

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0059

LOG Titel: § 45. Flächen.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ein Polyeder heißt h -fach zusammenhängend, wenn sich auf ihm in einer bestimmten Reihenfolge $h - 1$, aber nicht h Kantenzüge auffinden lassen, deren Gesamtheit das Polyeder nicht zertrennt¹. Dabei muß der erste dieser Kantenzüge geschlossen sein, während jeder weitere Kantenzug zwei Punkte der vorhergehenden verbindet.

Auf dem prismatischen Block gibt es, wie aus Abb. 273 ersichtlich, ein System von zwei solchen Kurvenzügen (das Quadrat a und das Trapez b). Dieses Polyeder ist also mindestens dreifach zusammenhängend. Wir werden gleich sehen, daß es in Wirklichkeit genau dreifach zusammenhängend ist.

Es entsteht nun die Frage, ob der früher für einfach zusammenhängende Polyeder bewiesene EULERSche Satz auch auf Polyeder vom beliebigen Zusammenhang h verallgemeinert werden kann. Wir können nicht erwarten, daß der Satz unverändert gilt, denn beim Beweise wurde das „ebene Netz“ verwandt, dessen Konstruktion ersichtlich nur bei einfach zusammenhängenden Polyedern möglich ist. Es läßt sich nun zeigen, daß im allgemeinen die Formel gilt:

$$E - K + F = 3 - h.$$

Für $h = 1$ liefert das die früher bewiesene Gleichung. Ein weiteres Beispiel bildet der prismatische Block. Er hat offenbar sechzehn Ecken, zweiunddreißig Kanten und sechzehn Flächen, und es gilt die Gleichung

$$16 - 32 + 16 = 3 - 3 = 0.$$

Daraus folgt, daß der prismatische Block genau dreifach zusammenhängend ist. Ebenso ist auch im allgemeinen Fall der EULERSche Satz ein bequemes Mittel, den Zusammenhang eines Polyeders festzustellen. Man hat nur die Ecken, Kanten und Flächen abzuzählen und braucht nicht den Verlauf der Kantenzüge zu verfolgen.

§ 45. Flächen.

Wir haben gesehen, daß die simplen Polyeder sich in die Kugelfläche deformieren lassen und daß der prismatische Block sich in den Torus deformieren läßt. In ähnlicher Weise kann man auch kompliziertere topologische Gebilde durch polyederartige Figuren ersetzen. Die Theorie dieser Gebilde ist dadurch zurückgeführt auf das Studium von Figuren, die aus einfachen Bausteinen in leicht angebbarer Weise zusammengesetzt sind. Diese Betrachtungsweise, „kombinatorische Topologie“ genannt, hat ferner den großen Vorzug, daß sie sich ohne weiteres auf den Fall von mehr als drei Dimensionen übertragen läßt. Denn die Struktur eines Polyeders läßt sich vollständig durch eine schematische

¹ D. h. zwei beliebige Punkte des Polyeders sollen sich stets durch eine auf dem Polyeder verlaufende Kurve verbinden lassen, die keinen der Kantenzüge trifft.

Zusammenheftungsvorschrift beschreiben, ohne Hilfe der räumlichen Anschauung.

Der Anschauung dagegen kommt es oft näher, die Flächen unmittelbar zugrunde zu legen; so ist die Kugel ein einfacheres Gebilde als die simplen Polyeder und der Torus einfacher als der prismatische Block. Wir wollen daher jetzt den Begriff der Zusammenhangszahl von den Polyedern auf beliebige Flächen ausdehnen.

Für die Kugel haben wir $h = 1$ zu setzen und für den Kreisring $h = 3$. Flächen von höherem Zusammenhang können wir dadurch erzeugen, daß wir eine aus knetbarer Masse hergestellte Kugel plattdrücken und mehrere Löcher hindurchbohren (Abb. 275). Solche Flächen wollen wir Brezeln nennen. Man kann zeigen, daß eine Brezel mit p Löchern notwendig den Zusammenhang $h = 2p + 1$ besitzt. In der Figur sind für die Brezeln vom Zusammenhang 1, 3, 5, 7 Systeme von 0, 2, 4, 6 nicht zerstückelnden Kurven eingezeichnet.

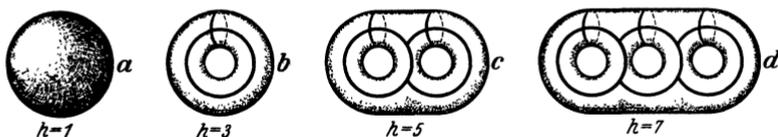


Abb. 275.



Abb. 276.

Man sieht leicht ein, daß jede weitere, zwei Randpunkte des Schnittsystems verbindende Kurve die zugehörige Fläche zerstückeln muß.

Auf Flächen sind die Kurvenzüge freier wählbar als auf Polyedern, wo wir uns auf Kantenzüge beschränkten. Man kann deshalb für die Zusammenhangszahl von Flächen noch andere Definitionen geben. Z. B.:

Auf einer geschlossenen Fläche vom Zusammenhang h lassen sich $h - 1$ geschlossene Kurven zeichnen, die die Fläche nicht zertrennen; jedes System von h derartigen Kurven führt dagegen zu einer Zerstückelung der Fläche.

In Abb. 276 sind solche Kurven für die Fälle $h = 1, 3, 5, 7$ gezeichnet.

Man kann die Kurven auch der weiteren Bedingung unterwerfen, durch einen beliebig gewählten Punkt der Fläche zu gehen. Man erhält dann die für manche Zwecke bequeme „kanonische Zerschneidung“ der Fläche, für die Abb. 285, 286, 287, S. 264, 265, drei Beispiele geben.

Dagegen gilt der Satz nicht mehr ungeändert, wenn man sich auf Systeme geschlossener Kurven beschränkt, die einander nicht schnei-

den. Für Flächen von ungerader Zusammenhangszahl läßt sich nämlich zeigen:

Auf einer geschlossenen Fläche vom Zusammenhang $h = 2p + 1$ gibt es p und nicht mehr als p geschlossene, einander nicht schneidende Kurven, die die Fläche nicht zerstückeln.

Von dem Zutreffen dieses Satzes kann man sich an Abb. 276 überzeugen.

Bisher haben wir nur Flächen betrachtet, die ganz im Endlichen liegen und keine Randkurven haben. Man kann den Zusammenhangsbegriff auch auf weitere Fälle ausdehnen. Zunächst möge die Fläche zwar ganz im Endlichen liegen, aber eine Anzahl in sich geschlossener Randkurven besitzen. Diese mögen sich selbst und einander nicht überschneiden. Wir haben dann Flächenstücke vor uns, wie in Abb. 277 gezeichnet. Andere Typen solcher Flächen erhält man, wenn man sich die in Abb. 275 u. 276 gezeichneten geschlossenen Flächen hohl denkt

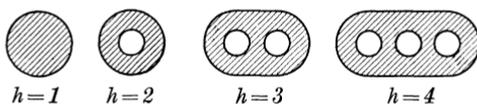


Abb. 277.



Abb. 278.

und dann beliebig viele Löcher hineinschneidet (Abb. 278)¹. Auch auf diesen Flächen bestimmen wir den Zusammenhang durch ein System von Kurvenzügen, mit einem einzigen Unterschied gegen die zuerst gegebene Definition: Die erste Kurve soll nicht mehr geschlossen sein, sondern zwei Randpunkte miteinander verbinden; jede hinzugefügte Kurve darf außer auf den vorher gezeichneten Kurven auch in Randpunkten beginnen und enden. Dann haben die in Abb. 278 dargestellten Flächen der Reihe nach den Zusammenhang 2, 3, 7, 8.

Die Bestimmung des Zusammenhangs durch geschlossene Kurven ist auf berandete Flächen nicht ohne weiteres übertragbar.

Wir nehmen nunmehr an, daß die — berandete oder unberandete — Fläche ins Unendliche geht. Dann hängt die topologische Struktur der Fläche davon ab, ob wir sie als im metrischen oder im projektiven Raum liegend annehmen. Im ersten Fall beschränken wir uns auf die

¹ Im Gegensatz zu den in Abb. 277 dargestellten Flächen lassen sich die Flächen von Abb. 278b, c, d auch bei beliebiger Verzerrung nicht aus einem ebenen Blatt Papier ausschneiden. Der hier zutage tretende Unterschied spielt in der geometrischen Funktionentheorie eine Rolle (schlichtartige und nicht-schlichtartige Bereiche).

endlichen Punkte. Der Raum verhält sich dann, als ob er gegen das Unendliche durch eine sehr große Kugel abgeschlossen wäre. Wir können die Fläche durch denjenigen Teil von ihr ersetzen, der im Innern der Kugel liegt; dies ist ein im Endlichen liegendes berandetes Flächenstück, auf das wir die vorher entwickelte Theorie anwenden können¹.

Im projektiven Raum treffen wir auf ganz andere Verhältnisse. Wir haben jeder Geraden nur einen einzigen unendlich fernen Punkt zugeordnet und sie als geschlossene Kurve angesehen; ihre beiden ins Unendliche laufenden Äste hängen im unendlich fernen Punkt der Geraden miteinander zusammen. Außerdem ist dieser Punkt allen zur ersten parallelen Geraden gemeinsam. Nach dieser Auffassung hängt auch der projektive Raum als Ganzes durch seine unendlich fernen Punkte mit sich zusammen. Eine Fläche enthält einen unendlich fernen Punkt, wenn sie sich, je weiter wir in geeigneter Weise auf ihr fortschreiten, immer mehr einer bestimmten Geraden nähert, in deren Richtung der unendlich ferne Punkt liegt. Es ist keineswegs notwendig, daß die Fläche auch nach der entgegengesetzten Richtung hin einer parallelen Geraden immer näher kommt; der unendlich ferne Punkt ist dann ein Randpunkt der Fläche. Wenn sich dagegen die Fläche nach beiden Seiten hin immer mehr zwei Parallelen nähert, so ist die

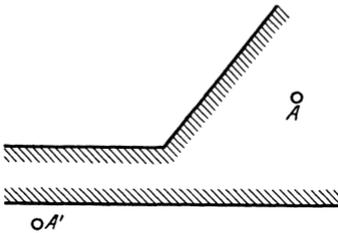


Abb. 279.

Fläche in deren unendlich fernem Punkt als zusammenhängend anzusehen. Wenn ferner die Fläche eine Randkurve besitzt, die ins Unendliche geht, so muß diese Kurve durch das Unendliche hindurch in sich geschlossen sein, d. h. entweder sich in entgegengesetzten oder gleichen Richtungen unbegrenzt zwei parallelen Geraden nähern oder einen Teil der unendlich fernen Geraden enthalten; denn eine nichtgeschlossene Kurve kann nicht den Rand einer Fläche bilden. So ist z. B. das von einer Geraden und zwei Halbgeraden begrenzte ebene Flächenstück, das in Abb. 279 abgebildet ist, im projektiven Raum nicht gegen die übrigen Teile der zugehörigen Ebene abgeschlossen, da wir durchs Unendliche von A nach A' kommen können. Im metrischen Raum dagegen würde

¹ Dabei ist vorausgesetzt, daß wir die Kugel so groß wählen können, daß das in ihrem Innern befindliche Flächenstück seine topologische Struktur bei weiterer Vergrößerung der Kugel nicht mehr ändert. Man kann leicht Beispiele von Flächen angeben, die dieser Voraussetzung nicht genügen. Man schlage etwa um die Gitterpunkte des ebenen quadratischen Punktgitters kleine Kreise, die einander nicht treffen. Entfernt man das Innere aller dieser Kreise aus der Ebene, so erhält man eine ebene Fläche; für den Teil dieser Fläche, der im Innern einer Kugel liegt, kann man leicht den Zusammenhang berechnen. Evident wächst aber dieser Zusammenhang unbegrenzt, wenn man die Kugel bei festgehaltenem Mittelpunkt unbegrenzt vergrößert.

sich dasselbe Flächenstück so verhalten, als wäre es durch eine geschlossene Randkurve begrenzt.

Entsprechendes gilt für die Ebene als Ganzes. Die metrische Ebene besitzt eine geschlossene Randkurve, nämlich die unendlich ferne Gerade. Sie ist also der ebenen Kreisscheibe topologisch äquivalent. Dagegen ist die projektive Ebene eine geschlossene Fläche. Um auch für sie ein einfacheres topologisches Modell zu gewinnen, gehen wir von einer früher (S. 209, 212, 213) behandelten Konstruktion aus. Wir hatten die projektive Ebene umkehrbar eindeutig auf die Oberfläche einer Halbkugel abgebildet, indem wir auf dem Großkreis, der die Halbkugel begrenzt, je zwei Diametralpunkte immer als identisch ansahen. In gleicher Weise können wir statt der Halbkugelfläche auch eine ebene Kreisscheibe verwenden, denn sie ist in die erstgenannte Fläche deformierbar. Die Kreisscheibe wollen wir nun weiterhin in die Fläche eines Quadrats deformieren. Demnach ist die projektive Ebene topologisch äquivalent mit der Fläche eines Quadrats (Abb. 280), falls wir auch hier alle diametralen Randpunkte identifizieren (z. B. $A = A'$ usw. in Abb. 280). Den geschlossenen Kurven der projektiven Ebene entsprechen in diesem Modell erstens die geschlossenen Kurven, zweitens aber auch alle die Kurven, die identifizierte Randpunkte miteinander verbinden (z. B. die Strecke AA' in Abb. 280).

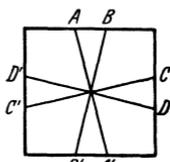


Abb. 280.

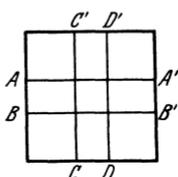


Abb. 281.

Die topologische Untersuchung der projektiven Ebene wollen wir erst später fortsetzen (S. 272ff.). Dagegen führt uns das Verfahren von Abb. 280 sofort zu anderen ähnlichen Konstruktionen. Wir gehen zunächst wieder von der Quadrat- oder Rechtecksfläche aus, identifizieren aber jetzt die Randpunkte nach dem in Abb. 281 angegebenen Schema.

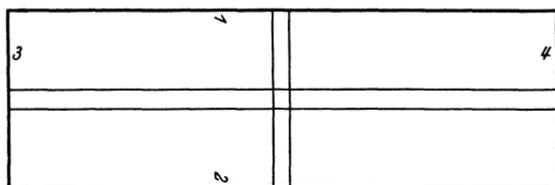


Abb. 282.

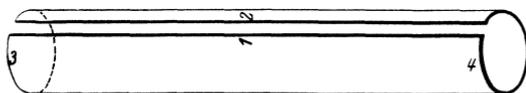


Abb. 283.

Wieder erhalten wir das Modell einer geschlossenen Fläche. Diesmal läßt sich nun die dargestellte

Fläche leicht aus dem Modell wiederherstellen. Wir verbiegen das Rechteck (Abb. 282) zunächst in ein Stück eines Kreiszyklinders (Abb. 283). Dabei heften wir die Rechtecksseiten 1, 2 gerade so aneinander, daß alle identifizierten Punkte dieser Seiten nunmehr wirklich zusammen-

fallen. Die übrigen Seiten 3, 4, die dabei in Kreise übergegangen sind, können wir in der vorgeschriebenen Weise aneinanderheften, indem wir

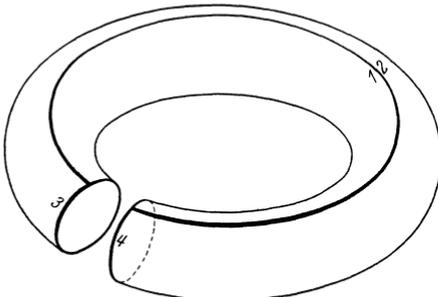


Abb. 284.

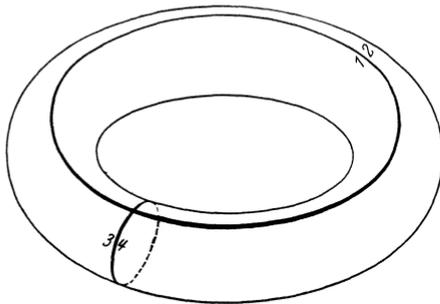


Abb. 285.

(Abb. 284) den Kreiszyinder verbiegen. Wir erhalten schließlich die Fläche des Torus, und der Rand der Rechtecksfläche geht in ein „kanonisches Schnittsystem“ des Torus über, wobei jede Kurve zwei Randstrecken der Rechtecksfläche entspricht (Abb. 285 und 275 b). Umgekehrt: schneidet man den Torus längs eines kanonischen Systems auf, so ergibt sich stets eine Figur, die dem Rechteck mit der angegebenen Ränderzuordnung topologisch äquivalent ist. Man kann dieses Verfahren auf alle „Brezeln“ ausdehnen. Hat die Brezel den Zusammenhang $2p + 1$, so besteht das kanonische Schnittsystem aus $2p$ Kurven. Die Zerschneidung liefert also ein

$4p$ -Eck mit einer bestimmten Ränderzuordnung. Für die Fälle $h = 5, 7$, also $p = 2, 3$, ist die Konstruktion durch Abb. 286, 287 veranschaulicht.

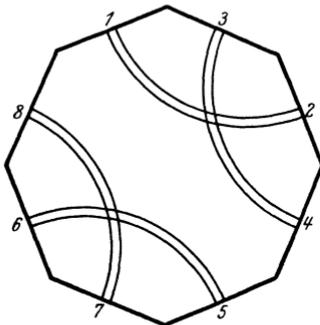


Abb. 286 a.

Die Abbildung der Brezeln auf $4p$ -Ecke spielt sowohl in der Theorie der stetigen Abbildungen (vgl. S. 284) als auch in der Funktionentheorie (vgl. S. 294) eine wichtige Rolle. In beiden Anwendungen geht man davon aus, daß die $4p$ -Ecke eine reguläre Gebietseinteilung der hyperbolischen Ebene (bzw. für $p = 1$ der euklidischen Ebene) liefern, wie wir das auf S. 228 erörtert haben.

Wenn man die Ränderzuordnung abändert, erhält man außer den Brezeln noch eine große Anzahl weiterer Flächen, von denen uns einige im folgenden beschäftigen werden.

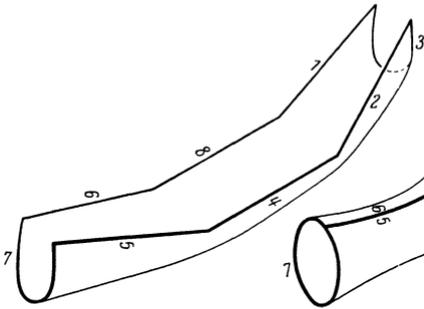


Abb. 286 b.

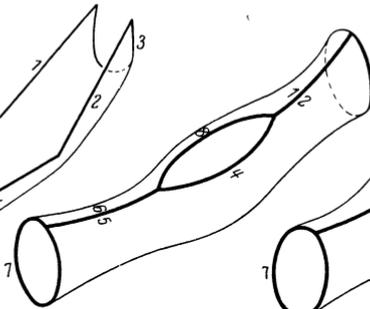


Abb. 286 c.

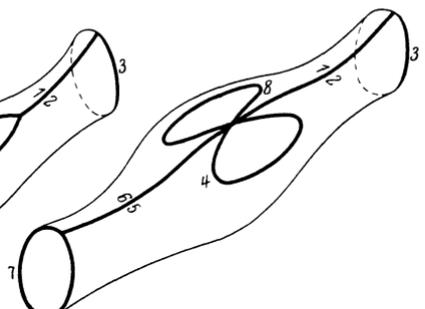


Abb. 286 d.

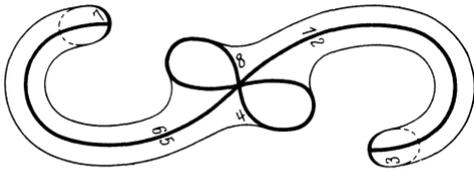


Abb. 286 e.

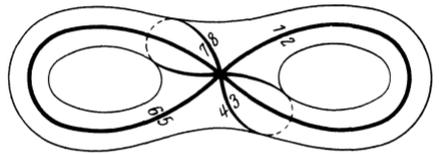


Abb. 286 f.

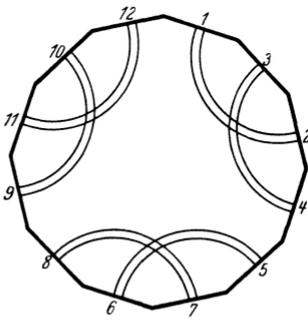


Abb. 287 a.

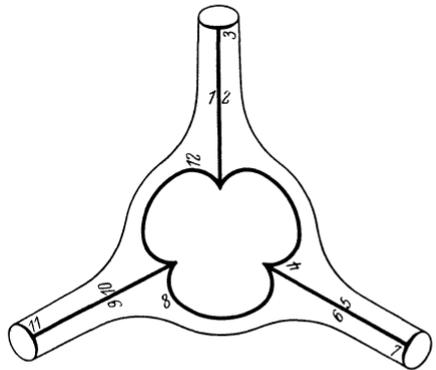


Abb. 287 b.

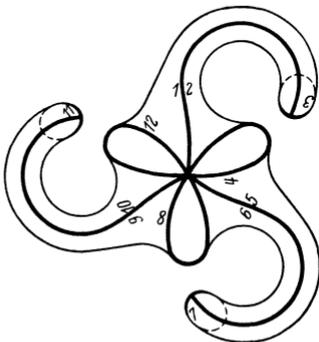


Abb. 287 c.

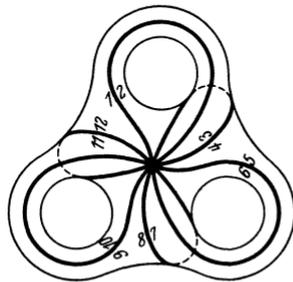


Abb. 287 d.