

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343> | LOG_0058

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

barem, aber völlig unzerreißbarem und unverkittbarem Material hergestellt und werden Eigenschaften kennenlernen, die erhalten bleiben, wenn man eine aus solchem Material hergestellte Figur beliebig verzerrt. Z. B. kommen alle topologischen Eigenschaften der Kugel in gleicher Weise auch dem Ellipsoid oder dem Würfel oder Tetraeder zu. Dagegen bestehen topologische Unterschiede zwischen der Kugel und dem Torus. Denn es ist anschaulich klar, daß man eine Kugel ohne Zerreißung oder Verkittung nicht in einen Torus verwandeln kann.

In der Entwicklung der geometrischen Wissenschaft traten topologische Probleme naturgemäß noch später auf als projektive; nämlich erst im 18. Jahrhundert. Später zeigte sich, daß die topologischen Aussagen trotz ihrer scheinbaren Unbestimmtheit gerade mit den genauesten abstrakten Grenaussagen der Mathematik zusammenhängen, nämlich mit der Algebra und Funktionentheorie der komplexen Zahlen und mit der Gruppentheorie. In der Gegenwart gehören unter allen Zweigen der Mathematik die topologischen Forschungen zu den fruchtbarsten und erfolgreichsten.

Wir müssen uns im folgenden auf einige Fragen aus der Topologie der Flächen des dreidimensionalen Raums beschrnken¹. Wir beginnen mit denjenigen Flächen, die sich topologisch am einfachsten untersuchen lassen: den Polyedern.

§ 44. Polyeder.

Unter einem Polyeder verstehen wir jedes System von Polygonen, die so angeordnet sind, daß einerseits an jeder Kante zwei und nur zwei Polygone (unter einem Winkel) zusammenstoßen und daß man andererseits durch berschreiten von Kanten von jedem Polygon des Systems zu jedem anderen gelangen kann.

Die einfachsten und wichtigsten Polyeder sind die „simplen“. So nennen wir ein Polyeder, wenn es durch stetige Deformation in eine Kugel verwandelt werden kann. Beispiele simpler Polyeder sind die regulären Polyeder (§ 14). Wir werden bald sehen, daß es noch zahlreiche andere als simple Polyeder gibt, die sich also nicht in eine Kugel verzerren lassen.

Die regulären Polyeder hatten ferner die Eigenschaft, frei von einspringenden Kanten zu sein. Hieraus folgt, daß die regulären Polyeder konvex sind. Konvex nennt man nämlich jedes Polyeder, das ganz auf einer Seite jeder seiner Flächen liegt, das ich also mit jeder Seitenfläche auf eine ebene Tischplatte legen kann. Die Konvexität ist keine topologische Eigenschaft, denn ich kann ein konvexes Polyeder durch eine topologisch unwesentliche Abänderung in ein nichtkonvexes Poly-

¹ Als weitergehende Einführung in die grundlegenden Begriffe der Topologie sei auf das gleichzeitig erscheinende kleine Buch von ALEXANDROFF, „Einfachste Grundbegriffe der Topologie“ verwiesen.

eder verwandeln. Man kann aber aus der Konvexität eines Polyeders auf eine topologische Eigenschaft schließen. Eine einfache Überlegung ergibt nämlich, daß jedes konvexe Polyeder notwendig ein simples ist¹.

Die Anzahlen der Ecken, Kanten und Flächen eines simplen Polyeders stehen zueinander immer in einer wichtigen Beziehung, die nach ihrem Entdecker der EULERSche Polyedersatz genannt wird. Sei nämlich E die Anzahl der Ecken, K die der Kanten, F die der Flächen des Polyeders, so besagt der EULERSche Polyedersatz, daß die Zahl $E - K + F$ für alle simplen Polyeder den Wert 2 hat:

$$E - K + F = 2.$$

Wir prüfen diesen überraschenden Satz an einigen regulären Polyedern nach:

Tetraeder: $E - K + F = 4 - 6 + 4 = 2.$

Würfel: $8 - 12 + 6 = 2.$

Oktaeder: $6 - 12 + 8 = 2.$

Zum Beweise des EULERSchen Satzes verschaffen wir uns in der Ebene ein Bild des simplen Polyeders, das wir sein ebenes Netz nennen wollen. Wir nehmen eine beliebige Seitenfläche des Polyeders fort und verzerren die übrigen Seitenflächen, bis sie in eine und dieselbe Ebene fallen. Man kann es so einrichten, daß die Seitenflächen bei der Verzerrung geradlinig begrenzte Polygone bleiben und daß sich deren Eckenzahl nicht ändert. (Dagegen ist es natürlich nicht möglich, daß die Polygone in der Ebene den ursprünglichen Polygonen durchweg kongruent sind.) Das so entstandene, in einer Ebene liegende Polygonensystem nennen wir das ebene Netz des Polyeders. Die Abb. 153 bis 154, S. 129 können wir als ebene Netze der regulären Polyeder ansehen.

Das ebene Netz enthält ebenso viele Ecken und Kanten wie das Polyeder, dagegen eine Fläche weniger. Wir nehmen nun im ebenen Netz eine Reihe von Abänderungen vor, bei denen sich die Zahl $E - K + F$ nicht ändert und die Gestalt des Netzes sich vereinfacht. Wenn zunächst in dem Netz Flächen vorkommen, die mehr als drei Seiten besitzen, so ziehen wir in diesem Polygon eine Diagonale. Dadurch ist eine Fläche und eine Kante hinzugekommen, die Eckenzahl ist die gleiche geblieben, $E - K + F$ ist also nicht geändert (Abb. 270). Wir setzen

¹ Zwischen den konvexen und den nichtkonvexen Polyedern besteht ein eigenartiger Unterschied. Während nämlich jedes geschlossene konvexe Polyeder starr ist, existieren geschlossene nichtkonvexe Polyeder, deren Seitenflächen gegeneinander bewegt werden können. Die Starrheit der konvexen Polyeder steht in Analogie zu der auf S. 203 erwähnten Starrheit der geschlossenen konvexen Flächen. Bisher ist es aber nicht gelungen, deren Starrheit aus der Starrheit der Polyeder durch unmittelbaren Grenzübergang zu folgern.

dies Verfahren so lange fort, bis wir ein Netz erhalten, in dem alle Flächen Dreiecke sind.

Wenn wir an ein derartiges Dreiecksnetz längs einer Kante ein neues Dreieck anfügen, so daß die beiden Ecken, in welche die Kante ausläuft, auch Ecken des neuen Dreiecks sind (Abb. 271), so wird die

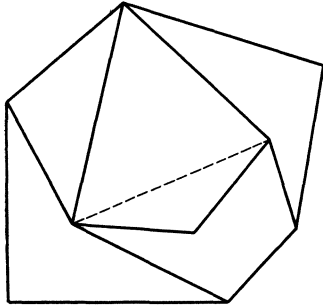


Abb. 270.

Zahl der Ecken und Flächen um je eins, die Zahl der Kanten um zwei vermehrt; der betrachtete Ausdruck bleibt also wieder ungeändert. Ebenso ändert er sich nicht, wenn wir (Abb. 272) an einer konkaven Stelle des Netzumfanges eine Kante hinzufügen, durch die zwei solche Ecken des Umfangs verbunden werden, daß ein Dreieck entsteht; denn hierdurch wird die Zahl der Ecken nicht geändert, dagegen die der Kanten und Flächen um je eins vermehrt.

Nun sieht man unmittelbar ein, daß jedes beliebige Dreiecksnetz aus einem einzelnen Dreieck durch mehrmalige Wiederholung dieser beiden Operationen erzeugt werden kann. Die Zahl $E - K + F$ besitzt also für jedes beliebige Dreiecksnetz und damit auch für jedes andere

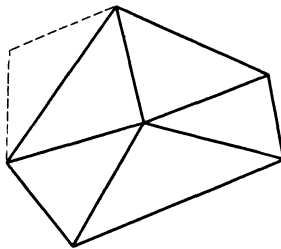


Abb. 271.

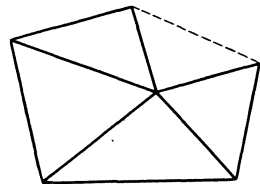


Abb. 272.

ebene Netz denselben Wert wie für ein einzelnes Dreieck: $E - K + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Da nun das Netz genau so viele Ecken und Kanten hat wie das simple Polyeder, dagegen eine Fläche mehr, so muß für das simple Polyeder gelten:

$$E - K + F = 2^*.$$

* POINCARÉ hat den EULERSCHEN Satz auf den n -dimensionalen Raum verallgemeinert. Dort treten statt der Ecken, Kanten und Flächen in entsprechender Weise 0-, 1-, 2- bis $n-1$ -dimensionale Gebilde auf, deren Anzahlen wir mit N_0, N_1, N_2 bis N_{n-1} bezeichnen wollen. Dann gilt für die Gebilde, die den simplen Polyedern entsprechen:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots = 1 - (-1)^n.$$

Für $n = 3$ ist das die EULERSCHE Formel.

Mit Hilfe des EULERSchen Satzes läßt sich ein neuer einfacher Beweis dafür geben, daß nur fünf reguläre Polyeder möglich sind (vgl. S. 79, 80). In dem betrachteten regulären Polyeder mögen an jeder Ecke n Seitenflächen und somit auch n Kanten zusammenstoßen. Wenn also wieder E , K , F die Bedeutung haben wie bisher, so ist die Anzahl der Kanten, die von irgendeiner Ecke auslaufen, gleich nE . Dabei haben wir aber jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante zwei Ecken verbindet. Es ist also

$$nE = 2K.$$

Ferner möge in dem betrachteten Polyeder jede Fläche von r Kanten begrenzt sein. Dann ist rF die Anzahl der Kanten, die irgendeine Fläche des Polyeders begrenzen. Bei dieser Abzählung haben wir aber wieder jede Kante zweimal gezählt, da jede Kante an zwei Seitenflächen angrenzt. Also ist

$$rF = 2K.$$

Durch Einsetzen der letzten beiden Gleichungen in die EULERSche Formel erhalten wir

$$\frac{2K}{n} - K + \frac{2K}{r} = 2$$

oder umgeformt

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K}.$$

Ihrer Bedeutung wegen müssen sowohl n als auch r mindestens 3 sein oder größer. Wären andererseits beide Zahlen größer als 3, so erhielte man

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0.$$

Das ist unmöglich. Setze ich $n = 3$, so ergibt sich

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{r} - \frac{1}{6}.$$

Also kann r für $n = 3$ nur die Werte 3, 4, 5 annehmen; K erhält dann die Werte 6, 12, 30. Da die Gleichungen in bezug auf n und r symmetrisch sind, erhält man entsprechende Werte von n für $r = 3$. Wir haben damit sechs allein mögliche Fälle gefunden, von denen zwei identisch sind, nämlich $n = 3$, $r = 3$. Es bleiben fünf verschiedene Typen übrig, und sie sind in der Tat durch die regulären Polyeder verwirklicht¹.

Die Besonderheit dieses Beweises im Gegensatz zu dem früher (S. 79, 80) gegebenen besteht darin, daß wir gar nicht die Voraussetzung gemacht haben, daß alle Seitenflächen reguläre Polygone sind. Wir haben nur vorausgesetzt, daß alle Flächen von gleich vielen Kanten

¹ In ähnlicher Weise führt die POINCARÉsche Verallgemeinerung des EULERSchen Satzes zur Bestimmung der regulären Zelle der höherdimensionalen Räume.

begrenzt werden und daß in jeder Ecke gleich viele Kanten zusammenlaufen. Es gibt demnach nicht mehr „topologisch reguläre“ als „metrisch reguläre“ Polyeder, wenn man sich auf simple Polyeder beschränkt.

Wir wenden uns nun zu den nichtsimplyn Polyedern. Als Beispiel nennen wir den prismatischen Block (Abb. 273). Er besteht aus einem Quader, aus dessen Mitte ein parallel gelagerter kleinerer Quader herausgestemmt ist; ferner sind die beiden Grundflächen, welche die Quader gemein haben, auf die in der Figur angegebene Weise abgeschrägt. Dieses Polyeder läßt sich nicht in eine Kugel verzerren, wohl aber in einen Torus¹. Andere Typen erhält man auf ähnliche Art durch Herausstemmen mehrerer Löcher (Abb. 274).

Um über alle diese Polyeder eine Übersicht zu gewinnen, ordnen wir jedem Polyeder eine bestimmte Zahl h , den sog. Zusammenhang, zu.

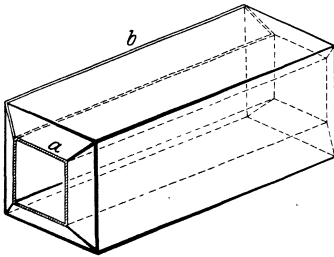


Abb. 273.

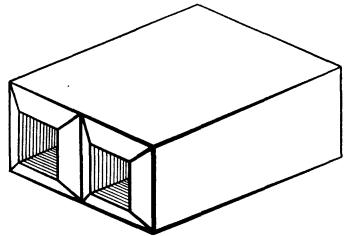


Abb. 274.

Wir betrachten die geschlossenen, sich nicht selbst durchschneidenden Kantenzüge des Polyeders. Wenn ein Polyeder durch jeden solchen Kantenzug in zwei getrennte Teilflächen zerlegt wird, so ordnen wir ihm den Zusammenhang $h = 1$ zu. Diese Zusammenhangszahl besitzen offenbar alle simplen Polyeder, denn die Kugelfläche wird durch jeden auf ihr verlaufenden geschlossenen Kurvenzug in zwei Teile zerlegt. Umgekehrt erkennt man unmittelbar, daß die Polyeder der Zusammenhangszahl 1 sich stets in eine Kugel deformieren lassen. Deshalb werden die simplen Polyeder auch als die einfach zusammenhängenden Polyeder bezeichnet.

Auf dem prismatischen Block dagegen gibt es einen geschlossenen Kantenzug, der das Polyeder nicht zerlegt (z. B. das Quadrat a in Abb. 273). Allen Polyedern mit dieser Eigenschaft ordnen wir einen höheren Zusammenhang zu. Um ihn zu bestimmen, betrachten wir nunmehr alle die (nicht notwendig geschlossenen) Kantenzüge, die zwei Punkte des zuerst gezeichneten Kantenzuges miteinander verbinden.

Wenn jedes solches Paar von Kantenzügen das Polyeder zertrennt, ordnen wir diesem den Zusammenhang $h = 2$ zu. Andernfalls setzen wir das Verfahren fort. Allgemein definieren wir:

¹ Auch der prismatische Block ist topologisch regulär.

Ein Polyeder heißt h -fach zusammenhängend, wenn sich auf ihm in einer bestimmten Reihenfolge $h - 1$, aber nicht h Kantenzüge auffinden lassen, deren Gesamtheit das Polyeder nicht zertrennt¹. Dabei muß der erste dieser Kantenzüge geschlossen sein, während jeder weitere Kantenzug zwei Punkte der vorhergehenden verbindet.

Auf dem prismatischen Block gibt es, wie aus Abb. 273 ersichtlich, ein System von zwei solchen Kurvenzügen (das Quadrat a und das Trapez b). Dieses Polyeder ist also mindestens dreifach zusammenhängend. Wir werden gleich sehen, daß es in Wirklichkeit genau dreifach zusammenhängend ist.

Es entsteht nun die Frage, ob der früher für einfach zusammenhängende Polyeder bewiesene EULERSche Satz auch auf Polyeder vom beliebigen Zusammenhang h verallgemeinert werden kann. Wir können nicht erwarten, daß der Satz unverändert gilt, denn beim Beweise wurde das „ebene Netz“ verwandt, dessen Konstruktion ersichtlich nur bei einfach zusammenhängenden Polyedern möglich ist. Es läßt sich nun zeigen, daß im allgemeinen die Formel gilt:

$$E - K + F = 3 - h.$$

Für $h = 1$ liefert das die früher bewiesene Gleichung. Ein weiteres Beispiel bildet der prismatische Block. Er hat offenbar sechzehn Ecken, zweiunddreißig Kanten und sechzehn Flächen, und es gilt die Gleichung

$$16 - 32 + 16 = 3 - 3 = 0.$$

Daraus folgt, daß der prismatische Block genau dreifach zusammenhängend ist. Ebenso ist auch im allgemeinen Fall der EULERSche Satz ein bequemes Mittel, den Zusammenhang eines Polyeders festzustellen. Man hat nur die Ecken, Kanten und Flächen abzuzählen und braucht nicht den Verlauf der Kantenzüge zu verfolgen.

§ 45. Flächen.

Wir haben gesehen, daß die simplen Polyeder sich in die Kugelfläche deformieren lassen und daß der prismatische Block sich in den Torus deformieren läßt. In ähnlicher Weise kann man auch kompliziertere topologische Gebilde durch polyederartige Figuren ersetzen. Die Theorie dieser Gebilde ist dadurch zurückgeführt auf das Studium von Figuren, die aus einfachen Bausteinen in leicht angebbarer Weise zusammengesetzt sind. Diese Betrachtungsweise, „kombinatorische Topologie“ genannt, hat ferner den großen Vorzug, daß sie sich ohne weiteres auf den Fall von mehr als drei Dimensionen übertragen läßt. Denn die Struktur eines Polyeders läßt sich vollständig durch eine schematische

¹ D. h. zwei beliebige Punkte des Polyeders sollen sich stets durch eine auf dem Polyeder verlaufende Kurve verbinden lassen, die keinen der Kantenzüge trifft.