). Wir werden bald sehen, daß es noch zahlreiche andere als simple Polyeder gibt, die sich also nicht in eine Kugel verzerren lassen.

Die regulären Polyeder hatten ferner die Eigenschaft, frei von einspringenden Kanten zu sein. Hieraus folgt, daß die regulären Polyeder konvex sind. Konvex nennt man nämlich jedes Polyeder, das ganz auf einer Seite jeder seiner Flächen liegt, das ich also mit jeder Seitenfläche auf eine ebene Tischplatte legen kann. Die Konvexität ist keine topologische Eigenschaft, denn ich kann ein konvexes Polyeder durch eine topologisch unwesentliche Abänderung in ein nichtkonvexes Poly-

¹ Als weitergehende Einführung in die grundlegenden Begriffe der Topologie sei auf das gleichzeitig erscheinende kleine Buch von ALEXANDROFF, „Einfachste Grundbegriffe der Topologie“ verwiesen.

eder verwandeln. Man kann aber aus der Konvexität eines Polyeders auf eine topologische Eigenschaft schließen. Eine einfache Überlegung ergibt nämlich, daß jedes konvexe Polyeder notwendig ein simples ist¹.

Die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines simplen Polyeders stehen zueinander immer in einer wichtigen Beziehung, die nach ihrem Entdecker der EULERSche Polyedersatz genannt wird. Sei nämlich E die Anzahl der Ecken, K die der Kanten, F die der Flächen des Polyeders, so besagt der EULERSche Polyedersatz, daß die Zahl $E - K + F$ für alle simplen Polyeder den Wert 2 hat:

$$E - K + F = 2.$$

Wir prüfen diesen überraschenden Satz an einigen regulären Polyedern nach:

Tetraeder: $E - K + F = 4 - 6 + 4 = 2.$

Würfel: $8 - 12 + 6 = 2.$

Oktaeder: $6 - 12 + 8 = 2.$

Zum Beweise des EULERSchen Satzes verschaffen wir uns in der Ebene ein Bild des simplen Polyeders, das wir sein ebenes Netz nennen wollen. Wir nehmen eine beliebige Seitenfläche des Polyeders fort und verzerren die übrigen Seitenflächen, bis sie in eine und dieselbe Ebene fallen. Man kann es so einrichten, daß die Seitenflächen bei der Verzerrung geradlinig begrenzte Polygone bleiben und daß sich deren Eckenzahl nicht ändert. (Dagegen ist es natürlich nicht möglich, daß die Polygone in der Ebene den ursprünglichen Polygonen durchweg kongruent sind.) Das so entstandene, in einer Ebene liegende Polygonensystem nennen wir das ebene Netz des Polyeders. Die Abb. 153 bis 154, S. 129 können wir als ebene Netze der regulären Polyeder ansehen.

Das ebene Netz enthält ebenso viele Ecken und Kanten wie das Polyeder, dagegen eine Fläche weniger. Wir nehmen nun im ebenen Netz eine Reihe von Abänderungen vor, bei denen sich die Zahl $E - K + F$ nicht ändert und die Gestalt des Netzes sich vereinfacht. Wenn zunächst in dem Netz Flächen vorkommen, die mehr als drei Seiten besitzen, so ziehen wir in diesem Polygon eine Diagonale. Dadurch ist eine Fläche und eine Kante hinzugekommen, die Eckenzahl ist die gleiche geblieben, $E - K + F$ ist also nicht geändert (Abb. 270). Wir setzen

¹ Zwischen den konvexen und den nichtkonvexen Polyedern besteht ein eigenartiger Unterschied. Während nämlich jedes geschlossene konvexe Polyeder starr ist, existieren geschlossene nichtkonvexe Polyeder, deren Seitenflächen gegeneinander bewegt werden können. Die Starrheit der konvexen Polyeder steht in Analogie zu der auf S. 203 erwähnten Starrheit der geschlossenen konvexen Flächen. Bisher ist es aber nicht gelungen, deren Starrheit aus der Starrheit der Polyeder durch unmittelbaren Grenzübergang zu folgern.

dies Verfahren so lange fort, bis wir ein Netz erhalten, in dem alle Flächen Dreiecke sind.

Wenn wir an ein derartiges Dreiecksnetz längs einer Kante ein neues Dreieck anfügen, so daß die beiden Ecken, in welche die Kante ausläuft, auch Ecken des neuen Dreiecks sind (Abb. 271), so wird die

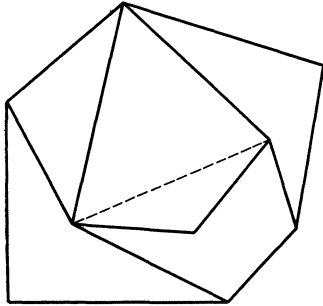


Abb. 270.

Zahl der Ecken und Flächen um je eins, die Zahl der Kanten um zwei vermehrt; der betrachtete Ausdruck bleibt also wieder ungeändert. Ebenso ändert er sich nicht, wenn wir (Abb. 272) an einer konkaven Stelle des Netzumfanges eine Kante hinzufügen, durch die zwei solche Ecken des Umfangs verbunden werden, daß ein Dreieck entsteht; denn hierdurch wird die Zahl der Ecken nicht geändert, dagegen die der Kanten und Flächen um je eins vermehrt.

Nun sieht man unmittelbar ein, daß jedes beliebige Dreiecksnetz aus einem einzelnen Dreieck durch mehrmalige Wiederholung dieser beiden Operationen erzeugt werden kann. Die Zahl $E - K + F$ besitzt also für jedes beliebige Dreiecksnetz und damit auch für jedes andere

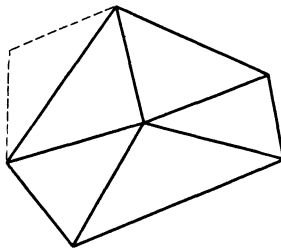


Abb. 271.

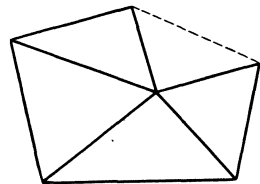


Abb. 272.

ebene Netz denselben Wert wie für ein einzelnes Dreieck: $E - K + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Da nun das Netz genau so viele Ecken und Kanten hat wie das simple Polyeder, dagegen eine Fläche mehr, so muß für das simple Polyeder gelten:

$$E - K + F = 2^*.$$

* POINCARÉ hat den EULERSCHEN Satz auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert. Dort treten statt der Ecken, Kanten und Flächen in entsprechender Weise 0-, 1-, 2- bis $n-1$ -dimensionale Gebilde auf, deren Anzahlen wir mit N_0, N_1, N_2 bis N_{n-1} bezeichnen wollen. Dann gilt für die Gebilde, die den simplen Polyedern entsprechen:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots = 1 - (-1)^n.$$

Für $n = 3$ ist das die EULERSCHE Formel.

Mit Hilfe des EULERSchen Satzes läßt sich ein neuer einfacher Beweis dafür geben, daß nur fünf reguläre Polyeder möglich sind (vgl. S. 79, 80). In dem betrachteten regulären Polyeder mögen an jeder Ecke n Seitenflächen und somit auch n Kanten zusammenstoßen. Wenn also wieder E , K , F die Bedeutung haben wie bisher, so ist die Anzahl der Kanten, die von irgendeiner Ecke auslaufen, gleich nE . Dabei haben wir aber jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante zwei Ecken verbindet. Es ist also

$$nE = 2K.$$

Ferner möge in dem betrachteten Polyeder jede Fläche von r Kanten begrenzt sein. Dann ist rF die Anzahl der Kanten, die irgendeine Fläche des Polyeders begrenzen. Bei dieser Abzählung haben wir aber wieder jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante an zwei Seitenflächen angrenzt. Also ist

$$rF = 2K.$$

Durch Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die EULERSche Formel erhalten wir

$$\frac{2K}{n} - K + \frac{2K}{r} = 2$$

oder umgeformt

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K}.$$

Ihrer Bedeutung wegen müssen sowohl n als auch r mindestens 3 sein oder größer. Wären andererseits beide Zahlen größer als 3, so erhielte man

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

Das ist unmöglich. Setze ich $n = 3$, so ergibt sich

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{r} - \frac{1}{6}.$$

Also kann r für $n = 3$ nur die Werte 3, 4, 5 annehmen; K erhält dann die Werte 6, 12, 30. Da die Gleichungen in bezug auf n und r symmetrisch sind, erhält man entsprechende Werte von n für $r = 3$. Wir haben damit sechs allein mögliche Fälle gefunden, von denen zwei identisch sind, nämlich $n = 3$, $r = 3$. Es bleiben fünf verschiedene Typen übrig, und sie sind in der Tat durch die regulären Polyeder verwirklicht¹.

Die Besonderheit dieses Beweises im Gegensatz zu dem früher (S. 79, 80) gegebenen besteht darin, daß wir gar nicht die Voraussetzung gemacht haben, daß alle Seitenflächen reguläre Polygone sind. Wir haben nur vorausgesetzt, daß alle Flächen von gleich vielen Kanten

¹ In ähnlicher Weise führt die POINCARÉsche Verallgemeinerung des EULERSchen Satzes zur Bestimmung der regulären Zelle der höherdimensionalen Räume.

begrenzt werden und daß in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenlaufen. Es gibt demnach nicht mehr „topologisch reguläre“ als „metrisch reguläre“ Polyeder, wenn man sich auf simple Polyeder beschränkt.

Wir wenden uns nun zu den nichtsimplyn Polyedern. Als Beispiel nennen wir den prismatischen Block (Abb. 273). Er besteht aus einem Quader, aus dessen Mitte ein parallel gelagerter kleinerer Quader herausgestemmt ist; ferner sind die beiden Grundflächen, welche die Quader gemein haben, auf die in der Figur angegebene Weise abgeschrägt. Dieses Polyeder läßt sich nicht in eine Kugel verzerren, wohl aber in einen Torus¹. Andere Typen erhält man auf ähnliche Art durch Herausstemmen mehrerer Löcher (Abb. 274).

Um über alle diese Polyeder eine Übersicht zu gewinnen, ordnen wir jedem Polyeder eine bestimmte Zahl h , den sog. Zusammenhang, zu.

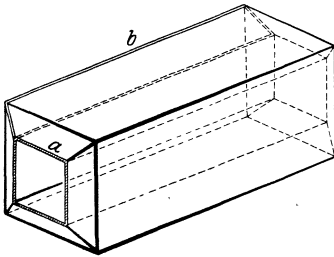


Abb. 273.

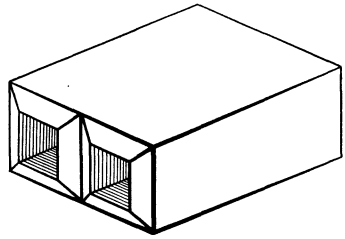


Abb. 274.

Wir betrachten die geschlossenen, sich nicht selbst durchschneidenden Kantenzüge des Polyeders. Wenn ein Polyeder durch jeden solchen Kantenzug in zwei getrennte Teilflächen zerlegt wird, so ordnen wir ihm den Zusammenhang $h = 1$ zu. Diese Zusammenhangszahl besitzen offenbar alle simplen Polyeder, denn die Kugelfläche wird durch jeden auf ihr verlaufenden geschlossenen Kurvenzug in zwei Teile zerlegt. Umgekehrt erkennt man unmittelbar, daß die Polyeder der Zusammenhangszahl 1 sich stets in eine Kugel deformieren lassen. Deshalb werden die simplen Polyeder auch als die einfach zusammenhängenden Polyeder bezeichnet.

Auf dem prismatischen Block dagegen gibt es einen geschlossenen Kantenzug, der das Polyeder nicht zerlegt (z. B. das Quadrat a in Abb. 273). Allen Polyedern mit dieser Eigenschaft ordnen wir einen höheren Zusammenhang zu. Um ihn zu bestimmen, betrachten wir nunmehr alle die (nicht notwendig geschlossenen) Kantenzüge, die zwei Punkte des zuerst gezeichneten Kantenzuges miteinander verbinden.

Wenn jedes solches Paar von Kantenzügen das Polyeder zertrennt, ordnen wir diesem den Zusammenhang $h = 2$ zu. Andernfalls setzen wir das Verfahren fort. Allgemein definieren wir:

¹ Auch der prismatische Block ist topologisch regulär.

Ein Polyeder heißt h -fach zusammenhängend, wenn sich auf ihm in einer bestimmten Reihenfolge $h - 1$, aber nicht h Kantenzüge auffinden lassen, deren Gesamtheit das Polyeder nicht zertrennt¹. Dabei muß der erste dieser Kantenzüge geschlossen sein, während jeder weitere Kantenzug zwei Punkte der vorhergehenden verbindet.

Auf dem prismatischen Block gibt es, wie aus Abb. 273 ersichtlich, ein System von zwei solchen Kurvenzügen (das Quadrat a und das Trapez b). Dieses Polyeder ist also mindestens dreifach zusammenhängend. Wir werden gleich sehen, daß es in Wirklichkeit genau dreifach zusammenhängend ist.

Es entsteht nun die Frage, ob der früher für einfach zusammenhängende Polyeder bewiesene EULERSche Satz auch auf Polyeder vom beliebigen Zusammenhang h verallgemeinert werden kann. Wir können nicht erwarten, daß der Satz unverändert gilt, denn beim Beweise wurde das „ebene Netz“ verwandt, dessen Konstruktion ersichtlich nur bei einfach zusammenhängenden Polyedern möglich ist. Es läßt sich nun zeigen, daß im allgemeinen die Formel gilt:

$$E - K + F = 3 - h.$$

Für $h = 1$ liefert das die früher bewiesene Gleichung. Ein weiteres Beispiel bildet der prismatische Block. Er hat offenbar sechzehn Ecken, zweiunddreißig Kanten und sechzehn Flächen, und es gilt die Gleichung

$$16 - 32 + 16 = 3 - 3 = 0.$$

Daraus folgt, daß der prismatische Block genau dreifach zusammenhängend ist. Ebenso ist auch im allgemeinen Fall der EULERSche Satz ein bequemes Mittel, den Zusammenhang eines Polyeders festzustellen. Man hat nur die Ecken, Kanten und Flächen abzuzählen und braucht nicht den Verlauf der Kantenzüge zu verfolgen.

§ 45. Flächen.

Wir haben gesehen, daß die simplen Polyeder sich in die Kugelfläche deformieren lassen und daß der prismatische Block sich in den Torus deformieren läßt. In ähnlicher Weise kann man auch kompliziertere topologische Gebilde durch polyederartige Figuren ersetzen. Die Theorie dieser Gebilde ist dadurch zurückgeführt auf das Studium von Figuren, die aus einfachen Bausteinen in leicht angebbarer Weise zusammengesetzt sind. Diese Betrachtungsweise, „kombinatorische Topologie“ genannt, hat ferner den großen Vorzug, daß sie sich ohne weiteres auf den Fall von mehr als drei Dimensionen übertragen läßt. Denn die Struktur eines Polyeders läßt sich vollständig durch eine schematische

¹ D. h. zwei beliebige Punkte des Polyeders sollen sich stets durch eine auf dem Polyeder verlaufende Kurve verbinden lassen, die keinen der Kantenzüge trifft.

Zusammenheftungsvorschrift beschreiben, ohne Hilfe der räumlichen Anschauung.

Der Anschauung dagegen kommt es oft näher, die Flächen unmittelbar zugrunde zu legen; so ist die Kugel ein einfacheres Gebilde als die simplen Polyeder und der Torus einfacher als der prismatische Block. Wir wollen daher jetzt den Begriff der Zusammenhangszahl von den Polyedern auf beliebige Flächen ausdehnen.

Für die Kugel haben wir $h = 1$ zu setzen und für den Kreisring $h = 3$. Flächen von höherem Zusammenhang können wir dadurch erzeugen, daß wir eine aus knetbarer Masse hergestellte Kugel plattdrücken und mehrere Löcher hindurchbohren (Abb. 275). Solche Flächen wollen wir Brezeln nennen. Man kann zeigen, daß eine Brezel mit p Löchern notwendig den Zusammenhang $h = 2p + 1$ besitzt. In der Figur sind für die Brezeln vom Zusammenhang 1, 3, 5, 7 Systeme von 0, 2, 4, 6 nicht zerstückelnden Kurven eingezeichnet.

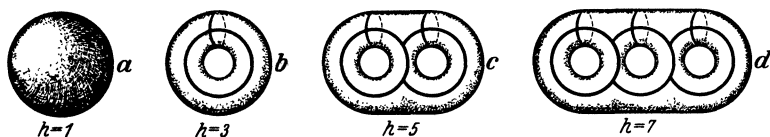


Abb. 275.



Abb. 276.

Man sieht leicht ein, daß jede weitere, zwei Randpunkte des Schnittsystems verbindende Kurve die zugehörige Fläche zerstückeln muß.

Auf Flächen sind die Kurvenzüge freier wählbar als auf Polyedern, wo wir uns auf Kantenzüge beschränkten. Man kann deshalb für die Zusammenhangszahl von Flächen noch andere Definitionen geben. Z. B.:

Auf einer geschlossenen Fläche vom Zusammenhang h lassen sich $h - 1$ geschlossene Kurven zeichnen, die die Fläche nicht zertrennen; jedes System von h derartigen Kurven führt dagegen zu einer Zerstückelung der Fläche.

In Abb. 276 sind solche Kurven für die Fälle $h = 1, 3, 5, 7$ gezeichnet.

Man kann die Kurven auch der weiteren Bedingung unterwerfen, durch einen beliebig gewählten Punkt der Fläche zu gehen. Man erhält dann die für manche Zwecke bequeme „kanonische Zerschneidung“ der Fläche, für die Abb. 285, 286, 287, S. 264, 265, drei Beispiele geben.

Dagegen gilt der Satz nicht mehr ungeändert, wenn man sich auf Systeme geschlossener Kurven beschränkt, die einander nicht schnei-

den. Für Flächen von ungerader Zusammenhangszahl läßt sich nämlich zeigen:

Auf einer geschlossenen Fläche vom Zusammenhang $h = 2p + 1$ gibt es p und nicht mehr als p geschlossene, einander nicht schneidende Kurven, die die Fläche nicht zerstückeln.

Von dem Zutreffen dieses Satzes kann man sich an Abb. 276 überzeugen.

Bisher haben wir nur Flächen betrachtet, die ganz im Endlichen liegen und keine Randkurven haben. Man kann den Zusammenhangsbegriff auch auf weitere Fälle ausdehnen. Zunächst möge die Fläche zwar ganz im Endlichen liegen, aber eine Anzahl in sich geschlossener Randkurven besitzen. Diese mögen sich selbst und einander nicht überschneiden. Wir haben dann Flächenstücke vor uns, wie in Abb. 277 gezeichnet. Andere Typen solcher Flächen erhält man, wenn man sich die in Abb. 275 u. 276 gezeichneten geschlossenen Flächen hohl denkt

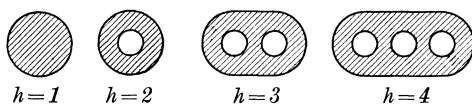


Abb. 277.



Abb. 278.

und dann beliebig viele Löcher hineinschneidet (Abb. 278)¹. Auch auf diesen Flächen bestimmen wir den Zusammenhang durch ein System von Kurvenzügen, mit einem einzigen Unterschied gegen die zuerst gegebene Definition: Die erste Kurve soll nicht mehr geschlossen sein, sondern zwei Randpunkte miteinander verbinden; jede hinzugefügte Kurve darf außer auf den vorher gezeichneten Kurven auch in Randpunkten beginnen und enden. Dann haben die in Abb. 278 dargestellten Flächen der Reihe nach den Zusammenhang 2, 3, 7, 8.

Die Bestimmung des Zusammenhangs durch geschlossene Kurven ist auf berandete Flächen nicht ohne weiteres übertragbar.

Wir nehmen nunmehr an, daß die — berandete oder unberandete — Fläche ins Unendliche geht. Dann hängt die topologische Struktur der Fläche davon ab, ob wir sie als im metrischen oder im projektiven Raum liegend annehmen. Im ersten Fall beschränken wir uns auf die

¹ Im Gegensatz zu den in Abb. 277 dargestellten Flächen lassen sich die Flächen von Abb. 278b, c, d auch bei beliebiger Verzerrung nicht aus einem ebenen Blatt Papier ausschneiden. Der hier zutage tretende Unterschied spielt in der geometrischen Funktionentheorie eine Rolle (schlichtartige und nicht-schlichtartige Bereiche).

endlichen Punkte. Der Raum verhält sich dann, als ob er gegen das Unendliche durch eine sehr große Kugel abgeschlossen wäre. Wir können die Fläche durch denjenigen Teil von ihr ersetzen, der im Innern der Kugel liegt; dies ist ein im Endlichen liegendes berandetes Flächenstück, auf das wir die vorher entwickelte Theorie anwenden können¹.

Im projektiven Raum treffen wir auf ganz andere Verhältnisse. Wir haben jeder Geraden nur einen einzigen unendlich fernen Punkt zugeordnet und sie als geschlossene Kurve angesehen; ihre beiden ins Unendliche laufenden Äste hängen im unendlich fernen Punkt der Geraden miteinander zusammen. Außerdem ist dieser Punkt allen zur ersten parallelen Geraden gemeinsam. Nach dieser Auffassung hängt auch der projektive Raum als Ganzes durch seine unendlich fernen Punkte mit sich zusammen. Eine Fläche enthält einen unendlich fernen Punkt, wenn sie sich, je weiter wir in geeigneter Weise auf ihr fortschreiten, immer mehr einer bestimmten Geraden nähert, in deren Richtung der unendlich ferne Punkt liegt. Es ist keineswegs notwendig, daß die Fläche auch nach der entgegengesetzten Richtung hin einer parallelen Geraden immer näher kommt; der unendlich ferne Punkt ist dann ein Randpunkt der Fläche. Wenn sich dagegen die Fläche nach beiden Seiten hin immer mehr zwei Parallelen nähert, so ist die

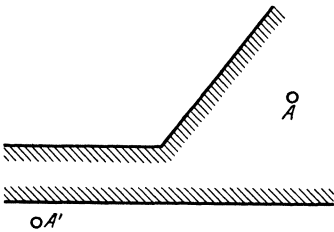


Abb. 279.

Fläche in deren unendlich fernem Punkt als zusammenhängend anzusehen. Wenn ferner die Fläche eine Randkurve besitzt, die ins Unendliche geht, so muß diese Kurve durch das Unendliche hindurch in sich geschlossen sein, d. h. entweder sich in entgegengesetzten oder gleichen Richtungen unbegrenzt zwei parallelen Geraden nähern oder einen Teil der unendlich fernen Geraden enthalten; denn eine nichtgeschlossene Kurve kann nicht den Rand einer Fläche bilden. So ist z. B. das von einer Geraden und zwei Halbgeraden begrenzte ebene Flächenstück, das in Abb. 279 abgebildet ist, im projektiven Raum nicht gegen die übrigen Teile der zugehörigen Ebene abgeschlossen, da wir durchs Unendliche von A nach A' kommen können. Im metrischen Raum dagegen würde

¹ Dabei ist vorausgesetzt, daß wir die Kugel so groß wählen können, daß das in ihrem Innern befindliche Flächenstück seine topologische Struktur bei weiterer Vergrößerung der Kugel nicht mehr ändert. Man kann leicht Beispiele von Flächen angeben, die dieser Voraussetzung nicht genügen. Man schlage etwa um die Gitterpunkte des ebenen quadratischen Punktgitters kleine Kreise, die einander nicht treffen. Entfernt man das Innere aller dieser Kreise aus der Ebene, so erhält man eine ebene Fläche; für den Teil dieser Fläche, der im Innern einer Kugel liegt, kann man leicht den Zusammenhang berechnen. Evident wächst aber dieser Zusammenhang unbegrenzt, wenn man die Kugel bei festgehaltenem Mittelpunkt unbegrenzt vergrößert.

sich dasselbe Flächenstück so verhalten, als wäre es durch eine geschlossene Randkurve begrenzt.

Entsprechendes gilt für die Ebene als Ganzes. Die metrische Ebene besitzt eine geschlossene Randkurve, nämlich die unendlich ferne Gerade. Sie ist also der ebenen Kreisscheibe topologisch äquivalent. Dagegen ist die projektive Ebene eine geschlossene Fläche. Um auch für sie ein einfacheres topologisches Modell zu gewinnen, gehen wir von einer früher (S. 209, 212, 213) behandelten Konstruktion aus. Wir hatten die projektive Ebene umkehrbar eindeutig auf die Oberfläche einer Halbkugel abgebildet, indem wir auf dem Großkreis, der die Halbkugel begrenzt, je zwei Diametralpunkte immer als identisch ansahen. In gleicher Weise können wir statt der Halbkugelfläche auch eine ebene Kreisscheibe verwenden, denn sie ist in die erstgenannte Fläche deformierbar. Die Kreisscheibe wollen wir nun weiterhin in die Fläche eines Quadrats deformieren. Demnach ist die projektive Ebene topologisch äquivalent mit der Fläche eines Quadrats (Abb. 280), falls wir auch hier alle diametralen Randpunkte identifizieren (z. B. $A = A'$ usw. in Abb. 280). Den geschlossenen Kurven der projektiven Ebene entsprechen in diesem Modell erstens die geschlossenen Kurven, zweitens aber auch alle die Kurven, die identifizierte Randpunkte miteinander verbinden (z. B. die Strecke AA' in Abb. 280).

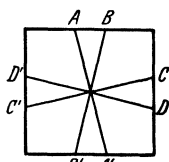


Abb. 280.

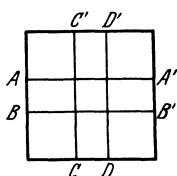


Abb. 281.

Die topologische Untersuchung der projektiven Ebene wollen wir erst später fortsetzen (S. 272ff.). Dagegen führt uns das Verfahren von Abb. 280 sofort zu anderen ähnlichen Konstruktionen. Wir gehen zunächst wieder von der Quadrat- oder Rechtecksfläche aus, identifizieren aber jetzt die Randpunkte nach dem in Abb. 281 angegebenen Schema.

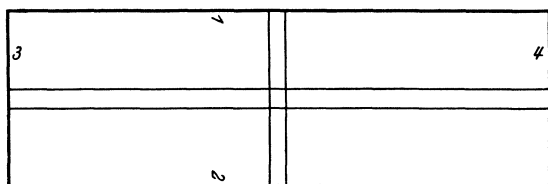


Abb. 282.

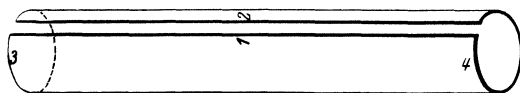


Abb. 283.

Wieder erhalten wir das Modell einer geschlossenen Fläche. Diesmal läßt sich nun die dargestellte

Fläche leicht aus dem Modell wiederherstellen. Wir verbiegen das Rechteck (Abb. 282) zunächst in ein Stück eines Kreiszyklinders (Abb. 283). Dabei heften wir die Rechtecksseiten 1, 2 gerade so aneinander, daß alle identifizierten Punkte dieser Seiten nunmehr wirklich zusammen-

fallen. Die übrigen Seiten 3, 4, die dabei in Kreise übergegangen sind, können wir in der vorgeschriebenen Weise aneinanderheften, indem wir

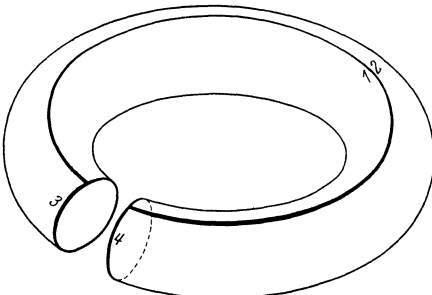


Abb. 284.

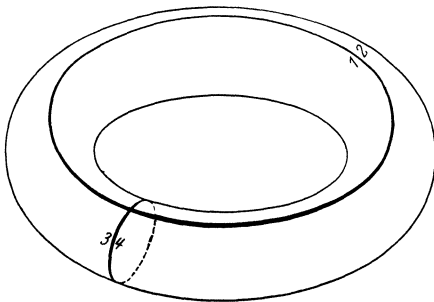


Abb. 285.

$4p$ -Eck mit einer bestimmten Ränderzuordnung. Für die Fälle $h = 5, 7$, also $p = 2, 3$, ist die Konstruktion durch Abb. 286, 287 veranschaulicht.

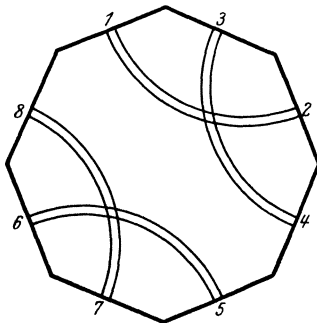


Abb. 286 a.

(Abb. 284) den Kreiszyylinder verbiegen. Wir erhalten schließlich die Fläche des Torus, und der Rand der Rechtecksfläche geht in ein „kanonisches Schnittsystem“ des Torus über, wobei jede Kurve zwei Randstrecken der Rechtecksfläche entspricht (Abb. 285 und 275 b). Umgekehrt: schneidet man den Torus längs eines kanonischen Systems auf, so ergibt sich stets eine Figur, die dem Rechteck mit der angegebenen Ränderzuordnung topologisch äquivalent ist. Man kann dieses Verfahren auf alle „Brezeln“ ausdehnen. Hat die Brezel den Zusammenhang $2p + 1$, so besteht das kanonische Schnittsystem aus $2p$ Kurven. Die Zerschneidung liefert also ein

Die Abbildung der Brezeln auf $4p$ -Ecke spielt sowohl in der Theorie der stetigen Abbildungen (vgl. S. 284) als auch in der Funktionentheorie (vgl. S. 294) eine wichtige Rolle. In beiden Anwendungen geht man davon aus, daß die $4p$ -Ecke eine reguläre Gebietseinteilung der hyperbolischen Ebene (bzw. für $p = 1$ der euklidischen Ebene) liefern, wie wir das auf S. 228 erörtert haben.

Wenn man die Ränderzuordnung abändert, erhält man außer den Brezeln noch eine große Anzahl weiterer Flächen, von denen uns einige im folgenden beschäftigen werden.

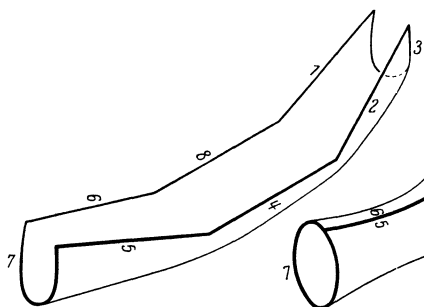


Abb. 286 b.

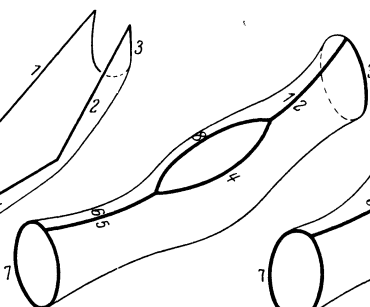


Abb. 286 c.

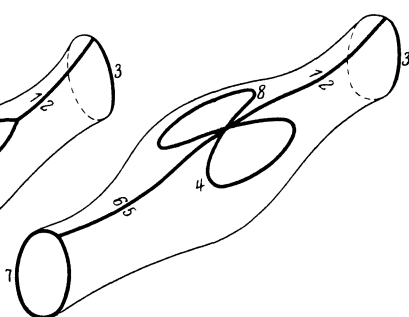


Abb. 286 d.

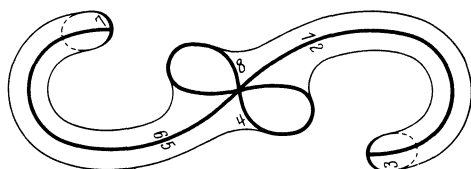


Abb. 286 e.

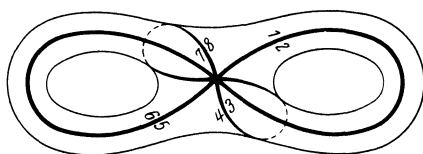


Abb. 286 f.

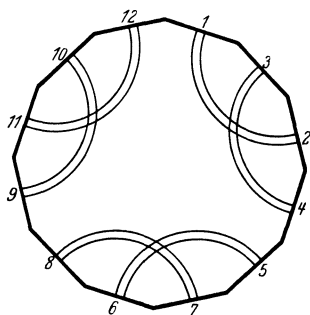


Abb. 287 a.

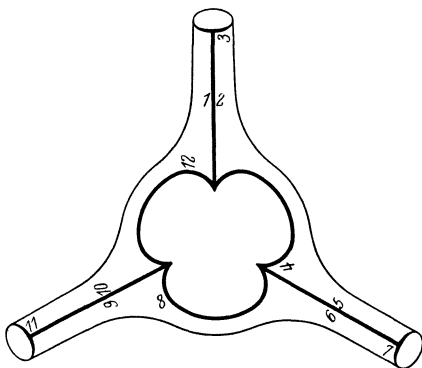


Abb. 287 b.

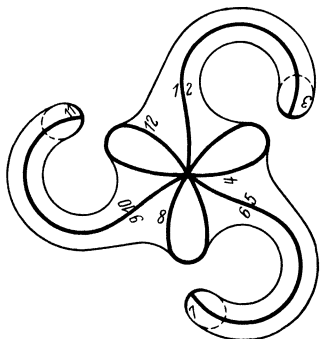


Abb. 287 c.

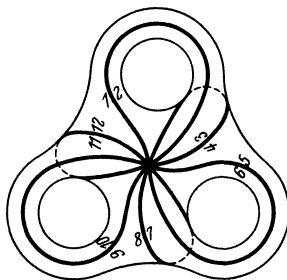


Abb. 287 d.

§ 46. Einseitige Flächen.

Alle bisher betrachteten Polyeder und geschlossenen Flächen hatten ungeraden Zusammenhang. Es entsteht daher die Frage, ob es überhaupt geschlossene Flächen von geradem Zusammenhang gibt, also Gebilde, die in ihrem topologischen Verhalten in der Mitte zwischen Kugel und Torus bzw. zwischen zwei Brezeln stehen.

Die Frage ist zu bejahen. Wir wollen nämlich jetzt ein Polyeder, das Heptaeder, konstruieren, das nach dem EULERSchen Polyedersatz den Zusammenhang 2 besitzt. Wir gehen vom regulären Oktaeder aus (Abb. 288). Zu den acht dreieckigen Seitenflächen dieses Polyeders

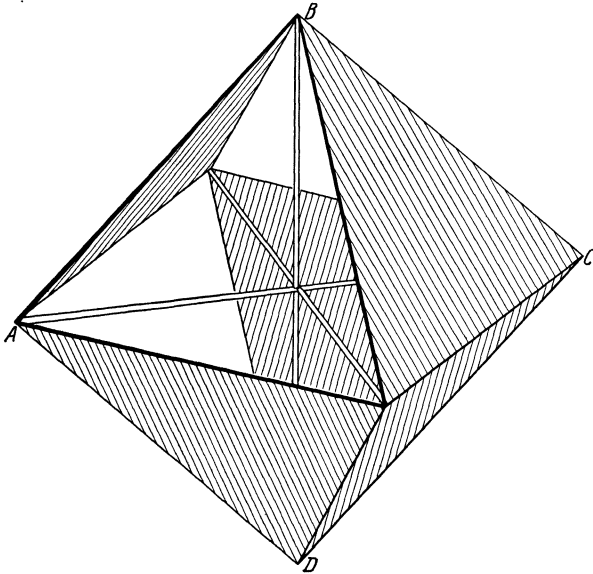


Abb. 288.

nehmen wir noch die drei Quadrate hinzu, welche in den drei durch die Diagonalen des Oktaeders bestimmten Ebenen liegen (z. B. $ABCD$ in Abb. 288). Diese elf Flächen bestimmen nach unserer früheren Definition kein Polyeder, da an jeder Kante nicht zwei, sondern drei Flächen zusammenstoßen. Wir entfernen nun vier Dreiecke, nämlich (gemäß der Stellung der Figur) auf der oberen Hälfte des Oktaeders das linke vordere und das rechte hintere Dreieck, auf der unteren Hälfte das linke hintere und das rechte vordere Dreieck. Es bleiben also nur vier Dreiecke des Oktaeders übrig; sie sind in der Figur schraffiert. Wir haben damit ein Gebilde aus vier Dreiecken und drei Quadraten konstruiert. Seine Kanten und Ecken fallen mit denen des Oktaeders zusammen, dagegen sind die Diagonalen des Oktaeders nicht Kanten, sondern Durchdringungslinien des Gebildes. Ersichtlich stoßen an jeder

Kante genau zwei Flächen zusammen, und man kann durch Überschreiten von Kanten von jeder Fläche zu jeder anderen gelangen. Das Gebilde ist also ein Polyeder; da es sieben Flächen hat, heißt es „Heptaeder“. Es hat, wie das Oktaeder, zwölf Kanten und sechs Ecken. Der verallgemeinerte Polyedersatz liefert also

$$E - F + K = 6 - 12 + 7 = 1 = 3 - h.$$

Demnach besitzt das Heptaeder den Zusammenhang $h = 2$. Wie die simplen Polyeder sich in die Kugel deformieren lassen, so gibt es auch eine einfache geschlossene Fläche, in die sich das Heptaeder deformieren läßt. Es ist die von STEINER untersuchte „römische Fläche“ (Abb. 289). Auch sie besitzt, wie das Heptaeder, drei paarweise aufeinander senkrechte Durchdringungsstrecken. In rechtwinkligen Koordinaten ist sie durch die Gleichung bestimmt

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 + x y z = 0.$$

Es ist also eine Fläche vierter Ordnung.

Außer dem geraden Zusammenhang und den Durchdringungskurven weist das Heptaeder noch eine weitere wichtige Eigenschaft auf, durch die es sich von allen bisher betrachteten Flächen unterscheidet. Denken wir uns die Fläche durch eine Membran verwirklicht und betrachten wir ein Wesen, z. B. einen Käfer, der auf dieser Membran herumspaziert, von einem festen Punkt P aus. Diesem Punkt P liegt auf der anderen Seite der dünnen Membran ein Punkt P' gegenüber, der mit P zusammen-

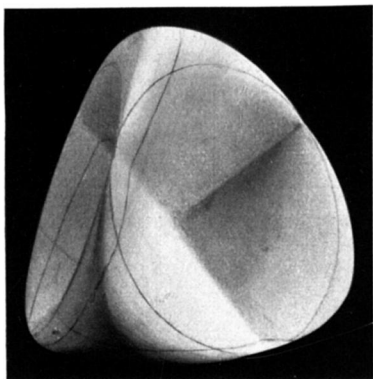


Abb. 289 a.

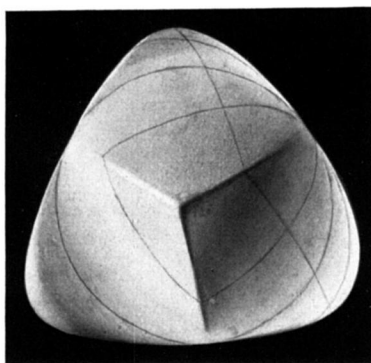


Abb. 289 b.

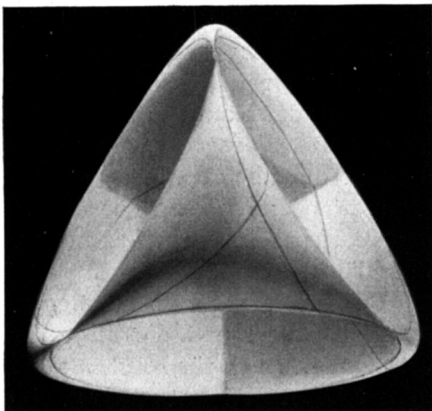


Abb. 289 c.

fällt, wenn wir wieder die Membran durch die ursprüngliche Fläche ersetzen. Es erscheint nun plausibel, daß der Käfer nicht anders von P nach P' gelangen kann, als wenn er sich durch die Membran an irgend-einer Stelle ein Loch bohrt. Für die Kugel und alle Brezeln, die wir bisher betrachtet haben, trifft diese Annahme auch zu. Das Heptaeder dagegen ist eine Fläche, für die die Annahme nicht mehr ohne weiteres gilt. Als Ausgangspunkt P wählen wir (Abb. 290) einen Punkt auf der zur Zeichenebene parallelen Quadratfläche, und zwar auf der dem Beschauer zugewandten Seite. Wir betrachten nun einen Weg, der auf dem Heptaeder von P aus der Reihe nach die Kanten 1, 2, 3, 4 überschreitet

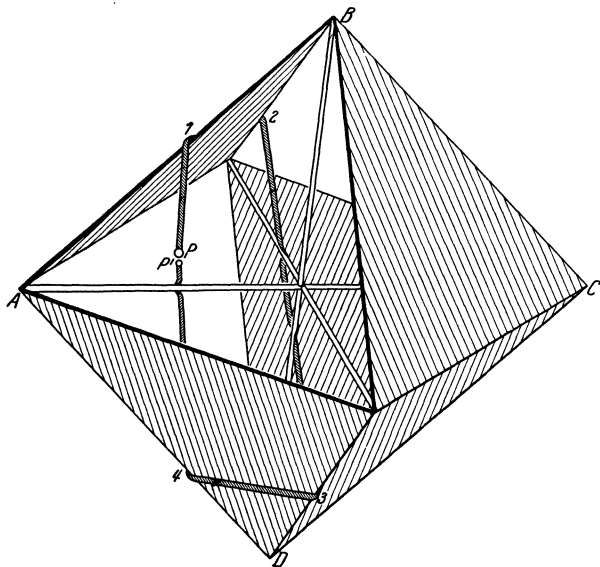


Abb. 290.

und dann wieder auf der ursprünglichen Quadratfläche verläuft. Ein Käfer, der einen solchen Weg nimmt, gelangt ersichtlich nach Überschreitung der Kante 4 auf die Rückseite der Quadratfläche, von deren Vorderseite er ausgegangen war. Er muß zwar die Heptaedermembran dreimal durchbohren, aber nicht an einer Stelle, über die er gerade hinwegwandert, sondern nur an den Durchdringungslinien, wo ihm eine andere Heptaederfläche den Weg versperrt, nicht aber die, welche er durchläuft.

Das Heptaeder heißt deswegen eine „einseitige“ Fläche, während man die Kugel und die bisher beschriebenen Brezeln als zweiseitig bezeichnet. Auch für Flächen mit Rändern läßt sich diese Unterscheidung treffen. Wir untersuchen, ob es auf der (als Membran gedachten) Fläche einen Weg gibt, der von der einen Seite der Fläche zur anderen

führt, ohne den Rand der Fläche zu überschreiten und ohne die Membran an einer Stelle zu durchbohren, über die er gerade hinführt. Wenn es einen solchen Weg gibt, heißt die Fläche einseitig, sonst zweiseitig. Die berandeten Flächen, die wir bisher betrachtet haben, waren sämtlich zweiseitig, z. B. die Kreisscheibe. Für berandete einseitige Flächen gibt es nun ein Beispiel, das viel einfacher ist als das Heptaeder, nämlich das MÖBIUSSCHE BAND. Wir stellen es aus einem Papierstreifen her, der die Gestalt eines stark gestreckten Rechtecks hat (Abb. 291). Würden wir die kurzen Seiten AB und CD so zusammenheften, daß A mit C und B mit D zusammenfallen, dann erhielten wir, wie wir schon früher sahen, ein Stück eines Kreiszyinders, eine

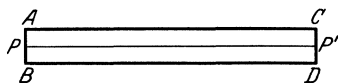


Abb. 291.

berandete zweiseitige Fläche. Anstatt dessen wollen wir vor der Zusammenheftung das eine Ende des Papierstreifens um 180° gegen das andere verdrehen. Wir heften also die Enden so aneinander, daß A mit D und B mit C zusammenfallen (Abb. 292). Damit haben wir ein Modell des MÖBIUSSCHEN Bandes erhalten. Man sieht leicht ein, daß diese Fläche einseitig ist. Wir zeichnen z. B. vor der Zusammenheftung auf den Streifen die Parallele PP' zu den langen Rechteckseiten. Diese gerade Strecke geht nach der Zusammenheftung in einen Weg QQ' über, der von der einen Seite des Bandes auf die andere führt¹.

Man kann die einseitigen Flächen auch mit Hilfe eines weiteren wichtigen topologischen Begriffs kennzeichnen, zu dessen Formulierung man die Fläche nicht durch eine Membran zu ersetzen braucht. Wir denken uns um jeden Punkt irgendeiner gegebenen Fläche (mit Ausnahme der Randpunkte, falls solche vorhanden sind) eine kleine geschlossene Kurve gezogen, die ganz in der Fläche verläuft. Wir versuchen nun

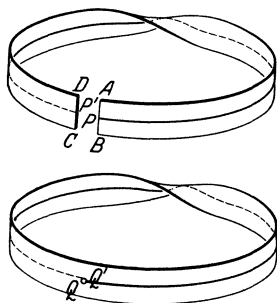


Abb. 292.

auf allen diesen geschlossenen Kurven einen Umlaufsinn so festzusetzen, daß hinreichend benachbarte Punkte stets im gleichen Sinne umlaufen werden. Ist eine solche Festsetzung möglich, so heißt sie eine „Orientierung“ der Fläche, und die Fläche selbst heißt orientierbar. Eine einseitige Fläche kann nun niemals orientierbar sein. Zum

¹ Der Unterschied des MÖBIUSSCHEN Bandes vom zylindrischen Streifen ist noch an folgenden beiden Erscheinungen zu erkennen: Der Rand des MÖBIUSSCHEN Bandes zerfällt nicht wie der des zylindrischen Streifens in zwei geschlossene Kurven, sondern besteht aus einer einzigen geschlossenen Kurve. Zerschneidet man ferner das MÖBIUSSCHE BAND längs der Kurve QQ' , so fällt es nicht wie der zylindrische Streifen auseinander, sondern bleibt zusammenhängend.

Beweise fassen wir einen der geschlossenen Wege ins Auge, deren Existenz mit der Einseitigkeit der Fläche gleichbedeutend ist; etwa den Weg QQ' auf dem MÖBIUSSchen Band, wobei wir jetzt wieder Q und Q' als identisch ansehen. Erteilt man dem Punkt Q einen Umlaufsinn und setzt diese Zuordnung auf dem Wege QQ' stetig fort, so kommt man im Punkt $Q' = Q$ notwendig mit der entgegengesetzten Zuordnung wieder an. Diese Erscheinung könnte nicht eintreten, wenn das MÖBIUSSche Band orientierbar wäre. Das Entsprechende gilt auch für alle übrigen einseitigen Flächen. Umgekehrt kann man zeigen, daß alle zweiseitigen Flächen orientierbar sind. Die Einteilung der Flächen in zwei- und einseitige ist also identisch mit ihrer Einteilung in orientierbare und nichtorientierbare.

Man kann leicht einsehen, daß eine Fläche dann und nur dann nicht orientierbar ist, wenn es auf ihr irgendeine geschlossene Kurve s gibt, so daß ein orientierter kleiner Kreis, dessen Mittelpunkt s stetig durchläuft, am Ausgangspunkt mit der entgegengesetzten Orientierung wieder ankommt (z. B. die Kurve QQ' in Abb. 292). Geht man auf der Fläche an einer Seite der Kurve s entlang, so kommt man auf der anderen Seite wieder an, obgleich man die Kurve nicht überquert hat. Deswegen heißt s eine „einufrige“ Kurve. Während auf den orientierbaren Flächen alle Kurven zwei Ufer haben, ist die Existenz einer einufrigen geschlossenen Kurve kennzeichnend für die nichtorientierbaren Flächen. Einseitige Fläche und einufrige Kurve bedingen einander. Die erste Eigenschaft bezieht sich auf die Lage einer Fläche im Raum, die zweite auf die Lage einer Kurve auf einer Fläche.

Im Gegensatz zum MÖBIUSSchen Band weist das Heptaeder Durchdringungslinien auf. Es ist plausibel, daß jede einseitige geschlossene Fläche Selbstdurchdringungen haben muß. Diese Flächen haben nämlich nur eine Seite, können also keinen Raumteil vom übrigen Raum abgrenzen, d. h. sie besitzen kein Inneres und kein Äußeres. Bei einer geschlossenen Fläche ohne Durchdringungslinien ist ein solches Verhalten unvorstellbar. In der Tat haben alle einseitigen geschlossenen Flächen Selbstdurchdringungen. Der Beweis dafür muß aber auf ganz anderem Wege geführt werden.

Nicht jede Selbstdurchdringung ist eine topologische Singularität. Betrachten wir z. B. die Rotationsfläche, die entsteht, wenn die in Abb. 293 gezeichnete Kurve um die gestrichelte Gerade gedreht wird. Der Punkt A beschreibt eine kreisförmige Durchdringungskurve dieser Fläche. Durch stetige Deformation geht die Fläche aber in die Rotationsfläche über, deren erzeugende Kurve in Abb. 294 gezeichnet ist. Diese Fläche besitzt keine Durchdringung und ist offenbar der Kugel topologisch äquivalent. Umgekehrt kann man aus einer Kugel durch Einbeulen die zuerst beschriebene Rotationsfläche erhalten. Das Auftreten von Durchdringungskurven braucht also keine wesentliche topo-

logische Eigenschaft darzustellen. Während in diesem Beispiel eine geschlossene Durchdringungskurve vorhanden war, besitzt die Durchdringungskurve des Heptaeders sechs Endpunkte, nämlich die Ecken des Heptaeders. Diese sind nun wirklich als Singularitäten anzusehen.

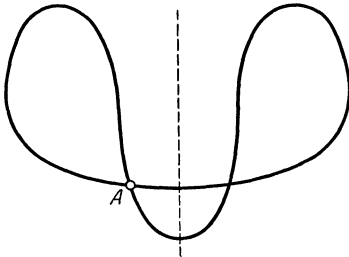


Abb. 293.

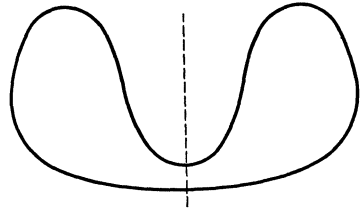


Abb. 294.

Die Umgebung eines regulären Punktes auf einer Fläche läßt sich nämlich stets in eine Kreisscheibe verzerren; für die Umgebung einer Heptaeder-ecke (Abb. 288) ist dagegen eine solche Deformation nicht ohne weiteres möglich. Das Heptaeder besitzt demnach sechs singuläre Punkte, und

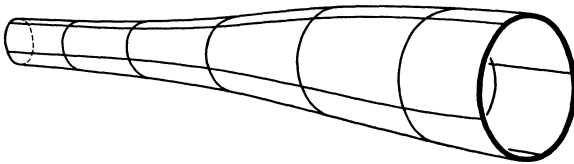


Abb. 295.

es erhebt sich die Frage, ob es überhaupt eine einseitige geschlossene Fläche ohne singuläre Punkte gibt.

Eine solche Fläche ist zuerst von F. KLEIN angegeben worden. Wir gehen aus von einer an beiden Seiten offenen Röhre (Abb. 295). Früher haben wir aus einer solchen Röhre durch Zusammenbiegen und Aneinanderheften der Randkreise die Torusfläche erhalten. Diesmal heften wir die Enden in anderer Weise zusammen. Wir denken uns

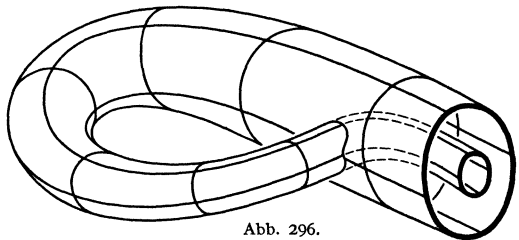


Abb. 296.

das eine Ende der Röhre etwas kleiner als das andere und stecken nach passender Verbiegung der Röhre dieses Ende so durch die Wand der Röhre, daß beide Randkreise konzentrische Lage annehmen (Abb. 296). Indem wir den weiteren Rand der Röhre etwas nach innen, den engeren Rand etwas nach außen biegen, lassen sich die beiden Ränder nun ohne

Singularität zusammenheften. Damit haben wir die KLEINSche Fläche konstruiert (Abb. 297). Sie ist offenbar einseitig und besitzt eine geschlossene Durchdringungskurve an der Stelle, wo wir das engere Ende der Röhre durch die Wand der Röhre hindurchgesteckt haben.

Da das erste Beispiel einer geschlossenen einseitigen Fläche, das Heptaeder, sich von den geschlossenen bisher betrachteten zweiseitigen Flächen auch durch seinen geraden Zusammenhang unterschied,

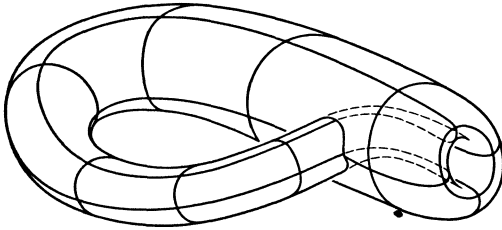


Abb. 297.

können wir erwarten, daß die KLEINSche Fläche ebenfalls geraden Zusammenhang besitzt. In Wahrheit besitzt diese Fläche aber den Zusammenhang 3

wie der Torus. Auch das kanonische Schnittsystem kann genau so wie beim Torus gewählt werden; als erste, geschlossene Zerschneidungskurve wählen wir die Naht, längs der wir die Röhrenden aneinandergeheftet hatten. Als zweite Kurve eine solche, die in das Stück einer Zylindererzeugenden übergeht, wenn wir die KLEINSche

	Ebener Kreisring	zwei Randkurven	$h = 2$	zweiseitig
	MÖBIUS-sches Band	eine Randkurve	$h = 2$	einseitig
	Torus	geschlossene Fläche	$h = 3$	zweiseitig
	KLEINSche Fläche	geschlossene Fläche	$h = 3$	einseitig
	projektive Ebene	geschlossene Fläche	$h = 2$	einseitig

Fläche längs der Naht wieder auftrennen und sie wieder in Zylinder-gestalt zurückbiegen. Durch Zerschneidung längs dieser beiden Kurven geht die KLEINSche Fläche ebenso wie die des Torus in ein Rechteck über. Jede Kurve, die zwei Randpunkte des Rechtecks verbindet, zer-

legt aber das Rechteck; für die KLEINSche Fläche ist also nach der allgemeinen Definition $h - 1 = 2$, also $h = 3$, wie behauptet.

Wir haben damit aus dem Rechteck (bzw. Quadrat) durch verschiedene Arten der Ränderzuordnung bisher fünf verschiedene Flächen erhalten, die einander in der Tabelle auf S. 272 gegenübergestellt sind¹. Die in der Tabelle enthaltenen Angaben über die projektive Ebene werden weiter unten begründet werden.

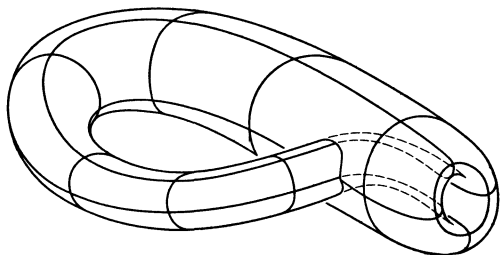


Abb. 298 a.

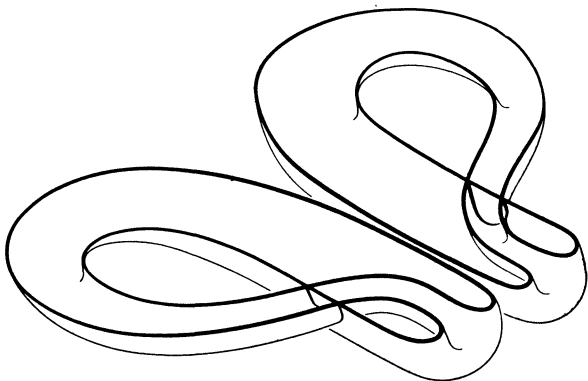


Abb. 298 b.

Aus der Tabelle geht hervor, daß wir das Modell des MÖBIUSSchen Bandes aus dem Modell des KLEINSchen Schlauchs erhalten, wenn wir eine der beiden Randzuordnungen aufheben. Man muß also den KLEINSchen Schlauch in ein MÖBIUSSches Band verwandeln können, indem man ihn längs einer geeignet gewählten geschlossenen Kurve aufschneidet. Der Leser möge eine solche Zerschneidung an einem Modell durchführen. In Abb. 298 ist dagegen eine Zerschneidung des KLEINSchen Schlauchs in *zwei* MÖBIUSSche Bänder veranschaulicht. Hierzu möge der Leser den entsprechenden Übergang an den Quadratmodellen aufsuchen.

¹ Im projektiven Raum ist das einschalige Hyperboloid als eine durchs Unendliche hindurch geschlossene Fläche anzusehen. Der Leser möge an Hand der Tabelle entscheiden, ob in dieser Auffassung das einschalige Hyperboloid mit dem KLEINSchen Schlauch oder mit dem Torus topologisch äquivalent ist.

Während wir für die einseitigen geschlossenen Flächen Beispiele sowohl von geradem als auch von ungeradem Zusammenhang kennengelernt haben (Heptaeder und KLEINSche Fläche), hatten die bisher angegebenen geschlossenen zweiseitigen Flächen stets ungeraden Zusammenhang. Es läßt sich auch zeigen, daß es eine geschlossene zweiseitige Fläche geraden Zusammenhangs nicht geben kann.

Wie beim Quadrat, so können wir auch bei jedem regulären $4p$ -Eck durch verschiedenartige Wahl der Ränderzuordnung Modelle für eine große Anzahl berandeter und unberandeter, ein- und zweiseitiger Flächen herstellen. Sind (Abb. 299) AB und CD zwei einander zugeordnete Seiten des $4p$ -Ecks, so sind zwei Arten der Zuordnung möglich: 1. Die beiden Verbindungslinien der einander zugeordneten Endpunkte schneiden einander nicht. 2. Diese Linien schneiden einander. Den ersten Fall erhält man z. B., wenn in Abb. 299 A mit C und B mit D identifiziert

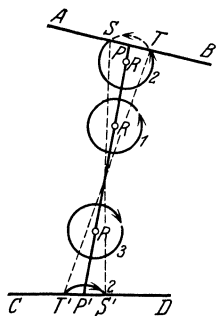


Abb. 299.

wird, den zweiten Fall, wenn man A mit D und B mit C identifiziert. Ich behaupte nun: Wenn irgend zwei Seiten des $4p$ -Ecks einander auf die zweite Art zugeordnet sind, ist die dargestellte Fläche stets einseitig, einerlei auf welche Art die übrigen Zuordnungen vorgenommen werden.

Zum Beweise zeigen wir nach der auf S. 270 skizzierten Methode, daß die dargestellte Fläche nicht orientierbar ist. Seien (Abb. 299) P und P' zwei miteinander identifizierte Punkte von AB bzw. CD . Dann stellt die gerade Strecke PP' einen geschlossenen Weg auf der Fläche dar. Ein Punkt, der auf der Fläche diesen Weg durchläuft, wird dargestellt durch einen Punkt R , der auf PP' zunächst bis P läuft und dann von P' aus in seine Anfangslage zurückkehrt. Wir erteilen nun dem Flächenpunkt, der durch R dargestellt wird, einen Umlaufsinn, der auf der Wanderung dieses Punkts keine unstetige Änderung erfahren soll. Dazu haben wir um R einen kleinen mit Umlaufsinn versehenen Kreis zu schlagen, den wir mit R stetig mitbewegen. Rückt R nahe an P , so liegt nur noch der Kreisbogen \vec{ST} im Innern des $4p$ -Ecks. Um das Bild einer geschlossenen Flächenkurve zu erhalten, müssen wir die beiden Punkte $S'T'$ heranziehen, die auf CD liegen und mit ST identifiziert sind. Da nun AB und CD einander auf die zweite Art zugeordnet sind, liegen S und S' zu verschiedenen Seiten der Strecke PP' , ebenso T und T' . Die geschlossene Flächenkurve mit ihrem Umlaufsinn wird also dargestellt durch die beiden Bögen \vec{ST} und $\vec{T'S'}$. Diese Figur erfährt keinerlei unstetige Änderung, wenn R in P anlangt und hierauf von P' zurückzulaufen beginnt. Hat sich R hinreichend weit von P' entfernt, so verschwindet der Bogen ST allmählich, und $S'T'$ geht in

einen vollen Kreisumlauf über. Der Kreis hat aber den entgegengesetzten Umlaufssinn als derjenige, mit dem wir die Wanderung begonnen haben, und damit ist bewiesen, daß die dargestellte Fläche nicht orientierbar ist.

Als Sonderfall dieses Satzes ergibt sich die Einseitigkeit der projektiven Ebene; in ihrem Modell sind alle Zuordnungen von der zweiten Art.

Man kann umgekehrt leicht zeigen, daß das Modell stets eine zweiseitige Fläche darstellt, wenn alle Zuordnungen von der ersten Art sind.

Das Modell der projektiven Ebene hatten wir aus der Kugelfläche erhalten, und andererseits zeigte die KLEINSche Fläche Beziehungen zum Torus, jedoch Beziehungen anderer Art wie zwischen Kugel und projektiver Ebene. Wir wollen nun zeigen, daß in Wahrheit zwischen KLEINScher Fläche und Torus sich dieselbe Zuordnung herstellen läßt wie zwischen den beiden erstgenannten Flächen und daß man in gleicher Weise überhaupt jeder einseitigen Fläche eine zweiseitige zuordnen kann.

Wir konnten aus der Kugel die projektive Ebene erhalten, indem wir alle Paare von Diametralpunkten als identisch betrachteten (S. 210, 263). Wir nehmen nun die entsprechende Konstruktion beim Torus vor.

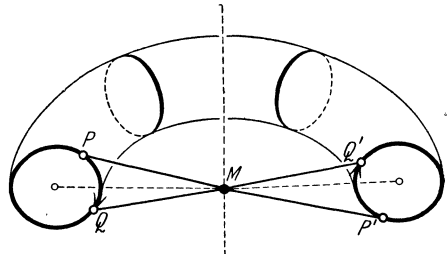


Abb. 300.

Wir bezeichnen als Mittelpunkt des Torus denjenigen Punkt M , in dem die Achse von dem Lote getroffen wird, das wir vom Mittelpunkt eines erzeugenden Kreises aus auf die Achse fällen (Abb. 300). Ist dann P irgendein Punkt auf dem Torus, so liegt auch derjenige Punkt P' auf dem Torus, der zu P bezüglich M symmetrisch ist. Alle Punktepaare des Torus, die bezüglich M symmetrisch liegen, wollen wir Diametralpunkte nennen. Wir erzeugen aus dem Torus eine neue Fläche F , indem wir alle Paare von Diametralpunkten als identisch ansehen. Ich behaupte, das ist die KLEINSche Fläche.

Zum Beweise betrachten wir einen erzeugenden Kreis des Torus. Ihm ist ein weiterer erzeugender Kreis zugeordnet gemäß Abb. 300. Durch die beiden Kreise ist der Torus in zwei Hälften zerlegt. Wir erhalten nun die Fläche F , wenn wir eine Hälfte des Torus fortlassen und in der übrigbleibenden Hälfte die Randkreise vorschriftsgemäß identifizieren; entsprechend hatte früher die Halbkugel statt der ganzen Kugel zur Konstruktion der projektiven Ebene genügt. Man erkennt nun durch eine Umlaufsbetrachtung an den identifizierten Kreisen, daß bei dieser Identifizierung aus dem Halbtorus die KLEINSche Fläche entsteht.

Offenbar können wir ferner die zweite Hälfte des Torus so auf die erste legen, daß alle Punkte, die vorher diametral lagen, paarweise zur

Deckung gelangen. Allerdings müssen wir dann (wie man sich leicht klar machen kann) den zweiten Halbtorus so nach Art eines Handschuhs umstülpen, daß das Innere nach außen kommt. Wenn wir nunmehr die beiden Hälften wieder zusammenheften, haben wir schließlich den Torus in die Gestalt einer zweimal überdeckten KLEINSchen Fläche gebracht¹; man sagt dafür auch, der Torus ist eine „zweiblättrige Überlagerungsfläche“ der KLEINSchen Fläche. Ebenso bezeichnet man die Kugel als zweiblättrige Überlagerungsfläche der projektiven Ebene. Man kann allgemein zeigen: Jede beliebige einseitige Fläche besitzt eine zweiseitige Fläche zur zweiblättrigen Überlagerungsfläche.

§ 47. Die projektive Ebene als geschlossene Fläche.

Um den Zusammenhang der projektiven Ebene zu bestimmen, wenden wir den EULERSchen Polyedersatz auf das Quadratmodell an. Wir ziehen durch den Mittelpunkt M des Quadrats (Abb. 301) die Parallelen PQ und RS zu den Quadratseiten. Dadurch wird das Quadrat in die Teilquadrate 1, 2, 3, 4 zerlegt. Infolge der Randzuordnung stellen aber die beiden Quadrate 1 und 3 ein einziges Polygon in der projektiven Ebene dar. Ebenso 2 und 4. Ferner sind die beiden Strecken PM und QM als eine einzige Kante aufzufassen, weil P und Q denselben Punkt darstellen. Desgleichen bilden RM und SM nur eine Kante. Ecken treten außer M nicht auf. Wir haben also in die EULERSche Formel einzusetzen:

$$E = 1, \quad K = 2, \quad F = 2.$$

Der EULERSche Satz liefert $E - K + F = 1 = 3 - h$. Demnach besitzt die projektive Ebene zweifachen Zusammenhang, wie in der Tabelle S. 272 angegeben.

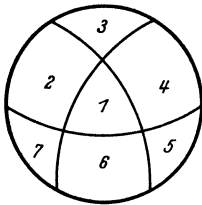


Abb. 302.

In der analytischen projektiven Geometrie spielt eine andere Zerlegung der Ebene eine Rolle, die sich aus der Einführung der Dreieckskoordinaten ergibt. Sie ist in Abb. 302 angegeben, wobei statt des Quadrats die Kreisfläche als Modell verwandt wird. Diese Fläche wird durch drei nicht durch einen Punkt gehende Bögen in sieben Gebiete zerlegt. Wir nehmen nun an, daß jeder dieser Bögen die Peripherie in Diametralpunkten trifft. 2 und 5 stellen dann ein einziges Dreieck dar, ebenso 3 und 6 sowie 4 und 7. Man erkennt, daß drei nicht durch einen Punkt gehende Geraden die

¹ Die Konstruktion ist nicht, wie man zunächst vermuten könnte, durch bloße Deformation des Torus ausführbar. Man muß vielmehr den Torus zerschneiden, um die Umstülpung der einen Hälfte vornehmen zu können.

projektive Ebene stets in dieser Weise in vier Dreiecke zerlegen¹. In der EULERSCHEN Formel hat man jetzt $E = 3$, $K = 6$, $F = 4$ zu setzen und erhält wieder $h = 2$.

Wie wir die Ringfläche und die KLEINsche Fläche aus ihren Quadratmodellen durch Zusammenheftung erhalten haben, so wollen wir auch mit dem Quadratmodell der projektiven Ebene verfahren. Zu diesem Zweck verzerren wir das Quadrat zunächst in die Gestalt einer Kugelfläche, aus der ein kleines Viereck $ABCD$ herausgeschnitten ist (Abb. 303). Wir haben AB mit CD und DA mit BC zusammenzuheften. Das wird möglich, wenn wir die Fläche in den Punkten A und C heben und bei B und D senken und A und C sowie B und D einander nähern (Abb. 304). Schließlich erhalten wir eine geschlossene Fläche mit einer Strecke als Durchdringungslinie (Abb. 305). Sie ist topologisch der projektiven Ebene äquivalent.

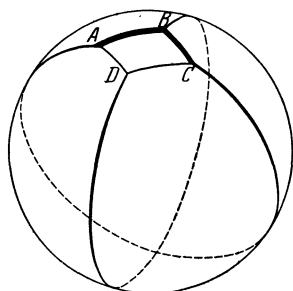


Abb. 303.

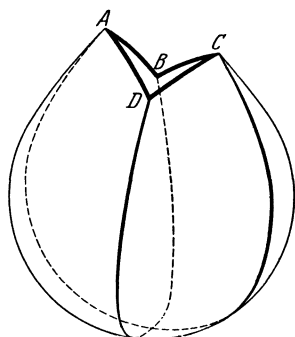


Abb. 304.

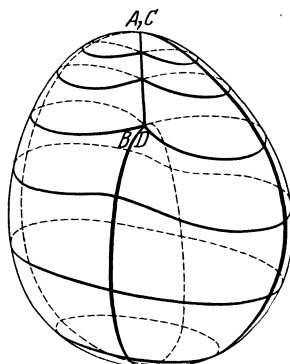


Abb. 305.

Es gibt eine algebraische Fläche, die diese Gestalt besitzt (Abb. 306). Ihre Gleichung ist

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

Die Fläche steht im Zusammenhang mit einer differentialgeometrischen Konstruktion. Wir gehen aus von einem Punkt P auf irgendeiner Fläche F , die in P konvex gekrümmt ist. Für alle Normalschnitte dieser Fläche in P (vgl. S. 162, 163) konstruieren wir die Krümmungskreise in P . Diese Kreisschar überstreicht dann gerade die in Abb. 306 dargestellte Fläche, ihre Durchdringungsstrecke ist ein Stück der in P errichteten Normalen der Ausgangsfläche; die angeführte Gleichung bezieht sich

¹ Die in Abb. 301 und 302 gezeichneten Einteilungen der projektiven Ebene hatten wir S. 131, 132 durch Projektion des Oktaeders erhalten.

auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in P liegt und dessen x - und y -Achse in die Krümmungsrichtungen der Fläche F in P fallen. k_1, k_2 sind die Hauptkrümmungen der Fläche F in P .

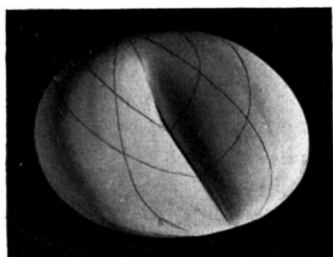


Abb. 306 a.

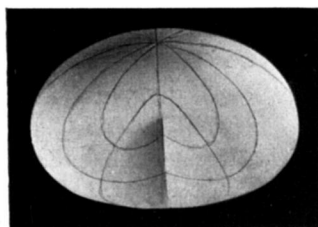


Abb. 306 b.

Wenn wir wieder von Abb. 304 ausgehen, aber nur AB mit CD zusammenheften, dagegen nicht DA mit BC , dann erhalten wir eine Fläche, die dem MÖBIUSSCHEN Band topologisch äquivalent ist. Wir haben ja dann gerade die Heftung vorgenommen, durch die das MÖBIUSSCHE Band definitionsgemäß aus dem Quadrat hervorgeht. Der Rand der neuen Fläche geht aus den Bögen DA und BC hervor. Da

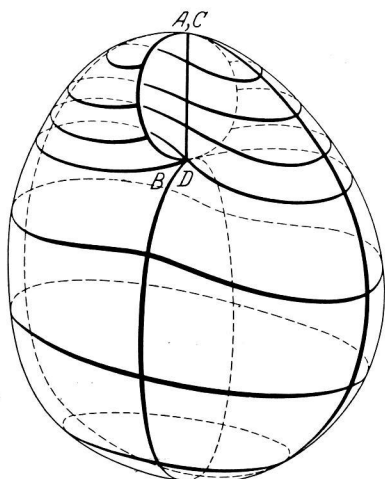


Abb. 307.

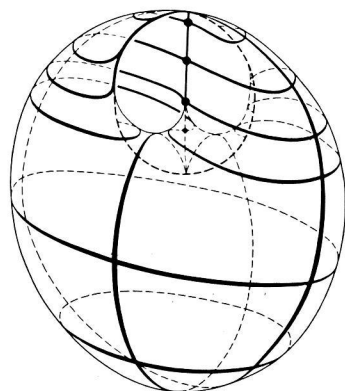


Abb. 308.

aber A mit C und B mit D zusammengeheftet ist, entsteht aus diesen Bögen eine geschlossene Kurve, der wir z. B. die Gestalt eines Kreises geben können (Abb. 307). Offenbar besitzt die Fläche keine Selbstdurchdringung. In den beiden Punkten, die aus A, C und aus B, D hervorgehen, ist die Fläche nicht mehr stetig gekrümmt; durch weitere Deformation in der Umgebung dieser Stellen erhalten wir aber eine Fläche, die überall stetig gekrümmt ist. Von ihrem Verlauf geben Abb. 308 und 309 eine Vorstellung.

Die Fläche eignet sich trotz ihres kreisförmigen Randes nicht zum Verschuß eines Gefäßes. Denn da sie einseitig ist, sperrt sie das Innere des Gefäßes nicht gegen den Außenraum ab.

Schließt man die Fläche durch Einfügen einer Kreisscheibe, so erhält man wieder das Modell der projektiven Ebene. Dies ist aus den Abb. 307 und 305 ersichtlich. Wir erhalten also umgekehrt ein Modell des MÖBIUSSCHEN Bandes, wenn wir aus dem Modell der projektiven Ebene eine Kreisscheibe entfernen. Dabei muß es gleichgültig sein, an welcher Stelle der in Abb. 305 dargestellten Fläche wir das Loch hineinschneiden; denn auf der projektiven Ebene ist keine

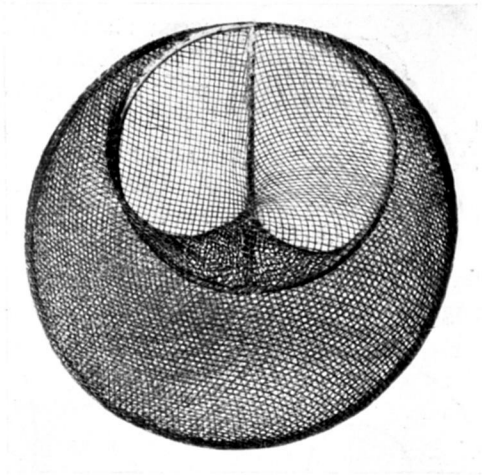


Abb. 309.

Stelle vor der anderen ausgezeichnet, da ja auf der Kugel kein Paar von Diametralpunkten vor einem anderen Paar ausgezeichnet ist. Eine besonders übersichtliche Gestalt erhält nun das übrigbleibende Flächenstück, wenn wir in Abb. 305 den unteren Teil entfernen. So entsteht die in Abb. 310 gezeichnete Fläche, die als Kreuzhaube bezeichnet wird. Die Kreuzhaube ist ein weiteres Modell eines MÖBIUSSCHEN Bandes mit kreisförmigem Rand. Trotz ihrer Einseitigkeit ist die Kreuzhaube offenbar als Gefäßdeckel brauchbar. Das wird dadurch ermöglicht, daß sie eine Selbstdurchdringungsstrecke besitzt.

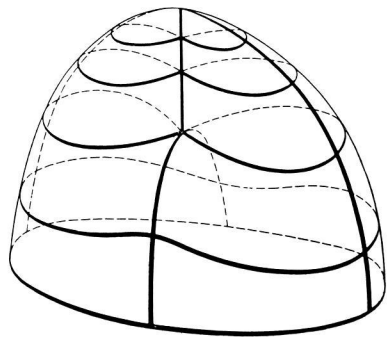


Abb. 310.

Wenn man die Kreuzhaube längs der Durchdringungsstrecke aufschneidet, erhält man nach geeigneter Verzerrung eine Kreisscheibe mit viereckigem oder kreisförmigem Loch; denn wir haben dann einfach das durch Abb. 303 bis 305 veranschaulichte Verfahren rückgängig gemacht. Demnach erhalten wir ein Modell des MÖBIUSSCHEN Bandes, wenn wir vom Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen ausgehen und im inneren Kreis alle Paare von Diametralpunkten identifizieren

(Abb. 311). Es ist auf den ersten Blick durchaus nicht zu erkennen, daß diese Figur dieselbe Fläche darstellt wie das Quadratmodell der Tabelle S. 272. Man kann aber das Quadratmodell aus den hier angegebenen erhalten, wenn man dieses zerschneidet (Abb. 312), die Teile deformiert (Abb. 313) und nach Umklappung des einen Teils um die Gerade b' die Ränder teils wieder zusammenheftet, teils einander zuordnet (Abb. 314).

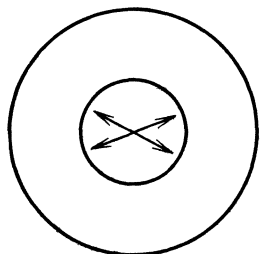


Abb. 311.

Unser Modell der projektiven Ebene besitzt zwei singuläre Punkte: die Endpunkte der Durchdringungsstrecke. Es ist W. Boy gelungen, ein anderes Modell der projektiven Ebene zu konstruieren, das keinen singulären Punkt und überall stetige Krümmung besitzt.

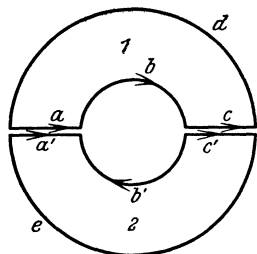


Abb. 312.

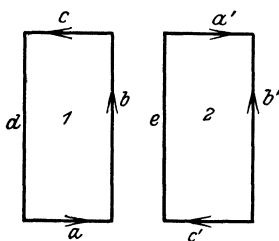


Abb. 313.

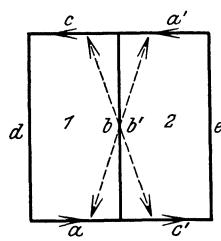


Abb. 314.

Wir gehen, um die Boysche Fläche zu erzeugen, nicht vom Quadrat, sondern vom regulären Sechseck aus, auf dessen Rand wieder die Diametralpunkte identifiziert sind. Durch Deformation erhalten wir daraus eine Kugelfläche, aus der ein reguläres Kreisbogensechseck entfernt ist. Dieses Gebilde läßt sich wie das Sechseck in drei kongruente Teile zerlegen, die symmetrisch um eine Achse herum angeordnet sind (Abb. 315). Wir schneiden einen dieser Teile heraus und deformieren ihn weiter; diese sogleich zu schildernde Deformation wird dann an den beiden anderen Teilen genau so vorgenommen, und wir erhalten drei neue kongruente Flächenstücke. Durch ihre Zusammenheftung ergibt sich schließlich die Boysche Fläche. Auch sie besitzt eine dreizählige Symmetrieachse. Das Ziel des Verfahrens ist

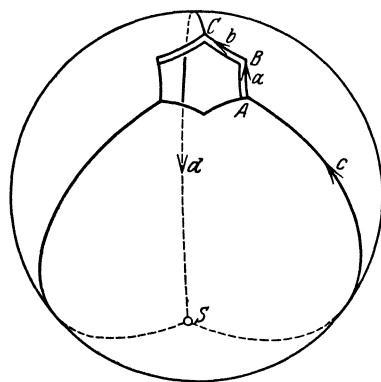


Abb. 315.

wir erhalten drei neue kongruente Flächenstücke. Durch ihre Zusammenheftung ergibt sich schließlich die Boysche Fläche. Auch sie besitzt eine dreizählige Symmetrieachse. Das Ziel des Verfahrens ist

natürlich die Zusammenheftung aller Paare von gegenüberliegenden Punkten auf dem Rand des aus der Kugel entfernten Sechsecks.

Wir fassen also (Abb. 315) das Stück $ScAaBbCdS$ ins Auge und bringen zunächst die drei Punkte ABC zum Zusammenfallen in N (Abb. 316), ohne sie jedoch zu identifizieren; denn das würde der Heftungsvorschrift, von der wir ausgingen, nicht entsprechen.

Jetzt halten wir die Punkte S und N und die Seiten b , c und d fest, drehen aber die geschlossene Seite a nach oben (Abb. 317), bis in die Stellung, die in Abb. 318 angegeben ist. Der Flächenanteil zwischen c und a muß zu diesem Zweck stark auseinandergezogen werden und erhält fast ebene Gestalt. Wir drehen nun die Schleife b (Abb. 318) nach rechts oben,

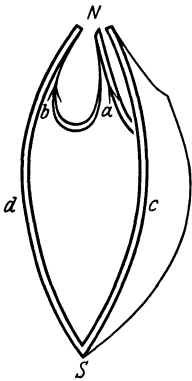


Abb. 316.

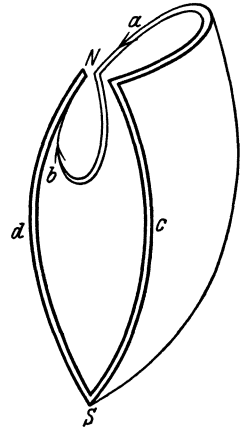


Abb. 317.

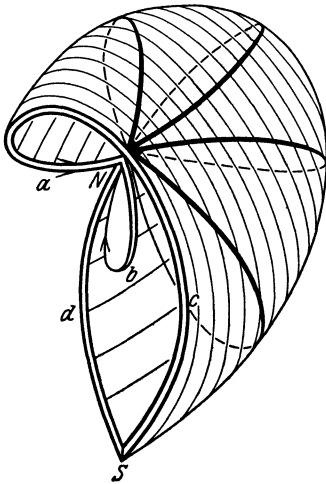


Abb. 318.

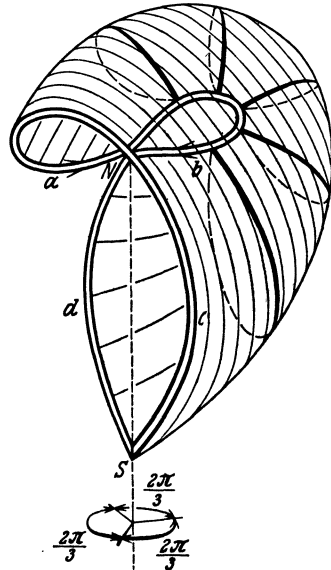


Abb. 319.

bis b von hinten an den erwähnten Flächenanteil anstößt und die in Abb. 319 gezeichnete Lage einnimmt. In dieser Schlußanordnung sollen die Bögen c und d untereinander und die Schleifen a und b untereinander kongruent sein und so liegen, daß c in d und b in a übergeht, wenn wir

die Figur um die Achse SN in der Pfeilrichtung um $2\pi/3$ herumdrehen (Abb. 319). Das Flächenstück, das wir konstruiert haben, denken wir uns nun in einem zweiten kongruenten Exemplar angefertigt, seine entsprechenden Teile seien mit a' , S' usw. bezeichnet. Dieses Exemplar

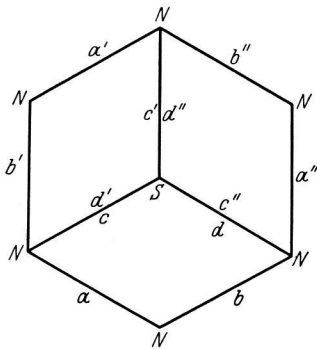


Abb. 320.

heften wir so an das erste, daß d' mit c (und zwar S' mit S und N' mit N) zusammenfällt. Dann muß von selbst auch a' mit b zur Deckung kommen. Diese beiden Ränder heften wir zusammen. Die Heftungskurve wird auf der entstandenen Fläche Durchdringungskurve, wie aus Abb. 319 ersichtlich sein dürfte. Der Rand der Fläche besteht jetzt aus c' , a , b' , d . Man erkennt das, wenn man (Abb. 320) auf das Sechseck zurückgeht, das wir zugrunde gelegt hatten. Offenbar läßt sich an diesen

Rand ein drittes Exemplar so anheften, daß (in der naturgemäßen Bezeichnung) d mit c'' , a mit b'' , b' mit a'' und c' mit d'' zusammenfallen. Damit ist die Boysche Fläche konstruiert. Aus Abb. 320 wird klar, daß die Boysche Fläche der projektiven Ebene äquivalent ist. Ein Draht-

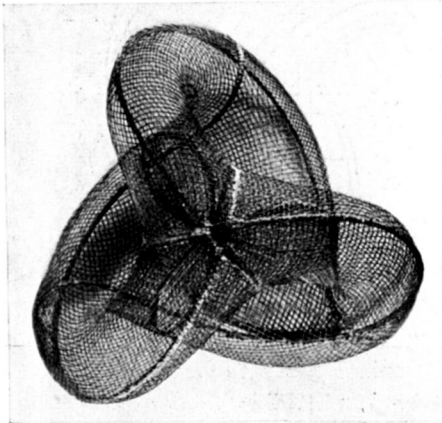


Abb. 321 a.

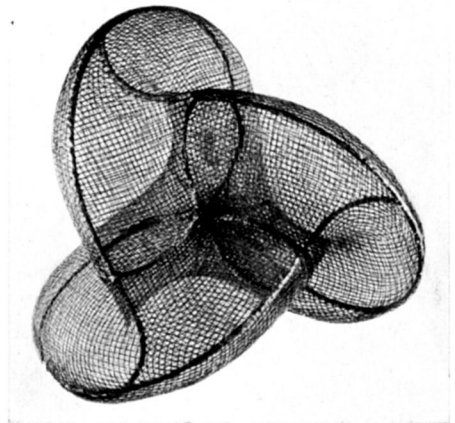


Abb. 321 b.

gazemodell ist in Abb. 321 dargestellt. Die Durchdringungskurve der Boyschen Fläche besteht aus drei Schleifen, die durch den Punkt N gehen und, wie die ganze Fläche, symmetrisch zur Achse SN liegen. Eine nähere Betrachtung von Abb. 320 ergibt, daß durch N drei Mäntel der Fläche hindurchgehen. Damit diese Mäntel in N eine stetige Tangen-

tialebene haben, ist es notwendig und hinreichend, daß die sechs Schleifenenden, die in N zusammenstoßen, dort drei paarweise senkrechte Geraden berühren. Wenn an den übrigen Nähten Knickungen oder Unstetigkeiten der Krümmung auftreten, so lassen sie sich durch eine einfache Glättung beseitigen. Bei dem in Abb. 321 dargestellten Modell ist die Durchdringungskurve durch stärkeren Draht hervorgehoben; die übrigen stärkeren Drähte dienen nur zur Versteifung; die Befestigungsschraube nimmt den Ort des Punktes S ein. Die Beziehung zu unserer Konstruktion dürfte besonders deutlich in Abb. 321 b hervortreten.

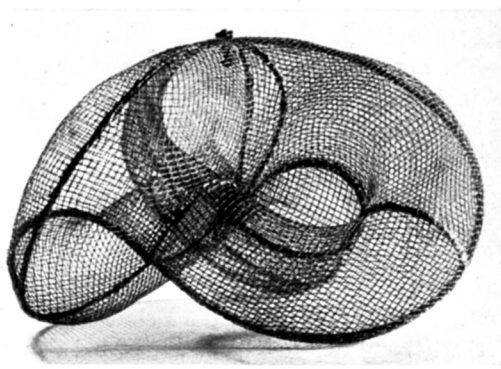


Abb. 321 c.

Demnach besitzt die Boysche Fläche eine überall stetige sphärische Abbildung. Es ist leider bisher nicht untersucht worden, in welcher Weise sich diese über die Kugel erstreckt. Wenn wir dabei von einem willkürlich gewählten Normalenvektor ausgehen und dann die Abbildung stetig fortsetzen, so kommen wir wegen der Einseitigkeit der Boyschen Fläche sicher auch zum entgegengesetzten Normalenvektor desselben Punktes. Somit ist jedem Punkt der Fläche durch die sphärische Abbildung ein Diametralpunktpaar der Kugel zugeordnet. Da aber in dieser Identifizierung die Kugel wiederum in die projektive Ebene übergeht, so liefert die sphärische Abbildung der Boyschen Fläche eine Abbildung der projektiven Ebene auf sich selbst, die allerdings nicht umkehrbar eindeutig ist, da einem Punktpaar der Kugel ersichtlich mehrere Punkte der Boyschen Fläche entsprechen.

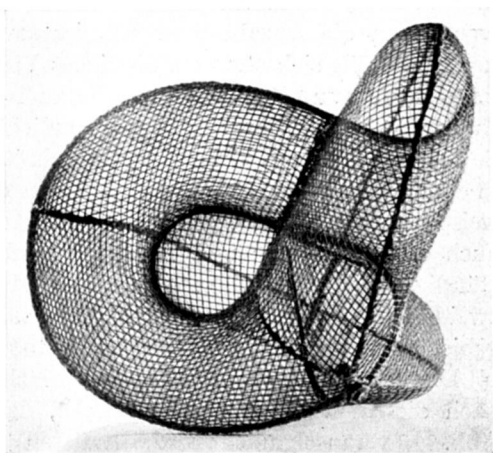


Abb. 321 d.

§ 48. Normaltypen der Flächen endlichen Zusammenhangs.

Wir wollen zu einer und derselben Flächenklasse alle die Flächen rechnen, die sich topologisch aufeinander abbilden lassen. Damit zwei Flächen endlicher Zusammenhangszahl zur selben Klasse gehören, sind folgende Bedingungen notwendig:

1. beide Flächen müssen entweder geschlossen sein oder die gleiche Anzahl Randkurven besitzen;

2. die Flächen müssen entweder beide orientierbar oder beide nicht-orientierbar sein;

3. beide Flächen müssen die gleiche Zusammenhangszahl besitzen.

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung ist evident. Die zweite Bedingung läßt sich auch so ausdrücken: Jede Fläche F , die auf eine orientierbare Fläche G topologisch abgebildet werden kann, ist orientierbar. In dieser Form ist die Behauptung leicht zu beweisen. Denn eine Orientierung der Fläche G ergibt bei der topologischen Abbildung eine Orientierung von F . Ebenso erkennt man die Notwendigkeit der dritten Bedingung: Die Zusammenhangszahl bedingt die Existenz eines Schnittsystems, das bei topologischer Abbildung in ein Schnittsystem gleicher Struktur auf der Bildfläche übergeht.

Eine genauere Betrachtung ergibt, daß die drei genannten Bedingungen für die topologische Abbildbarkeit zweier Flächen auch hinreichen. Wenn man nämlich von einer Fläche weiß, ob sie orientierbar ist, und wenn man die Anzahl ihrer Ränder sowie ihre Zusammenhangszahl kennt, so läßt sich stets ein ähnliches Verfahren anwenden, wie wir es beim Torus und bei den orientierbaren geschlossenen Flächen vom Zusammenhang 5- und 7 veranschaulicht haben (Abb. 282 bis 287, S. 264, 265). Durch ein geeignetes Schnittsystem läßt sich die Fläche in ein Polygonebiet überführen, bei dem die Ränder sämtlich oder teilweise identifiziert sind, und sowohl die Struktur des Schnittsystems als auch die Ränderzahl und Heftungsvorschrift des Polygons sind vollständig durch die erwähnten drei Angaben bestimmt. Stimmen also zwei Flächen in diesen Angaben überein, so sind sie auf dasselbe Polygonebiet und folglich auch aufeinander topologisch abbildbar.

Die orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht p führen nach diesem Verfahren auf $4p$ -Ecke, deren Ränderzuordnung durch Abb. 322 veranschaulicht wird. In diesen $4p$ -Ecken haben wir eine Reihe von Normaltypen für *alle* orientierbaren geschlossenen Flächen vor uns. Denn jede solche Fläche besitzt eine endliche ungerade Zusammenhangszahl $h = 2p + 1$. Eine andere vollständige Reihe von Normaltypen hatten wir in der Kugel, dem Torus und den Brezeln mit p Löchern angegeben.

Die RIEMANNschen Flächen der Funktionentheorie sind teilweise in dieser Einteilung enthalten, trotzdem ihre anschauliche Gestalt das

nicht vermuten läßt. Es sind Flächen, die sich wie das sphärische Bild der meisten Minimalflächen (S. 238) in mehreren Schichten über die Kugel ausbreiten, wobei diese Schichten in Windungspunkten miteinander zusammenhängen. Diese Flächen sind sämtlich orientierbar, da sich jede Orientierung der Kugelfläche auf die darüberliegende RIEMANNSche Fläche überträgt. Man erhält geschlossene Flächen dann und nur dann, wenn man von algebraischen Funktionen ausgeht, während die transzendenten Funktionen stets auf offene Flächen führen. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, da es viele gute Bücher über geometrische Funktionentheorie gibt.

Bei den *berandeten* Flächen läßt sich ebenfalls eine Reihe von Polygonen angeben, so daß jede Fläche mit endlich vielen Rändern und endlicher Zusammenhangszahl auf genau eins dieser Polygone topologisch abbildbar ist. Die Quadratmodelle des ebenen Kreisrings und des MÖBIUSSchen Bandes sind Beispiele solcher Polygone. Für die *orientierbaren* berandeten Flächen erhält man noch anschaulichere Normalformen, indem man in die Kugel, den Torus oder eine Brezel eine Anzahl Löcher hineinschneidet (Abb. 278, S. 261).

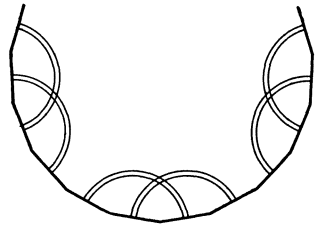


Abb. 322.

Um auch für die *nichtorientierbaren* Flächen zu ähnlichen Typen zu kommen, kann man von der „Kreuzhaube“ ausgehen, die wir S. 279 als Modell des MÖBIUSSchen Bandes konstruiert haben. Man schneide in eine Kugel eine Anzahl Löcher und verschließe einige von ihnen mit Kreuzhauben. Einer solchen Fläche ist jede nichtorientierbare Fläche endlichen Zusammenhangs äquivalent. Die Anzahl der Kreuzhauben und der offenen Löcher ist durch die Ränderzahl und die Zusammenhangszahl eindeutig bestimmt.

Die Kreuzhaube besitzt eine Durchdringungskurve und zwei singuläre Punkte. Einseitige Flächen ohne singuläre Punkte haben wir im KLEINSchen Schlauch und der BOYSchen Fläche kennengelernt. Ob sich auch alle anderen geschlossenen nichtorientierbaren Flächen singularitätenfrei im Raum verwirklichen lassen, scheint noch nicht untersucht zu sein. Durchdringungsfrei läßt sich eine solche Fläche nie realisieren, wie wir schon erwähnt haben.

Im vierdimensionalen Raum dagegen lassen sich alle nichtorientierbaren Flächen singularitätenfrei und durchdringungsfrei darstellen. In diesen Raum — wir wollen ihn mit R_4 und den dreidimensionalen Raum mit R_3 bezeichnen — hat man sich den R_3 ebenso eingebettet zu denken wie die Ebene in den R_3 . Wir konstruieren nun im R_4 zunächst ein durchdringungs- und singularitätenfreies Modell der Kreuzhaube. Wir denken uns zu diesem Zweck eine Kreuzhaube des R_3 eingebettet in den R_4 . Wir greifen auf ihr eine Kreisscheibe e heraus, die die Durchdringungsstrecke

zum Durchmesser hat (vgl. Abb. 307, S. 278). Im R_3 können wir jede Kreisscheibe unter Festhaltung der Peripherie so ausbeulen, daß kein innerer Punkt der deformierten Fläche mehr in die Ebene der Peripherie fällt. Ebenso kann man nun im R_4 die Kreisscheibe e in eine solche Fläche f deformieren, daß der Rand von f fest mit der Kreuzhaube des R_3 verbunden bleibt, während das Innere von f ganz aus dem R_3 herausragt. Durch diese Deformation aber geht die Kreuzhaube in eine Fläche F des R_4 über, die offenbar keine Durchdringung und keine Singularität besitzt. Wenn wir nun eine Kugel mit einer Anzahl von Löchern in den R_4 einbetten und einige dieser Löcher statt mit Kreuzhauben mit Flächen verschließen, die F ähnlich sind, so erhalten wir durchdringungs- und singularitätenfreie Normalformen für alle nichtorientierbaren Flächen endlichen Zusammenhangs.

Ein anderes Problem ist es, Flächen vorgegebener Struktur durch algebraische Gleichungen möglichst niedrigen Grades darzustellen. So hatten wir die STEINERSche Fläche als Modell der projektiven Ebene erwähnt. Ob es algebraische Flächen von der Gestalt der BOYSchen Fläche gibt, ist noch nicht untersucht. Im R_4 läßt sich die projektive Ebene durch sehr einfache Gleichungen durchdringungs- und singularitätenfrei verwirklichen. Dieses Verfahren wird in einem Anhang des Kapitels beschrieben.

Die Frage nach der topologischen Äquivalenz ist von den Flächen auf drei- und mehrdimensionale Gebilde übertragen worden. Hierdurch wurde man auf die BETTischen Gruppen geführt, in deren Theorie die Zusammenhangszahl und die Orientierbarkeit einer Fläche unter viel allgemeineren Gesichtspunkten erscheinen. Man vergleiche die auf S. 254 genannte Darstellung von ALEXANDROFF.

§ 49. Topologische Abbildung einer Fläche auf sich. Fixpunkte. Abbildungsklassen. Universelle Überlagerungsfläche des Torus.

Die einfachste topologische Abbildung eines Gebildes auf sich selbst besteht darin, das Gebilde als Ganzes stetig in sich selbst zu verzerren. Eine solche Abbildung heißt Deformation. Die Bewegungen der Ebene in sich sind Deformationen. Dagegen ist die Spiegelung der Ebene an einer Geraden ein Beispiel für topologische Abbildungen, die keine Deformationen sind. Denn bei der Spiegelung wird der Umlaufsinn jedes Kreises umgekehrt, während eine Deformation den Umlaufsinn nicht ändern kann.

Ein Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein *Fixpunkt* der Abbildung. Wir wollen jetzt beweisen, daß jede stetige Abbildung der Kreisscheibe auf sich mindestens einen Fixpunkt besitzen muß; dabei zählen wir die Peripheriepunkte mit zur Kreisscheibe. Wir nehmen im

Gegensatz zur Behauptung an, es gebe eine fixpunktfreie stetige Abbildung der Kreisscheibe e auf sich. Dann können wir in jedem Punkt P von e einen Zeiger anbringen, der von P nach dem Bildpunkt von P gerichtet ist; diese Vorschrift würde nämlich nur in Fixpunkten versagen. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Abbildung muß sich die Zeigerichtung von Punkt zu Punkt stetig ändern. Wir betrachten nun den Zeiger eines Peripheriepunkts und lassen diesen Punkt die Peripherie im Uhrzeigersinn einmal umlaufen; dabei dreht sich offenbar auch die Tangente des Punkts im Uhrzeigersinn einmal herum. Ich behaupte nun, daß die Zeigerrichtung des Punkts sich ebenfalls einmal im Uhrzeigersinn herumdreht. Denn der Winkel, den der Zeiger mit der Tangente bildet, ist von Null oder einem ganzzahligen Vielfachen von π stets verschieden, da der Zeiger eines Peripheriepunkts stets ins Kreisinnere und nie tangential gerichtet ist. Wäre aber beim Umlauf die Umdrehungszahl des Zeigers von derjenigen der Tangente verschieden, so müßte es mindestens einmal auf der Peripherie vorkommen, daß beide Richtungen gleich oder entgegengesetzt ausfielen. In analoger Weise betrachten wir nun die Umdrehungszahl des Zeigers für irgendeinen zur Peripherie konzentrischen Kreis k im Innern der Kreisscheibe. Auch dann muß sich der Zeiger einmal im Uhrzeigersinn herumdrehen, wenn sein Ausgangspunkt den Kreis einmal im Uhrzeigersinn umläuft; denn andernfalls müßte sich die Umdrehungszahl des Zeigers einmal sprungweise ändern, wenn wir die Peripherie der Kreisscheibe stetig auf k zusammenziehen, und das wäre mit der Stetigkeit der Zeigerverteilung nicht vereinbar. Ziehen wir andererseits k stetig auf den Mittelpunkt M der Kreisscheibe zusammen, so kann sich die Zeigerrichtung in allen Punkten von k immer weniger von einer und derselben Richtung, nämlich der Zeigerrichtung in M , unterscheiden. Die Umdrehungszahl wäre also für hinreichend kleine Kreise notwendig Null. Das ist ein Widerspruch. Folglich gibt es keine fixpunktfreie stetige Abbildung der Kreisscheibe auf sich.

In ähnlicher Weise läßt es sich zeigen, daß bei jeder stetigen Abbildung der Kugel auf sich entweder ein Fixpunkt oder aber ein Punkt vorkommen muß, der in seinen Diametralpunkt übergeht. Andernfalls wäre für jeden Punkt eindeutig ein Großkreisbogen definiert, der den Punkt mit seinem Bildpunkt verbände. Hierdurch ergäbe sich ein überall stetiges Zeigerfeld auf der Kugeloberfläche, und man kann durch Betrachtung der Zeigerumdrehungszahl beweisen, daß ein solches Feld unmöglich ist. Man kann also nicht überall auf der Erde Wegweiser aufstellen, deren Angaben von Ort zu Ort stetig variieren.

Indem man die Kugel mit identifizierten Diametralpunkten als Modell der projektiven Ebene auffaßt, erhält man aus dem Satz über die Kugelabbildung die Folgerung, daß jede stetige Abbildung der projektiven Ebene auf sich einen Fixpunkt besitzt.

Um die topologischen Abbildungen einer gegebenen Fläche auf sich selbst besser zu übersehen, kann man ihre Gesamtheit in Klassen einteilen. Man rechnet zwei Abbildungen zur selben Klasse, wenn sie sich nur durch eine Deformation voneinander unterscheiden; die Deformationen bilden die Klasse der Identität. Auf der Kugel erhält man eine Abbildung, die nicht in diese Klasse gehört, indem man jeden Punkt auf seinen Diametralpunkt abbildet; man erkennt nämlich anschaulich, daß diese Abbildung den Umlaufsinn kleiner Kreise umkehrt. Damit haben wir zwei Abbildungsklassen der Kugel gefunden. Eine genauere Betrachtung, die hier zu weit führen würde, zeigt, daß es keine weiteren Abbildungsklassen der Kugel gibt. Demnach sind alle topologischen Abbildungen der projektiven Ebene Deformationen.

Auf dem Torus gibt es dagegen unendlich viele Klassen. Um einige dieser Klassen zu veranschaulichen, denken wir uns den Torus längs eines Meridians aufgeschnitten und in einen Kreiszyylinder mit zwei Randkreisen verbogen. Wir halten nun den einen Randkreis fest und tordieren den Zylinder in sich selbst, so daß der zweite Randkreis sich k -mal ganz herumdreht; jede geradlinige Erzeugende des Zylinders verwandelt sich dabei in eine Schraubenlinie, die die Zylinderachse k -mal umläuft. Biegen wir jetzt die beiden Randkreise wieder zusammen, so erhalten wir eine topologische Abbildung des Torus auf sich selbst. Dabei sind alle Punkte der identifizierten Randkreise Fixpunkte, und in den übrigen Punkten ergibt sich die Abbildung aus der des Kreiszyinders. Die Erzeugenden des Zylinders entsprechen den Breitenkreisen des Torus, und indem man die Beziehung beider Flächen auch für die Räumteile in ihrem Innern hinzudefiniert, kann man der Zylinderachse die „Seelenachse“ des Torus zuordnen, d. h. die Bahnkurve des Mittelpunkts eines Kreises, durch dessen Rotation der Torus erzeugt wird. Bei der Torusabbildung, die wir konstruiert haben, verwandeln sich hiernach die Breitenkreise in solche geschlossene auf dem Torus verlaufende Kurven, die die Seelenachse k -mal schraubenartig umlaufen. Für eine solche Kurve kann sich bei einer Deformation des Torus die Zahl k nicht ändern. Zwei Torusabbildungen, die zu verschiedenen Werten von k gehören, können daher niemals in derselben Klasse liegen.

Es wäre ein Trugschluß, wenn man durch ein analoges Verfahren die Existenz unendlich vieler Abbildungsklassen auf dem KLEINSchen Schlauch beweisen wollte. Den schraubenförmigen Bildern der Zylindererzeugenden entsprechen auf dem KLEINSchen Schlauch geschlossene Kurven, die auch bei verschiedenen Werten von k ineinander deformiert werden können. Man kann sich den Unterschied, der in dieser Hinsicht zwischen dem KLEINSchen Schlauch und dem Torus besteht, an den Quadratmodellen klarmachen. Es gibt auf dem KLEINSchen Schlauch nur endlich viele Abbildungsklassen.

Auf dem Torus erschöpft unser Verfahren die Abbildungsklassen keineswegs. Eine vollständige Übersicht über sie läßt sich mit Hilfe der *universellen Überlagerungsfläche* des Torus gewinnen. Um diese Fläche zu veranschaulichen, denken wir uns die euklidische Ebene auf einen unendlich langen Kreiszyylinder aufgewickelt, der natürlich dabei unendlich oft von der Ebene umschlossen wird. Nun haben wir schon bei mehreren Untersuchungen den beiderseits abgeschnittenen Zylinder in einen Torus zusammengebogen. Ebenso läßt sich der unendliche Zylinder in einen Torus verwandeln, wobei die Achse des Zylinders in die unendlich oft umlaufene Seelenachse des Torus übergeht und der Zylinder unendlich oft in sich selbst hineingeschoben erscheint. Die euklidische Ebene wird durch unser Verfahren auf eine Fläche topologisch abgebildet, die den Torus in unendlich vielen Schichten überdeckt, ohne daß Faltungen oder Windungspunkte auftreten. Diese Fläche ist die universelle Überlagerungsfläche des Torus. •

Jeder Umlauf eines Längen- oder Breitenkreises des Torus führt von einer Schicht der Fläche in eine andere. Es sei auf dem Torus ein kanonisches Schnittsystem (ein Meridian und ein Breitenkreis) eingetragen, das den Torus in der üblichen Weise in ein Rechteck mit identifizierten Gegenseiten verwandelt. Markiert man auf der Überlagerungsfläche alle Punkte, die über den Kurven des Schnittsystems liegen, und verwandelt die Überlagerungsfläche wieder in eine Ebene, so erfüllen die markierten Punkte ein Kurvensystem, das die Ebene in unendlich viele rechteckige Felder zerlegt, und zwar sind diese Felder so angeordnet wie die Fundamentalbereiche der kristallographischen ebenen Translationsgruppe (Abb. 72, S. 63); jedes Feld entspricht einer Schicht der Überlagerungsfläche. Um diese Behauptung einzusehen, wollen wir die universelle Überlagerungsfläche des Torus auf eine andere Art konstruieren. Wir denken uns den Torus durch ein Quadrat mit identifizierten Gegenseiten dargestellt. Wie bei der Konstruktion des ebenen quadratischen Punktgitters (S. 28) setzen wir nun aus solchen Quadraten einen ebenen beiderseits unendlichen Streifen S zusammen, der von zwei parallelen Geraden a und b begrenzt wird. S verwandelt sich in einen unendlich langen Kreiszyylinder C , wenn wir a mit b durch geeignete Verbiegung von S zur Deckung bringen. Durch die Quadrate von S ist C in Felder eingeteilt, die von Kreisen begrenzt werden. Man erhält den Torus zurück, indem man zwei Kreise, die ein Zylinderfeld begrenzen, identifiziert. Wenn wir demnach den Zylinder in der früher geschilderten Weise um den Torus herumlegen, kommen alle Felder übereinander zu liegen, jedes Feld bedeckt den Torus einmal vollständig, und die Grenzlinien liegen alle über einem kanonischen Schnittsystem des Torus. Nunmehr verfahren wir weiter mit dem Streifen S wie bei der Konstruktion des quadratischen Gitters; wir setzen die Ebene aus solchen Streifen zusammen. Wenn wir dann die Ebene unendlich oft um C

herumlegen, so daß wieder S in C übergeht, so liegen offenbar alle an S angestückelten Streifen über S , und die Quadrateinteilung jener Streifen fällt mit der Einteilung von S zusammen. Legen wir wieder C um den Torus herum, so kommen alle Quadrate der Ebene übereinander zu liegen, und die Grenzlinien liegen alle über einem kanonischen Schnittsystem des Torus, wie wir behauptet hatten.

Durch diese zweite Konstruktion haben wir für die universelle Überlagerungsfläche U des Torus eine besonders einfache Abbildung auf die Ebene E erhalten. Bezeichnet man nämlich als äquivalent alle die Punkte von U , die über demselben Toruspunkt liegen, so ist in E jedes System äquivalenter Punkte von U dargestellt durch ein quadratisches Punktgitter. Wir definieren nun als *Fundamentalgruppe* (f) des Torus die Gruppe aller topologischen Abbildungen von U auf sich, die jeden Punkt in einen äquivalenten überführen. Dann wird (f) durch die Abbildung $U \rightarrow E$ ersichtlich in die Gruppe von Translationen verwandelt, die das quadratische Gitter in sich überführen.

Nun sei g irgendeine andere topologische Abbildung von U auf sich, die zwar nicht jeden Punkt in einen äquivalenten, aber äquivalente Punkte stets in äquivalente Punkte überführen möge. Dann entspricht g einer bestimmten topologischen Abbildung h des Torus auf sich. Jeder Punkt P des Torus liegt nämlich unter einem gewissen System unendlich vieler äquivalenter Punkte (Q) von U . Alle Bildpunkte (Q') der Punkte (Q) liegen nach Definition von g über einem und demselben Toruspunkt P' . Durch g wird also die Abbildung $P \rightarrow P'$ definiert, und diese topologische Abbildung des Torus auf sich nennen wir h . Man kann umgekehrt beweisen, daß sich zu jeder vorgegebenen Abbildung h des Torus eine Abbildung g der Überlagerungsfläche finden läßt, die zu h in der angegebenen Beziehung steht. g ist dann nur bis auf eine beliebige Abbildung aus (f) bestimmt.

Auf diese Weise lassen sich nun die Abbildungsklassen des Torus vollständig übersehen; das Ergebnis sei hier ohne nähere Begründung angegeben; die Abbildung g werde dabei ersetzt durch die Abbildung γ in E , in die g bei der Abbildung $U \rightarrow E$ übergeht. Sei dann $ABCD$ ein quadratischer Fundamentalbereich der Translationsgruppe (t) in E , die (f) entspricht. Seien $A'B'C'D'$ die Bilder von $ABCD$ bei der Abbildung γ . Dann muß auch $A'B'C'D'$ ein Fundamentalparallelogramm von (t) sein. Es ist nun die Torusabbildung h dann und nur dann eine Deformation, wenn $ABCD$ durch eine Translation in $A'B'C'D'$ überführbar ist. Die anderen Abbildungsklassen des Torus entsprechen den anderen Gestalten, die ein erzeugendes Parallelogramm des Gitters haben kann (vgl. Abb. 39, S. 29), sowie den Drehungen und Spiegelungen des Quadrats $ABCD$ in sich¹.

¹ Charakterisiert man das Gitter als die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem cartesischen System und bringt man A' durch eine Translation in den

Der Begriff der universellen Überlagerungsfläche läßt sich für alle Flächen definieren. Für die geschlossenen orientierbaren Flächen erhält man die universellen Überlagerungsflächen, indem man $4p$ -Ecke in ähnlicher Weise aneinandersetzt und aufeinander bezieht wie Quadrate beim Torus. Für $p > 1$ kann man aber die Fundamentalgruppe nicht mehr durch eine euklidische Translationsgruppe veranschaulichen. Dagegen kann man die Fundamentalgruppe durch eine hyperbolische Schiebungsgruppe, und die $4p$ -Ecke durch deren Fundamentalbereiche verwirklichen (vgl. Abb. 249, S. 228, für $p = 2$). Bei berandeten Flächen kommt man auf Translations- oder Schiebungsgruppen mit offenem Fundamentalbereich. Bei nichtorientierbaren Flächen muß man bei der metrischen Realisierung der Fundamentalgruppe auch euklidische und hyperbolische Gleitspiegelungen zu den Translationen und Schiebungen hinzunehmen.

§ 50. Konforme Abbildung des Torus.

In § 39 hatten wir die Frage aufgeworfen, ob bzw. auf wie viele Arten eine Fläche auf sich selbst oder eine andere Fläche konform abgebildet werden kann. Wir hatten uns dabei auf Flächen beschränkt, die der berandeten Kreisscheibe oder der Kugel oder dem Innern eines Kreises topologisch äquivalent sind. Der Begriff der universellen Überlagerungsfläche erlaubt es, auch für alle anderen Flächen jene Frage zu behandeln. Wir wollen uns darauf beschränken, alle konformen Abbildungen eines *Torus* auf einen anderen oder denselben Torus aufzusuchen. Bei den anderen Flächen kommt man nämlich mit den gleichen Methoden zum Ziel wie beim Torus, und beim Torus sind diese Methoden der Anschauung am leichtesten zugänglich. Hier und im folgenden bezeichnen wir als Torus nicht nur die Rotationsfläche eines Kreises um eine ihn nicht schneidende in seiner Ebene gelegenen Achse, sondern auch jede dieser Fläche topologisch äquivalente Fläche.

Nach dem „Entweder-Oder“-Satz, der in § 39 erwähnt wurde, kann jede Fläche, die topologisch dem Innern eines Kreises oder, was dasselbe ist, der euklidischen Ebene entspricht, konform entweder auf die hyperbolische oder die euklidische Ebene abgebildet werden. Diesen Satz wenden wir auf die universelle Überlagerungsfläche U eines Torus T an, da ja U der Voraussetzung des Satzes genügt. U sei also konform auf die Ebene E abgebildet, und wir lassen es zunächst dahingestellt, ob E die euklidische oder die hyperbolische Ebene ist.

Die Fundamentalgruppe (f) ist nun eine Gruppe *konformer* Abbildungen von U auf sich, da diese Abbildungen jedes Teilgebiet von U

Nullpunkt, so ist das Parallelogramm $A'B'C'D'$ durch die Koordinaten a, b von B' und c, d von C' festgelegt. Um alle Abbildungsklassen des Torus zu kennzeichnen, hat man für a, b, c, d alle ganzen Zahlen einzusetzen, die der Bedingung $ad - bc = \pm 1$ genügen.

sogar in ein kongruentes Gebiet verwandeln. Der Gruppe (f) muß daher bei der konformen Abbildung $U \rightarrow E$ eine Gruppe (t) konformer Abbildungen von E auf sich entsprechen. Die konformen Abbildungen von E auf sich sind aber sämtlich bekannt. Es sind die hyperbolischen Bewegungen, falls E die hyperbolische Ebene ist, und die euklidischen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen, falls E die euklidische Ebene ist (vgl. S. 233, 235). Außerdem wissen wir von der Gruppe (t), daß sie gewisse Verwandtschaft mit einer euklidischen krystallographischen Translationsgruppe hat; denn mit Ausnahme der Identität sind sämtliche Abbildungen von (t) fixpunktfrei, und die Gruppe besitzt einen viereckigen Fundamentalbereich. Wäre E nun die hyperbolische Ebene, so müßte (t) eine diskontinuierliche Schiebungsgruppe mit endlichem Fundamentalbereich sein, und wir haben S. 228 erwähnt und plausibel gemacht, daß die Fundamentalbereiche dieser Gruppen mindestens acht Ecken haben. Hiernach bleibt nur übrig, daß E die euklidische Ebene ist. Es läßt sich elementar beweisen, daß jede euklidische, von einer Bewegung verschiedene Ähnlichkeitstransformation einen Fixpunkt besitzt. Die Gruppe (t) kann also außer der Identität nur fixpunktfreie Bewegungen, d. h. Translationen, enthalten. Da außerdem (t) diskontinuierlich ist und einen endlichen Fundamentalbereich hat, muß (t) eine krystallographische Translationsgruppe sein, wie wir sie S. 62—64 behandelt haben.

Nun sei für irgendeinen anderen Torus T' die gleiche Betrachtung angestellt; U' sei die universelle Überlagerungsfläche von T' ; die Fundamentalgruppe von T' sei durch die konforme Abbildung $U' \rightarrow E$ in die krystallographische Translationsgruppe (t') in E übergeführt. Wir erwähnten schon, daß jede Abbildung eines Torus auf sich selbst zu einer Abbildung der Überlagerungsfläche ergänzt werden kann. Ebenso läßt sich zu jeder konformen Abbildung $T \rightarrow T'$ eine konforme Abbildung $U \rightarrow U'$ bestimmen, so daß entsprechende Punkte von U und U' stets über entsprechenden Punkten von T und T' liegen. Durch die Abbildungen $U \rightarrow E$ und $U' \rightarrow E$ wird $U \rightarrow U'$ in eine konforme Abbildung a von E auf sich selbst übergeführt. a muß eine euklidische Bewegung oder Ähnlichkeitstransformation sein. a muß aber außerdem die Translationsgruppe (t) in (t') überführen.

Damit haben wir gezeigt, daß T nur dann auf T' konform abgebildet werden kann, wenn die Gruppen (t) und (t') durch eine Bewegung oder Ähnlichkeitstransformation ineinander überführbar sind. Man kann diese Bedingung in eine übersichtliche Form bringen. Sei t_1 eine kürzeste Translation aus (t) und sei t_2 unter den Translationen aus (t), die t_1 nicht parallel sind, wiederum eine kürzeste. m sei der Quotient der Längen von t_2 und t_1 , also $m \geq 1$. α sei der Winkel dieser Translationen. Um α eindeutig festzulegen, genügt es zu fordern $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. In gleicher Weise lassen sich der Gruppe (t')

zwei Zahlen m' und α' zuordnen. Damit nun (t) durch eine Ähnlichkeitstransformation in (t') überführbar ist, sind die Bedingungen $m = m'$ und $\alpha = \alpha'$ notwendig und hinreichend (der elementare Beweis bleibe dem Leser überlassen). Wir können somit jedem Torus T zwei Zahlen m, α zuordnen, so daß T nur auf diejenigen Torusflächen konform abgebildet werden kann, für die jene beiden Zahlen die gleichen Werte haben wie für T . Man nennt dieses Zahlenpaar (oder ein anderes, das jenem umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann) die *Moduln* des Torus.

Für die konforme Abbildbarkeit zweier Torusflächen T und T' ist aber die Übereinstimmung der Moduln nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Denn dann gibt es eine Ähnlichkeitstransformation oder Bewegung a von E in sich, die (t) in (t') überführt, und es ist leicht einzusehen, daß die zu a gehörige konforme Abbildung $U \rightarrow U'$ eine konforme Abbildung $T \rightarrow T'$ bestimmt; jene Abbildung $U \rightarrow U'$ führt nämlich übereinanderliegende Punkte von U und nur solche Punkte stets in übereinanderliegende Punkte von U' über. Wir können zusammenfassend sagen, daß die Torusflächen im Sinne der konformen Abbildung eine zweiparametrische Schar bilden.

Weist die räumliche Gestalt eines Torus keine besondere Regelmäßigkeit auf, so lassen sich die Werte der beiden Moduln nicht anschaulich aus der Gestalt des Torus ableiten. Ist der Torus T dagegen eine Rotationsfläche, so besitzt (t) stets einen rechteckigen Fundamentalbereich, wir müssen also $\alpha = \pi/2$ setzen. In diesem Fall läßt sich nämlich die Abbildung $U \rightarrow E$ explizit angeben. Sie überführt das Orthogonalnetz der Meridiane und Breitenkreise in zwei orthogonale Scharen paralleler Geraden von E . Ist insbesondere T die Rotationsfläche eines Kreises, so kann das Seitenverhältnis m der rechteckigen Fundamentalbereiche von (t) von nichts anderem abhängen als vom Radienverhältnis des Meridiankreises und der Seelenachse. Zwei Kreistorusflächen können daher dann und nur dann konform aufeinander abgebildet werden, wenn sie ähnlich sind.

Im vierdimensionalen Raum läßt sich eine Torusfläche angeben, für die U sogar *längentreu* auf die euklidische Ebene abbildbar ist (vgl. Anhang 2).

Wir können jetzt auch leicht übersehen, auf welche Arten irgendein Torus T konform auf sich selbst abgebildet werden kann. Die Gruppe (k) dieser Abbildungen muß der Gruppe (l) der Bewegungen oder Ähnlichkeitstransformationen in E entsprechen, die (t) in sich überführen. (l) umfaßt ersichtlich alle Translationen von E in sich. Mit der Gesamtheit ist (l) im allgemeinen erschöpft; weist dagegen (t) besondere Regelmäßigkeiten, z. B. einen quadratischen Fundamentalbereich auf, so kann (l) auch Drehungen und Spiegelungen enthalten.

Das Verfahren, das wir für den Torus angegeben haben, läßt sich auf alle anderen Flächenklassen übertragen. In den meisten Fällen ist aber

die Überlagerungsfläche nicht wie beim Torus auf die euklidische, sondern auf die hyperbolische Ebene konform abbildbar, z. B. bei allen orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht $p > 1$. Man wird in diesen Fällen auf Schiebungsgruppen geführt, und die konforme Abbildbarkeit zweier Flächen hängt dann davon ab, ob die zugehörigen Schiebungsgruppen durch eine hyperbolische Bewegung ineinander überführbar sind. Wie sich durch Überlegungen aus der hyperbolischen Geometrie ergibt, sind die hyperbolischen Schiebungsgruppen mit $4p$ -eckigem endlichen Fundamentalbereich bis auf eine hyperbolische Bewegung durch $6p - 6$ Konstanten festgelegt. Zu jeder orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht $p > 1$ gehören daher $6p - 6$ Moduln.

In der Funktionentheorie wendet man das Verfahren hauptsächlich auf die RIEMANNschen Flächen der algebraischen Funktionen an. Die Abbildung $U \rightarrow E$ führt im Fall $p = 1$ zu den elliptischen Funktionen und im Fall $p > 1$ zu den von KLEIN und POINCARÉ untersuchten automorphen Funktionen.

Die ungeschlossenen Flächen führen auf Gruppen mit unendlichem Fundamentalbereich. In der Funktionentheorie begegnet man solchen Gruppen z. B. beim Studium der Exponentialfunktion und der elliptischen Modulfunktion.

§ 51. Das Problem der Nachbargebiete, das Fadenproblem und das Farbenproblem.

Zum Schluß wollen wir drei nahe miteinander verwandte Fragen behandeln, die entstehen, wenn man eine Fläche in verschiedene Gebiete einteilt. Solche Einteilungen in der Ebene treten uns z. B. in den Landkarten der politischen Geographie entgegen. Ferner treten Gebiets-einteilungen beliebiger Flächen in der kombinatorischen Topologie auf, wenn man eine krumme Fläche durch ein topologisch äquivalentes Polyeder ersetzt. Um die Seitenflächen des Polyeders zu bestimmen, muß man die krumme Fläche in Gebiete einteilen.

Das Problem der Nachbargebiete besteht darin, auf einer Fläche die Höchstzahl der Gebiete zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß jedes Gebiet an jedes andere längs einer Kurve angrenzt¹. Wir untersuchen diese Frage zunächst in der Ebene und wählen in ihr zwei Gebiete 1 und 2 aus, die längs einer Kurve aneinanderstoßen. Wenn wir ein drittes Gebiet ganz um die Gebiete 1 und 2 herumlegen, so können wir kein viertes Gebiet mehr bestimmen, das an alle drei ersten grenzt (Abb. 323). Wenn wir dagegen das dritte Gebiet so legen, wie in Abb. 324 angegeben ist, so läßt sich ein geeignetes viertes Gebiet ohne weiteres finden. Wie wir dieses aber auch auswählen, es wird stets eins der

¹ Es ist dabei nicht gefordert, daß die Gebiete die Fläche vollständig bedecken.

übrigen Gebiete durch die anderen völlig eingeschlossen, so daß wir kein fünftes Gebiet finden können, das an alle anderen längs einer Kurve angrenzt. Unsere Versuche zeigen, daß die Höchstzahl der Nachbargebiete in der Ebene vier beträgt. Das läßt sich auch streng beweisen. In Abb. 325 ist eine besonders symmetrische Anordnung dieser Gebiete gezeichnet.

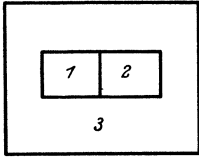


Abb. 323.

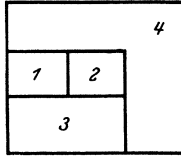


Abb. 324.

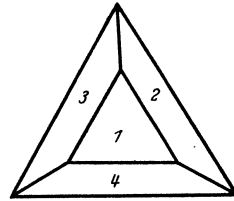


Abb. 325.

Das Fadenproblem ist die duale Umkehrung des Problems der Nachbargebiete (wobei die Dualität im Sinne einer topologischen Verallgemeinerung des *räumlichen* Dualitätsprinzips der projektiven Geometrie zu verstehen ist). Beim Fadenproblem ist die Höchstzahl der Punkte gesucht, die auf einer Fläche liegen und sich sämtlich untereinander durch Kurven verbinden lassen, welche auf der Fläche verlaufen, ohne einander zu schneiden. Durch eine einfache Überlegung ergibt sich, daß diese Höchstzahl mit der Höchstzahl der Nachbargebiete auf derselben Fläche übereinstimmen muß. Um dies zu zeigen, wählen wir aus jedem der Nachbargebiete einen Punkt aus. Da alle Nachbargebiete längs einer Kurve aneinanderstoßen, können wir je zwei der Punkte durch eine Kurve verbinden, die nur in den beiden zugehörigen Gebieten verläuft. Die so entstehenden Kurven können wir ferner so legen, daß die Kurvenstücke, die in demselben Gebiet verlaufen, einander nicht schneiden; denn wir haben ja in diesem Gebiet nur einen im Innern liegenden Punkt mit bestimmten Randpunkten zu verbinden. Aus jeder Anordnung von n Nachbargebieten ergibt sich also eine Lösung des Fadenproblems mit n Punkten. Die Höchstzahl der Punkte des Fadenproblems ist daher mindestens gleich der Höchstzahl der Nachbargebiete. Umgekehrt ergibt sich aber aus jeder Lösung des Fadenproblems mit n Punkten eine Anordnung von n Nachbargebieten. Wir teilen hierzu jede Kurve, die zwei Punkte miteinander verbindet, in zwei Teile und erweitern jeden Punkt und die von ihm ausgehenden Kurventeile durch Hinzuziehung der umliegenden Flächenpunkte zu einem Flächengebiet; dann erhalten wir n sternförmige Gebiete, die sämtlich aneinandergrenzen. Also ist die Höchstzahl der Nachbargebiete mindestens gleich der Höchstzahl der Punkte des Fadenproblems. Da wir vorher auch das Umgekehrte bewiesen haben, so folgt, daß beide Höchstzahlen einander gleich sind.

Nicht nur für die Flächen vom Zusammenhang 1, sondern auch für andere Flächen sind diese Höchstzahlen bestimmt worden. Für die pro-

jektive Ebene und den Torus sind sie 6 und 7. Beispiele solcher Anordnungen sind in den Abb. 326 und 327 wiedergegeben. Die projektive Ebene ist dabei durch eine Kreisscheibe dargestellt, bei der diametrale Peripheriepunkte identifiziert sind, der Torus durch eine Quadratfläche mit der üblichen Ränderzuordnung. Abb. 326 entspricht der S. 132, Abb. 167 dargestellten Projektion des Dodekaeders. Abb. 328 gibt in der projektiven Ebene eine Lösung des Fadenproblems, die zur Gebiets-einteilung von Abb. 326 dual ist.

In engem Zusammenhang mit dem Problem der Nachbargebiete steht das Farbenproblem, das sich ins Gewand einer Frage der praktischen Kartographie kleiden läßt. Es sei auf einer Fläche eine Anzahl von Gebieten eingezeichnet. Jedes dieser Gebiete soll mit einer bestimmten Farbe bemalt werden, aber nie zwei Gebiete, die längs einer Kurve aneinandergrenzen, mit derselben Farbe. Wenn dagegen zwei

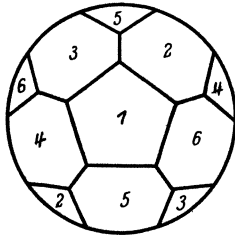


Abb. 326.

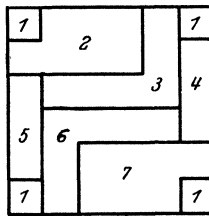


Abb. 327.

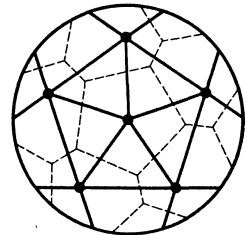


Abb. 328.

Gebiete nur in einzelnen Punkten aneinanderstoßen, dürfen sie die gleiche Farbe haben. Es soll nun für eine gegebene Fläche die Mindestanzahl der Farben bestimmt werden, die zu einer derartigen Färbung für jede auf der Fläche mögliche Gebietseinteilung ausreichen.

Diese Zahl muß jedenfalls mindestens so groß sein wie die Höchstzahl der auf der Fläche möglichen Nachbargebiete. Denn in einem System von Nachbargebieten müssen alle Gebiete verschiedene Farben erhalten. Umgekehrt liegt die Vermutung nahe, daß man mit jener Höchstzahl auskommt. In der Tat ist bewiesen worden, daß auf der projektiven Ebene sechs Farben und auf dem Torus sieben Farben für die Ausfärbung nach unserer Vorschrift genügen, wie man die Gebiete auch wählt. Dagegen ist es eine bisher unbewiesene Vermutung, daß man in der Ebene und auf der Kugel mit vier Farben auskommt¹.

Betrachten wir zunächst Beispiele von Gebietseinteilungen in der Ebene. Die drei Nachbargebiete von Abb. 329a müssen wir mit drei verschiedenen Farben 1, 2, 3 färben. Dann können wir das vierte Gebiet, das an die Gebiete 2 und 3 angrenzt, mit der Farbe 4 oder mit der Farbe 1 versehen. Wenn wir es mit der Farbe 4 färben, kommen wir

¹Für Kugel und Ebene ist das Problem nicht wesentlich verschieden.

bei der Gebieteinteilung von Abb. 329b nicht mit vier Farben aus. Wir müssen das Gebiet also in diesem Falle mit der Farbe 1 ausfüllen. Bei dieser Färbung stoßen wir aber bei der Einteilung von Abb. 329c auf Schwierigkeiten; hier muß das Gebiet die Farbe 4 erhalten. Man erkennt aus diesen Beispielen, daß die Färbung der ersten vier Gebiete durch die Anordnung der weiteren Gebiete mitbestimmt wird. Wir müssen, wenn ein neues Gebiet hinzukommt, unter Umständen die bereits gefärbten Gebiete noch einmal umfärben, und daraus ergibt sich die ganze Schwierigkeit des Problems.

Wir wollen nun einen Weg einschlagen, auf dem wir das Farbenproblem für eine Reihe geschlossener Flächen lösen können. Hierzu verzerren wir die Fläche derartig, daß sie zu einem Polyeder wird und die einzelnen Gebiete in die Seitenflächen des Polyeders übergehen¹. Es genügt offenbar, das Problem für alle Polyeder zu lösen, die den gleichen Zusammenhang haben wie die gegebene Fläche.

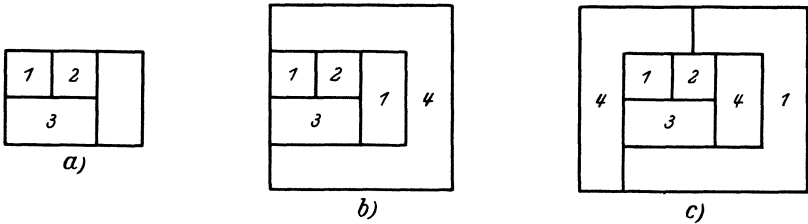


Abb. 329.

Wir beweisen zunächst: Jedes Polyeder vom Zusammenhang h läßt sich mit höchstens n Farben ausfärben, wenn die Zahl n die Eigenschaft hat, daß für alle ganzen Zahlen $F > n$ die Ungleichung gilt

$$nF > 6(F + h - 3).$$

Nachher werden wir zu jedem festen positiven h die kleinste Zahl n_h bestimmen, die diese Eigenschaft hat. Dann wird bewiesen sein, daß jede geschlossene Fläche vom Zusammenhang h sich in jeder Gebiets-einteilung mit n_h Farben ausfärben läßt.

Wir denken uns jetzt die Zusammenhangszahl h fest gegeben sowie irgendeine ganze Zahl n , die mit diesem h die angegebene Bedingung erfüllt. Wir teilen nun die Polyeder des Zusammenhangs h nach ihrer Flächenzahl F ein und beweisen unsere Behauptung durch Induktion nach wachsendem F . Unsere Behauptung ist trivialerweise richtig für alle $F \leq n$. Denn dann brauchen wir bloß jede Seitenfläche des Polyeders mit einer anderen Fläche auszufüllen. Der Satz sei nun schon für

¹ Wie die Beispiele von Abb. 329 lehren, ist diese Verzerrung im Allgemeinen nur möglich, wenn wir auch krumme Seitenflächen zulassen. Für den folgenden Beweis ist das unwesentlich.

alle $F \leq F_0$ bewiesen. Dann wollen wir seine Gültigkeit für $F = F_0 + 1$ dartun. Nach dem Obigen können wir uns auf $F > n$ beschränken, nach unserer Voraussetzung gilt also für diese Zahl F die Ungleichung

$$nF > 6(F + h - 3).$$

Wir wenden nun den EULERSCHEN Polyedersatz an¹, $E - K + F = 3 - h$ oder $F + h - 3 = K - E$. Durch eine Deformation, bei der sich die Zahl F und der Zusammenhang h nicht ändern, können wir erreichen, daß in dem Polyeder an jeder Ecke nur drei Flächen aneinanderstoßen, also auch nur drei Kanten auslaufen (vgl. Abb. 330). Von allen E Ecken zusammen gehen somit $3E$ Kanten aus, und da hierbei jede Kante doppelt gezählt wird, ist $3E = 2K$, also

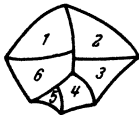


Abb. 330.

$$\begin{aligned} 6(F + h - 3) &= 6K - 6E \\ &= 6K - 4K = 2K. \end{aligned}$$

Demnach besagt die Ungleichung über die Zahl n :

$$nF > 2K.$$

Aus dieser Ungleichung können wir schließen, daß mindestens eine Seitenfläche des Polyeders von weniger als n Kanten begrenzt wird. Denn sonst würden alle F Flächen zusammen von mindestens nF Kanten begrenzt werden, und da hierbei jede Kante doppelt gezählt wird, ergäbe sich $nF \leq 2K$. Dieser Schluß bildet den Kern des Beweises.

Wir betrachten nun eine derartige Seitenfläche, an die weniger als n Nachbarflächen angrenzen. Wir denken uns zunächst die mittlere Fläche fortgelassen und die umgebenden Flächen so weit über das hierdurch entstandene Loch fortgesetzt, daß sich das Polyeder wieder schließt. Das neue Polyeder hat denselben Zusammenhang wie das alte und eine Seitenfläche weniger. Also kann es nach Voraussetzung mit n Farben ausgefüllt werden. Wir führen dieses aus und machen hierauf die Deformation wieder rückgängig. Dadurch ist das Polyeder bis auf die herausgegriffene Seitenfläche mit n Farben ausgefärbt. Da aber an diese Fläche höchstens $n - 1$ Nachbarflächen angrenzen, können wir auch diese Fläche noch in der vorgeschriebenen Weise färben, ohne eine neue Farbe zu gebrauchen. Nun haben wir möglicherweise das ursprünglich gegebene Polyeder abändern müssen, um zu erreichen, daß von jeder Ecke nur drei Kanten auslaufen. Wir können aber diese Änderung jetzt rückgängig machen, ohne die Ausfärbung ändern zu müssen. Denn dabei entstehen keine neuen Grenzlinien.

¹ Bei der Aufstellung dieses Satzes haben wir über die Anordnung der Seitenflächen Voraussetzungen gemacht, die im vorliegenden Fall nicht erfüllt zu sein brauchen. Man kann aber einsehen, daß der Satz auch hier anwendbar ist.

Wir haben jetzt zu untersuchen, welche Zahlen n die vorausgesetzte Bedingung erfüllen. Wir schreiben sie in der Form

$$n > 6 \left(1 + \frac{h-3}{F} \right).$$

Hierbei sind für F alle ganzen Zahlen einzusetzen, die größer als n sind. Ist h gleich 1 oder 2, so strebt der Wert der rechten Seite der Ungleichung mit wachsendem F gegen 6 und bleibt stets kleiner als 6. In diesen beiden Fällen ist also $n_h = 6$ die kleinste ganze Zahl, die unserer Voraussetzung genügt. Für $h = 3$ hat die rechte Seite den festen Wert 6, also ist $n_h = 7$. Für $h > 3$ nimmt die rechte Seite mit wachsendem F ab, es genügt daher, für F den kleinsten zugelassenen Wert $n + 1$ einzusetzen. Damit erhalten wir für n im Fall $h > 3$ die Ungleichung

$$n > 6 \left(1 + \frac{h-3}{n+1} \right),$$

umgeformt:

$$n(n+1) > 6n + 6 + 6h - 18, \quad n^2 - 5n > 6h - 12,$$

also

$$n > \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{24h - 23}.$$

Bezeichnen wir mit $[x]$ die größte ganze Zahl unterhalb x , so ist demnach für $h > 3$:

$$n_h = \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{24h - 23} \right].$$

Auch für $h = 2$ und $h = 3$ ergibt diese Formel, obgleich sie nicht anwendbar ist, die richtigen Werte $n_h = 6$ und $n_h = 7$. Im Fall $h = 1$ ergibt sich dagegen ein anderer Wert, 4 statt 6. Dieser Wert ist aller Voraussicht nach der richtige, denn bis jetzt hat man noch keine ebene Gebietseinteilung angeben können, die sich nicht mit vier Farben ausfüllen läßt; ein exakter Beweis dieses Satzes ist aber bisher nicht gelungen. In der folgenden Tabelle sind die Werte von n_h für $h = 1$ bis $h = 13$ zusammengestellt:

$h =$	$n_h =$	$h =$	$n_h =$
1	$6 ([4,000] = 4)$	8	$[10,000] = 10$
2	$6 ([6,000] = 6)$	9	$[10,447] = 10$
3	$7 ([7,000] = 7)$	10	$[10,866] = 10$
4	$[7,775] = 7$	11	$[11,264] = 11$
5	$[8,425] = 8$	12	$[11,640] = 11$
6	$[9,000] = 9$	13	$[12,000] = 12$
7	$[9,522] = 9$		

Wir haben bis jetzt nur bewiesen, daß diese Anzahlen von Farben ausreichend zur Ausfärbung sind. Es wäre denkbar, daß es Flächen vom Zusammenhang h gibt, auf denen wir stets mit weniger als n_h Farben auskommen. Es ist aber für $h = 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ gezeigt

worden, daß in diesen Fällen genau n_h Nachbargebiete auftreten können. In diesen Fällen kommt man also sicher nicht mit weniger als n_h Farben aus, hier ist also das Farbenproblem vollständig gelöst. Auf allen anderen geschlossenen Flächen besitzen wir in den Zahlen n_h obere Schranken für die Anzahl der Nachbargebiete.

An dem Farbenproblem ist besonders auffallend, daß der für die Ebene anschaulich evidente Satz bis jetzt nicht exakt bewiesen ist. Derartige Schwierigkeiten treten in der Mathematik sehr oft auf, wenn man anschauliche Sätze durch Zurückführung auf die Zahl rein logisch verstehen will. Als weiteres Beispiel nennen wir den Satz, daß eine geschlossene und doppelpunktlose Kurve die Ebene in zwei Teile zerlegt oder daß die Kugel unter allen Flächen bei gegebener Oberfläche das größte Volumen besitzt. Beide Sätze erfordern ziemlich schwierige und umständliche Beweise. Bei weitem das eigentümlichste Beispiel dieser Art bildet jedoch das Vierfarbenproblem. Denn bei diesem Problem ist nicht einzusehen, weshalb gerade im anschaulich einfachsten Fall solche Schwierigkeiten entstehen, während viel kompliziertere Fälle sich erledigen lassen.

Anhänge zum sechsten Kapitel.

1. Projektive Ebene im vierdimensionalen Raum.

Wir wollen eine algebraische Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum E_4 angeben, die topologisch der projektiven Ebene äquivalent ist, die aber im Gegensatz zur Boyschen Fläche frei von Selbstdurchdringungen und sonstigen Singularitäten ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Kugelfläche

$$(1) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

aus und betrachten in den cartesischen Koordinaten x, y, z, t des E_4 das Gebilde

$$(2) \quad x = u^2 - v^2, \quad y = uv, \quad z = uw, \quad t = vw$$

für alle Parameterwerte u, v, w , die (1) erfüllen. Da x, y, z, t homogen quadratisch von u, v, w abhängen, werden Diametralpunkte der Kugelfläche (1) stets durch denselben Punkt (2) des E_4 dargestellt. Wir zeigen jetzt, daß zwei nichtdiametrale Punkte von (1) stets verschiedenen Punkten (2) entsprechen. Nehmen wir zunächst einen Kugelpunkt P , für den weder u noch v noch w verschwindet. Dann sind y, z, t von Null verschieden und bestimmen die Proportion $u : v : w$. Der zu P gehörige Punkt von (2) stellt also außer P und dem Diametralpunkt von P keinen Punkt der Kugel dar. Verschwindet w , so sind u^2 und v^2 aus den Gleichungen $u^2 + v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = x$ eindeutig bestimmt.

Der zugehörige Punkt (2) kann also nur die vier Punkte $(u, v, 0)$, $(u, -v, 0)$, $(-u, v, 0)$, $(-u, -v, 0)$ darstellen. Ist auch noch $u = 0$ oder $v = 0$, so reduzieren sich diese vier Punkte auf ein diametrales Punktepaar, und es ist nichts mehr zu beweisen. Ist $u \neq 0$, $v \neq 0$, so haben wir noch die Gleichung $y = uv$ heranzuziehen, die aus den vier Punkten ein Diametralpunktepaar aussondert. Es bleiben nur noch die Fälle zu untersuchen, in denen w von Null verschieden ist, während eine der Variablen u, v verschwindet, also entweder: $u = 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, oder $v = 0$, $u \neq 0$, $w \neq 0$, oder endlich $u = v = 0$, $w = \pm 1$. Im ersten Fall ergibt sich $x = -v^2$; $-x + w^2 = 1$; $vw = t$; also sind v^2 , w^2 und vw bekannt. Analog sind im zweiten Fall u^2 , w^2 und uw bekannt. Beide Male schließt man wie im Fall $w = 0$, daß der zugehörige Punkt von (2) nur ein Diametralpunktepaar von (1) darstellt. Im dritten Fall ist nichts zu beweisen, da dieser Fall ohnehin nur für zwei diametrale Punkte der Kugel (1) zutrifft. Demnach stellt (2) mit der Nebenbedingung (1) umkehrbar eindeutig und stetig eine Kugel mit identifizierten Diametralpunkten, d. h. eine projektive Ebene dar.

Man kann aus den Definitionsgleichungen des Modells leicht u, v, w eliminieren. Aus den drei letzten Gleichungen (2) folgt nämlich

$$\frac{yz}{t} = u^2, \quad \frac{yt}{z} = v^2, \quad \frac{zt}{y} = w^2.$$

Die erste Gleichung von (2) geht also über in

$$(3) \quad y(z^2 - t^2) = xzt.$$

Und (1) verwandelt sich in

$$(4) \quad y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2 = yzt.$$

Das angegebene Modell ist daher der Schnitt der Hyperflächen (3) und (4).

Daß das Modell singularitätenfrei ist, d. h. überall eine stetige Tangentialebene besitzt, läßt sich leicht verifizieren, indem man auf der Kugel (1) u, v, w als Funktionen zweier unabhängiger Parameter ausdrückt und mittels (2) auch x, y, z, t in dieser Parameterdarstellung untersucht.

2. Euklidische Ebene im vierdimensionalen Raum.

Die Flächen des E_3 , die der euklidischen Ebene isometrisch sind, gehen alle ins Unendliche, da sie notwendig Regelflächen sind. Im E_4 dagegen gibt es Flächen, die im kleinen der Ebene isometrisch sind, ohne Regelflächen zu sein. Wir wollen eine solche Fläche F angeben;

sie liegt ganz im Endlichen und ist einer Torusfläche topologisch äquivalent. Diese Fläche F hat die einfache Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos u, & x_3 &= \cos v, \\x_2 &= \sin u, & x_4 &= \sin v.\end{aligned}$$

Das Linienelement von F ist

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\&= \sin^2 u du^2 + \cos^2 u du^2 + \sin^2 v dv^2 + \cos^2 v dv^2 = du^2 + dv^2.\end{aligned}$$

F ist also in der Tat isometrisch zur Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v . F liegt ganz im Endlichen, denn alle Koordinaten liegen zwischen $+1$ und -1 . Man kann F übrigens als Schnitt der beiden dreidimensionalen Hyperzylinder $x_1^2 + x_2^2 = 1$ und $x_3^2 + x_4^2 = 1$ auffassen. Man erhält alle Punkte von F , wenn man u, v in der cartesianischen (u, v) -Ebene alle Punkte eines achsenparallelen Quadrats der Seitenlänge 2π durchlaufen läßt. Verschiedenen inneren Punkten des Quadrats entsprechen verschiedene Punkte von F , dagegen stellen zwei Randpunkte des Quadrats denselben Punkt von F dar, wenn sie auf einer Geraden $u = \text{const}$ oder $v = \text{const}$ und auf gegenüberliegenden Quadratseiten liegen. Also ist F eine Torusfläche, und die (u, v) -Ebene ist die universelle Überlagerungsfläche von F .

Man könnte versuchen, die euklidische Geometrie auch auf geschlossenen Flächen zu verwirklichen, die nicht Torusgestalt haben. Es zeigt sich aber, daß dafür nur noch der KLEINSche Schlauch in Betracht kommt. Auf geschlossenen Flächen vom Zusammenhang $h > 3$ und nur auf ihnen läßt sich dagegen die hyperbolische Geometrie verwirklichen. Die elliptische Geometrie kann außer auf der Kugel und der projektiven Ebene auf keiner geschlossenen Fläche verwirklicht werden. Man kann diese Sätze aus der differentialgeometrischen Formel von O. BONNET über die curvatura integra schließen.

Sachverzeichnis.

- Abbildbarkeit** zweier Flächen, konforme 294.
 — — —, topologische 284.
Abbildung § 37.
 — der projektiven Ebene auf sich 283, 287.
 — des Torus auf sich 290.
 — durch parallele Normalen bzw. Tangentialebenen 171.
 — durch parallele Tangenten 153—154, 157, 159—160.
 — durch Zentralperspektive 99—102, 129—139.
 — einer Fläche konstanter negativer Gaußscher Krümmung auf die Ebene 214.
 —, geodätische 229—230.
 —, inhaltstreue 229.
 —, konforme 219, 222, 231, 236—237.
 —, —, auf dem Torus § 50.
 —, —, auf der Kugel 236.
 —, —, im Raum 235—236.
 —, —, in der Ebene § 38.
 —, längentreue (s. auch unter Bewegung) 229.
 —, projektive 114—116, 216.
 —, sphärische 159—160, § 29, 182, 185, 237—239, 283.
 —, stetige bzw. topologische 230, 231, 284—291.
Abbildungsgruppen (s. auch unter Bewegungsgruppen) 51—52, 95, 213, 216, 224, 226.
Abbildungsklassen 288, 290.
Abgeplattetes Rotationsellipsoid 9.
Abrollung 243.
Abschroten 251—253.
Abstand, hyperbolischer 214, 226, 235.
Abwickelbare Flächen § 30.
Abzählende Geometrie § 24, 242.
Achteck, sich selbst ein- und umschriebenes 98.
Additivität der Drehwinkel 55.
Affensattel 169, 170, 179—180, 238 bis 239.
Ähnlichkeitsachsen von Kreisen und Kugeln 121—126.
Ähnlichkeitspunkte von Kreisen und Kugeln 120—127.
Ähnlichkeitstransformationen 221—222 232, 235, § 50.
Algebra 254.
Algebraische Flächen vgl. Flächen.
 — Funktionen 285, 294.
 — Kurven 90, 239.
Analytische Funktionen 232, 237.
Anordnungsaxiome 116, 211, 215.
Apollo von Belvedere 174.
Approximation irrationaler Zahlen 36, 39.
Äquivalente Punkte bei diskontinuierlichen Abbildungsgruppen 52.
Archimedisches Axiom 115—116, 211.
Astroide 247.
Asymptotenlinien 167, 179—180.
Asymptotenrichtungen 164, 170.
Atom § 8.
Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen vgl. Pflasterung.
Außenwinkel eines Dreiecks 217.
Automorphe Funktionen 294.
Automorphismus einer Konfiguration 95—96, 98, 112.
Axiome, ebene 103, 114—116, 210 bis 218.
 —, räumliche 106—107, 114—116.
Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck 217.
Begleitendes Dreieck einer Raumkurve 158—160.
Berechnung von π 30, 33—35.
Berührungspunkt 152.
Besicowitch 190.
Bewegliches einschaliges Hyperboloid 15, 21, 26—28, 241—242.

- Bewegliches hyperbolisches Paraboloid 15, 17, 241.
 — Kreisschnittmodell des dreiachsigen Ellipsoids 16—17.
 Bewegung der Ebene in sich § 10, 203 bis 204, 242—243.
 — der elliptischen Ebene 213.
 — der hyperbolischen Ebene 216, 226 bis 228, 233, 235.
 — der Kugeloberfläche 75, 203—205, 213.
 — im Raum 73, 251.
 Bewegungsgruppen, diskontinuierliche und kristallographische 52, 55, § 11 bis 13, 80, 213, 227—228, 289—294.
 —, kontinuierliche 203—205, 226.
 Bieberbach 79.
 Bienenwabe 67.
 Binormale 158—160.
 Bogenlänge 157, 188—199, 243—244.
 Bonnet, O. 302.
 Boysche Fläche 280—283, 286.
 Bravais 46.
 Brennfäche einer Fläche 192—194, 197.
 Brennlinie des Kreises 246.
 Brennpunkte einer Flächennormalen 192—194.
 — eines Kegelschnitts 2—3, 7, 17, 23 bis 24.
 Brezeln 260—261, 264—265, 284.
 Brianchon-Pascalsche Konfiguration § 17, 114—117.
 Brianchonscher Punkt 94—95, 104.
 — Satz 92—94, 104.
Cantorsches Axiom 211.
 Curvatura integra 302.
Deckbewegung 51, 72, 78.
 Deformation einer Fläche in sich 286, 288.
 Desarguessche Konfiguration 109—113, 118, 217.
 Desarguesscher Satz 86, 107—110, § 20, 118, 213, 217—218.
 Diamantgerüst 48, 51, 238.
 Dichte einer Kreislagerung 33.
 Dichteste Kreislagerung 32—33, 42, 67.
 — Kugellagerung 40—42, 46.
 — im vier- und fünfdimensionalen Raum 41—42.
 Diëder 76.
 Differentialgeometrie 151—152.
 Dilatation 12.
 Dirichletsches Problem 234.
 Diskontinuierliche Bewegungsgruppen vgl. Bewegungsgruppen.
 Dodekaeder 80—83, 128, 129, 131, 132, 296.
 Doppelsechs, Schlaeflische § 25.
 Douglas, J. 237—238.
 Drall 184—186, 252, 253.
 Drehachse (krystallographisch) 75—77.
 Drehpunkt (krystallographisch) 60.
 Drehung der Ebene 53—56.
 Drehwinkel 55, 60, 64—65.
 Dreiachsiges Ellipsoid vgl. Ellipsoid.
 Dreieck, Außenwinkel 217.
 — in der elliptischen Ebene 212.
 —, Winkelsumme 217, 227.
 Dreifach orthogonale Flächensysteme 20, 165—166.
 Dreikant vgl. Begleitendes Dreikant.
 Dual-invariante Konfiguration 105, 109, 114, 126, 150.
 Dualitätsprinzip, ebenes 103—104, 109.
 —, räumliches 82, 106—107, 110, 126, 150, 295.
 Dünnte Kugellagerung 42, 45—46.
 Dupinsche Indikatrix 170, 192.
 — Zykliden 192—194.
 Dupinscher Satz über dreifach orthogonale Flächensysteme 165—166.
 Durchdringungslinien 266, 270—272, 277, 279, 280, 282, 283, 285.
Ebene (euklidische) 143, 174, 190, 192, 203, 235, 236, 291, 301—302.
 —, Aufbau aus kongruenten Bereichen 72, 213, 225.
 —, elliptische 210.
 —, hyperbolische 214, 224—228, 230, 234—235, 264, 291, 294.
 —, projektive 84, 103, 130, 212—213, 263, 272, 275, § 47, 295, 296, 300 bis 301.
 —, unendlich ferne 106.
 — Konfigurationen 85.
 — Kurven § 26, 161.
 Ebenenschar 181.
 Ebenes Netz eines Polyeders 255, 266.
 — Punktgitter 28, § 6, 62—64, 68 bis 69, 289—290.
 Ebenführung 241—242.
 Einheitsgitter 31, 32, 35—40, 42.
 Einschaliges Hyperboloid 10, 12, 15, 19, 26—28, 92—94, 106, 146, 148, 184, 241—242, 273.

- Einseitige Flächen § 46, 285—286.
 Elastischer Widerstand 196.
 Ellipse 2—5, 7—9, 12, 15, 16, 18, 20, 23, 25, 26, 92—93, 102, 142—143, 156, 166, 170, 193, 245, 247, 249—251.
 Ellipsoid, dreiaxsiges 12, 14, 16, 17 bis 20, 22, 144, 145, 166, 170, 196, 197.
 —, Rotations- 9.
 Elliptische Ebene 210.
 — Funktionen 294.
 — Geometrie § 34, 216—217, 230, 302.
 — Krümmung 162, 163, 173, 174.
 Elliptischer Raum 213.
 — Zylinder 11.
 Elliptisches Paraboloid 12, 14, 145.
 Entweder-Oder-Satz 236—237, 291.
 Epitrochoide 244, 246.
 Epizykloide 244—246.
 Euklidische Ebene vgl. Ebene.
 — Geometrie als Übergangsfall zwischen den beiden nichteuklidischen 216—217.
 Eulerscher Polyedersatz 255—257, 259, 266—267, 276—277, 298.
 Evolute 157—158, 243—244.
 Evolvente 6, 158.
 Exponentialfunktion 294.
 Extremalproblem vgl. Minimalproblem.
- Fadenkonstruktion der Ellipse 2.**
 — der Evolventen 5—6, 158, 244.
 — der Krümmungslinien auf dem Ellipsoid 166—167, 198.
 — des Ellipsoids 17—18.
 — des Kreises 1, 2.
 Fadenproblem 295—296.
 Farbenproblem 296—300.
 Fixpunkt einer Abbildung 286—287, 292.
 Flächen, abwickelbare § 30.
 —, algebraische 241, 277, 286, 300, 301.
 —, berandete 261.
 — dritter Ordnung 145, 146, 148—151.
 —, einseitige und nichtorientierbare vgl. einseitige Fl.
 — höherer als dritter Ordnung 146.
 — im projektiven Raum 261—262.
 — konstanter Breite 190—192.
 — — Gaußscher Krümmung 181, 201 bis 203, 207—209, 213—214, 230, 231, 251.
 — — Helligkeit 192.
 — — mittlerer Krümmung 200, 202, 251.
- Flächen vierter Ordnung 267, 277.
 — zweiter Ordnung § 3, 107, 114—115, 144.
 — — —, konfokale § 4, 26—28, 165 bis 166, 194, 197.
 Flächenklasse 284.
 Flächennormale vgl. Normale.
 Flächensysteme, dreifach orthogonale 20, 165—166.
 Flächenzentriert kubisches Gitter vgl. Punktgitter.
 Fluchtpunkt 99, 102.
 Fokalkurven (F.-Ellipse u. F.-Hyperbel) einer Fläche zweiter Ordnung 18 bis 22, 166, 193, 197, 198.
 Frontal 195.
 Fundamentalbereich einer diskontinuierlichen Abbildungsgruppe 56, 58, 228, 289—291.
 Fundamentalgruppe einer Fläche 290, 291, § 50.
 Fünfeck, räumliches vollständiges 110 bis 113.
 Fünfecke, wechselseitig umbeschriebene 111—112.
 Funktionen, algebraische 285, 294.
 —, analytische 232, 237.
 —, automorphe 294.
 —, elliptische 294.
 —, lineare 232—233.
 —, transzendente 285.
 Funktionentheorie 227, § 38, 254, 261, 264, 284—285, 294.
 Fußpunktkonstruktion der Kegelschnitte 22—24.
- Gauß 29—30, 152.**
 Gauß-Hertzsches Prinzip des „kleinsten Zwanges“ 196—197.
 Gaußsche Abbildung vgl. Abbildung durch parallele Tangenten bzw. Tangentialebenen, und sphärische Abbildung.
 — Krümmung einer Fläche § 29, 181, 201—203, 206—209, 229.
 — —, Beweis ihrer Biegungsinvarianz 172—173.
 Gelenkmechanismen § 40.
 Geodätische Abbildung 229—230.
 — Krümmung 186.
 — Linien 167, 194—198, 206, 207—209.
 Geometrie vgl. abzählende, elliptische, euklidische, innere, hyperbolische, projektive Geometrie.

Gerade (s. auch unter Regelfläche) 1, 10, 12—13, 84, 100, 140—141, 143, 144—146, 152, 157, 161.
 —, unendlich ferne 73, 101—102, 105, 106, 262.
 Geradeste Linie 194—197.
 Geradeführung 239—240, 244.
 Gitter vgl. Punktgitter u. Einheitsgitter.
 Gitterförmige Kreislagerung 32.
 Gitterpunkte (s. auch unter Einheitsgitter und Minimalabstand) auf einer Kreisscheibe 29, 30.
 Graphit 48, 49, 67.
 Gruppe vgl. Abbildungsgruppe, Bewegungsgruppe, Automorphismen.
 Harmonische Punkte 86, 89, 114.
 Hauptkrümmungen einer Fläche 163 bis 165, 170, 171, 198.
 Hauptnormale einer Kurve 158—160.
 Haupttangentenkurven vgl. Asymptotenlinien.
 Heesch 44.
 Hellebardenspitze 153—154, 157.
 Helligkeit, Flächen konstanter H. 192.
 Heptaeder 266—268, 270—271.
 Herpolodie* 243—244, 250.
 Hexaeder vgl. Würfel.
 Hexagonale Krystalle 41, 50.
 Horizont 99, 102, 243.
 Hyperbel 3—5, 8, 23, 24, 92—93, 102, 142—143, 166, 167, 170, 193.
 Hyperbolische Bewegung 216, 226 bis 228, 233, 235, 292.
 — Ebene § 35, 224—228, 230, 234 bis 235, 264, 291.
 — Geometrie § 35, 302.
 — Krümmung 162, 164, 170, 173—174.
 Hyperbolischer Abstand 214, 226, 235.
 — Raum 218.
 — Winkel 215, 226.
 — Zylinder 11.
 Hyperbolisches Paraboloid 13—15, 17, 106, 241.
 Hyperboloid, einschaliges 10, 12, 13, 19, 92—94, 106, 146, 148, 184, 197, 273.
 —, —, bewegliches 15, 21, 26—28, 241 bis 242.
 —, zweischaliges 10, 12, 14, 19, 21, 145, 197.
 Hyperboloidische Lage von 4 Geraden 146.
 Hypotrochoiden, Hypozykloiden 244 bis 249.

Identische Abbildung 51.
 Ikosaeder 80—83, 128, 129, 131, 133.
 Incidenz 84, 91, 101—103.
 —, letzte einer Konfiguration 91, 97, 109, 113, 114, 118, 119, 147—150.
 Indikatrix vgl. Dupin.
 Inhaltstreue Abbildung 229.
 Innere Geometrie einer Fläche 172, 195.
 Inverse Abbildung 51.
 Inversion 223—224, 232, 240.
 — im Raum 193, 236.
 Inversor 239—240.
 Jacobisches Prinzip 196.
 Kanalfächen 194.
 Kanonische Zerschneidung 260, 264, 265, 272, 284, 289.
 Katakaustik vgl. Brennnlinie.
 Katenoid 169, 185—186.
 Kegel (allgemeiner) 100, 182, 184.
 — zweiter Ordnung (s. auch Kreiskegel) 11, 93.
 Kegelschnitte (s. auch Ellipse, Hyperbel, Parabel) 8—9, 22—26, 93—94, 102, 104, 107, 115, 142—143, 193.
 Kehllinie 183—185, 252—253.
 Kehlpoint 183—185, 252.
 Kinematik 239.
 Klein 174.
 Kleinsche Fläche 271—276, 288, 302.
 Köbe 234.
 Kochsalz 49.
 Kombinatorische Topologie 259.
 Konfiguration (7_3) 87—89.
 — (8_3) 90—91.
 — $(9_3)_1$ vgl. Brianchon-Pascalsche K.
 — $(9_3)_2$ 96—99, 105.
 — $(9_3)_3$ 96—99, 105.
 — (10_3) 109—113, 118, 217.
 — $(9_4 12_3)$ 90.
 — $(12_4 16_3)$ (s. auch K. Reyesche) 124.
 — $(8)_4$ 118.
 —, Automorphismen einer K. 95, 96, 98, 112.
 — der 27 Geraden 150.
 —, Desarguessche 109—113, 118, 217.
 —, dual invariante 105, 109, 114, 126, 150.
 —, ebene 85.
 —, mit dem Lineal allein konstruierbare 97.
 —, Möbiussche 118.
 —, räumliche 117—118.

- Konfiguration, reguläre 95—96, 111, 127, 140.
 —, Reyesche § 22, 137—140
 Konfigurationsschema 87—88.
 Konfokale Flächen zweiter Ordnung 20 bis 22, 26—28, 165—166, 194, 197.
 — Kurven zweiter Ordnung 4—5, 15, 166—167.
 Konforme Abbildung vgl. Abbildbarkeit und Abbildung.
 Kongruenzaxiome, Kongruenzsatz 116, 208—212, 215—216, 218, 227.
 Konvexe Körper, k. Polyeder 199, 200, 254, 255.
 — Krümmung vgl. elliptische Krümmung.
 Koordinatensystem 126, 131, 136, 276.
 Kreis 1, 2, 23, 120—126, 142, 157, 170, 188, § 36.
 Kreisevolvente 6.
 Kreiskegel 7, 21, 25, 26, 193.
 Kreislagerung 32, 33, 42, 67.
 Kreisring, ebener 230, 261, 272.
 Kreisscheibe, Gitterpunkte auf einer K. 29—30.
 —, stetige Abbildung einer K. auf sich besitzt einen Fixpunkt 286—287.
 Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung 16.
 Kreisverwandtschaften § 36, 232, 233, 236.
 Kreiszylinder 6, 193, 204, 205, 229, 263.
 Kreuzhaube 279, 285—286.
 Krümmung einer ebenen Kurve 155, 157.
 — — Raumkurve 160, 195—196.
 —, elliptische vgl. ell. K.
 —, Gaußsche vgl. G. Kr.
 —, geodätische 186.
 —, hyperbolische vgl. hyp. K.
 —, konvexe vgl. elliptische K.
 —, mittlere vgl. mittl. K.
 —, parabolische vgl. par. K., par. Kurve, par. Punkt.
 —, sattelförmige vgl. hyperbolische K.
 Krümmungsachse 160.
 Krümmungskreis 155—157, 160, 277.
 Krümmungslinien 165—167, 179—180, 192, 197.
 Krümmungsmittelpunkt 155—157, 160, 163—164.
 Krümmungsradius 155—157, 160, 163 bis 164.
 Krümmungsrichtungen 163, 179.
 Krystalle 41, § 8.
 Krystallographische Gruppen 52.
 — — im Raum § 13.
 — — in der Ebene § 12, 78.
 — — in n Dimensionen 79.
 Krystallographische Klassen § 13.
 Kubooktaeder 139.
 Kugel 9, 75, 80, 120—126, 143—144, 160—161, 170, § 32, 209, § 36, 229, 288.
 Kugelgestalt der Erde 190.
 Kugellagerung, Kugelpackung 40—46, 48, 50.
 Kugelverwandtschaften 235—236.
 Kurven, algebraische ebene 239.
 — auf der Kugel 161.
 — dritter Ordnung 90, 150.
 —, ebene § 26, 161.
 — konstanter Breite 191—192.
 — — Krümmung 157, 188—189.
 — n -ter Ordnung 22.
 — zweiter Ordnung vgl. Kegelschnitte.
 Kurvenscharen 4—5, 165, 206.
 Kürzeste Linie 194—195.
 Lagrangesche Gleichungen 1. Art 197.
 Längentreue Abbildung (s. auch Verbiegung) 229.
 Laue 46.
 Laves 44.
 Leibnizsche Reihe 33—35.
 Leitlinien der Kegelschnitte 4, 23—26.
 Letztanzidenz einer Konfiguration 91, 97, 109, 113, 114, 118, 119, 147—150.
 Lineare Funktionen 232—233.
 Lusternik 196.
 Magnesium 41, 50.
 Mechanik 196.
 Menelaus 121.
 Minimalabstand der Punkte im Einheitsgitter 31—32, 35, 36, 40, 42.
 Minimalflächen 167—168, 185, 198, 199, 200, 237—238.
 Minimalproblem 168, 189—190, 198, 200—201, 234, 247.
 Minkowski 37—39, 192.
 Mittlere Krümmung 198—200, 202, 251.
 Möbiussche Konfiguration 118.
 Möbiussches Band 269—270, 272—273, 278—280.
 — Netz 86.
 Modulfunktion 228, 294.

- Moduln einer Fläche gegenüber konformer Abbildung 293—294.
 Momentane Schraubungsachse 251.
 Momentanzentrum 243, 246, 249, 250.
 Monge 121.
- N**
 Nabelpunkt 165—167, 170, 180, 192, 198.
 Nachbargebiete auf einer Fläche 294 bis 296, 300.
 Natürliche Parameter einer Kurve 157, 161.
 Neovius 238.
 Neuneck, sich selbst ein- und umbeschriebenes 98.
 Nichteuklidische Geometrie vgl. elliptische G. und hyperbolische G.
 Normale einer ebenen Kurve 152.
 — — Fläche 162, 196—197, 202.
 Normalebene einer Raumkurve 158 bis 160.
 Normalschnitte einer Fläche 162—165, 277—278.
- O**
 Oberfläche 198—200.
 Oktaeder 76—77, 80—83, 125—127, § 23, 277.
 Optik 3, 246.
 Orientierung einer Fläche 269—270, 284.
 Orthogonale Flächensysteme 20, 165 bis 166.
 — Kurvenscharen 5, 165—167, 206.
- P**
 Pappus 105, 117.
 Parabel 3—4, 7, 23, 24, 26, 93, 102, 142 bis 143.
 Parabolische Krümmung 162—163.
 — Kurve 174—178, 180.
 Parabolischer Punkt 163, 164, 169, 174, 179—181.
 — Zylinder 11.
 Paraboloid, elliptisches 12, 14, 145.
 —, hyperbolisches 13, 15, 17, 106, 241.
 Parallelenaxiom 103, 211—212, 216 bis 217.
 Parallelfächen 202—203, 251.
 Parallelprojektion 12, 106, 129.
 Parkettierungsproblem 72.
 Pascalsche Grade 104.
 — Konfiguration § 17, 104—105, 114.
 Pascalscher Satz 104—105, § 20, 213.
 Peaucellier 239—240.
 Perspektive vgl. Parallelprojektion, Zentralperspektive.
- Pflasterung der elliptischen Ebene 213.
 — der euklidischen Ebene 72.
 — der hyperbolischen Ebene 228.
 — des elliptischen Raums 213.
 — des euklidischen Raums 77.
 Planetenbahn 248—249.
 Plateausches Problem 237.
 Platonische Körper 80.
 Poincaré 256, 257.
 Poincarésches Modell der hyperbolischen Ebene 225—228, 231, 234—235.
 Polfläche einer Bewegung 251—253.
 Polhodie 243—244, 250.
 Polyeder 254.
 —, konvexe 254—255.
 —, reguläre § 14, § 23, 213, 254, 257 bis 258.
 —, simple 254—258.
 Polyedrale Konfiguration 111.
 Polygon, sich selbst ein- und umbeschriebenes 98—99, 112—113, 114.
 Prinzip des kleinsten Zwanges 196—197.
 Projektive Abbildung 114—116, 216.
 — Ebene 103, 130, 212—213, 263, 272, 275, § 47, 296, 300—301.
 — Geometrie 84.
 Projektiver Raum 106, 134, 262, 273.
 Projektives Koordinatensystem 126, 131, 136, 276.
 Punktgitter, ebene § 5, § 6, 51, 62—64.
 —, — quadratische 28—31, 68—69, 289—290.
 —, räumliche 39, 42, 49—50, 51, 73—74.
 Punktmechanik 196.
 Punktsystem, reguläres 44, 46, § 9, § 12, 73—74.
- Q**
 Quadratische Form 35—36.
- R**
 Radó 237.
 Randzuordnung 263, 273—275, 277 bis 280, 282, 284, 285, 302.
 Raum, elliptischer 213.
 —, hyperbolischer 218.
 —, projektiver 106, 134, 262, 273.
 —, vier- und mehrdimensionaler 41, 42, 79, 127—140, 213, 256, 257, 285 bis 286, 300—302.
 Raumkurven § 27, 181—183, § 31.
 Regelfläche 14, 144—145, 151, § 30, 252 bis 253, 301.
 Reguläre Konfiguration 95—96, 111, 127, 140.
 Regulärer Flächenpunkt 161—162.

- Regulärer Kurvenpunkt 153, 154, 159.
 Reguläres Polyeder vgl. Polyeder.
 — Punktsystem vgl. Punktsystem.
 — Zell § 23, 213, 257.
 Rektifizierende Ebene 158—160.
 Relativbewegung 248—249.
 Relativitätstheorie 152, 172, 230.
 Reyesche Konfiguration § 22, 137 bis 140.
 Rhomboëder 40.
 Riemann 152, 189.
 Riemannsche Fläche 179, 239, 284 bis 285, 294.
 Riemannscher Abbildungssatz 234—235, 238.
 Ringfläche vgl. Torus.
 Rollkurven der Ellipse § 42.
 Römische Fläche 267.
 Rotationsellipsoid 9.
 Rotationsflächen 6, 9, 169, 180, 194, 196, 204—206, 213, 251.
 Rotationshyperboloid 10, 184, 252 bis 253.
 Rotationskegel 7, 21, 25, 26, 193.
 Rotationsparaboloid 9.
 Rotationszylinder 6, 193, 204, 205, 229, 263.
 Rückkehrkante 183.
- Sattelfläche** vgl. hyperbolisches Paraboloid.
Sattelförmige Krümmung vgl. hyperbolische Kr.
 Schar algebraischer Gebilde § 24.
 Schiebung (in der hyperbolischen Ebene) 227—228, 291, § 50.
 Schlaefliche Doppelsechs § 25.
 Schlichtartige Bereiche 261.
 Schmiegungebene 158—160, 182, 196.
 Schmiegungekugel 161.
 Schnabelspitze 153—154, 157.
 Schnirelmann 196.
 Schnittkurven zweier Flächen zweiter Ordnung 22, 28.
 Schnittpunktsätze 117, 213, 217.
 Schraubenflächen 185, 204—206.
 Schraubenlinie 161, 189, 205.
 Schraubung 73, 204, 251.
 Schraubungsachse, momentane 251.
 Seelenachse eines Torus 288—289, 293.
 Seifenblase, Seifenhaut 167—168, 198, 200—201.
 Selbstdurchdringung 266, 270—272, 277, 279, 280, 282, 283, 285.
- Siebeneck, sich selbst ein- und umbeschriebenes 98.
 Simple Polyeder 254—258.
 Singuläre Punkte ebener Kurven 153 bis 154, 176.
 Sphärische Abbildung 159—160, § 29, 182, 185, 237—239, 283.
 Spiegelung 78, 208, 226, 286.
 — am Kreis vgl. Inversion.
 — an der Kugel vgl. Inversion im Raum.
 Spitze 153—154, 157, 176, 180, 245.
 Stangenmodelle vgl. bewegl. Hyperboloid und bewegl. Paraboloid.
 Staude 17.
 Steinersche Fläche 267.
 Stereographische Projektion § 36, 236.
 Stetige Abbildung 230—231, 286.
 Stetigkeit 84, 115, 211—212, 216.
 Striktion vgl. Drall.
 Striktionslinie vgl. Kehllinie.
- Tangente einer ebenen Kurve** 152—157.
 — einer Raumkurve 158—160, 181 bis 183.
 Tangentienbild 154, 157, 159—160.
 Tangentialebene 161—162, 175—178, 184.
 Tetraeder 40, 47, 76, 80—83, 118, 125, § 23.
 Tetraedrische Kugellagerung 43—46, 48.
 Topologie 230, 253—254, 259.
 Topologisch reguläre Polyeder 258.
 Topologische Abbildbarkeit zweier Flächen 284.
 — Abbildung einer Fläche auf sich § 49.
 Torsion 160—161.
 Torus 177—178, 192, 203, 258, 272, 275 bis 276, 288—290, § 50, 296, 302.
 Translationen 53—55, 73.
 Translationsgruppen 57, 62—63, 75, 228, 289—290, § 50.
 Transzendente Funktionen 285.
 Trennungssaxiome 211—212.
 Trochoide 244—249.
- Überlagerungsfläche, universelle** 289 bis 291, § 50, 302.
 —, zweiblättrige 276.
 Umklappung der hyperbolischen Ebene 226.
 Unendlich ferne Ebene 106.
 — — Punkte und Geraden 101—102, 106, 119—120, 124, 221, 229, 262.

- Untergruppe 59, 64, 65, 66, 68, 70, 73, 83.
Valenzen eines Atoms 46—47.
 Variationsproblem 168, 189, 201, 234.
 Variationsrechnung 168, 198, 200.
 Verbiegung 171—173, 181, 185, 201 bis 203, § 33.
 Verwindung einer Raumkurve 182, § 31.
 Vierdimensionaler Raum vgl. Räum.
 Vierecke, wechselseitig umbeschriebene 98.
 Vierfarbenproblem 296, 300.
 Vierseit, vollständiges 85—86, 102, 121, 139.
 Vollständiges räumliches n -Eck 111.
 Volumen 198—200.
Wendelfläche 185—186, 205.
 Wendepunkt 90, 153—154, 157, 162, 175, 183.
 Widerstand, elastischer 196.
 Windung vgl. Torsion.
 Windungspunkt 179, 239, 285.
 Winkel, hyperbolischer 215, 226.
 — zweier Kurven 5, 152.
Winkelproportional 233.
 Winkelsumme im Dreieck 217, 227.
 — im Fundamentalbereich 228.
 Winkeltreu vgl. konform.
 Würfel 11, 42, 80—83, 119—120, 124 bis 137, 148.
 —, n -dimensionaler 140.
 Würfelgitter 42.
 Wurtzit 48.
Yates, R. C. § 42.
Zahlenebene 231.
 Zahnradübertragung durch Hyperboloidräder 253.
 Zehneck, sich selbst um- und einbeschriebenes 112—113.
 Zeigersystem, reguläres 62, § 12, 77—79.
 Zell § 23, 213, 257.
 Zentralperspektive 99—102, 129—139.
 Zirkel 239.
 Zusammenhangszahl 258—260, 261, 266 bis 267, 272—273, 276, 284, 297 bis 300.
 Zykliden 192—194.
 Zykloiden 244—249.
 Zylinder (s. auch Kreiszyylinder) 6, 11, 182, 184.