SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN379425343

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN379425343|LOG_0063

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

zum Durchmesser hat (vgl. Abb. 307, S. 278). Im R_3 können wir jede Kreisscheibe unter Festhaltung der Peripherie so ausbeulen, daß kein innerer Punkt der deformierten Fläche mehr in die Ebene der Peripherie fällt. Ebenso kann man nun im R_4 die Kreisscheibe e in eine solche Fläche f deformieren, daß der Rand von f fest mit der Kreuzhaube des R_3 verbunden bleibt, während das Innere von f ganz aus dem R_3 herausragt. Durch diese Deformation aber geht die Kreuzhaube in eine Fläche F des R_4 über, die offenbar keine Durchdringung und keine Singularität besitzt. Wenn wir nun eine Kugel mit einer Anzahl von Löchern in den R_4 einbetten und einige dieser Löcher statt mit Kreuzhauben mit Flächen verschließen, die F ähnlich sind, so erhalten wir durchdringungs- und singularitätenfreie Normalformen für alle nichtorientierbaren Flächen endlichen Zusammenhangs.

Ein anderes Problem ist es, Flächen vorgegebener Struktur durch algebraische Gleichungen möglichst niedrigen Grades darzustellen. So hatten wir die STEINERsche Fläche als Modell der projektiven Ebene erwähnt. Ob es algebraische Flächen von der Gestalt der BOYschen Fläche gibt, ist noch nicht untersucht. Im R_4 läßt sich die projektive Ebene durch sehr einfache Gleichungen durchdringungs- und singularitätenfrei verwirklichen. Dieses Verfahren wird in einem Anhang des Kapitels beschrieben.

Die Frage nach der topologischen Äquivalenz ist von den Flächen auf drei- und mehrdimensionale Gebilde übertragen worden. Hierdurch wurde man auf die BETTI*schen Gruppen* geführt, in deren Theorie die Zusammenhangszahl und die Orientierbarkeit einer Fläche unter viel allgemeineren Gesichtspunkten erscheinen. Man vergleiche die auf S. 254 genannte Darstellung von ALEXANDROFF.

§ 49. Topologische Abbildung einer Fläche auf sich. Fixpunkte. Abbildungsklassen. Universelle Überlagerungsfläche des Torus.

Die einfachste topologische Abbildung eines Gebildes auf sich selbst besteht darin, das Gebilde als Ganzes stetig in sich selbst zu verzerren. Eine solche Abbildung heißt Deformation. Die Bewegungen der Ebene in sich sind Deformationen. Dagegen ist die Spiegelung der Ebene an einer Geraden ein Beispiel für topologische Abbildungen, die keine Deformationen sind. Denn bei der Spiegelung wird der Umlaufsinn jedes Kreises umgekehrt, während eine Deformation den Umlaufsinn nicht ändern kann.

Ein Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird, heißt ein *Fixpunkt* der Abbildung. Wir wollen jetzt beweisen, daß jede stetige Abbildung der Kreisscheibe auf sich mindestens einen Fixpunkt besitzen muß; dabei zählen wir die Peripheriepunkte mit zur Kreisscheibe. Wir nehmen im

Gegensatz zur Behauptung an, es gebe eine fixpunktfreie stetige Abbildung der Kreisscheibe e auf sich. Dann können wir in jedem Punkt P von e einen Zeiger anbringen, der von P nach dem Bildpunkt von P gerichtet ist; diese Vorschrift würde nämlich nur in Fixpunkten versagen. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Abbildung muß sich die Zeigerrichtung von Punkt zu Punkt stetig ändern. Wir betrachten nun den Zeiger eines Peripheriepunkts und lassen diesen Punkt die Peripherie im Uhrzeigersinn einmal umlaufen; dabei dreht sich offenbar auch die Tangente des Punkts im Uhrzeigersinn einmal herum. Ich behaupte nun, daß die Zeigerrichtung des Punkts sich ebenfalls einmal im Uhrzeigersinn herumdreht. Denn der Winkel, den der Zeiger mit der Tangente bildet, ist von Null oder einem ganzzahligen Vielfachen von π stets verschieden, da der Zeiger eines Peripheriepunkts stets ins Kreisinnere und nie tangential gerichtet ist. Wäre aber beim Umlauf die Umdrehungszahl des Zeigers von derjenigen der Tangente verschieden, so müßte es mindestens einmal auf der Peripherie vorkommen, daß beide Richtungen gleich oder entgegengesetzt ausfielen. In analoger Weise betrachten wir nun die Umdrehungszahl des Zeigers für irgendeinen zur Peripherie konzentrischen Kreis k im Innern der Kreisscheibe. Auch dann muß sich der Zeiger einmal im Uhrzeigersinn herumdrehen, wenn sein Ausgangspunkt den Kreis einmal im Uhrzeigersinn umläuft; denn andernfalls müßte sich die Umdrehungszahl des Zeigers einmal sprungweise ändern, wenn wir die Peripherie der Kreisscheibe stetig auf k zusammenziehen, und das wäre mit der Stetigkeit der Zeigerverteilung nicht vereinbar. Ziehen wir andererseits k stetig auf den Mittelpunkt M der Kreisscheibe zusammen, so kann sich die Zeigerrichtung in allen Punkten von k immer weniger von einer und derselben Richtung, nämlich der Zeigerrichtung in M, unterscheiden. Die Umdrehungszahl wäre also für hinreichend kleine Kreise notwendig Null. Das ist ein Widerspruch. Folglich gibt es keine fixpunktfreie stetige Abbildung der Kreisscheibe auf sich.

In ähnlicher Weise läßt es sich zeigen, daß bei jeder stetigen Abbildung der Kugel auf sich entweder ein Fixpunkt oder aber ein Punkt vorkommen muß, der in seinen Diametralpunkt übergeht. Andernfalls wäre für jeden Punkt eindeutig ein Großkreisbogen definiert, der den Punkt mit seinem Bildpunkt verbände. Hierdurch ergäbe sich ein überall stetiges Zeigerfeld auf der Kugeloberfläche, und man kann durch Betrachtung der Zeigerumdrehungszahl beweisen, daß ein solches Feld unmöglich ist. Man kann also nicht überall auf der Erde Wegweiser aufstellen, deren Angaben von Ort zu Ort stetig variieren.

Indem man die Kugel mit identifizierten Diametralpunkten als Modell der projektiven Ebene auffaßt, erhält man aus dem Satz über die Kugelabbildung die Folgerung, daß jede stetige Abbildung der projektiven Ebene auf sich einen Fixpunkt besitzt.

Um die topologischen Abbildungen einer gegebenen Fläche auf sich selbst besser zu übersehen, kann man ihre Gesamtheit in Klassen einteilen. Man rechnet zwei Abbildungen zur selben Klasse, wenn sie sich nur durch eine Deformation voneinander unterscheiden; die Deformationen bilden die Klasse der Identität. Auf der Kugel erhält man eine Abbildung, die nicht in diese Klasse gehört, indem man jeden Punkt auf seinen Diametralpunkt abbildet; man erkennt nämlich anschaulich, daß diese Abbildung den Umlaufsinn kleiner Kreise umkehrt. Damit haben wir zwei Abbildungsklassen der Kugel gefunden. Eine genauere Betrachtung, die hier zu weit führen würde, zeigt, daß es keine weiteren Abbildungsklassen der Kugel gibt. Demnach sind alle topologischen Abbildungen der projektiven Ebene Deformationen.

Auf dem Torus gibt es dagegen unendlich viele Klassen. Um einige dieser Klassen zu veranschaulichen, denken wir uns den Torus längs eines Meridians aufgeschnitten und in einen Kreiszylinder mit zwei Randkreisen verbogen. Wir halten nun den einen Randkreis fest und tordieren den Zylinder in sich selbst, so daß der zweite Randkreis sich k-mal ganz herumdreht; jede geradlinige Erzeugende des Zylinders verwandelt sich dabei in eine Schraubenlinie, die die Zylinderachse k-mal umläuft. Biegen wir jetzt die beiden Randkreise wieder zusammen, so erhalten wir eine topologische Abbildung des Torus auf sich selbst. Dabei sind alle Punkte der identifizierten Randkreise Fixpunkte, und in den übrigen Punkten ergibt sich die Abbildung aus der des Kreiszylinders. Die Erzeugenden des Zylinders entsprechen den Breitenkreisen des Torus, und indem man die Beziehung beider Flächen auch für die Raumteile in ihrem Innern hinzudefiniert, kann man der Zylinderachse die „Seelenachse" des Torus zuordnen, d. h. die Bahnkurve des Mittelpunkts eines Kreises, durch dessen Rotation der Torus erzeugt wird. Bei der Torusabbildung, die wir konstruiert haben, verwandeln sich hiernach die Breitenkreise in solche geschlossene auf dem Torus verlaufende Kurven, die die Seelenachse k-mal schraubenartig umlaufen. Für eine solche Kurve kann sich bei einer Deformation des Torus die Zahl k nicht ändern. Zwei Torusabbildungen, die zu verschiedenen Werten von k gehören, können daher niemals in derselben Klasse liegen.

Es wäre ein Trugschluß, wenn man durch ein analoges Verfahren die Existenz unendlich vieler Abbildungsklassen auf dem Kleinschen Schlauch beweisen wollte. Den schraubenförmigen Bildern der Zylindererzeugenden entsprechen auf dem Kleinschen Schlauch geschlossene Kurven, die auch bei verschiedenen Werten von k ineinander deformiert werden können. Man kann sich den Unterschied, der in dieser Hinsicht zwischen dem Kleinschen Schlauch und dem Torus besteht, an den Quadratmodellen klarmachen. Es gibt auf dem Kleinschen Schlauch nur endlich viele Abbildungsklassen.

Auf dem Torus erschöpft unser Verfahren die Abbildungsklassen keineswegs. Eine vollständige Übersicht über sie läßt sich mit Hilfe der *universellen Überlagerungsfläche* des Torus gewinnen. Um diese Fläche zu veranschaulichen, denken wir uns die euklidische Ebene auf einen unendlich langen Kreiszylinder aufgewickelt, der natürlich dabei unendlich oft von der Ebene umschlossen wird. Nun haben wir schon bei mehreren Untersuchungen den beiderseits abgeschnittenen Zylinder in einen Torus zusammengebogen. Ebenso läßt sich der unendliche Zylinder in einen Torus verwandeln, wobei die Achse des Zylinders in die unendlich oft umlaufene Seelenachse des Torus übergeht und der Zylinder unendlich oft in sich selbst hineingeschoben erscheint. Die euklidische Ebene wird durch unser Verfahren auf eine Fläche topologisch abgebildet, die den Torus in unendlich vielen Schichten überdeckt, ohne daß Faltungen oder Windungspunkte auftreten. Diese Fläche ist die universelle Überlagerungsfläche des Torus.

Jeder Umlauf eines Längen- oder Breitenkreises des Torus führt von einer Schicht der Fläche in eine andere. Es sei auf dem Torus ein kanonisches Schnittsystem (ein Meridian und ein Breitenkreis) eingetragen, das den Torus in der üblichen Weise in ein Rechteck mit identifizierten Gegenseiten verwandelt. Markiert man auf der Überlagerungsfläche alle Punkte, die über den Kurven des Schnittsystems liegen, und verwandelt die Überlagerungsfläche wieder in eine Ebene, so erfüllen die markierten Punkte ein Kurvensystem, das die Ebene in unendlich viele rechteckige Felder zerlegt, und zwar sind diese Felder so angeordnet wie die Fundamentalbereiche der krystallographischen ebenen Translationsgruppe (Abb. 72, S. 63); jedes Feld entspricht einer Schicht der Überlagerungsfläche. Um diese Behauptung einzusehen, wollen wir die universelle Überlagerungsfläche des Torus auf eine andere Art konstruieren. Wir denken uns den Torus durch ein Quadrat mit identifizierten Gegenseiten dargestellt. Wie bei der Konstruktion des ebenen quadratischen Punktgitters (S. 28) setzen wir nun aus solchen Quadraten einen ebenen beiderseits unendlichen Streifen S zusammen, der von zwei parallelen Geraden a und b begrenzt wird. S verwandelt sich in einen unendlich langen Kreiszylinder C, wenn wir a mit b durch geeignete Verbiegung von S zur Deckung bringen. Durch die Quadrate von S ist C in Felder eingeteilt, die von Kreisen begrenzt werden. Man erhält den Torus zurück, indem man zwei Kreise, die ein Zylinderfeld begrenzen, identifiziert. Wenn wir demnach den Zylinder in der früher geschilderten Weise um den Torus herumlegen, kommen alle Felder übereinander zu liegen, jedes Feld bedeckt den Torus einmal vollständig, und die Grenzlinien liegen alle über einem kanonischen Schnittsystem des Torus. Nunmehr verfahren wir weiter mit dem Streifen S wie bei der Konstruktion des quadratischen Gitters; wir setzen die Ebene aus solchen Streifen zusammen. Wenn wir dann die Ebene unendlich oft um C

herumlegen, so daß wieder S in C übergeht, so liegen offenbar alle an S angestückelten Streifen über S, und die Quadrateinteilung jener Streifen fällt mit der Einteilung von S zusammen. Legen wir wieder C um den Torus herum, so kommen alle Quadrate der Ebene übereinander zu liegen, und die Grenzlinien liegen alle über einem kanonischen Schnittsystem des Torus, wie wir behauptet hatten.

Durch diese zweite Konstruktion haben wir für die universelle Überlagerungsfläche U des Torus eine besonders einfache Abbildung auf die Ebene E erhalten. Bezeichnet man nämlich als äquivalent alle die Punkte von U, die über demselben Toruspunkt liegen, so ist in E jedes System äquivalenter Punkte von U dargestellt durch ein quadratisches Punktgitter. Wir definieren nun als *Fundamentalgruppe* (f) des Torus die Gruppe aller topologischen Abbildungen von U auf sich, die jeden Punkt in einen äquivalenten überführen. Dann wird (f) durch die Abbildung $U \rightarrow E$ ersichtlich in die Gruppe von Translationen verwandelt, die das quadratische Gitter in sich überführen.

Nun sei g irgendeine andere topologische Abbildung *von U auf sich*, die zwar nicht jeden Punkt in einen äquivalenten, aber äquivalente Punkte stets in äquivalente Punkte überführen möge. Dann entspricht g einer bestimmten topologischen Abbildung *h des Torus auf sich.* Jeder Punkt P des Torus liegt nämlich unter einem gewissen System unendlich vieler äquivalenter Punkte (Q) von U. Alle Bildpunkte (Q') der Punkte (Q) liegen nach Definition von g über einem und demselben Toruspunkt P'. Durch g wird also die Abbildung $P \rightarrow P'$ definiert, und diese topologische Abbildung des Torus auf sich nennen wir h. Man kann umgekehrt beweisen, daß sich zu jeder vorgegebenen Abbildung h des Torus eine Abbildung g der Überlagerungsfläche finden läßt, die zu h in der angegebenen Beziehung steht. g ist dann nur bis auf eine beliebige Abbildung aus (f) bestimmt.

Auf diese Weise lassen sich nun die Abbildungsklassen des Torus vollständig übersehen; das Ergebnis sei hier ohne nähere Begründung angegeben; die Abbildung g werde dabei ersetzt durch die Abbildung γ in E, in die g bei der Abbildung $U \rightarrow E$ übergeht. Sei dann $ABCD$ ein quadratischer Fundamentalbereich der Translationsgruppe (t) in E, die (f) entspricht. Seien $A'B'C'D'$ die Bilder von $ABCD$ bei der Abbildung γ. Dann muß auch $A'B'C'D'$ ein Fundamentalparallelogramm von (t) sein. Es ist nun die Torusabbildung h dann und nur dann eine Deformation, wenn *$ABCD$ durch eine Translation* in $A'B'C'D'$ überführbar ist. Die anderen Abbildungsklassen des Torus entsprechen den anderen Gestalten, die ein erzeugendes Parallelogramm des Gitters haben kann (vgl. Abb. 39, S. 29), sowie den Drehungen und Spiegelungen des Quadrats $ABCD$ in sich[1].

[1] Charakterisiert man das Gitter als die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in einem cartesischen System und bringt man A' durch eine Translation in den

Der Begriff der universellen Überlagerungsfläche läßt sich für alle Flächen definieren. Für die geschlossenen orientierbaren Flächen erhält man die universellen Überlagerungsflächen, indem man $4p$-Ecke in ähnlicher Weise aneinandersetzt und aufeinander bezieht wie Quadrate beim Torus. Für $p > 1$ kann man aber die Fundamentalgruppe nicht mehr durch eine euklidische Translationsgruppe veranschaulichen. Dagegen kann man die Fundamentalgruppe durch eine hyperbolische Schiebungsgruppe, und die $4p$-Ecke durch deren Fundamentalbereiche verwirklichen (vgl. Abb. 249, S. 228, für $p = 2$). Bei berandeten Flächen kommt man auf Translations- oder Schiebungsgruppen mit offenem Fundamentalbereich. Bei nichtorientierbaren Flächen muß man bei der metrischen Realisierung der Fundamentalgruppe auch euklidische und hyperbolische Gleitspiegelungen zu den Translationen und Schiebungen hinzunehmen.

§ 50. Konforme Abbildung des Torus.

In § 39 hatten wir die Frage aufgeworfen, ob bzw. auf wie viele Arten eine Fläche auf sich selbst oder eine andere Fläche konform abgebildet werden kann. Wir hatten uns dabei auf Flächen beschränkt, die der berandeten Kreisscheibe oder der Kugel oder dem Innern eines Kreises topologisch äquivalent sind. Der Begriff der universellen Überlagerungsfläche erlaubt es, auch für alle anderen Flächen jene Frage zu behandeln. Wir wollen uns darauf beschränken, alle konformen Abbildungen eines *Torus* auf einen anderen oder denselben Torus aufzusuchen. Bei den anderen Flächen kommt man nämlich mit den gleichen Methoden zum Ziel wie beim Torus, und beim Torus sind diese Methoden der Anschauung am leichtesten zugänglich. Hier und im folgenden bezeichnen wir als Torus nicht nur die Rotationsfläche eines Kreises um eine ihn nicht schneidende in seiner Ebene gelegenen Achse, sondern auch jede dieser Fläche topologisch äquivalente Fläche.

Nach dem „Entweder-Oder"-Satz, der in § 39 erwähnt wurde, kann jede Fläche, die topologisch dem Innern eines Kreises oder, was dasselbe ist, der euklidischen Ebene entspricht, konform entweder auf die hyperbolische oder die euklidische Ebene abgebildet werden. Diesen Satz wenden wir auf die universelle Überlagerungsfläche U eines Torus T an, da ja U der Voraussetzung des Satzes genügt. U sei also konform auf die Ebene E abgebildet, und wir lassen es zunächst dahingestellt, ob E die euklidische oder die hyperbolische Ebene ist.

Die Fundamentalgruppe (f) ist nun eine Gruppe *konformer* Abbildungen von U auf sich, da diese Abbildungen jedes Teilgebiet von U

Nullpunkt, so ist das Parallelogramm $A'B'C'D'$ durch die Koordinaten a, b von B' und c, d von C' festgelegt. Um alle Abbildungsklassen des Torus zu kennzeichnen, hat man für a, b, c, d alle ganzen Zahlen einzusetzen, die der Bedingung $ad - bc = \pm 1$ genügen.