ARCHIV FÜR MATHEMATISCHE LOGIK UND GRUNDLAGENFORSCHUNG

2/1 Januar 1954

Herausgeber: Hans Hermes, Münster i. Westf.; Jürgen v. Kempski, Hembsen i. Westf.; Arnold Schmidt, Marburg

Beirat: P. Bernays, Zürich; E. W. Beth, Amsterdam; R. Feys, Brüssel; L. Kalmár, Szeged; O. Ketonen, Helsinki; H. Scholz, Münster; T. Skolem, Oslo

Inhalt von Heft 2/1:

ZUSAMMENFASSUNG VON MEHREREN VOLLSTÄNDIGEN INDUKTIONEN ZU EINER EINZIGEN

VON GERHARD GENTZEN*

Im folgenden soll nachgewiesen werden, daß jeder mathematische Beweis, in dem die Schlußweise der vollständigen Induktion mehrmals angewandt wird, durch gewisse einfache Zusammenfassungen von Schlüssen und Begriffen so umgestaltet werden kann, daß nur noch eine einzige Anwendung der vollständigen Induktion in ihm vorkommt.
Hierzu ist es nicht notwendig, eine bestimmte Art der Formalisierung der mathematischen Beweise zugrunde zu legen. Es soll lediglich vorausgesetzt werden, daß der Begriff des „mathematischen Beweises" alle Schlußweisen

* G. Gentzen hatte diese kleine Abhandlung Heinrich Scholz zu seinem 60. Geburtstag (17. Dezember 1944) „in Verehrung und Dankbarkeit" gewidmet. Ihre Veröffentlichung ist die Erfüllung einer Ehrenpflicht gegenüber dem 1945 verstorbenen Verfasser.

der „Prädikatenlogik" als zulässig umfaßt, ferner natürlich die Schlußweise der vollständigen Induktion selbst; an sonstigen zahlentheoretischen Bestandteilen ist nichts weiter vorauszusetzen nötig als lediglich die Zulassung des Grundprädikates "=" und der zugehörigen Grundformeln (Axiomformeln) $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ sowie $\neg (\mathfrak{m} = \mathfrak{n})$, für beliebige Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{m}$ verschieden sei. Andererseits können nach Belieben weitere mathematische Begriffe und zugehörige Axiome mit zugelassen werden. Allerdings hat der zu beweisende Satz in erster Linie Bedeutung für den Bereich der „reinen Zahlentheorie"; erweitert man diesen zur „Analysis", so wird nach Dedekind die vollständige Induktion auf andere Schlußweisen zurückführbar und die Behauptung jenes Satzes somit gegenstandslos.

Der Nachweis verläuft so:
Es liege eine Herleitung (d. h. ein formalisierter Beweis) vor, in welcher die Schlußweise der vollständigen Induktion in formalisierter Gestalt mehrfach vorkomme. Jede Anwendung derselben ist logisch gleichwertig mit einer Anwendung des „Induktionsaxioms" auf irgendeine spezielle Aussage über natürliche Zahlen, d. h. sie kann formal so gefaßt werden, daß eine Formel von folgender Gestalt als gültig gesetzt wird:

$$\{\mathfrak{F}_\nu(1) \,\&\, \forall \mathfrak{x}\, [\mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{x}+1)]\} \supset \forall \mathfrak{y}\, \mathfrak{F}_\nu(\mathfrak{y})$$

Dabei bezeichne $\mathfrak{F}_\nu$ eine beliebige Formel mit einer Leerstelle für ein eine natürliche Zahl bezeichnendes Zahlzeichen, also das formale Abbild einer Aussage über natürliche Zahlen; der Index ν diene uns zur Unterscheidung der verschiedenen in der Herleitung vorkommenden vollständigen Induktionen, durchlaufe also die Zahlen $1, 2, \ldots, \rho$, wobei ρ die Gesamtzahl der vorkommenden vollständigen Induktionen sei ($\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bezeichnen beliebige gebundene Variable; die $\mathfrak{F}_\nu$ können selbstverständlich auch freie Variable enthalten).
Wir werden nun diese ρ Induktionsaxiomformeln sämtlich unter Verwendung einer einzigen, alle diese in sich zusammenfassenden, formalisierten vollständigen Induktion herleiten. Dies geschieht folgendermaßen: Wir bilden die Formel

$$[\mathfrak{b} = 1 \supset \mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})] \;\&\; [\mathfrak{b} = 2 \supset \mathfrak{F}_2(\mathfrak{a})] \;\&\ldots\&\; [\mathfrak{b} = \rho \supset \mathfrak{F}_\rho(\mathfrak{a})],$$

kurz bezeichnet mit $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$. (Dabei mögen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei in der Herleitung noch nicht vorkommende freie Variable bezeichnen.) Nun liefert *eine einzige* formale Anwendung der vollständigen Induktion die Formel:

$$\{\mathfrak{H}(1) \,\&\, \forall \mathfrak{x}\, [\mathfrak{H}(\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{H}(\mathfrak{x}+1)]\} \supset \forall \mathfrak{y}\, \mathfrak{H}(\mathfrak{y})$$

(Dabei ist es gleichgültig, ob man als Formalisierung der vollständigen Induktion diese Axiomformelgestalt selbst zulassen will oder irgendeine andere Fassung, etwa als Schlußfigur, wählt; mittels der letzteren hätte man dann einfach die hingeschriebene Formel herzuleiten.)
Aus dieser Formel sind nun sämtliche ρ oben angeführten Induktionsaxiomformeln auf rein logischem Wege, d. h. ohne daß etwa wieder eine Anwendung der vollständigen Induktion dazu nötig wäre, ableitbar. Damit

wären wir dann am Ziele. Um diese Ableitbarkeit nachzuweisen, wird es genügen, den formalen Gang in den Hauptzügen aufzuweisen: Um beispielsweise die Induktionsaxiomformel für $\mathfrak{F}_1$ aus der für $\mathfrak{H}$ abzuleiten, hätte man im Anschluß an letztere zunächst eine Einsetzung von 1 für $\mathfrak{b}$ durchzuführen (formal möglich durch eine aufeinanderfolgende $\forall$-Einführung und $\forall$-Beseitigung etwa, falls keine direkte Einsetzung als zulässige Schlußfigur im Formalismus vorgesehen ist). So entstände aus $\mathfrak{H}$ (1) beispielsweise

$$[1 = 1 \supset \mathfrak{F}_1(1)] \,\&\, [1 = 2 \supset \mathfrak{F}_2(1)] \,\&\ldots\&\, [1 = \rho \supset \mathfrak{F}_\rho(1)],$$

eine Formel, welche mit Heranziehung der Richtigkeit von $1 = 1$ und der Falschheit von $1 = 2, \ldots, 1 = \rho$ bereits rein aussagenlogisch als gleichwertig mit $\mathfrak{F}_1$ (1) erweisbar ist. Das gleiche gilt für $\mathfrak{H}(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{a})$ mit beliebigem $\mathfrak{a}$. Daher läßt sich die gesamte Induktionsaxiomformel durch Anwendungen von formalisierten rein logischen Schlußweisen so umformen, daß schließlich statt $\mathfrak{H}$ überall $\mathfrak{F}_1$ steht, was zu zeigen war.

Man könnte einwenden, daß nun doch nicht mehr erreicht sei, als daß ein und dieselbe formalisierte vollständige Induktion nun wieder an ρ verschiedenen Stellen in der Herleitung vorkäme, so daß schließlich doch wieder ρ einzelne, wenn auch gleichlautende, vollständige Induktionen vorhanden seien. Doch träfe dieser Einwand nicht das Wesen der Sache. Man könnte nämlich nicht nur gedanklich, sondern auch formal alle diese einander gleichen Induktionsschlüsse auf triviale Weise so zusammenfassen, daß nur noch eine einzige formalisierte Induktion wirklich dasteht: Zu diesem Zwecke hätte man in der obigen Induktionsaxiomformel für $\mathfrak{H}$ noch sämtliche vorkommenden freien Variablen durch über die Gesamtformel erstreckte Allzeichen zu binden; die erhaltene Formel sei mit $\mathfrak{J}$ bezeichnet, die Endformel der Herleitung mit $\mathfrak{E}$, damit hätte man eine rein logische Herleitung mit mehreren Formeln der Gestalt $\mathfrak{J}$ als Ausgangsformeln (sowie etwa andersartigen mathematischen Axiomformeln als Ausgangsformeln, durch welche sich an unserer Betrachtung nichts ändert); diese läßt sich bekanntlich in eine (rein logische) Herleitung *ohne* derartige Ausgangsformeln mit $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{E}$ als Endformel, verwandeln („Deduktionstheorem", bzw. im Sequenzenkalkül eine triviale Feststellung); und hieraus erhält man durch Beifügung *einer einzigen Herleitung für* $\mathfrak{J}$ wieder eine Herleitung für die ursprüngliche Endformel $\mathfrak{E}$.

Unser Ergebnis zeigt, daß die *Anzahl* der in einem zahlentheoretischen Beweis vorkommenden vollständigen Induktionen kein Maß für die „Kompliziertheit" des Beweises im Hinblick auf seine metamathematische Behandlung ist; zwar sind diese hierfür trotzdem wesentlich mitbestimmend, aber es kommt nicht auf ihre Anzahl, sondern auf ihren „Grad", d. h. auf die Kompliziertheit der Induktionsaussage an.