

## Werk

**Titel:** Anschauliche Geometrie

**Autor:** Hilbert, David; Cohn-Vossen, Stephan

**Verlag:** Springer

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN379425343

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN379425343>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=379425343>

**LOG Id:** LOG\_0068

**LOG Titel:** 2. Euklidische Ebene im vierdimensionalen Raum.

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Der zugehörige Punkt (2) kann also nur die vier Punkte  $(u, v, 0)$ ,  $(u, -v, 0)$ ,  $(-u, v, 0)$ ,  $(-u, -v, 0)$  darstellen. Ist auch noch  $u = 0$  oder  $v = 0$ , so reduzieren sich diese vier Punkte auf ein diametrales Punktepaar, und es ist nichts mehr zu beweisen. Ist  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$ , so haben wir noch die Gleichung  $y = uv$  heranzuziehen, die aus den vier Punkten ein Diametralpunktepaar aussondert. Es bleiben nur noch die Fälle zu untersuchen, in denen  $w$  von Null verschieden ist, während eine der Variablen  $u, v$  verschwindet, also entweder:  $u = 0$ ,  $v \neq 0$ ,  $w \neq 0$ , oder  $v = 0$ ,  $u \neq 0$ ,  $w \neq 0$ , oder endlich  $u = v = 0$ ,  $w = \pm 1$ . Im ersten Fall ergibt sich  $x = -v^2$ ;  $-x + w^2 = 1$ ;  $vw = t$ ; also sind  $v^2$ ,  $w^2$  und  $vw$  bekannt. Analog sind im zweiten Fall  $u^2$ ,  $w^2$  und  $uw$  bekannt. Beide Male schließt man wie im Fall  $w = 0$ , daß der zugehörige Punkt von (2) nur ein Diametralpunktepaar von (1) darstellt. Im dritten Fall ist nichts zu beweisen, da dieser Fall ohnehin nur für zwei diametrale Punkte der Kugel (1) zutrifft. Demnach stellt (2) mit der Nebenbedingung (1) umkehrbar eindeutig und stetig eine Kugel mit identifizierten Diametralpunkten, d. h. eine projektive Ebene dar.

Man kann aus den Definitionsgleichungen des Modells leicht  $u, v, w$  eliminieren. Aus den drei letzten Gleichungen (2) folgt nämlich

$$\frac{yz}{t} = u^2, \quad \frac{yt}{z} = v^2, \quad \frac{zt}{y} = w^2.$$

Die erste Gleichung von (2) geht also über in

$$(3) \quad y(z^2 - t^2) = xzt.$$

Und (1) verwandelt sich in

$$(4) \quad y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2 = yzt.$$

Das angegebene Modell ist daher der Schnitt der Hyperflächen (3) und (4).

Daß das Modell singularitätenfrei ist, d. h. überall eine stetige Tangentialebene besitzt, läßt sich leicht verifizieren, indem man auf der Kugel (1)  $u, v, w$  als Funktionen zweier unabhängiger Parameter ausdrückt und mittels (2) auch  $x, y, z, t$  in dieser Parameterdarstellung untersucht.

## 2. Euklidische Ebene im vierdimensionalen Raum.

Die Flächen des  $E_3$ , die der euklidischen Ebene isometrisch sind, gehen alle ins Unendliche, da sie notwendig Regelflächen sind. Im  $E_4$  dagegen gibt es Flächen, die im kleinen der Ebene isometrisch sind, ohne Regelflächen zu sein. Wir wollen eine solche Fläche  $F$  angeben;

sie liegt ganz im Endlichen und ist einer Torusfläche topologisch äquivalent. Diese Fläche  $F$  hat die einfache Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}x_1 &= \cos u, & x_3 &= \cos v, \\x_2 &= \sin u, & x_4 &= \sin v.\end{aligned}$$

Das Linienelement von  $F$  ist

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\&= \sin^2 u du^2 + \cos^2 u du^2 + \sin^2 v dv^2 + \cos^2 v dv^2 = du^2 + dv^2.\end{aligned}$$

$F$  ist also in der Tat isometrisch zur Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten  $u, v$ .  $F$  liegt ganz im Endlichen, denn alle Koordinaten liegen zwischen  $+1$  und  $-1$ . Man kann  $F$  übrigens als Schnitt der beiden dreidimensionalen Hyperzylinder  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  und  $x_3^2 + x_4^2 = 1$  auffassen. Man erhält alle Punkte von  $F$ , wenn man  $u, v$  in der cartesianischen  $(u, v)$ -Ebene alle Punkte eines achsenparallelen Quadrats der Seitenlänge  $2\pi$  durchlaufen läßt. Verschiedenen inneren Punkten des Quadrats entsprechen verschiedene Punkte von  $F$ , dagegen stellen zwei Randpunkte des Quadrats denselben Punkt von  $F$  dar, wenn sie auf einer Geraden  $u = \text{const}$  oder  $v = \text{const}$  und auf gegenüberliegenden Quadratseiten liegen. Also ist  $F$  eine Torusfläche, und die  $(u, v)$ -Ebene ist die universelle Überlagerungsfläche von  $F$ .

Man könnte versuchen, die euklidische Geometrie auch auf geschlossenen Flächen zu verwirklichen, die nicht Torusgestalt haben. Es zeigt sich aber, daß dafür nur noch der KLEINSche Schlauch in Betracht kommt. Auf geschlossenen Flächen vom Zusammenhang  $h > 3$  und nur auf ihnen läßt sich dagegen die hyperbolische Geometrie verwirklichen. Die elliptische Geometrie kann außer auf der Kugel und der projektiven Ebene auf keiner geschlossenen Fläche verwirklicht werden. Man kann diese Sätze aus der differentialgeometrischen Formel von O. BONNET über die curvatura integra schließen.