Der Begriff der universellen Überlagerungsfläche läßt sich für alle Flächen definieren. Für die geschlossenen orientierbaren Flächen erhält man die universellen Überlagerungsflächen, indem man $4p$-Ecke in ähnlicher Weise aneinandersetzt und aufeinander bezieht wie Quadrate beim Torus. Für $p > 1$ kann man aber die Fundamentalgruppe nicht mehr durch eine euklidische Translationsgruppe veranschaulichen. Dagegen kann man die Fundamentalgruppe durch eine hyperbolische Schiebungsgruppe, und die $4p$-Ecke durch deren Fundamentalbereiche verwirklichen (vgl. Abb. 249, S. 228, für $p = 2$). Bei berandeten Flächen kommt man auf Translations- oder Schiebungsgruppen mit offenem Fundamentalbereich. Bei nichtorientierbaren Flächen muß man bei der metrischen Realisierung der Fundamentalgruppe auch euklidische und hyperbolische Gleitspiegelungen zu den Translationen und Schiebungen hinzunehmen.

§ 50. Konforme Abbildung des Torus.

In § 39 hatten wir die Frage aufgeworfen, ob bzw. auf wie viele Arten eine Fläche auf sich selbst oder eine andere Fläche konform abgebildet werden kann. Wir hatten uns dabei auf Flächen beschränkt, die der berandeten Kreisscheibe oder der Kugel oder dem Innern eines Kreises topologisch äquivalent sind. Der Begriff der universellen Überlagerungsfläche erlaubt es, auch für alle anderen Flächen jene Frage zu behandeln. Wir wollen uns darauf beschränken, alle konformen Abbildungen eines *Torus* auf einen anderen oder denselben Torus aufzusuchen. Bei den anderen Flächen kommt man nämlich mit den gleichen Methoden zum Ziel wie beim Torus, und beim Torus sind diese Methoden der Anschauung am leichtesten zugänglich. Hier und im folgenden bezeichnen wir als Torus nicht nur die Rotationsfläche eines Kreises um eine ihn nicht schneidende in seiner Ebene gelegenen Achse, sondern auch jede dieser Fläche topologisch äquivalente Fläche.

Nach dem „Entweder-Oder"-Satz, der in § 39 erwähnt wurde, kann jede Fläche, die topologisch dem Innern eines Kreises oder, was dasselbe ist, der euklidischen Ebene entspricht, konform entweder auf die hyperbolische oder die euklidische Ebene abgebildet werden. Diesen Satz wenden wir auf die universelle Überlagerungsfläche U eines Torus T an, da ja U der Voraussetzung des Satzes genügt. U sei also konform auf die Ebene E abgebildet, und wir lassen es zunächst dahingestellt, ob E die euklidische oder die hyperbolische Ebene ist.

Die Fundamentalgruppe (f) ist nun eine Gruppe *konformer* Abbildungen von U auf sich, da diese Abbildungen jedes Teilgebiet von U

Nullpunkt, so ist das Parallelogramm $A'B'C'D'$ durch die Koordinaten a, b von B' und c, d von C' festgelegt. Um alle Abbildungsklassen des Torus zu kennzeichnen, hat man für a, b, c, d alle ganzen Zahlen einzusetzen, die der Bedingung $ad - bc = \pm 1$ genügen.

sogar in ein kongruentes Gebiet verwandeln. Der Gruppe (f) muß daher bei der konformen Abbildung $U \to E$ eine Gruppe (t) konformer Abbildungen von E auf sich entsprechen. Die konformen Abbildungen von E auf sich sind aber sämtlich bekannt. Es sind die hyperbolischen Bewegungen, falls E die hyperbolische Ebene ist, und die euklidischen Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen, falls E die euklidische Ebene ist (vgl. S. 233, 235). Außerdem wissen wir von der Gruppe (t), daß sie gewisse Verwandtschaft mit einer euklidischen krystallographischen Translationsgruppe hat; denn mit Ausnahme der Identität sind sämtliche Abbildungen von (t) fixpunktfrei, und die Gruppe besitzt einen viereckigen Fundamentalbereich. Wäre E nun die hyperbolische Ebene, so müßte (t) eine diskontinuierliche Schiebungsgruppe mit endlichem Fundamentalbereich sein, und wir haben S. 228 erwähnt und plausibel gemacht, daß die Fundamentalbereiche dieser Gruppen mindestens acht Ecken haben. Hiernach bleibt nur übrig, daß E die euklidische Ebene ist. Es läßt sich elementar beweisen, daß jede euklidische, von einer Bewegung verschiedene Ähnlichkeitstransformation einen Fixpunkt besitzt. Die Gruppe (t) kann also außer der Identität nur fixpunktfreie Bewegungen, d. h. Translationen, enthalten. Da außerdem (t) diskontinuierlich ist und einen endlichen Fundamentalbereich hat, muß (t) eine krystallographische Translationsgruppe sein, wie wir sie S. 62—64 behandelt haben.

Nun sei für irgendeinen anderen Torus T' die gleiche Betrachtung angestellt; U' sei die universelle Überlagerungsfläche von T'; die Fundamentalgruppe von T' sei durch die konforme Abbildung $U' \to E$ in die krystallographische Translationsgruppe (t') in E übergeführt. Wir erwähnten schon, daß jede Abbildung eines Torus auf sich selbst zu einer Abbildung der Überlagerungsfläche ergänzt werden kann. Ebenso läßt sich zu jeder konformen Abbildung $T \to T'$ eine konforme Abbildung $U \to U'$ bestimmen, so daß entsprechende Punkte von U und U' stets über entsprechenden Punkten von T und T' liegen. Durch die Abbildungen $U \to E$ und $U' \to E$ wird $U \to U'$ in eine konforme Abbildung a von E auf sich selbst übergeführt. a muß eine euklidische Bewegung oder Ähnlichkeitstransformation sein. a muß aber außerdem die Translationsgruppe (t) in (t') überführen.

Damit haben wir gezeigt, daß T nur dann auf T' konform abgebildet werden kann, wenn die Gruppen (t) und (t') durch eine Bewegung oder Ähnlichkeitstransformation ineinander überführbar sind. Man kann diese Bedingung in eine übersichtliche Form bringen. Sei t_1 eine kürzeste Translation aus (t) und sei t_2 unter den Translationen aus (t), die t_1 nicht parallel sind, wiederum eine kürzeste. m sei der Quotient der Längen von t_2 und t_1, also $m \geqq 1$. α sei der Winkel dieser Translationen. Um α eindeutig festzulegen, genügt es zu fordern $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. In gleicher Weise lassen sich der Gruppe (t')

zwei Zahlen m' und α' zuordnen. Damit nun (t) durch eine Ähnlichkeitstransformation in (t') überführbar ist, sind die Bedingungen $m = m'$ und $\alpha = \alpha'$ notwendig und hinreichend (der elementare Beweis bleibe dem Leser überlassen). Wir können somit jedem Torus T zwei Zahlen m, α zuordnen, so daß T nur auf diejenigen Torusflächen konform abgebildet werden kann, für die jene beiden Zahlen die gleichen Werte haben wie für T. Man nennt dieses Zahlenpaar (oder ein anderes, das jenem umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann) die *Moduln* des Torus.

Für die konforme Abbildbarkeit zweier Torusflächen T und T' ist aber die Übereinstimmung der Moduln nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Denn dann gibt es eine Ähnlichkeitstransformation oder Bewegung a von E in sich, die (t) in (t') überführt, und es ist leicht einzusehen, daß die zu a gehörige konforme Abbildung $U \to U'$ eine konforme Abbildung $T \to T'$ bestimmt; jene Abbildung $U \to U'$ führt nämlich übereinanderliegende Punkte von U und nur solche Punkte stets in übereinanderliegende Punkte von U' über. Wir können zusammenfassend sagen, daß die Torusflächen im Sinne der konformen Abbildung eine zweiparametrige Schar bilden.

Weist die räumliche Gestalt eines Torus keine besondere Regelmäßigkeit auf, so lassen sich die Werte der beiden Moduln nicht anschaulich aus der Gestalt des Torus ableiten. Ist der Torus T dagegen eine Rotationsfläche, so besitzt (t) stets einen rechteckigen Fundamentalbereich, wir müssen also $\alpha = \pi/2$ setzen. In diesem Fall läßt sich nämlich die Abbildung $U \to E$ explizit angeben. Sie überführt das Orthogonalnetz der Meridiane und Breitenkreise in zwei orthogonale Scharen paralleler Geraden von E. Ist insbesondere T die Rotationsfläche eines Kreises, so kann das Seitenverhältnis m der rechteckigen Fundamentalbereiche von (t) von nichts anderem abhängen als vom Radienverhältnis des Meridiankreises und der Seelenachse. Zwei Kreistorusflächen können daher dann und nur dann konform aufeinander abgebildet werden, wenn sie ähnlich sind.

Im vierdimensionalen Raum läßt sich eine Torusfläche angeben, für die U sogar *längentreu* auf die euklidische Ebene abbildbar ist (vgl. Anhang 2).

Wir können jetzt auch leicht übersehen, auf welche Arten irgendein Torus T konform auf sich selbst abgebildet werden kann. Die Gruppe (k) dieser Abbildungen muß der Gruppe (l) der Bewegungen oder Ähnlichkeitstransformationen in E entsprechen, die (t) in sich überführen. (l) umfaßt ersichtlich alle Translationen von E in sich. Mit der Gesamtheit ist (l) im allgemeinen erschöpft; weist dagegen (t) besondere Regelmäßigkeiten, z. B. einen quadratischen Fundamentalbereich auf, so kann (l) auch Drehungen und Spiegelungen enthalten.

Das Verfahren, das wir für den Torus angegeben haben, läßt sich auf alle anderen Flächenklassen übertragen. In den meisten Fällen ist aber die Überlagerungsfläche nicht wie beim Torus auf die euklidische, sondern auf die hyperbolische Ebene konform abbildbar, z. B. bei allen orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht $p > 1$. Man wird in diesen Fällen auf Schiebungsgruppen geführt, und die konforme Abbildbarkeit zweier Flächen hängt dann davon ab, ob die zugehörigen Schiebungsgruppen durch eine hyperbolische Bewegung ineinander überführbar sind. Wie sich durch Überlegungen aus der hyperbolischen Geometrie ergibt, sind die hyperbolischen Schiebungsgruppen mit $4p$-eckigem endlichen Fundamentalbereich bis auf eine hyperbolische Bewegung durch $6p-6$ Konstanten festgelegt. Zu jeder orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht $p > 1$ gehören daher $6p-6$ Moduln.

In der Funktionentheorie wendet man das Verfahren hauptsächlich auf die RIEMANNschen Flächen der algebraischen Funktionen an. Die Abbildung $U \to E$ führt im Fall $p = 1$ zu den elliptischen Funktionen und im Fall $p > 1$ zu den von KLEIN und POINCARÉ untersuchten automorphen Funktionen.

Die ungeschlossenen Flächen führen auf Gruppen mit unendlichem Fundamentalbereich. In der Funktionentheorie begegnet man solchen Gruppen z. B. beim Studium der Exponentialfunktion und der elliptischen Modulfunktion.

§ 51. Das Problem der Nachbargebiete, das Fadenproblem und das Farbenproblem.

Zum Schluß wollen wir drei nahe miteinander verwandte Fragen behandeln, die entstehen, wenn man eine Fläche in verschiedene Gebiete einteilt. Solche Einteilungen in der Ebene treten uns z. B. in den Landkarten der politischen Geographie entgegen. Ferner treten Gebietseinteilungen beliebiger Flächen in der kombinatorischen Topologie auf, wenn man eine krumme Fläche durch ein topologisch äquivalentes Polyeder ersetzt. Um die Seitenflächen des Polyeders zu bestimmen, muß man die krumme Fläche in Gebiete einteilen.

Das Problem der Nachbargebiete besteht darin, auf einer Fläche die Höchstzahl der Gebiete zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß jedes Gebiet an jedes andere längs einer Kurve angrenzt[1]. Wir untersuchen diese Frage zunächst in der Ebene und wählen in ihr zwei Gebiete 1 und 2 aus, die längs einer Kurve aneinanderstoßen. Wenn wir ein drittes Gebiet ganz um die Gebiete 1 und 2 herumlegen, so können wir kein viertes Gebiet mehr bestimmen, das an alle drei ersten grenzt (Abb. 323). Wenn wir dagegen das dritte Gebiet so legen, wie in Abb. 324 angegeben ist, so läßt sich ein geeignetes viertes Gebiet ohne weiteres finden. Wie wir dieses aber auch auswählen, es wird stets eins der

[1] Es ist dabei nicht gefordert, daß die Gebiete die Fläche vollständig bedecken.