worden, daß in diesen Fällen genau n_h Nachbargebiete auftreten können. In diesen Fällen kommt man also sicher nicht mit weniger als n_h Farben aus, hier ist also das Farbenproblem vollständig gelöst. Auf allen anderen geschlossenen Flächen besitzen wir in den Zahlen n_h obere Schranken für die Anzahl der Nachbargebiete.

An dem Farbenproblem ist besonders auffallend, daß der für die Ebene anschaulich evidente Satz bis jetzt nicht exakt bewiesen ist. Derartige Schwierigkeiten treten in der Mathematik sehr oft auf, wenn man anschauliche Sätze durch Zurückführung auf die Zahl rein logisch verstehen will. Als weiteres Beispiel nennen wir den Satz, daß eine geschlossene und doppelpunktlose Kurve die Ebene in zwei Teile zerlegt oder daß die Kugel unter allen Flächen bei gegebener Oberfläche das größte Volumen besitzt. Beide Sätze erfordern ziemlich schwierige und umständliche Beweise. Bei weitem das eigentümlichste Beispiel dieser Art bildet jedoch das Vierfarbenproblem. Denn bei diesem Problem ist nicht einzusehen, weshalb gerade im anschaulich einfachsten Fall solche Schwierigkeiten entstehen, während viel kompliziertere Fälle sich erledigen lassen.

Anhänge zum sechsten Kapitel.

1. Projektive Ebene im vierdimensionalen Raum.

Wir wollen eine algebraische Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum E_4 angeben, die topologisch der projektiven Ebene äquivalent ist, die aber im Gegensatz zur Boyschen Fläche frei von Selbstdurchdringungen und sonstigen Singularitäten ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Kugelfläche

$$(1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

aus und betrachten in den cartesischen Koordinaten x, y, z, t des E_4 das Gebilde

$$(2) \qquad x = u^2 - v^2, \quad y = uv, \quad z = uw, \quad t = vw$$

für alle Parameterwerte u, v, w, die (1) erfüllen. Da x, y, z, t homogen quadratisch von u, v, w abhängen, werden Diametralpunkte der Kugelfläche (1) stets durch denselben Punkt (2) des E_4 dargestellt. Wir zeigen jetzt, daß zwei nichtdiametrale Punkte von (1) stets verschiedenen Punkten (2) entsprechen. Nehmen wir zunächst einen Kugelpunkt P, für den weder u noch v noch w verschwindet. Dann sind y, z, t von Null verschieden und bestimmen die Proportion $u : v : w$. Der zu P gehörige Punkt von (2) stellt also außer P und dem Diametralpunkt von P keinen Punkt der Kugel dar. Verschwindet w, so sind u^2 und v^2 aus den Gleichungen $u^2 + v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = x$ eindeutig bestimmt.

Der zugehörige Punkt (2) kann also nur die vier Punkte $(u, v, 0)$ $(u, -v, 0)$, $(-u, v, 0)$, $(-u, -v, 0)$ darstellen. Ist auch noch $u = 0$ oder $v = 0$, so reduzieren sich diese vier Punkte auf ein diametrales Punktepaar, und es ist nichts mehr zu beweisen. Ist $u \neq 0$, $v \neq 0$, so haben wir noch die Gleichung $y = uv$ heranzuziehen, die aus den vier Punkten ein Diametralpunktepaar aussondert. Es bleiben nur noch die Fälle zu untersuchen, in denen w von Null verschieden ist, während eine der Variabeln u, v verschwindet, also entweder: $u = 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, oder $v = 0$, $u \neq 0$, $w \neq 0$, oder endlich $u = v = 0$, $w = \pm 1$. Im ersten Fall ergibt sich $x = -v^2$; $-x + w^2 = 1$; $vw = t$; also sind v^2, w^2 und vw bekannt. Analog sind im zweiten Fall u^2, w^2 und uw bekannt. Beide Male schließt man wie im Fall $w = 0$, daß der zugehörige Punkt von (2) nur ein Diametralpunktepaar von (1) darstellt. Im dritten Fall ist nichts zu beweisen, da dieser Fall ohnehin nur für zwei diametrale Punkte der Kugel (1) zutrifft. Demnach stellt (2) mit der Nebenbedingung (1) umkehrbar eindeutig und stetig eine Kugel mit identifizierten Diametralpunkten, d. h. eine projektive Ebene dar.

Man kann aus den Definitionsgleichungen des Modells leicht u, v, w eliminieren. Aus den drei letzten Gleichungen (2) folgt nämlich

$$\frac{yz}{t} = u^2, \qquad \frac{yt}{z} = v^2, \qquad \frac{zt}{y} = w^2.$$

Die erste Gleichung von (2) geht also über in

$$y(z^2 - t^2) = xzt. \tag{3}$$

Und (1) verwandelt sich in

$$y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2 = yzt. \tag{4}$$

Das angegebene Modell ist daher der Schnitt der Hyperflächen (3) und (4).

Daß das Modell singularitätenfrei ist, d. h. überall eine stetige Tangentialebene besitzt, läßt sich leicht verifizieren, indem man auf der Kugel (1) u, v, w als Funktionen zweier unabhängiger Parameter ausdrückt und mittels (2) auch x, y, z, t in dieser Parameterdarstellung untersucht.

2. Euklidische Ebene im vierdimensionalen Raum.

Die Flächen des E_3, die der euklidischen Ebene isometrisch sind, gehen alle ins Unendliche, da sie notwendig Regelflächen sind. Im E_4 dagegen gibt es Flächen, die im kleinen der Ebene isometrisch sind, ohne Regelflächen zu sein. Wir wollen eine solche Fläche F angeben;

sie liegt ganz im Endlichen und ist einer Torusfläche topologisch äquivalent. Diese Fläche F hat die einfache Parameterdarstellung

$$x_1 = \cos u, \qquad x_3 = \cos v,$$
$$x_2 = \sin u, \qquad x_4 = \sin v.$$

Das Linienelement von F ist

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ &= \sin^2 u\, du^2 + \cos^2 u\, du^2 + \sin^2 v\, dv^2 + \cos^2 v\, dv^2 = du^2 + dv^2. \end{aligned}$$

F ist also in der Tat isometrisch zur Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten u, v. F liegt ganz im Endlichen, denn alle Koordinaten liegen zwischen $+1$ und -1. Man kann F übrigens als Schnitt der beiden dreidimensionalen Hyperzylinder $x_1^2 + x_2^2 = 1$ und $x_3^2 + x_4^2 = 1$ auffassen. Man erhält alle Punkte von F, wenn man u, v in der cartesischen (u, v)-Ebene alle Punkte eines achsenparallelen Quadrats der Seitenlänge 2π durchlaufen läßt. Verschiedenen inneren Punkten des Quadrats entsprechen verschiedene Punkte von F, dagegen stellen zwei Randpunkte des Quadrats denselben Punkt von F dar, wenn sie auf einer Geraden $u = \text{const}$ oder $v = \text{const}$ und auf gegenüberliegenden Quadratseiten liegen. Also ist F eine Torusfläche, und die (u, v)-Ebene ist die universelle Überlagerungsfläche von F.

Man könnte versuchen, die euklidische Geometrie auch auf geschlossenen Flächen zu verwirklichen, die nicht Torusgestalt haben. Es zeigt sich aber, daß dafür nur noch der KLEINsche Schlauch in Betracht kommt. Auf geschlossenen Flächen vom Zusammenhang $h > 3$ und nur auf ihnen läßt sich dagegen die hyperbolische Geometrie verwirklichen. Die elliptische Geometrie kann außer auf der Kugel und der projektiven Ebene auf keiner geschlossenen Fläche verwirklicht werden. Man kann diese Sätze aus der differentialgeometrischen Formel von O. BONNET über die curvatura integra schließen.