§ 48. Normaltypen der Flächen endlichen Zusammenhangs.

Wir wollen zu einer und derselben Flächenklasse alle die Flächen rechnen, die sich topologisch aufeinander abbilden lassen. Damit zwei Flächen endlicher Zusammenhangszahl zur selben Klasse gehören, sind folgende Bedingungen notwendig:

1. beide Flächen müssen entweder geschlossen sein oder die gleiche Anzahl Randkurven besitzen;
2. die Flächen müssen entweder beide orientierbar oder beide nicht-orientierbar sein;
3. beide Flächen müssen die gleiche Zusammenhangszahl besitzen.

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung ist evident. Die zweite Bedingung läßt sich auch so ausdrücken: Jede Fläche F, die auf eine orientierbare Fläche G topologisch abgebildet werden kann, ist orientierbar. In dieser Form ist die Behauptung leicht zu beweisen. Denn eine Orientierung der Fläche G ergibt bei der topologischen Abbildung eine Orientierung von F. Ebenso erkennt man die Notwendigkeit der dritten Bedingung: Die Zusammenhangszahl bedingt die Existenz eines Schnittsystems, das bei topologischer Abbildung in ein Schnittsystem gleicher Struktur auf der Bildfläche übergeht.

Eine genauere Betrachtung ergibt, daß die drei genannten Bedingungen für die topologische Abbildbarkeit zweier Flächen auch hinreichen. Wenn man nämlich von einer Fläche weiß, ob sie orientierbar ist, und wenn man die Anzahl ihrer Ränder sowie ihre Zusammenhangszahl kennt, so läßt sich stets ein ähnliches Verfahren anwenden, wie wir es beim Torus und bei den orientierbaren geschlossenen Flächen vom Zusammenhang 5 und 7 veranschaulicht haben (Abb. 282 bis 287, S. 264, 265). Durch ein geeignetes Schnittsystem läßt sich die Fläche in ein Polygongebiet überführen, bei dem die Ränder sämtlich oder teilweise identifiziert sind, und sowohl die Struktur des Schnittsystems als auch die Ränderzahl und Heftungsvorschrift des Polygons sind vollständig durch die erwähnten drei Angaben bestimmt. Stimmen also zwei Flächen in diesen Angaben überein, so sind sie auf dasselbe Polygongebiet und folglich auch aufeinander topologisch abbildbar.

Die orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht p führen nach diesem Verfahren auf $4p$-Ecke, deren Ränderzuordnung durch Abb. 322 veranschaulicht wird. In diesen $4p$-Ecken haben wir eine Reihe von Normaltypen für *alle* orientierbaren geschlossenen Flächen vor uns. Denn jede solche Fläche besitzt eine endliche ungerade Zusammenhangszahl $h = 2p + 1$. Eine andere vollständige Reihe von Normaltypen hatten wir in der Kugel, dem Torus und den Brezeln mit p Löchern angegeben.

Die RIEMANNschen Flächen der Funktionentheorie sind teilweise in dieser Einteilung enthalten, trotzdem ihre anschauliche Gestalt das nicht vermuten läßt. Es sind Flächen, die sich wie das sphärische Bild der meisten Minimalflächen (S. 238) in mehreren Schichten über die Kugel ausbreiten, wobei diese Schichten in Windungspunkten miteinander zusammenhängen. Diese Flächen sind sämtlich orientierbar, da sich jede Orientierung der Kugelfläche auf die darüberliegende RIEMANNsche Fläche überträgt. Man erhält geschlossene Flächen dann und nur dann, wenn man von algebraischen Funktionen ausgeht, während die transzendenten Funktionen stets auf offene Flächen führen. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen, da es viele gute Bücher über geometrische Funktionentheorie gibt.

Bei den *berandeten* Flächen läßt sich ebenfalls eine Reihe von Polygonen angeben, so daß jede Fläche mit endlich vielen Rändern und endlicher Zusammenhangszahl auf genau eins dieser Polygone topologisch abbildbar ist. Die Quadratmodelle des ebenen Kreisrings und des MÖBIUSschen Bandes sind Beispiele solcher Polygone. Für die *orientierbaren* berandeten Flächen erhält man noch anschaulichere Normalformen, indem man in die Kugel, den Torus oder eine Brezel eine Anzahl Löcher hineinschneidet (Abb. 278, S. 261). Um auch für die *nichtorientierbaren* Flächen zu ähnlichen Typen zu kommen, kann man von der „Kreuzhaube" ausgehen, die wir S. 279 als Modell des MÖBIUSschen Bandes konstruiert haben. Man schneide in eine Kugel eine Anzahl Löcher und verschließe einige von ihnen mit Kreuzhauben. Einer solchen Fläche ist jede nichtorientierbare Fläche endlichen Zusammenhangs äquivalent. Die Anzahl der Kreuzhauben und der offenen Löcher ist durch die Ränderzahl und die Zusammenhangszahl eindeutig bestimmt.

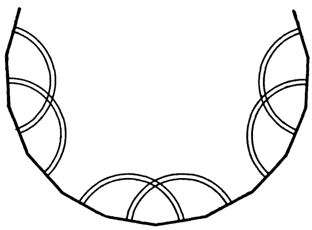

Abb. 322.

Die Kreuzhaube besitzt eine Durchdringungskurve und zwei singuläre Punkte. Einseitige Flächen ohne singuläre Punkte haben wir im KLEINschen Schlauch und der BOYschen Fläche kennengelernt. Ob sich auch alle anderen geschlossenen nichtorientierbaren Flächen singularitätenfrei im Raum verwirklichen lassen, scheint noch nicht untersucht zu sein. Durchdringungsfrei läßt sich eine solche Fläche nie realisieren, wie wir schon erwähnt haben.

Im vierdimensionalen Raum dagegen lassen sich alle nichtorientierbaren Flächen singularitätenfrei und durchdringungsfrei darstellen. In diesen Raum — wir wollen ihn mit R_4 und den dreidimensionalen Raum mit R_3 bezeichnen — hat man sich den R_3 ebenso eingebettet zu denken wie die Ebene in den R_3. Wir konstruieren nun im R_4 zunächst ein durchdringungs- und singularitätenfreies Modell der Kreuzhaube. Wir denken uns zu diesem Zweck eine Kreuzhaube des R_3 eingebettet in den R_4. Wir greifen auf ihr eine Kreisscheibe e heraus, die die Durchdringungsstrecke zum Durchmesser hat (vgl. Abb. 307, S. 278). Im R_3 können wir jede Kreisscheibe unter Festhaltung der Peripherie so ausbeulen, daß kein innerer Punkt der deformierten Fläche mehr in die Ebene der Peripherie fällt. Ebenso kann man nun im R_4 die Kreisscheibe e in eine solche Fläche f deformieren, daß der Rand von f fest mit der Kreuzhaube des R_3 verbunden bleibt, während das Innere von f ganz aus dem R_3 herausragt. Durch diese Deformation aber geht die Kreuzhaube in eine Fläche F des R_4 über, die offenbar keine Durchdringung und keine Singularität besitzt. Wenn wir nun eine Kugel mit einer Anzahl von Löchern in den R_4 einbetten und einige dieser Löcher statt mit Kreuzhauben mit Flächen verschließen, die F ähnlich sind, so erhalten wir durchdringungs- und singularitätenfreie Normalformen für alle nichtorientierbaren Flächen endlichen Zusammenhangs.

Ein anderes Problem ist es, Flächen vorgegebener Struktur durch algebraische Gleichungen möglichst niedrigen Grades darzustellen. So hatten wir die STEINERsche Fläche als Modell der projektiven Ebene erwähnt. Ob es algebraische Flächen von der Gestalt der BOYschen Fläche gibt, ist noch nicht untersucht. Im R_4 läßt sich die projektive Ebene durch sehr einfache Gleichungen durchdringungs- und singularitätenfrei verwirklichen. Dieses Verfahren wird in einem Anhang des Kapitels beschrieben.

Die Frage nach der topologischen Äquivalenz ist von den Flächen auf drei- und mehrdimensionale Gebilde übertragen worden. Hierdurch wurde man auf die BETTI*schen Gruppen* geführt, in deren Theorie die Zusammenhangszahl und die Orientierbarkeit einer Fläche unter viel allgemeineren Gesichtspunkten erscheinen. Man vergleiche die auf S. 254 genannte Darstellung von ALEXANDROFF.

§ 49. Topologische Abbildung einer Fläche auf sich. Fixpunkte. Abbildungsklassen. Universelle Überlagerungsfläche des Torus.

Die einfachste topologische Abbildung eines Gebildes auf sich selbst besteht darin, das Gebilde als Ganzes stetig in sich selbst zu verzerren. Eine solche Abbildung heißt Deformation. Die Bewegungen der Ebene in sich sind Deformationen. Dagegen ist die Spiegelung der Ebene an einer Geraden ein Beispiel für topologische Abbildungen, die keine Deformationen sind. Denn bei der Spiegelung wird der Umlaufsinn jedes Kreises umgekehrt, während eine Deformation den Umlaufsinn nicht ändern kann.

Ein Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein *Fixpunkt* der Abbildung. Wir wollen jetzt beweisen, daß jede stetige Abbildung der Kreisscheibe auf sich mindestens einen Fixpunkt besitzen muß; dabei zählen wir die Peripheriepunkte mit zur Kreisscheibe. Wir nehmen im