

Werk

Titel: Anschauliche Geometrie

Autor: Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN379425343

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

LOG Id: LOG_0067

LOG Titel: 1. Projective Ebene im vierdimensionalen Raum.

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

worden, daß in diesen Fällen genau n_h Nachbargebiete auftreten können. In diesen Fällen kommt man also sicher nicht mit weniger als n_h Farben aus, hier ist also das Farbenproblem vollständig gelöst. Auf allen anderen geschlossenen Flächen besitzen wir in den Zahlen n_h obere Schranken für die Anzahl der Nachbargebiete.

An dem Farbenproblem ist besonders auffallend, daß der für die Ebene anschaulich evidente Satz bis jetzt nicht exakt bewiesen ist. Derartige Schwierigkeiten treten in der Mathematik sehr oft auf, wenn man anschauliche Sätze durch Zurückführung auf die Zahl rein logisch verstehen will. Als weiteres Beispiel nennen wir den Satz, daß eine geschlossene und doppelpunktlose Kurve die Ebene in zwei Teile zerlegt oder daß die Kugel unter allen Flächen bei gegebener Oberfläche das größte Volumen besitzt. Beide Sätze erfordern ziemlich schwierige und umständliche Beweise. Bei weitem das eigentümlichste Beispiel dieser Art bildet jedoch das Vierfarbenproblem. Denn bei diesem Problem ist nicht einzusehen, weshalb gerade im anschaulich einfachsten Fall solche Schwierigkeiten entstehen, während viel kompliziertere Fälle sich erledigen lassen.

Anhänge zum sechsten Kapitel.

1. Projektive Ebene im vierdimensionalen Raum.

Wir wollen eine algebraische Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum E_4 angeben, die topologisch der projektiven Ebene äquivalent ist, die aber im Gegensatz zur Boyschen Fläche frei von Selbstdurchdringungen und sonstigen Singularitäten ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Kugelfläche

$$(1) \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

aus und betrachten in den cartesischen Koordinaten x, y, z, t des E_4 das Gebilde

$$(2) \quad x = u^2 - v^2, \quad y = uv, \quad z = uw, \quad t = vw$$

für alle Parameterwerte u, v, w , die (1) erfüllen. Da x, y, z, t homogen quadratisch von u, v, w abhängen, werden Diametralpunkte der Kugelfläche (1) stets durch denselben Punkt (2) des E_4 dargestellt. Wir zeigen jetzt, daß zwei nichtdiametrale Punkte von (1) stets verschiedenen Punkten (2) entsprechen. Nehmen wir zunächst einen Kugelpunkt P , für den weder u noch v noch w verschwindet. Dann sind y, z, t von Null verschieden und bestimmen die Proportion $u : v : w$. Der zu P gehörige Punkt von (2) stellt also außer P und dem Diametralpunkt von P keinen Punkt der Kugel dar. Verschwindet w , so sind u^2 und v^2 aus den Gleichungen $u^2 + v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = x$ eindeutig bestimmt.

Der zugehörige Punkt (2) kann also nur die vier Punkte $(u, v, 0)$, $(u, -v, 0)$, $(-u, v, 0)$, $(-u, -v, 0)$ darstellen. Ist auch noch $u = 0$ oder $v = 0$, so reduzieren sich diese vier Punkte auf ein diametrales Punktepaar, und es ist nichts mehr zu beweisen. Ist $u \neq 0$, $v \neq 0$, so haben wir noch die Gleichung $y = uv$ heranzuziehen, die aus den vier Punkten ein Diametralpunktepaar aussondert. Es bleiben nur noch die Fälle zu untersuchen, in denen w von Null verschieden ist, während eine der Variablen u , v verschwindet, also entweder: $u = 0$, $v \neq 0$, $w \neq 0$, oder $v = 0$, $u \neq 0$, $w \neq 0$, oder endlich $u = v = 0$, $w = \pm 1$. Im ersten Fall ergibt sich $x = -v^2$; $-x + w^2 = 1$; $vw = t$; also sind v^2 , w^2 und vw bekannt. Analog sind im zweiten Fall u^2 , w^2 und uw bekannt. Beide Male schließt man wie im Fall $w = 0$, daß der zugehörige Punkt von (2) nur ein Diametralpunktepaar von (1) darstellt. Im dritten Fall ist nichts zu beweisen, da dieser Fall ohnehin nur für zwei diametrale Punkte der Kugel (1) zutrifft. Demnach stellt (2) mit der Nebenbedingung (1) umkehrbar eindeutig und stetig eine Kugel mit identifizierten Diametralpunkten, d. h. eine projektive Ebene dar.

Man kann aus den Definitionsgleichungen des Modells leicht u , v , w eliminieren. Aus den drei letzten Gleichungen (2) folgt nämlich

$$\frac{yz}{t} = u^2, \quad \frac{yt}{z} = v^2, \quad \frac{zt}{y} = w^2.$$

Die erste Gleichung von (2) geht also über in

$$(3) \quad y(z^2 - t^2) = xzt.$$

Und (1) verwandelt sich in

$$(4) \quad y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2 = yzt.$$

Das angegebene Modell ist daher der Schnitt der Hyperflächen (3) und (4).

Daß das Modell singularitätenfrei ist, d. h. überall eine stetige Tangentialebene besitzt, läßt sich leicht verifizieren, indem man auf der Kugel (1) u , v , w als Funktionen zweier unabhängiger Parameter ausdrückt und mittels (2) auch x , y , z , t in dieser Parameterdarstellung untersucht.

2. Euklidische Ebene im vierdimensionalen Raum.

Die Flächen des E_3 , die der euklidischen Ebene isometrisch sind, gehen alle ins Unendliche, da sie notwendig Regelflächen sind. Im E_4 dagegen gibt es Flächen, die im kleinen der Ebene isometrisch sind, ohne Regelflächen zu sein. Wir wollen eine solche Fläche F angeben;