die Überlagerungsfläche nicht wie beim Torus auf die euklidische, sondern auf die hyperbolische Ebene konform abbildbar, z. B. bei allen orientierbaren geschlossenen Flächen vom Geschlecht $p > 1$. Man wird in diesen Fällen auf Schiebungsgruppen geführt, und die konforme Abbildbarkeit zweier Flächen hängt dann davon ab, ob die zugehörigen Schiebungsgruppen durch eine hyperbolische Bewegung ineinander überführbar sind. Wie sich durch Überlegungen aus der hyperbolischen Geometrie ergibt, sind die hyperbolischen Schiebungsgruppen mit $4p$-eckigem endlichen Fundamentalbereich bis auf eine hyperbolische Bewegung durch $6p-6$ Konstanten festgelegt. Zu jeder orientierbaren geschlossenen Fläche vom Geschlecht $p > 1$ gehören daher $6p-6$ Moduln.

In der Funktionentheorie wendet man das Verfahren hauptsächlich auf die RIEMANNschen Flächen der algebraischen Funktionen an. Die Abbildung $U \to E$ führt im Fall $p = 1$ zu den elliptischen Funktionen und im Fall $p > 1$ zu den von KLEIN und POINCARÉ untersuchten automorphen Funktionen.

Die ungeschlossenen Flächen führen auf Gruppen mit unendlichem Fundamentalbereich. In der Funktionentheorie begegnet man solchen Gruppen z. B. beim Studium der Exponentialfunktion und der elliptischen Modulfunktion.

## § 51. Das Problem der Nachbargebiete, das Fadenproblem und das Farbenproblem.

Zum Schluß wollen wir drei nahe miteinander verwandte Fragen behandeln, die entstehen, wenn man eine Fläche in verschiedene Gebiete einteilt. Solche Einteilungen in der Ebene treten uns z. B. in den Landkarten der politischen Geographie entgegen. Ferner treten Gebietseinteilungen beliebiger Flächen in der kombinatorischen Topologie auf, wenn man eine krumme Fläche durch ein topologisch äquivalentes Polyeder ersetzt. Um die Seitenflächen des Polyeders zu bestimmen, muß man die krumme Fläche in Gebiete einteilen.

Das Problem der Nachbargebiete besteht darin, auf einer Fläche die Höchstzahl der Gebiete zu bestimmen, welche die Eigenschaft haben, daß jedes Gebiet an jedes andere längs einer Kurve angrenzt[1]. Wir untersuchen diese Frage zunächst in der Ebene und wählen in ihr zwei Gebiete 1 und 2 aus, die längs einer Kurve aneinanderstoßen. Wenn wir ein drittes Gebiet ganz um die Gebiete 1 und 2 herumlegen, so können wir kein viertes Gebiet mehr bestimmen, das an alle drei ersten grenzt (Abb. 323). Wenn wir dagegen das dritte Gebiet so legen, wie in Abb. 324 angegeben ist, so läßt sich ein geeignetes viertes Gebiet ohne weiteres finden. Wie wir dieses aber auch auswählen, es wird stets eins der

[1] Es ist dabei nicht gefordert, daß die Gebiete die Fläche vollständig bedecken.

übrigen Gebiete durch die anderen völlig eingeschlossen, so daß wir kein fünftes Gebiet finden können, das an alle anderen längs einer Kurve angrenzt. Unsere Versuche zeigen, daß die Höchstzahl der Nachbargebiete in der Ebene vier beträgt. Das läßt sich auch streng beweisen. In Abb. 325 ist eine besonders symmetrische Anordnung dieser Gebiete gezeichnet.

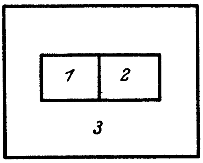


Abb. 323.

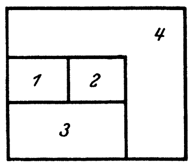


Abb. 324.

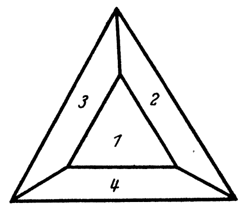


Abb. 325.

Das Fadenproblem ist die duale Umkehrung des Problems der Nachbargebiete (wobei die Dualität im Sinne einer topologischen Verallgemeinerung des *räumlichen* Dualitätsprinzips der projektiven Geometrie zu verstehen ist). Beim Fadenproblem ist die Höchstzahl der Punkte gesucht, die auf einer Fläche liegen und sich sämtlich untereinander durch Kurven verbinden lassen, welche auf der Fläche verlaufen, ohne einander zu schneiden. Durch eine einfache Überlegung ergibt sich, daß diese Höchstzahl mit der Höchstzahl der Nachbargebiete auf derselben Fläche übereinstimmen muß. Um dies zu zeigen, wählen wir aus jedem der Nachbargebiete einen Punkt aus. Da alle Nachbargebiete längs einer Kurve aneinanderstoßen, können wir je zwei der Punkte durch eine Kurve verbinden, die nur in den beiden zugehörigen Gebieten verläuft. Die so entstehenden Kurven können wir ferner so legen, daß die Kurvenstücke, die in demselben Gebiet verlaufen, einander nicht schneiden; denn wir haben ja in diesem Gebiet nur einen im Innern liegenden Punkt mit bestimmten Randpunkten zu verbinden. Aus jeder Anordnung von $n$ Nachbargebieten ergibt sich also eine Lösung des Fadenproblems mit $n$ Punkten. Die Höchstzahl der Punkte des Fadenproblems ist daher mindestens gleich der Höchstzahl der Nachbargebiete. Umgekehrt ergibt sich aber aus jeder Lösung des Fadenproblems mit $n$ Punkten eine Anordnung von $n$ Nachbargebieten. Wir teilen hierzu jede Kurve, die zwei Punkte miteinander verbindet, in zwei Teile und erweitern jeden Punkt und die von ihm ausgehenden Kurventeile durch Hinzuziehung der umliegenden Flächenpunkte zu einem Flächengebiet; dann erhalten wir $n$ sternförmige Gebiete, die sämtlich aneinandergrenzen. Also ist die Höchstzahl der Nachbargebiete mindestens gleich der Höchstzahl der Punkte des Fadenproblems. Da wir vorher auch das Umgekehrte bewiesen haben, so folgt, daß beide Höchstzahlen einander gleich sind.

Nicht nur für die Flächen vom Zusammenhang 1, sondern auch für andere Flächen sind diese Höchstzahlen bestimmt worden. Für die projektive Ebene und den Torus sind sie 6 und 7. Beispiele solcher Anordnungen sind in den Abb. 326 und 327 wiedergegeben. Die projektive Ebene ist dabei durch eine Kreisscheibe dargestellt, bei der diametrale Peripheriepunkte identifiziert sind, der Torus durch eine Quadratfläche mit der üblichen Ränderzuordnung. Abb. 326 entspricht der S. 132, Abb. 167 dargestellten Projektion des Dodekaeders. Abb. 328 gibt in der projektiven Ebene eine Lösung des Fadenproblems, die zur Gebietseinteilung von Abb. 326 dual ist.

In engem Zusammenhang mit dem Problem der Nachbargebiete steht das Farbenproblem, das sich ins Gewand einer Frage der praktischen Kartographie kleiden läßt. Es sei auf einer Fläche eine Anzahl von Gebieten eingezeichnet. Jedes dieser Gebiete soll mit einer bestimmten Farbe bemalt werden, aber nie zwei Gebiete, die längs einer Kurve aneinandergrenzen, mit derselben Farbe. Wenn dagegen zwei

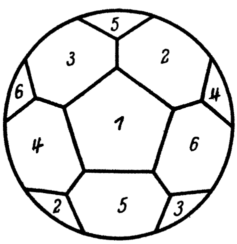


Abb. 326.

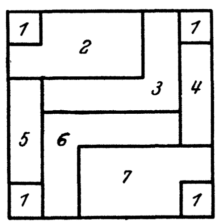


Abb. 327.

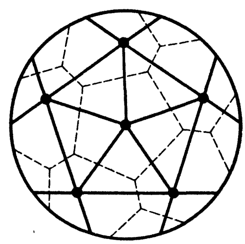

Abb. 328.

Gebiete nur in einzelnen Punkten aneinanderstoßen, dürfen sie die gleiche Farbe haben. Es soll nun für eine gegebene Fläche die Mindestanzahl der Farben bestimmt werden, die zu einer derartigen Färbung für jede auf der Fläche mögliche Gebietseinteilung ausreichen.

Diese Zahl muß jedenfalls mindestens so groß sein wie die Höchstzahl der auf der Fläche möglichen Nachbargebiete. Denn in einem System von Nachbargebieten müssen alle Gebiete verschiedene Farben erhalten. Umgekehrt liegt die Vermutung nahe, daß man mit jener Höchstzahl auskommt. In der Tat ist bewiesen worden, daß auf der projektiven Ebene sechs Farben und auf dem Torus sieben Farben für die Ausfärbung nach unserer Vorschrift genügen, wie man die Gebiete auch wählt. Dagegen ist es eine bisher unbewiesene Vermutung, daß man in der Ebene und auf der Kugel mit vier Farben auskommt[1].

Betrachten wir zunächst Beispiele von Gebietseinteilungen in der Ebene. Die drei Nachbargebiete von Abb. 329a müssen wir mit drei verschiedenen Farben 1, 2, 3 färben. Dann können wir das vierte Gebiet, das an die Gebiete 2 und 3 angrenzt, mit der Farbe 4 oder mit der Farbe 1 versehen. Wenn wir es mit der Farbe 4 färben, kommen wir

[1] Für Kugel und Ebene ist das Problem nicht wesentlich verschieden.

bei der Gebietseinteilung von Abb. 329b nicht mit vier Farben aus. Wir müssen das Gebiet also in diesem Falle mit der Farbe 1 ausfüllen. Bei dieser Färbung stoßen wir aber bei der Einteilung von Abb. 329c auf Schwierigkeiten; hier muß das Gebiet die Farbe 4 erhalten. Man erkennt aus diesen Beispielen, daß die Färbung der ersten vier Gebiete durch die Anordnung der weiteren Gebiete mitbestimmt wird. Wir müssen, wenn ein neues Gebiet hinzukommt, unter Umständen die bereits gefärbten Gebiete noch einmal umfärben, und daraus ergibt sich die ganze Schwierigkeit des Problems.

Wir wollen nun einen Weg einschlagen, auf dem wir das Farbenproblem für eine Reihe geschlossener Flächen lösen können. Hierzu verzerren wir die Fläche derartig, daß sie zu einem Polyeder wird und die einzelnen Gebiete in die Seitenflächen des Polyeders übergehen[1]. Es genügt offenbar, das Problem für alle Polyeder zu lösen, die den gleichen Zusammenhang haben wie die gegebene Fläche.

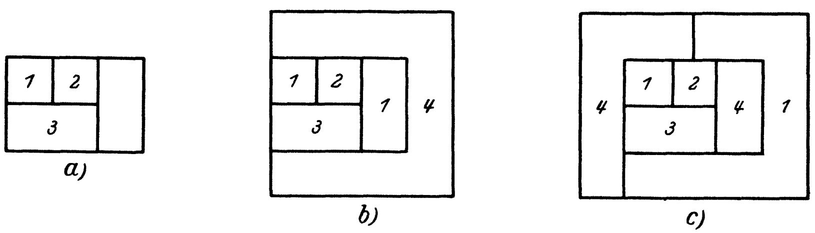


Abb. 329.

Wir beweisen zunächst: Jedes Polyeder vom Zusammenhang $h$ läßt sich mit höchstens $n$ Farben ausfärben, wenn die Zahl $n$ die Eigenschaft hat, daß für alle ganzen Zahlen $F > n$ die Ungleichung gilt

$$nF > 6(F + h - 3).$$

Nachher werden wir zu jedem festen positiven $h$ die kleinste Zahl $n_h$ bestimmen, die diese Eigenschaft hat. Dann wird bewiesen sein, daß jede geschlossene Fläche vom Zusammenhang $h$ sich in jeder Gebietseinteilung mit $n_h$ Farben ausfärben läßt.

Wir denken uns jetzt die Zusammenhangszahl $h$ fest gegeben sowie irgendeine ganze Zahl $n$, die mit diesem $h$ die angegebene Bedingung erfüllt. Wir teilen nun die Polyeder des Zusammenhangs $h$ nach ihrer Flächenzahl $F$ ein und beweisen unsere Behauptung durch Induktion nach wachsendem $F$. Unsere Behauptung ist trivialerweise richtig für alle $F \leqq n$. Denn dann brauchen wir bloß jede Seitenfläche des Polyeders mit einer anderen Fläche auszufüllen. Der Satz sei nun schon für

[1] Wie die Beispiele von Abb. 329 lehren, ist diese Verzerrung im Allgemeinen nur möglich, wenn wir auch krumme Seitenflächen zulassen. Für den folgenden Beweis ist das unwesentlich.

alle $F \leqq F_0$ bewiesen. Dann wollen wir seine Gültigkeit für $F = F_0 + 1$ dartun. Nach dem Obigen können wir uns auf $F > n$ beschränken, nach unserer Voraussetzung gilt also für diese Zahl $F$ die Ungleichung

$$nF > 6(F + h - 3).$$

Wir wenden nun den Eulerschen Polyedersatz an[1], $E - K + F = 3 - h$ oder $F + h - 3 = K - E$. Durch eine Deformation, bei der sich die Zahl $F$ und der Zusammenhang $h$ nicht ändern, können wir erreichen, daß in dem Polyeder an jeder Ecke nur drei Flächen aneinanderstoßen, also auch nur drei Kanten auslaufen (vgl. Abb. 330). Von allen $E$ Ecken zusammen gehen somit $3E$ Kanten aus, und da hierbei jede Kante doppelt gezählt wird, ist $3E = 2K$, also

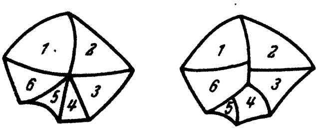

Abb. 330.

$$\begin{aligned} 6(F + h - 3) &= 6K - 6E \\ &= 6K - 4K = 2K. \end{aligned}$$

Demnach besagt die Ungleichung über die Zahl $n$:

$$nF > 2K.$$

Aus dieser Ungleichung können wir schließen, daß mindestens eine Seitenfläche des Polyeders von weniger als $n$ Kanten begrenzt wird. Denn sonst würden alle $F$ Flächen zusammen von mindestens $nF$ Kanten begrenzt werden, und da hierbei jede Kante doppelt gezählt wird, ergäbe sich $nF \leqq 2K$. Dieser Schluß bildet den Kern des Beweises.

Wir betrachten nun eine derartige Seitenfläche, an die weniger als $n$ Nachbarflächen angrenzen. Wir denken uns zunächst die mittlere Fläche fortgelassen und die umgebenden Flächen so weit über das hierdurch entstandene Loch fortgesetzt, daß sich das Polyeder wieder schließt. Das neue Polyeder hat denselben Zusammenhang wie das alte und eine Seitenfläche weniger. Also kann es nach Voraussetzung mit $n$ Farben ausgefüllt werden. Wir führen dieses aus und machen hierauf die Deformation wieder rückgängig. Dadurch ist das Polyeder bis auf die herausgegriffene Seitenfläche mit $n$ Farben ausgefärbt. Da aber an diese Fläche höchstens $n - 1$ Nachbarflächen angrenzen, können wir auch diese Fläche noch in der vorgeschriebenen Weise färben, ohne eine neue Farbe zu gebrauchen. Nun haben wir möglicherweise das ursprünglich gegebene Polyeder abändern müssen, um zu erreichen, daß von jeder Ecke nur drei Kanten auslaufen. Wir können aber diese Änderung jetzt rückgängig machen, ohne die Ausfärbung ändern zu müssen. Denn dabei entstehen keine neuen Grenzlinien.

[1] Bei der Aufstellung dieses Satzes haben wir über die Anordnung der Seitenflächen Voraussetzungen gemacht, die im vorliegenden Fall nicht erfüllt zu sein brauchen. Man kann aber einsehen, daß der Satz auch hier anwendbar ist.

Wir haben jetzt zu untersuchen, welche Zahlen $n$ die vorausgesetzte Bedingung erfüllen. Wir schreiben sie in der Form

$$n > 6\left(1 + \frac{h-3}{F}\right).$$

Hierbei sind für $F$ alle ganzen Zahlen einzusetzen, die größer als $n$ sind. Ist $h$ gleich 1 oder 2, so strebt der Wert der rechten Seite der Ungleichung mit wachsendem $F$ gegen 6 und bleibt stets kleiner als 6. In diesen beiden Fällen ist also $n_h = 6$ die kleinste ganze Zahl, die unserer Voraussetzung genügt. Für $h = 3$ hat die rechte Seite den festen Wert 6, also ist $n_h = 7$. Für $h > 3$ nimmt die rechte Seite mit wachsendem $F$ ab, es genügt daher, für $F$ den kleinsten zugelassenen Wert $n+1$ einzusetzen. Damit erhalten wir für $n$ im Fall $h > 3$ die Ungleichung

$$n > 6\left(1 + \frac{h-3}{n+1}\right),$$

umgeformt:

$$n(n+1) > 6n + 6 + 6h - 18, \qquad n^2 - 5n > 6h - 12,$$

also

$$n > \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{24h - 23}.$$

Bezeichnen wir mit $[x]$ die größte ganze Zahl unterhalb $x$, so ist demnach für $h > 3$:

$$n_h = \left[\tfrac{7}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{24h - 23}\right].$$

Auch für $h = 2$ und $h = 3$ ergibt diese Formel, obgleich sie nicht anwendbar ist, die richtigen Werte $n_h = 6$ und $n_h = 7$. Im Fall $h = 1$ ergibt sich dagegen ein anderer Wert, 4 statt 6. Dieser Wert ist aller Voraussicht nach der richtige, denn bis jetzt hat man noch keine ebene Gebietseinteilung angeben können, die sich nicht mit vier Farben ausfüllen läßt; ein exakter Beweis dieses Satzes ist aber bisher nicht gelungen. In der folgenden Tabelle sind die Werte von $n_h$ für $h = 1$ bis $h = 13$ zusammengestellt:

| $h =$ | $n_h =$ | $h =$ | $n_h =$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 6 ([4,000] = 4) | 8 | [10,000] = 10 |
| 2 | 6 ([6,000] = 6) | 9 | [10,447] = 10 |
| 3 | 7 ([7,000] = 7) | 10 | [10,866] = 10 |
| 4 | [7,775] = 7 | 11 | [11,264] = 11 |
| 5 | [8,425] = 8 | 12 | [11,640] = 11 |
| 6 | [9,000] = 9 | 13 | [12,000] = 12 |
| 7 | [9,522] = 9 | | |

Wir haben bis jetzt nur bewiesen, daß diese Anzahlen von Farben zureichend zur Ausfärbung sind. Es wäre denkbar, daß es Flächen vom Zusammenhang $h$ gibt, auf denen wir stets mit weniger als $n_h$ Farben auskommen. Es ist aber für $h = 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13$ gezeigt worden, daß in diesen Fällen genau $n_h$ Nachbargebiete auftreten können. In diesen Fällen kommt man also sicher nicht mit weniger als $n_h$ Farben aus, hier ist also das Farbenproblem vollständig gelöst. Auf allen anderen geschlossenen Flächen besitzen wir in den Zahlen $n_h$ obere Schranken für die Anzahl der Nachbargebiete.

An dem Farbenproblem ist besonders auffallend, daß der für die Ebene anschaulich evidente Satz bis jetzt nicht exakt bewiesen ist. Derartige Schwierigkeiten treten in der Mathematik sehr oft auf, wenn man anschauliche Sätze durch Zurückführung auf die Zahl rein logisch verstehen will. Als weiteres Beispiel nennen wir den Satz, daß eine geschlossene und doppelpunktlose Kurve die Ebene in zwei Teile zerlegt oder daß die Kugel unter allen Flächen bei gegebener Oberfläche das größte Volumen besitzt. Beide Sätze erfordern ziemlich schwierige und umständliche Beweise. Bei weitem das eigentümlichste Beispiel dieser Art bildet jedoch das Vierfarbenproblem. Denn bei diesem Problem ist nicht einzusehen, weshalb gerade im anschaulich einfachsten Fall solche Schwierigkeiten entstehen, während viel kompliziertere Fälle sich erledigen lassen.

# Anhänge zum sechsten Kapitel.

## 1. Projektive Ebene im vierdimensionalen Raum.

Wir wollen eine algebraische Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum $E_4$ angeben, die topologisch der projektiven Ebene äquivalent ist, die aber im Gegensatz zur Boyschen Fläche frei von Selbstdurchdringungen und sonstigen Singularitäten ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Kugelfläche

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{1}$$

aus und betrachten in den cartesischen Koordinaten $x, y, z, t$ des $E_4$ das Gebilde

$$x = u^2 - v^2, \quad y = uv, \quad z = uw, \quad t = vw \tag{2}$$

für alle Parameterwerte $u, v, w$, die (1) erfüllen. Da $x, y, z, t$ homogen quadratisch von $u, v, w$ abhängen, werden Diametralpunkte der Kugelfläche (1) stets durch denselben Punkt (2) des $E_4$ dargestellt. Wir zeigen jetzt, daß zwei nichtdiametrale Punkte von (1) stets verschiedenen Punkten (2) entsprechen. Nehmen wir zunächst einen Kugelpunkt $P$, für den weder $u$ noch $v$ noch $w$ verschwindet. Dann sind $y, z, t$ von Null verschieden und bestimmen die Proportion $u : v : w$. Der zu $P$ gehörige Punkt von (2) stellt also außer $P$ und dem Diametralpunkt von $P$ keinen Punkt der Kugel dar. Verschwindet $w$, so sind $u^2$ und $v^2$ aus den Gleichungen $u^2 + v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = x$ eindeutig bestimmt.