

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0061

LOG Titel: § 47. Die projektive Ebene als geschlossene Fläche.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Deckung gelangen. Allerdings müssen wir dann (wie man sich leicht klar-machen kann) den zweiten Halbtorus so nach Art eines Handschuhs um-stülpen, daß das Innere nach außen kommt. Wenn wir nunmehr die beiden Hälften wieder zusammenheften, haben wir schließlich den Torus in die Gestalt einer zweimal überdeckten KLEINSchen Fläche gebracht¹; man sagt dafür auch, der Torus ist eine „zweiblättrige Überlagerungs-fläche“ der KLEINSchen Fläche. Ebenso bezeichnet man die Kugel als zweiblättrige Überlagerungsfläche der projektiven Ebene. Man kann allgemein zeigen: Jede beliebige einseitige Fläche besitzt eine zwei-seitige Fläche zur zweiblättrigen Überlagerungsfläche.

§ 47. Die projektive Ebene als geschlossene Fläche.

Um den Zusammenhang der projektiven Ebene zu bestimmen, wen-den wir den EULERSchen Polyedersatz auf das Quadratmodell an. Wir ziehen durch den Mittelpunkt M des Quadrats (Abb. 301) die Parallelen PQ und RS zu den Quad-ratseiten. Dadurch wird das Quadrat in die Teil-quadrate 1, 2, 3, 4 zerlegt. Infolge der Randzuord-nung stellen aber die beiden Quadrate 1 und 3 ein einziges Polygon in der projektiven Ebene dar. Ebenso 2 und 4. Ferner sind die beiden Strecken PM und QM als eine einzige Kante aufzufassen, weil P und Q denselben Punkt darstellen. Desgleichen bilden RM und SM nur eine Kante. Ecken treten außer M nicht auf. Wir haben also in die EULERSche Formel einzusetzen:

$$E = 1, \quad K = 2, \quad F = 2.$$

Der EULERSche Satz liefert $E - K + F = 1 = 3 - h$. Demnach be-sitzt die projektive Ebene zweifachen Zusammenhang, wie in der Tabelle S. 272 angegeben.

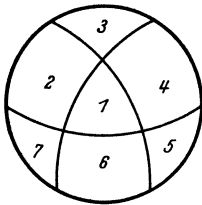


Abb. 302.

In der analytischen projektiven Geometrie spielt eine andere Zerlegung der Ebene eine Rolle, die sich aus der Einführung der Dreieckskoordinaten ergibt. Sie ist in Abb. 302 angegeben, wobei statt des Quadrats die Kreisfläche als Modell verwandt wird. Diese Fläche wird durch drei nicht durch einen Punkt gehende Bögen in sieben Gebiete zerlegt. Wir nehmen nun an, daß jeder dieser Bögen die Peripherie in Diametralpunkten trifft. 2 und 5 stellen dann ein einziges Dreieck dar, ebenso 3 und 6 sowie 4 und 7. Man erkennt, daß drei nicht durch einen Punkt gehende Geraden die

¹ Die Konstruktion ist nicht, wie man zunächst vermuten könnte, durch bloße Deformation des Torus ausführbar. Man muß vielmehr den Torus zerschneiden, um die Umstülpung der einen Hälfte vornehmen zu können.

projektive Ebene stets in dieser Weise in vier Dreiecke zerlegen¹. In der EULERSCHEN Formel hat man jetzt $E = 3$, $K = 6$, $F = 4$ zu setzen und erhält wieder $h = 2$.

Wie wir die Ringfläche und die KLEINsche Fläche aus ihren Quadratmodellen durch Zusammenheftung erhalten haben, so wollen wir auch mit dem Quadratmodell der projektiven Ebene verfahren. Zu diesem Zweck verzerren wir das Quadrat zunächst in die Gestalt einer Kugelfläche, aus der ein kleines Viereck $ABCD$ herausgeschnitten ist (Abb. 303). Wir haben AB mit CD und DA mit BC zusammenzuheften. Das wird möglich, wenn wir die Fläche in den Punkten A und C heben und bei B und D senken und A und C sowie B und D einander nähern (Abb. 304). Schließlich erhalten wir eine geschlossene Fläche mit einer Strecke als Durchdringungslinie (Abb. 305). Sie ist topologisch der projektiven Ebene äquivalent.

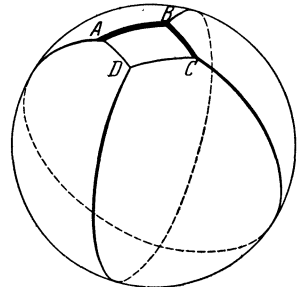


Abb. 303.

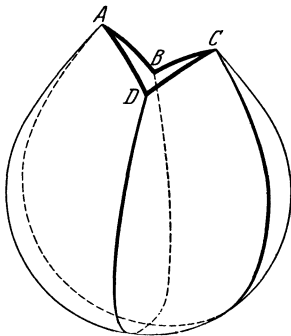


Abb. 304.

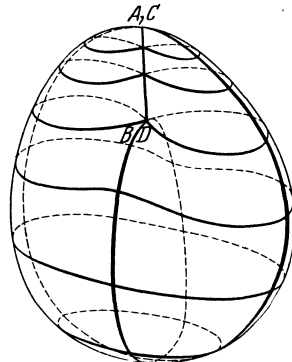


Abb. 305.

Es gibt eine algebraische Fläche, die diese Gestalt besitzt (Abb. 306). Ihre Gleichung ist

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

Die Fläche steht im Zusammenhang mit einer differentialgeometrischen Konstruktion. Wir gehen aus von einem Punkt P auf irgendeiner Fläche F , die in P konvex gekrümmt ist. Für alle Normalschnitte dieser Fläche in P (vgl. S. 162, 163) konstruieren wir die Krümmungskreise in P . Diese Kreisschar überstreicht dann gerade die in Abb. 306 dargestellte Fläche, ihre Durchdringungsstrecke ist ein Stück der in P errichteten Normalen der Ausgangsfläche; die angeführte Gleichung bezieht sich

¹ Die in Abb. 301 und 302 gezeichneten Einteilungen der projektiven Ebene hatten wir S. 131, 132 durch Projektion des Oktaeders erhalten.

auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in P liegt und dessen x - und y -Achse in die Krümmungsrichtungen der Fläche F in P fallen. k_1, k_2 sind die Hauptkrümmungen der Fläche F in P .

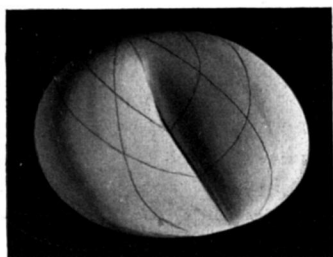


Abb. 306 a.

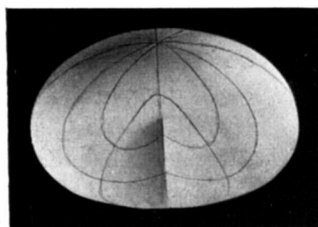


Abb. 306 b.

Wenn wir wieder von Abb. 304 ausgehen, aber nur AB mit CD zusammenheften, dagegen nicht DA mit BC , dann erhalten wir eine Fläche, die dem MÖBIUSSCHEN Band topologisch äquivalent ist. Wir haben ja dann gerade die Heftung vorgenommen, durch die das MÖBIUSSCHE Band definitionsgemäß aus dem Quadrat hervorgeht. Der Rand der neuen Fläche geht aus den Bögen DA und BC hervor. Da

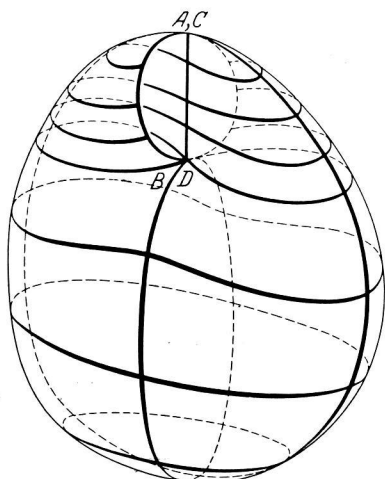


Abb. 307.

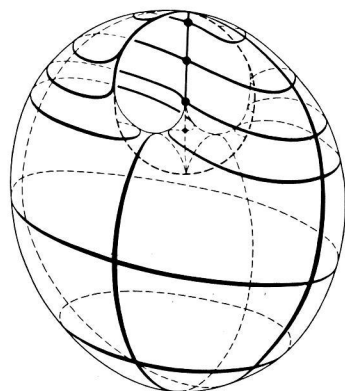


Abb. 308.

aber A mit C und B mit D zusammengeheftet ist, entsteht aus diesen Bögen eine geschlossene Kurve, der wir z. B. die Gestalt eines Kreises geben können (Abb. 307). Offenbar besitzt die Fläche keine Selbstdurchdringung. In den beiden Punkten, die aus A, C und aus B, D hervorgehen, ist die Fläche nicht mehr stetig gekrümmt; durch weitere Deformation in der Umgebung dieser Stellen erhalten wir aber eine Fläche, die überall stetig gekrümmt ist. Von ihrem Verlauf geben Abb. 308 und 309 eine Vorstellung.

Die Fläche eignet sich trotz ihres kreisförmigen Randes nicht zum Verschuß eines Gefäßes. Denn da sie einseitig ist, sperrt sie das Innere des Gefäßes nicht gegen den Außenraum ab.

Schließt man die Fläche durch Einfügen einer Kreisscheibe, so erhält man wieder das Modell der projektiven Ebene. Dies ist aus den Abb. 307 und 305 ersichtlich. Wir erhalten also umgekehrt ein Modell des MÖBIUSSCHEN Bandes, wenn wir aus dem Modell der projektiven Ebene eine Kreisscheibe entfernen. Dabei muß es gleichgültig sein, an welcher Stelle der in Abb. 305 dargestellten Fläche wir das Loch hineinschneiden; denn auf der projektiven Ebene ist keine

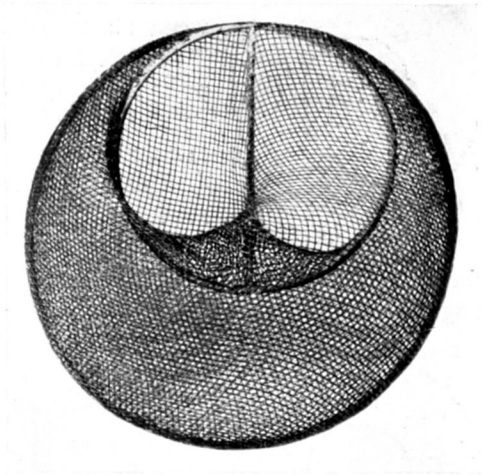


Abb. 309.

Stelle vor der anderen ausgezeichnet, da ja auf der Kugel kein Paar von Diametralpunkten vor einem anderen Paar ausgezeichnet ist. Eine besonders übersichtliche Gestalt erhält nun das übrigbleibende Flächenstück, wenn wir in Abb. 305 den unteren Teil entfernen. So entsteht die in Abb. 310 gezeichnete Fläche, die als Kreuzhaube bezeichnet wird. Die Kreuzhaube ist ein weiteres Modell eines MÖBIUSSCHEN Bandes mit kreisförmigem Rand. Trotz ihrer Einseitigkeit ist die Kreuzhaube offenbar als Gefäßdeckel brauchbar. Das wird dadurch ermöglicht, daß sie eine Selbstdurchdringungsstrecke besitzt.

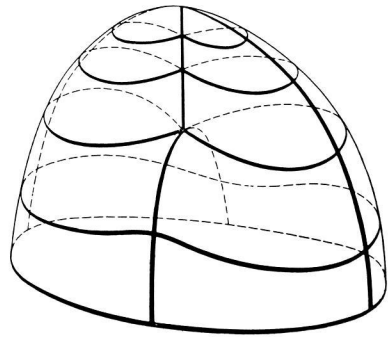


Abb. 310.

Wenn man die Kreuzhaube längs der Durchdringungsstrecke aufschneidet, erhält man nach geeigneter Verzerrung eine Kreisscheibe mit viereckigem oder kreisförmigem Loch; denn wir haben dann einfach das durch Abb. 303 bis 305 veranschaulichte Verfahren rückgängig gemacht. Demnach erhalten wir ein Modell des MÖBIUSSCHEN Bandes, wenn wir vom Gebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen ausgehen und im inneren Kreis alle Paare von Diametralpunkten identifizieren

(Abb. 311). Es ist auf den ersten Blick durchaus nicht zu erkennen, daß diese Figur dieselbe Fläche darstellt wie das Quadratmodell der Tabelle S. 272. Man kann aber das Quadratmodell aus den hier angegebenen erhalten, wenn man dieses zerschneidet (Abb. 312), die Teile deformiert (Abb. 313) und nach Umklappung des einen Teils um die Gerade b' die Ränder teils wieder zusammenheftet, teils einander zuordnet (Abb. 314).

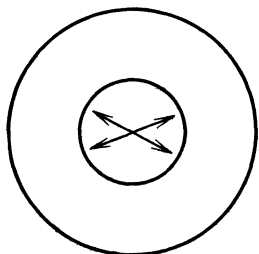


Abb. 311.

Unser Modell der projektiven Ebene besitzt zwei singuläre Punkte: die Endpunkte der Durchdringungsstrecke. Es ist W. Boy gelungen, ein anderes Modell der projektiven Ebene zu konstruieren, das keinen singulären Punkt und überall stetige Krümmung besitzt.

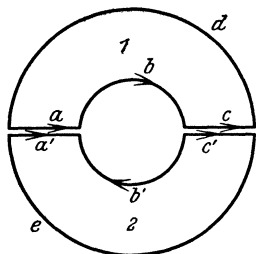


Abb. 312.

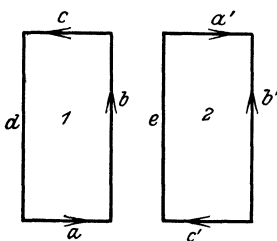


Abb. 313.

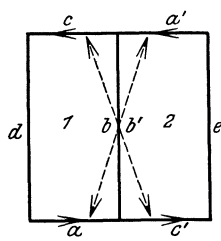


Abb. 314.

Wir gehen, um die Boysche Fläche zu erzeugen, nicht vom Quadrat, sondern vom regulären Sechseck aus, auf dessen Rand wieder die Diametralpunkte identifiziert sind. Durch Deformation erhalten wir daraus eine Kugelfläche, aus der ein reguläres Kreisbogensechseck entfernt ist. Dieses Gebilde läßt sich wie das Sechseck in drei kongruente Teile zerlegen, die symmetrisch um eine Achse herum angeordnet sind (Abb. 315). Wir schneiden einen dieser Teile heraus und deformieren ihn weiter; diese sogleich zu schildernde Deformation wird dann an den beiden anderen Teilen genau so vorgenommen, und wir erhalten drei neue kongruente Flächenstücke. Durch ihre Zusammenheftung ergibt sich schließlich die Boysche Fläche. Auch sie besitzt eine dreizählige Symmetrieachse. Das Ziel des Verfahrens ist

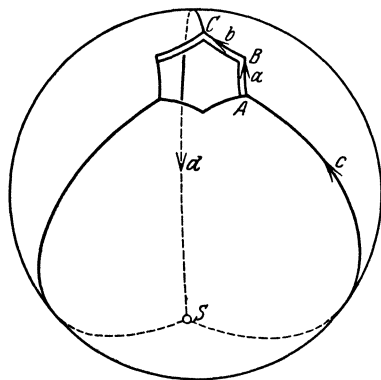


Abb. 315.

wir erhalten drei neue kongruente Flächenstücke. Durch ihre Zusammenheftung ergibt sich schließlich die Boysche Fläche. Auch sie besitzt eine dreizählige Symmetrieachse. Das Ziel des Verfahrens ist

natürlich die Zusammenheftung aller Paare von gegenüberliegenden Punkten auf dem Rand des aus der Kugel entfernten Sechsecks.

Wir fassen also (Abb. 315) das Stück $ScAaBbCdS$ ins Auge und bringen zunächst die drei Punkte ABC zum Zusammenfallen in N (Abb. 316), ohne sie jedoch zu identifizieren; denn das würde der Heftungsvorschrift, von der

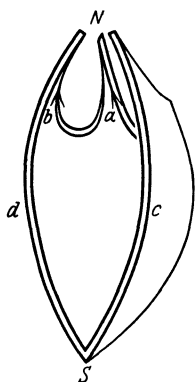


Abb. 316.

wir ausgingen, nicht entsprechen. Jetzt halten wir die Punkte S und N und die Seiten b , c und d fest, drehen aber die geschlossene Seite a nach oben (Abb. 317), bis in die Stellung, die in Abb. 318 angegeben ist. Der Flächenanteil zwischen c und a muß zu diesem Zweck stark auseinandergezogen werden und erhält fast ebene Gestalt. Wir drehen nun die Schleife b (Abb. 318) nach rechts oben,

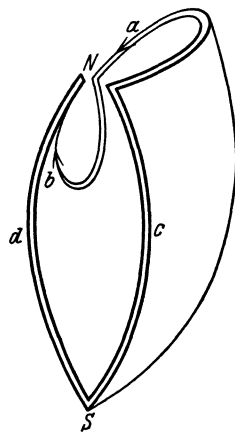


Abb. 317.

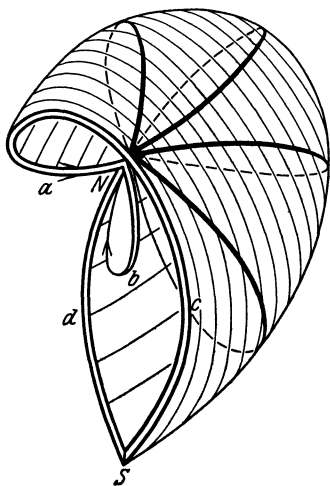


Abb. 318.

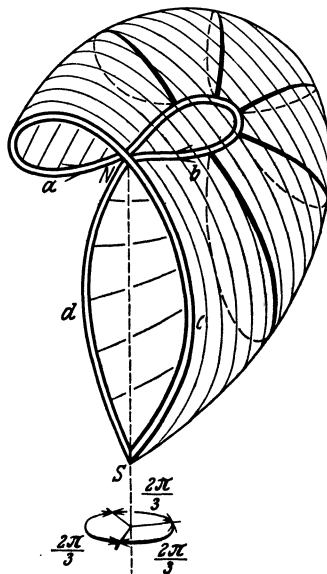


Abb. 319.

bis b von hinten an den erwähnten Flächenanteil anstößt und die in Abb. 319 gezeichnete Lage einnimmt. In dieser Schlußanordnung sollen die Bögen c und d untereinander und die Schleifen a und b untereinander kongruent sein und so liegen, daß c in d und b in a übergeht, wenn wir

die Figur um die Achse SN in der Pfeilrichtung um $2\pi/3$ herumdrehen (Abb. 319). Das Flächenstück, das wir konstruiert haben, denken wir uns nun in einem zweiten kongruenten Exemplar angefertigt, seine entsprechenden Teile seien mit a' , S' usw. bezeichnet. Dieses Exemplar

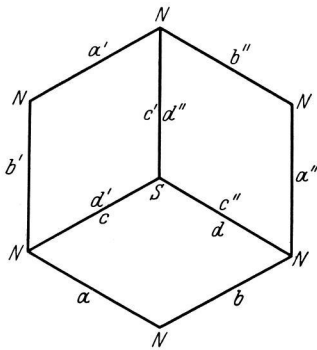


Abb. 320.

heften wir so an das erste, daß d' mit c (und zwar S' mit S und N' mit N) zusammenfällt. Dann muß von selbst auch a' mit b zur Deckung kommen. Diese beiden Ränder heften wir zusammen. Die Heftungskurve wird auf der entstandenen Fläche Durchdringungskurve, wie aus Abb. 319 ersichtlich sein dürfte. Der Rand der Fläche besteht jetzt aus c', a, b', d . Man erkennt das, wenn man (Abb. 320) auf das Sechseck zurückgeht, das wir zugrunde gelegt hatten. Offenbar läßt sich an diesen

Rand ein drittes Exemplar so anheften, daß (in der naturgemäßen Bezeichnung) d mit c'' , a mit b'' , b' mit a'' und c' mit d'' zusammenfallen. Damit ist die Boysche Fläche konstruiert. Aus Abb. 320 wird klar, daß die Boysche Fläche der projektiven Ebene äquivalent ist. Ein Draht-

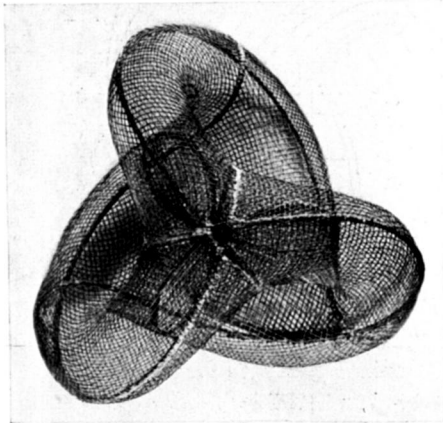


Abb. 321 a.

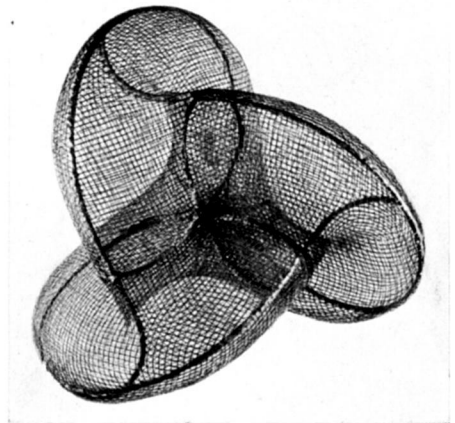


Abb. 321 b.

gazemodell ist in Abb. 321 dargestellt. Die Durchdringungskurve der Boyschen Fläche besteht aus drei Schleifen, die durch den Punkt N gehen und, wie die ganze Fläche, symmetrisch zur Achse SN liegen. Eine nähere Betrachtung von Abb. 320 ergibt, daß durch N drei Mäntel der Fläche hindurchgehen. Damit diese Mäntel in N eine stetige Tangen-

tialebene haben, ist es notwendig und hinreichend, daß die sechs Schleifenenden, die in N zusammenstoßen, dort drei paarweise senkrechte Geraden berühren. Wenn an den übrigen Nähten Knickungen oder Unstetigkeiten der Krümmung auftreten, so lassen sie sich durch eine einfache Glättung beseitigen. Bei dem in Abb. 321 dargestellten Modell ist die Durchdringungskurve durch stärkeren Draht hervorgehoben; die übrigen stärkeren Drähte dienen nur zur Versteifung; die Befestigungsschraube nimmt den Ort des Punktes S ein. Die Beziehung zu unserer Konstruktion dürfte besonders deutlich in Abb. 321 b hervortreten.

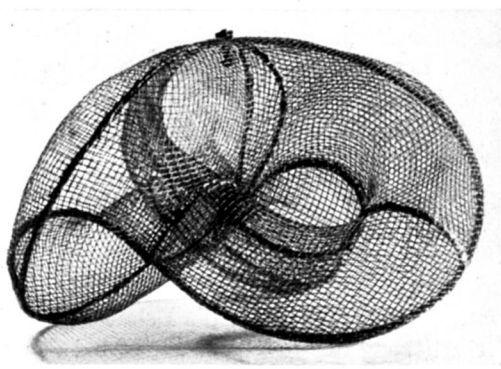


Abb. 321 c.

Demnach besitzt die Boysche Fläche eine überall stetige sphärische Abbildung. Es ist leider bisher nicht untersucht worden, in welcher Weise sich diese über die Kugel erstreckt. Wenn wir dabei von einem willkürlich gewählten Normalenvektor ausgehen und dann die Abbildung stetig fortsetzen, so kommen wir wegen der Einseitigkeit der Boyschen Fläche sicher auch zum entgegengesetzten Normalenvektor desselben Punktes. Somit ist jedem Punkt der Fläche durch die sphärische Abbildung ein Diametralpunktpaar der Kugel zugeordnet. Da aber in dieser Identifizierung die Kugel wiederum in die projektive Ebene übergeht, so liefert die sphärische Abbildung der Boyschen Fläche eine Abbildung der projektiven Ebene auf sich selbst, die allerdings nicht umkehrbar eindeutig ist, da einem Punktpaar der Kugel ersichtlich mehrere Punkte der Boyschen Fläche entsprechen.

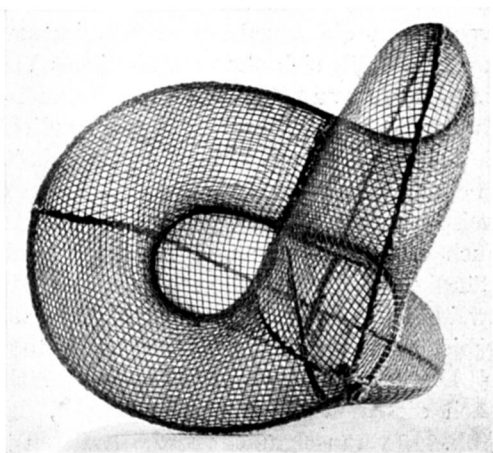


Abb. 321 d.