

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0060

LOG Titel: § 46. Einseitige Flächen.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§ 46. Einseitige Flächen.

Alle bisher betrachteten Polyeder und geschlossenen Flächen hatten ungeraden Zusammenhang. Es entsteht daher die Frage, ob es überhaupt geschlossene Flächen von geradem Zusammenhang gibt, also Gebilde, die in ihrem topologischen Verhalten in der Mitte zwischen Kugel und Torus bzw. zwischen zwei Brezeln stehen.

Die Frage ist zu bejahen. Wir wollen nämlich jetzt ein Polyeder, das Heptaeder, konstruieren, das nach dem EULERSchen Polyedersatz den Zusammenhang 2 besitzt. Wir gehen vom regulären Oktaeder aus (Abb. 288). Zu den acht dreieckigen Seitenflächen dieses Polyeders

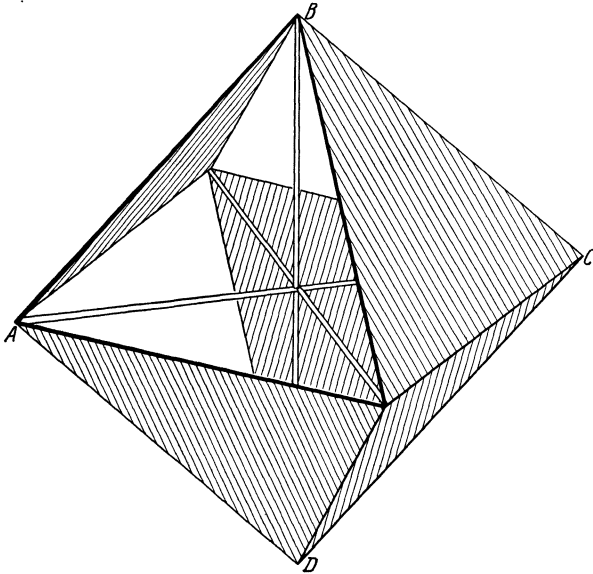


Abb. 288.

nehmen wir noch die drei Quadrate hinzu, welche in den drei durch die Diagonalen des Oktaeders bestimmten Ebenen liegen (z. B. $ABCD$ in Abb. 288). Diese elf Flächen bestimmen nach unserer früheren Definition kein Polyeder, da an jeder Kante nicht zwei, sondern drei Flächen zusammenstoßen. Wir entfernen nun vier Dreiecke, nämlich (gemäß der Stellung der Figur) auf der oberen Hälfte des Oktaeders das linke vordere und das rechte hintere Dreieck, auf der unteren Hälfte das linke hintere und das rechte vordere Dreieck. Es bleiben also nur vier Dreiecke des Oktaeders übrig; sie sind in der Figur schraffiert. Wir haben damit ein Gebilde aus vier Dreiecken und drei Quadraten konstruiert. Seine Kanten und Ecken fallen mit denen des Oktaeders zusammen, dagegen sind die Diagonalen des Oktaeders nicht Kanten, sondern Durchdringungslinien des Gebildes. Ersichtlich stoßen an jeder

Kante genau zwei Flächen zusammen, und man kann durch Überschreiten von Kanten von jeder Fläche zu jeder anderen gelangen. Das Gebilde ist also ein Polyeder; da es sieben Flächen hat, heißt es „Heptaeder“. Es hat, wie das Oktaeder, zwölf Kanten und sechs Ecken. Der verallgemeinerte Polyedersatz liefert also

$$E - F + K = 6 - 12 + 7 = 1 = 3 - h.$$

Demnach besitzt das Heptaeder den Zusammenhang $h = 2$. Wie die simplen Polyeder sich in die Kugel deformieren lassen, so gibt es auch eine einfache geschlossene Fläche, in die sich das Heptaeder deformieren läßt. Es ist die von STEINER untersuchte „römische Fläche“ (Abb. 289). Auch sie besitzt, wie das Heptaeder, drei paarweise aufeinander senkrechte Durchdringungsstrecken. In rechtwinkligen Koordinaten ist sie durch die Gleichung bestimmt

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 + x y z = 0.$$

Es ist also eine Fläche vierter Ordnung.

Außer dem geraden Zusammenhang und den Durchdringungskurven weist das Heptaeder noch eine weitere wichtige Eigenschaft auf, durch die es sich von allen bisher betrachteten Flächen unterscheidet. Denken wir uns die Fläche durch eine Membran verwirklicht und betrachten wir ein Wesen, z. B. einen Käfer, der auf dieser Membran herumspaziert, von einem festen Punkt P aus. Diesem Punkt P liegt auf der anderen Seite der dünnen Membran ein Punkt P' gegenüber, der mit P zusammen-

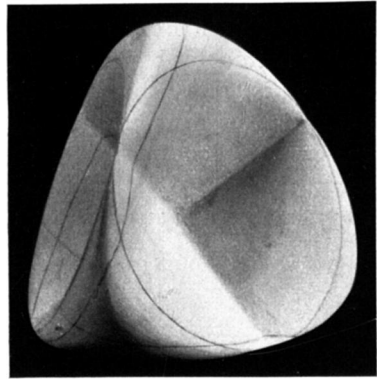


Abb. 289 a.

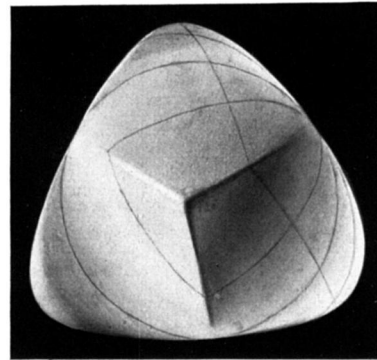


Abb. 289 b.

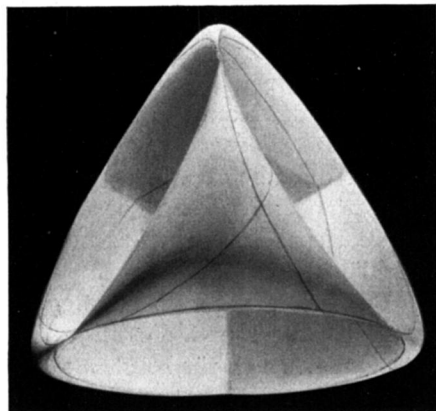


Abb. 289 c.

fällt, wenn wir wieder die Membran durch die ursprüngliche Fläche ersetzen. Es erscheint nun plausibel, daß der Käfer nicht anders von P nach P' gelangen kann, als wenn er sich durch die Membran an irgend-einer Stelle ein Loch bohrt. Für die Kugel und alle Brezeln, die wir bisher betrachtet haben, trifft diese Annahme auch zu. Das Heptaeder dagegen ist eine Fläche, für die die Annahme nicht mehr ohne weiteres gilt. Als Ausgangspunkt P wählen wir (Abb. 290) einen Punkt auf der zur Zeichenebene parallelen Quadratfläche, und zwar auf der dem Beschauer zugewandten Seite. Wir betrachten nun einen Weg, der auf dem Heptaeder von P aus der Reihe nach die Kanten 1, 2, 3, 4 überschreitet

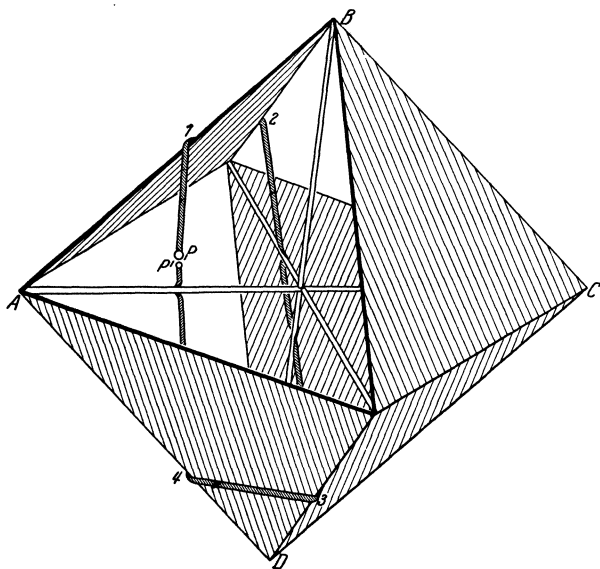


Abb. 290.

und dann wieder auf der ursprünglichen Quadratfläche verläuft. Ein Käfer, der einen solchen Weg nimmt, gelangt ersichtlich nach Überschreitung der Kante 4 auf die Rückseite der Quadratfläche, von deren Vorderseite er ausgegangen war. Er muß zwar die Heptaedermembran dreimal durchbohren, aber nicht an einer Stelle, über die er gerade hinwegwandert, sondern nur an den Durchdringungslinien, wo ihm eine andere Heptaederfläche den Weg versperrt, nicht aber die, welche er durchläuft.

Das Heptaeder heißt deswegen eine „einseitige“ Fläche, während man die Kugel und die bisher beschriebenen Brezeln als zweiseitig bezeichnet. Auch für Flächen mit Rändern läßt sich diese Unterscheidung treffen. Wir untersuchen, ob es auf der (als Membran gedachten) Fläche einen Weg gibt, der von der einen Seite der Fläche zur anderen

führt, ohne den Rand der Fläche zu überschreiten und ohne die Membran an einer Stelle zu durchbohren, über die er gerade hinführt. Wenn es einen solchen Weg gibt, heißt die Fläche einseitig, sonst zweiseitig. Die berandeten Flächen, die wir bisher betrachtet haben, waren sämtlich zweiseitig, z. B. die Kreisscheibe. Für berandete einseitige Flächen gibt es nun ein Beispiel, das viel einfacher ist als das Heptaeder, nämlich das MÖBIUSSCHE BAND. Wir stellen es aus einem Papierstreifen her, der die Gestalt eines stark gestreckten Rechtecks hat (Abb. 291). Würden wir die kurzen Seiten AB und CD so zusammenheften, daß A mit C und B mit D zusammenfallen, dann erhielten wir, wie wir schon früher sahen, ein Stück eines Kreiszyinders, eine

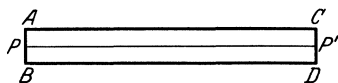


Abb. 291.

berandete zweiseitige Fläche. Anstatt dessen wollen wir vor der Zusammenheftung das eine Ende des Papierstreifens um 180° gegen das andere verdrehen. Wir heften also die Enden so aneinander, daß A mit D und B mit C zusammenfallen (Abb. 292). Damit haben wir ein Modell des MÖBIUSSCHEN Bandes erhalten. Man sieht leicht ein, daß diese Fläche einseitig ist. Wir zeichnen z. B. vor der Zusammenheftung auf den Streifen die Parallele PP' zu den langen Rechteckseiten. Diese gerade Strecke geht nach der Zusammenheftung in einen Weg QQ' über, der von der einen Seite des Bandes auf die andere führt¹.

Man kann die einseitigen Flächen auch mit Hilfe eines weiteren wichtigen topologischen Begriffs kennzeichnen, zu dessen Formulierung man die Fläche nicht durch eine Membran zu ersetzen braucht. Wir denken uns um jeden Punkt irgendeiner gegebenen Fläche (mit Ausnahme der Randpunkte, falls solche vorhanden sind) eine kleine geschlossene Kurve gezogen, die ganz in der Fläche verläuft. Wir versuchen nun

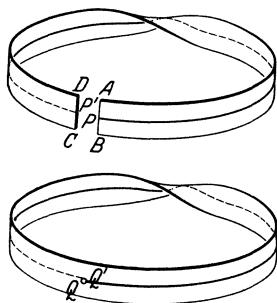


Abb. 292.

auf allen diesen geschlossenen Kurven einen Umlaufsinn so festzusetzen, daß hinreichend benachbarte Punkte stets im gleichen Sinne umlaufen werden. Ist eine solche Festsetzung möglich, so heißt sie eine „Orientierung“ der Fläche, und die Fläche selbst heißt orientierbar. Eine einseitige Fläche kann nun niemals orientierbar sein. Zum

¹ Der Unterschied des MÖBIUSSCHEN Bandes vom zylindrischen Streifen ist noch an folgenden beiden Erscheinungen zu erkennen: Der Rand des MÖBIUSSCHEN Bandes zerfällt nicht wie der des zylindrischen Streifens in zwei geschlossene Kurven, sondern besteht aus einer einzigen geschlossenen Kurve. Zerschneidet man ferner das MÖBIUSSCHE BAND längs der Kurve QQ' , so fällt es nicht wie der zylindrische Streifen auseinander, sondern bleibt zusammenhängend.

Beweise fassen wir einen der geschlossenen Wege ins Auge, deren Existenz mit der Einseitigkeit der Fläche gleichbedeutend ist; etwa den Weg QQ' auf dem MÖBIUSSchen Band, wobei wir jetzt wieder Q und Q' als identisch ansehen. Erteilt man dem Punkt Q einen Umlaufsinn und setzt diese Zuordnung auf dem Wege QQ' stetig fort, so kommt man im Punkt $Q' = Q$ notwendig mit der entgegengesetzten Zuordnung wieder an. Diese Erscheinung könnte nicht eintreten, wenn das MÖBIUSSche Band orientierbar wäre. Das Entsprechende gilt auch für alle übrigen einseitigen Flächen. Umgekehrt kann man zeigen, daß alle zweiseitigen Flächen orientierbar sind. Die Einteilung der Flächen in zwei- und einseitige ist also identisch mit ihrer Einteilung in orientierbare und nichtorientierbare.

Man kann leicht einsehen, daß eine Fläche dann und nur dann nicht orientierbar ist, wenn es auf ihr irgendeine geschlossene Kurve s gibt, so daß ein orientierter kleiner Kreis, dessen Mittelpunkt s stetig durchläuft, am Ausgangspunkt mit der entgegengesetzten Orientierung wieder ankommt (z. B. die Kurve QQ' in Abb. 292). Geht man auf der Fläche an einer Seite der Kurve s entlang, so kommt man auf der anderen Seite wieder an, obgleich man die Kurve nicht überquert hat. Deswegen heißt s eine „einufrige“ Kurve. Während auf den orientierbaren Flächen alle Kurven zwei Ufer haben, ist die Existenz einer einufrigen geschlossenen Kurve kennzeichnend für die nichtorientierbaren Flächen. Einseitige Fläche und einufrige Kurve bedingen einander. Die erste Eigenschaft bezieht sich auf die Lage einer Fläche im Raum, die zweite auf die Lage einer Kurve auf einer Fläche.

Im Gegensatz zum MÖBIUSSchen Band weist das Heptaeder Durchdringungslinien auf. Es ist plausibel, daß jede einseitige geschlossene Fläche Selbstdurchdringungen haben muß. Diese Flächen haben nämlich nur eine Seite, können also keinen Raumteil vom übrigen Raum abgrenzen, d. h. sie besitzen kein Inneres und kein Äußeres. Bei einer geschlossenen Fläche ohne Durchdringungslinien ist ein solches Verhalten unvorstellbar. In der Tat haben alle einseitigen geschlossenen Flächen Selbstdurchdringungen. Der Beweis dafür muß aber auf ganz anderem Wege geführt werden.

Nicht jede Selbstdurchdringung ist eine topologische Singularität. Betrachten wir z. B. die Rotationsfläche, die entsteht, wenn die in Abb. 293 gezeichnete Kurve um die gestrichelte Gerade gedreht wird. Der Punkt A beschreibt eine kreisförmige Durchdringungskurve dieser Fläche. Durch stetige Deformation geht die Fläche aber in die Rotationsfläche über, deren erzeugende Kurve in Abb. 294 gezeichnet ist. Diese Fläche besitzt keine Durchdringung und ist offenbar der Kugel topologisch äquivalent. Umgekehrt kann man aus einer Kugel durch Einbeulen die zuerst beschriebene Rotationsfläche erhalten. Das Auftreten von Durchdringungskurven braucht also keine wesentliche topo-

logische Eigenschaft darzustellen. Während in diesem Beispiel eine geschlossene Durchdringungskurve vorhanden war, besitzt die Durchdringungskurve des Heptaeders sechs Endpunkte, nämlich die Ecken des Heptaeders. Diese sind nun wirklich als Singularitäten anzusehen.

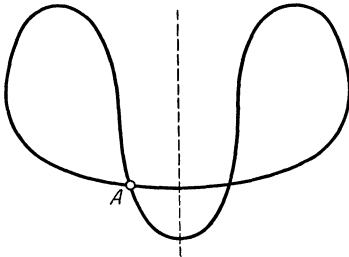


Abb. 293.

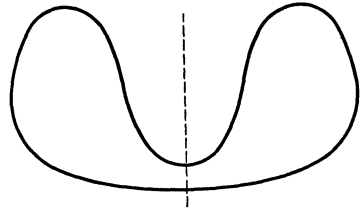


Abb. 294.

Die Umgebung eines regulären Punktes auf einer Fläche läßt sich nämlich stets in eine Kreisscheibe verzerren; für die Umgebung einer Heptaeder-ecke (Abb. 288) ist dagegen eine solche Deformation nicht ohne weiteres möglich. Das Heptaeder besitzt demnach sechs singuläre Punkte, und

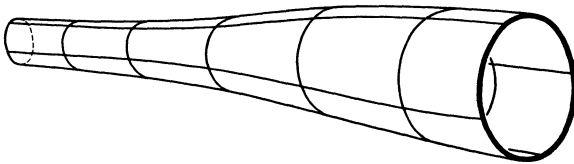


Abb. 295.

es erhebt sich die Frage, ob es überhaupt eine einseitige geschlossene Fläche ohne singuläre Punkte gibt.

Eine solche Fläche ist zuerst von F. KLEIN angegeben worden. Wir gehen aus von einer an beiden Seiten offenen Röhre (Abb. 295). Früher haben wir aus einer solchen Röhre durch Zusammenbiegen und Aneinanderheften der Randkreise die Torusfläche erhalten. Diesmal heften wir die Enden in anderer Weise zusammen. Wir denken uns

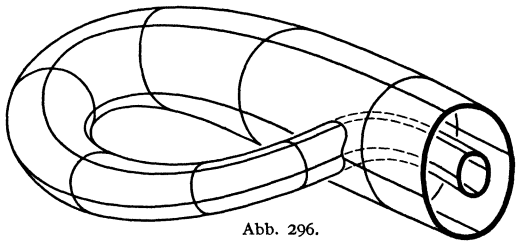


Abb. 296.

das eine Ende der Röhre etwas kleiner als das andere und stecken nach passender Verbiegung der Röhre dieses Ende so durch die Wand der Röhre, daß beide Randkreise konzentrische Lage annehmen (Abb. 296). Indem wir den weiteren Rand der Röhre etwas nach innen, den engeren Rand etwas nach außen biegen, lassen sich die beiden Ränder nun ohne

Singularität zusammenheften. Damit haben wir die KLEINSche Fläche konstruiert (Abb. 297). Sie ist offenbar einseitig und besitzt eine geschlossene Durchdringungskurve an der Stelle, wo wir das engere Ende der Röhre durch die Wand der Röhre hindurchgesteckt haben.

Da das erste Beispiel einer geschlossenen einseitigen Fläche, das Heptaeder, sich von den geschlossenen bisher betrachteten zweiseitigen Flächen auch durch

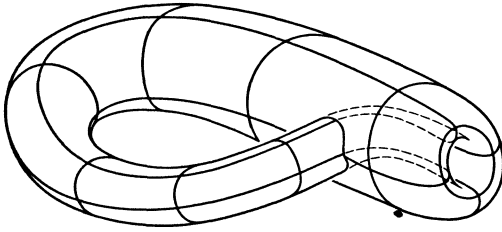







Abb. 297.

seinen geraden Zusammenhang unterschied, können wir erwarten, daß die KLEINSche Fläche ebenfalls geraden Zusammenhang besitzt. In Wahrheit besitzt diese Fläche aber den Zusammenhang 3

wie der Torus. Auch das kanonische Schnittsystem kann genau so wie beim Torus gewählt werden; als erste, geschlossene Zerschneidungskurve wählen wir die Naht, längs der wir die Röhrenden aneinandergeheftet hatten. Als zweite Kurve eine solche, die in das Stück einer Zylindererzeugenden übergeht, wenn wir die KLEINSche

	Ebener Kreisring	zwei Randkurven	$h = 2$	zweiseitig
	MÖBIUSsches Band	eine Randkurve	$h = 2$	einseitig
	Torus	geschlossene Fläche	$h = 3$	zweiseitig
	KLEINSche Fläche	geschlossene Fläche	$h = 3$	einseitig
	projektive Ebene	geschlossene Fläche	$h = 2$	einseitig

Fläche längs der Naht wieder auftrennen und sie wieder in Zylindergestalt zurückbiegen. Durch Zerschneidung längs dieser beiden Kurven geht die KLEINSche Fläche ebenso wie die des Torus in ein Rechteck über. Jede Kurve, die zwei Randpunkte des Rechtecks verbindet, zer-

legt aber das Rechteck; für die KLEINSche Fläche ist also nach der allgemeinen Definition $h - 1 = 2$, also $h = 3$, wie behauptet.

Wir haben damit aus dem Rechteck (bzw. Quadrat) durch verschiedene Arten der Ränderzuordnung bisher fünf verschiedene Flächen erhalten, die einander in der Tabelle auf S. 272 gegenübergestellt sind¹. Die in der Tabelle enthaltenen Angaben über die projektive Ebene werden weiter unten begründet werden.

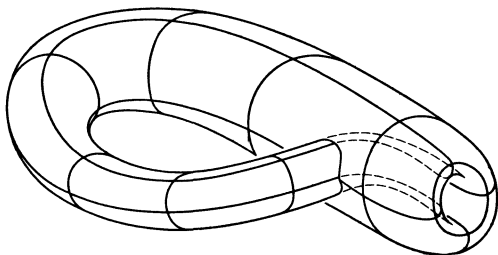


Abb. 298 a.

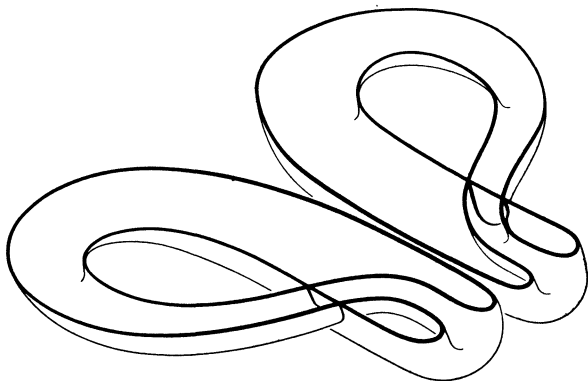


Abb. 298 b.

Aus der Tabelle geht hervor, daß wir das Modell des MÖBIUSSchen Bandes aus dem Modell des KLEINSchen Schlauchs erhalten, wenn wir eine der beiden Randzuordnungen aufheben. Man muß also den KLEINSchen Schlauch in ein MÖBIUSSches Band verwandeln können, indem man ihn längs einer geeignet gewählten geschlossenen Kurve aufschneidet. Der Leser möge eine solche Zerschneidung an einem Modell durchführen. In Abb. 298 ist dagegen eine Zerschneidung des KLEINSchen Schlauchs in *zwei* MÖBIUSSche Bänder veranschaulicht. Hierzu möge der Leser den entsprechenden Übergang an den Quadratmodellen aufsuchen.

¹ Im projektiven Raum ist das einschalige Hyperboloid als eine durchs Unendliche hindurch geschlossene Fläche anzusehen. Der Leser möge an Hand der Tabelle entscheiden, ob in dieser Auffassung das einschalige Hyperboloid mit dem KLEINSchen Schlauch oder mit dem Torus topologisch äquivalent ist.

Während wir für die einseitigen geschlossenen Flächen Beispiele sowohl von geradem als auch von ungeradem Zusammenhang kennengelernt haben (Heptaeder und KLEINSche Fläche), hatten die bisher angegebenen geschlossenen zweiseitigen Flächen stets ungeraden Zusammenhang. Es läßt sich auch zeigen, daß es eine geschlossene zweiseitige Fläche geraden Zusammenhangs nicht geben kann.

Wie beim Quadrat, so können wir auch bei jedem regulären $4p$ -Eck durch verschiedenartige Wahl der Ränderzuordnung Modelle für eine große Anzahl berandeter und unberandeter, ein- und zweiseitiger Flächen herstellen. Sind (Abb. 299) AB und CD zwei einander zugeordnete Seiten des $4p$ -Ecks, so sind zwei Arten der Zuordnung möglich: 1. Die beiden Verbindungslinien der einander zugeordneten Endpunkte schneiden einander nicht. 2. Diese Linien schneiden einander. Den ersten Fall erhält man z. B., wenn in Abb. 299 A mit C und B mit D identifiziert

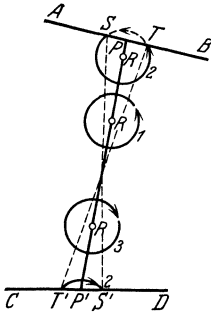


Abb. 299.

wird, den zweiten Fall, wenn man A mit D und B mit C identifiziert. Ich behaupte nun: Wenn irgend zwei Seiten des $4p$ -Ecks einander auf die zweite Art zugeordnet sind, ist die dargestellte Fläche stets einseitig, einerlei auf welche Art die übrigen Zuordnungen vorgenommen werden.

Zum Beweise zeigen wir nach der auf S. 270 skizzierten Methode, daß die dargestellte Fläche nicht orientierbar ist. Seien (Abb. 299) P und P' zwei miteinander identifizierte Punkte von AB bzw. CD . Dann stellt die gerade Strecke PP' einen geschlossenen Weg auf der Fläche dar. Ein Punkt, der auf der Fläche diesen Weg durchläuft, wird dargestellt durch einen Punkt R , der auf PP' zunächst bis P läuft und dann von P' aus in seine Anfangslage zurückkehrt. Wir erteilen nun dem Flächenpunkt, der durch R dargestellt wird, einen Umlaufsinn, der auf der Wanderung dieses Punktes keine un stetige Änderung erfahren soll. Dazu haben wir um R einen kleinen mit Umlaufsinn versehenen Kreis zu schlagen, den wir mit R stetig mitbewegen. Rückt R nahe an P , so liegt nur noch der Kreisbogen \vec{ST} im Innern des $4p$ -Ecks. Um das Bild einer geschlossenen Flächenkurve zu erhalten, müssen wir die beiden Punkte $S'T'$ heranziehen, die auf CD liegen und mit ST identifiziert sind. Da nun AB und CD einander auf die zweite Art zugeordnet sind, liegen S und S' zu verschiedenen Seiten der Strecke PP' , ebenso T und T' . Die geschlossene Flächenkurve mit ihrem Umlaufsinn wird also dargestellt durch die beiden Bögen \vec{ST} und $T'\vec{S}'$. Diese Figur erfährt keinerlei un stetige Änderung, wenn R in P anlangt und hierauf von P' zurückzulaufen beginnt. Hat sich R hinreichend weit von P' entfernt, so verschwindet der Bogen ST allmählich, und $S'T'$ geht in

einen vollen Kreisumlauf über. Der Kreis hat aber den entgegengesetzten Umlaufssinn als derjenige, mit dem wir die Wanderung begonnen haben, und damit ist bewiesen, daß die dargestellte Fläche nicht orientierbar ist.

Als Sonderfall dieses Satzes ergibt sich die Einseitigkeit der projektiven Ebene; in ihrem Modell sind alle Zuordnungen von der zweiten Art.

Man kann umgekehrt leicht zeigen, daß das Modell stets eine zweiseitige Fläche darstellt, wenn alle Zuordnungen von der ersten Art sind.

Das Modell der projektiven Ebene hatten wir aus der Kugelfläche erhalten, und andererseits zeigte die KLEINSche Fläche Beziehungen zum Torus, jedoch Beziehungen anderer Art wie zwischen Kugel und projektiver Ebene. Wir wollen nun zeigen, daß in Wahrheit zwischen KLEINScher Fläche und Torus sich dieselbe Zuordnung herstellen läßt wie zwischen den beiden erstgenannten Flächen und daß man in gleicher Weise überhaupt jeder einseitigen Fläche eine zweiseitige zuordnen kann.

Wir konnten aus der Kugel die projektive Ebene erhalten, indem wir alle Paare von Diametralpunkten als identisch betrachteten (S. 210, 263). Wir nehmen nun die entsprechende Konstruktion beim Torus vor.

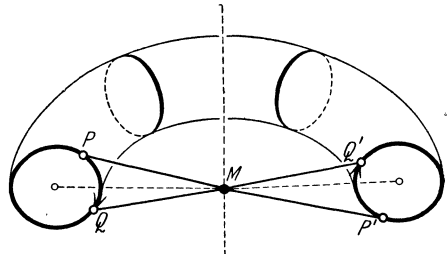


Abb. 300.

Wir bezeichnen als Mittelpunkt des Torus denjenigen Punkt M , in dem die Achse von dem Lote getroffen wird, das wir vom Mittelpunkt eines erzeugenden Kreises aus auf die Achse fällen (Abb. 300). Ist dann P irgendein Punkt auf dem Torus, so liegt auch derjenige Punkt P' auf dem Torus, der zu P bezüglich M symmetrisch ist. Alle Punktepaare des Torus, die bezüglich M symmetrisch liegen, wollen wir Diametralpunkte nennen. Wir erzeugen aus dem Torus eine neue Fläche F , indem wir alle Paare von Diametralpunkten als identisch ansehen. Ich behaupte, das ist die KLEINSche Fläche.

Zum Beweise betrachten wir einen erzeugenden Kreis des Torus. Ihm ist ein weiterer erzeugender Kreis zugeordnet gemäß Abb. 300. Durch die beiden Kreise ist der Torus in zwei Hälften zerlegt. Wir erhalten nun die Fläche F , wenn wir eine Hälfte des Torus fortlassen und in der übrigbleibenden Hälfte die Randkreise vorschriftsgemäß identifizieren; entsprechend hatte früher die Halbkugel statt der ganzen Kugel zur Konstruktion der projektiven Ebene genügt. Man erkennt nun durch eine Umlaufsbetrachtung an den identifizierten Kreisen, daß bei dieser Identifizierung aus dem Halbtorus die KLEINSche Fläche entsteht.

Offenbar können wir ferner die zweite Hälfte des Torus so auf die erste legen, daß alle Punkte, die vorher diametral lagen, paarweise zur

Deckung gelangen. Allerdings müssen wir dann (wie man sich leicht klar-machen kann) den zweiten Halbtorus so nach Art eines Handschuhs um-stülpen, daß das Innere nach außen kommt. Wenn wir nunmehr die beiden Hälften wieder zusammenheften, haben wir schließlich den Torus in die Gestalt einer zweimal überdeckten KLEINSchen Fläche gebracht¹; man sagt dafür auch, der Torus ist eine „zweiblättrige Überlagerungs-fläche“ der KLEINSchen Fläche. Ebenso bezeichnet man die Kugel als zweiblättrige Überlagerungsfläche der projektiven Ebene. Man kann allgemein zeigen: Jede beliebige einseitige Fläche besitzt eine zwei-seitige Fläche zur zweiblättrigen Überlagerungsfläche.

§ 47. Die projektive Ebene als geschlossene Fläche.

Um den Zusammenhang der projektiven Ebene zu bestimmen, wen-den wir den EULERSchen Polyedersatz auf das Quadratmodell an. Wir ziehen durch den Mittelpunkt M des Quadrats (Abb. 301) die Parallelen PQ und RS zu den Quad-ratseiten. Dadurch wird das Quadrat in die Teil-quadrate 1, 2, 3, 4 zerlegt. Infolge der Randzuord-nung stellen aber die beiden Quadrate 1 und 3 ein einziges Polygon in der projektiven Ebene dar. Ebenso 2 und 4. Ferner sind die beiden Strecken PM und QM als eine einzige Kante aufzufassen, weil P und Q denselben Punkt darstellen. Desgleichen bilden RM und SM nur eine Kante. Ecken treten außer M nicht auf. Wir haben also in die EULERSche Formel einzusetzen:

$$E = 1, \quad K = 2, \quad F = 2.$$

Der EULERSche Satz liefert $E - K + F = 1 = 3 - h$. Demnach be-sitzt die projektive Ebene zweifachen Zusammenhang, wie in der Tabelle S. 272 angegeben.

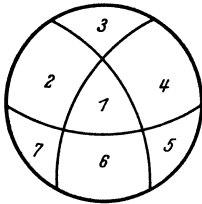


Abb. 302.

In der analytischen projektiven Geometrie spielt eine andere Zerlegung der Ebene eine Rolle, die sich aus der Einführung der Dreieckskoordinaten ergibt. Sie ist in Abb. 302 angegeben, wobei statt des Quadrats die Kreisfläche als Modell verwandt wird. Diese Fläche wird durch drei nicht durch einen Punkt gehende Bögen in sieben Gebiete zerlegt. Wir nehmen nun an, daß jeder dieser Bögen die Peripherie in Diametralpunkten trifft. 2 und 5 stellen dann ein einziges Dreieck dar, ebenso 3 und 6 sowie 4 und 7. Man erkennt, daß drei nicht durch einen Punkt gehende Geraden die

¹ Die Konstruktion ist nicht, wie man zunächst vermuten könnte, durch bloße Deformation des Torus ausführbar. Man muß vielmehr den Torus zerschneiden, um die Umstülpung der einen Hälfte vornehmen zu können.