СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIX, № 2 Март — Апрель 1978

УДК 514

М. А. АКИВИС

О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛУПАХ И ЛОКАЛЬНЫХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

1. Понятие геодезической лупы пространства аффинной связности ввел М. Киккава в работе [1]. В этой работе доказано, что в окрестности каждой точки пространства аффинной связности можно естественным образом определить операцию умножения, по отношению к которой эта окрестность становится локальной лупой. Затем изучены некоторые свойства геодезических луп симметричной аффинной связности, а также группа внутренних автоморфизмов, порождаемых правыми сдвигами геодезической лупы.

Независимо от [1] понятие геодезической лупы пространства аффинной связности было введено Л. В. Сабининым [2].

Для дальнейшего изучения геодезических луп пространства аффинной связности полезно найти аналитическое выражение для бинарной операции, определяющей эту лупу. В настоящей работе получена главная часть этого выражения, содержащая члены до третьего порядка малости. При этом доказано, что для геодезической лупы основные тензоры, введенные нами в работе [3], выражаются через тензоры кручения и кривизны пространства аффинной связности.

Как показано в [4], с окрестностью единицы произвольной лупы можно связать локальную тройную систему (в [4] эта тройная система называется W-алгеброй). Геодезические лупы пространства аффинной связности позволяют построить локальные тройные системы этого пространства. В работе дается явное выражение для операций, определяющих эти тройные системы. Заметим, что вне связи с геодезическими лупами локальные тройные системы пространства аффинной связности без кручения были определены Ямагути [5].

Построенный в работе аппарат применяется к геометрии групп преобразований. При этом на многообразии группы Ли строится однопараметрическое семейство аффинных связностей, содержащее три связности Картана, введенные им в [6], и рассматриваются геодезические лупы и локальные тройные системы этих связностей.

Все рассмотрения, проведенные в настоящей работе, носят локальный характер. Изучаемое пространство аффинной связности предполагается трижды дифференцируемым.

2. Пусть L^n — пространство аффинной связности и a — его произвольная точка. В окрестности этой точки бинарная операция вводится следующим образом. Пусть u и v — две точки, принадлежащие этой окрестности. Соединим их с точкой a геодезическими линиями au и av. Затем дугу au перенесем параллельно в положение vw (рис. 1). Точка w

по определению называется произведением точек u и v. Введенную бинарную операцию обозначим значком $\circ$, так что $w=u\circ v$.

При этом легко видеть, что $u\circ a=u$, $a\circ v=v$, т. е. точка a является двусторонней единицей для этого умножения. Легко видеть также, что если заданы v и w в достаточно малой окрестности точки a, то существует единственная точка w такая, что $u\circ v=w$. Эта точка получается при параллельном переносе геодезической vw вдоль av в положение au.

Для того чтобы доказать существование левой обратной операции

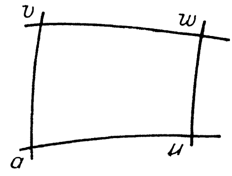

Рис. 1.

для операции $\circ$, зафиксируем точку u в окрестности точки a. Тогда соотношение $w=u\circ v$ определит отображение окрестности точки a на некоторую окрестность точки u, которое будет биективным, если первая окрестность достаточно мала, а поэтому допускает обращение. Поэтому, если заданы u и w в достаточно малой окрестности точки a, то существует единственная точка v такая, что $u\circ v=w$.

Следовательно, введенная выше бинарная операция $\circ$ определяет в окрестности точки a локальную дифференцируемую лупу ([3]), которая называется геодезической лупой пространства L^n. Обозначим эту лупу через l_a.

Заметим, что лупа l_a будет моноассоциативной, так как легко видеть, что $(u\circ u)\circ u=u\circ(u\circ u)$.

Фигура $auwv$ (см. рис. 1), с помощью которой определяется умножение в лупе l_a, рассматривалась ранее в литературе (см., например, ([7])) и носит название параллелограммоида Леви — Чевита.

3. Пусть L^n — пространство аффинной связности с кручением. Его структурные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i + R_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k, \\ d\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i\omega^k \wedge \omega^l, \end{aligned} \tag{1}$$

где R_{jk}^i и R_{jkl}^i — тензоры кручения и кривизны этого пространства. Отнесем пространство L^n к голономной системе координат, полагая

$$\omega^i = dx^i,\quad \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k,$$

где Γ_{jk}^i — объект аффинной связности этого пространства. Тогда из уравнений (1) получим

$$R_{jk}^i = -\Gamma_{[jk]}^i, \tag{2}$$

$$R_{jkl}^i = -\Gamma_{j[k,l]}^i - \Gamma_{j[k}^m\Gamma_{|m|l]}^i, \tag{3}$$

где $\Gamma_{jk,l}^i = \dfrac{\partial\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l}$ и квадратные скобки обозначают альтернирование.

Уравнение параллельного переноса вектора $\xi=\{\xi^i\}$ вдоль линии $x=x(t)$ в L^n записывается в виде

$$\frac{d\xi^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i\xi^j\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{4}$$

а уравнение геодезических линий, отнесенных к аффинному параметру t,— в виде

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt}=0. \tag{5}$$

Введем в окрестности некоторой точки a пространства L^n римановы нормальные координаты. В этих координатах уравнения геодезических, проходящих через точку a, имеют вид

$$x^i=\lambda^i t, \tag{6}$$

где λ^i — координаты вектора λ, касательного к геодезической в точке a. Ввиду этого из уравнения (5) имеем

$$\Gamma^i_{jk}\lambda^j\lambda^k=0. \tag{7}$$

В точке a это уравнение должно выполняться тождественно по λ^i и поэтому

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{(jk)}=0, \tag{8}$$

где через $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}$ обозначено значение величин Γ^i_{jk} в точке a, а круглые скобки означают симметрирование. Отсюда вытекает, что в нормальных координатах

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk}=-\overset{\circ}{R}{}^i_{jk}. \tag{9}$$

Дифференцируя соотношение (7) в направлении геодезической (6), получим

$$\Gamma^i_{jk,l}\lambda^j\lambda^k\lambda^l=0,$$

откуда следует, что в точке a

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{(jk,l)}=0. \tag{10}$$

4. Найдем аналитическое выражение бинарной операции в геодезической лупе l_a, связанной с точкой a пространства аффинной связности L^n. Для этого рассмотрим две геодезические линии au и av, проходящие через точку a с направляющими векторами $\alpha=\{\alpha^i\}$ и $\beta=\{\beta^i\}$. Их уравнения запишем в виде

$$u^i=\alpha^i t,\quad v^i=\beta^i s,$$

где t и s — аффинные параметры на этих геодезических.

Обозначим через ξ вектор, который получится в результате параллельного переноса вектора α в точку v вдоль геодезической av, и найдем уравнение геодезической, проходящей через v и имеющей направление вектора ξ (рис. 2). Будем искать уравнение этой геодезической в виде $w^i=w^i(t)$, где t — аффинный параметр. Тогда эти функции удовлетворяют уравнению (5) и начальным условиям

$$w^i(0)=v^i,\quad \left.\frac{dw^i}{dt}\right|_{t=0}=\xi^i.$$

Из уравнения (5) имеем

$$\frac{d^2w^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{dw^j}{dt}\cdot\frac{dw^k}{dt},$$

$$\frac{d^3w^j}{dt^3} = -\left(\Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl}\right)\frac{dw^j}{dt}\cdot\frac{dw^k}{dt}\cdot\frac{dw^l}{dt}.$$

Поэтому в точке v получим

$$\left.\frac{d^2w}{dt^2}\right|_{t=0} = -\left(\Gamma^i_{jk}\right)_v\xi^i\xi^k,$$

$$\left.\frac{d^3w^i}{dt^3}\right|_{t=0} = -\left(\Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl}\right)_v\xi^i\xi^k\xi^l.$$

Применяя формулу Тейлора и ограничиваясь членами третьего порядка

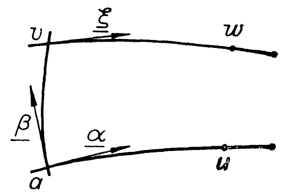

Рис. 2.

малости, получим уравнение геодезической vw в виде

$$w^i = v^i + \xi^i t - \tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk}\right)_v\xi^j\xi^k t^2 - \tfrac{1}{6}\left(\Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl}\right)_v\xi^j\xi^k\xi^l + o(t^3). \tag{11}$$

Но в силу (9)

$$\left(\Gamma^i_{jk}\right)_v = -\mathring{R}^i_{jk} + \mathring{\Gamma}^i_{jk,l}\beta^l s + o(s),$$

$$\left(\Gamma^i_{jk,l} - \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kl}\right)_v = \mathring{\Gamma}^i_{jk,l} - \mathring{R}^i_{mj}\mathring{R}^m_{kl} - \mathring{R}^i_{jm}\mathring{R}^m_{kl} + o(1).$$

Подставляя эти разложения в (11) и учитывая косую симметрию тензора кручения, а также соотношения (10), получим

$$w^i = v^i + \xi^i t - \tfrac{1}{2}\mathring{\Gamma}^i_{jk,l}\xi^j\xi^k\beta^l t^2 s + o(\rho^3), \tag{12}$$

где $\rho = \sqrt{t^2+s^2}$.

5. Теперь вычислим координаты вектора ξ, получающегося из вектора α параллельным переносом в точку v вдоль геодезической av. Как показывает формула (12), вычисление координат вектора ξ следует вести с точностью до бесконечно малых третьего порядка.

Так как вдоль геодезической av

$$\frac{dv^k}{ds} = \beta^k,$$

то уравнение параллельного переноса (4) перепишется в виде

$$\frac{d\xi^i}{ds} = -\Gamma^i_{jk}\xi^j\beta^k. \tag{13}$$

При этом вектор ξ^i удовлетворяет еще начальному условию

$$\xi^i(0)=\alpha^i.$$

Из (13) имеем

$$\frac{d^2\xi^i}{ds^2}=-\left(\Gamma^i_{jk,l}-\Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl}\right)\xi^j\beta^k\beta^l.$$

Поэтому при $s=0$ получим, используя (9),

$$\left.\frac{d\xi^i}{ds}\right|_{s=0}=\overset{\circ}{R}{}^i{}_k\alpha^j\beta^k,$$

$$\left.\frac{d^2\xi^i}{ds^2}\right|_{s=0}=-\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk,l}-\overset{\circ}{R}{}^i_{mk}\overset{\circ}{R}{}^m_{jl}\right)\alpha^j\beta^k\beta^l.$$

Применяя формулу Тейлора и ограничиваясь членами второго порядка малости, получим для координат вектора ξ выражение

$$\xi^i=\alpha^i+\overset{\circ}{R}{}^i_{jk}\alpha^j\beta^k s-\tfrac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk,l}-\overset{\circ}{R}{}^i_{mk}\overset{\circ}{R}{}^m_{jl}\right)\alpha^j\beta^k\beta^l s^2+o(s^2). \tag{14}$$

Подставим теперь это выражение в разложение (12) и учтем, что $\alpha^i t=u^i$, $\beta^i s=v^i$. Тогда получим

$$w^i=u^i+v^i+\overset{\circ}{R}{}^i_{jk}u^jv^k-\tfrac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk,l}-\overset{\circ}{R}{}^i_{mk}\overset{\circ}{R}{}^m_{jl}\right)u^jv^kv^l-$$
$$-\tfrac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk,l}u^ju^kv^l+o(\rho^3). \tag{15}$$

Эти уравнения определяют с точностью до бесконечно малых четвертого порядка бинарную операцию в геодезической лупе l_α.

6. Найдем теперь основные тензоры, введенные нами в работе [3], для геодезической лупы l_a.

Если ввести в окрестности единицы локальной дифференцируемой лупы координаты так, чтобы единице соответствовали нулевые координаты, то с точностью до бесконечно малых четвертого порядка бинарная операция в этой лупе запишется в виде

$$w^i=u^i+v^i+\lambda^i_{jk}u^jv^k+\tfrac{1}{2}\left(\mu^i_{jkl}u^ju^kv^l+\nu^i_{jkl}u^jv^kv^l\right)+o(\rho^3), \tag{16}$$

где $\rho=\max(|u^i|,\ |v^i|)$ и

$$\mu^i_{jkl}=\mu^i_{kjl},\quad \nu^i_{jkl}=\nu^i_{jlk}.$$

Основные тензоры лупы (16) выражаются, как показано в [3], по формулам

$$\alpha^i_{jk}=\lambda^i_{[jk]}, \tag{17}$$

$$\beta^i_{jkl}=\mu^i_{jkl}-\nu^i_{jkl}+\lambda^m_{jk}\lambda^i_{ml}-\lambda^i_{jm}\lambda^m_{kl}. \tag{18}$$

Сравнивая теперь разложение (15), полученное для геодезической лупы l_a, с разложением (16), находим, что

$$\lambda^i_{jk}=\overset{\circ}{R}{}^i_{jk},\quad \mu^i_{jkl}=-\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{(jk),l},$$

$$\nu^i_{jkl}=-\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{j(k,l)}-\overset{\circ}{R}{}^i_{m(k}\overset{\circ}{R}{}^m_{|j|l)}\right).$$

Подставляя эти выражения в соотношения (17) и (18), найдем основные тензоры лупы l_a в виде

$$\alpha^i_{jk} = \overset{\circ}{R}{}^i_{jk}, \tag{19}$$

$$\beta^i_{jkl} = \tfrac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jl,k} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kj,l}\right) + \overset{\circ}{R}{}^m_{j[k}\overset{\circ}{R}{}^i_{|m|l]} - \overset{\circ}{R}{}^i_{jm}\overset{\circ}{R}{}^m_{kl}. \tag{20}$$

Выразим разность $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jl,k} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kj,l}$ через тензоры кривизны и кручения. Из соотношений (3) в точке a имеем

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{j[k,l]} = -\overset{\circ}{R}{}^i_{jkl} - \overset{\circ}{R}{}^m_{j[k}\overset{\circ}{R}{}^i_{|m|l]}.$$

Далее, дифференцируя соотношение (2) по x^l в точке a, получим

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{[jk],l} = -\overset{\circ}{R}{}^i_{jk,l}.$$

Вычитая первое из этих равенств из второго, найдем

$$\tfrac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jl,k} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{kj,l}\right) = \overset{\circ}{R}{}^i_{jkl} - \overset{\circ}{R}{}^i_{jk,l} + \overset{\circ}{R}{}^m_{j[k}\overset{\circ}{R}{}^i_{|m|l]}.$$

Подстановка этого выражения в (20) дает

$$\beta^i_{jkl} = \overset{\circ}{R}{}^i_{jkl} - \overset{\circ}{R}{}^i_{jk,l} + 3\overset{\circ}{R}{}^m_{[jk}\overset{\circ}{R}{}^i_{|m|l]}. \tag{21}$$

Но это выражение допускает дальнейшее упрощение. Обозначим через $\nabla_l R^i_{jk}$ ковариантную производную от тензора кручения. Тогда

$$\nabla_l R^i_{jk} = R^i_{jk,l} - R^i_{mk}\Gamma^m_{jl} - R^i_{jm}\Gamma^m_{kl} + R^m_{jk}\Gamma^i_{ml}.$$

Отсюда в силу (9) для точки a получим

$$(\nabla_l R^i_{jk})_0 = \overset{\circ}{R}{}^i_{jk,l} - 3\overset{\circ}{R}{}^m_{[jk}\overset{\circ}{R}{}^i_{|m|l]}.$$

Поэтому формула (21) принимает вид

$$\beta^i_{jkl} = \overset{\circ}{R}{}^i_{jkl} - (\nabla_l R^i_{jk})_0. \tag{22}$$

Формулы (19) и (22) имеют инвариантный характер и не зависят от выбора системы координат в окрестности точки a. Так как эти формулы остаются верными для геодезической лупы l_a любой точки a, то можно переписать их в виде

$$\left.\begin{aligned} \alpha^i_{jk} &= R^i_{jk}, \\ \beta^i_{jkl} &= R^i_{jkl} - \nabla_l R^i_{jk} \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Основные тензоры геодезической лупы пространства аффинной связности, построенной для некоторой его точки, выражаются через значения в этой точке его тензоров кручения, кривизны и ковариантных производных от тензора кручения по формулам* (23).

Присоединим сюда еще следующие замечания.

Как отмечено в ([3]), основные тензоры локальной дифференцируемой лупы удовлетворяют соотношению

$$\beta^i_{[jkl]} = 2\alpha^m_{[jk}\alpha^i_{|m|l]}. \tag{24}$$

Подставляя сюда выражения (23) для основных тензоров геодезической лупы, получим соотношение

$$R^i_{[jkl]} = \nabla_{[l}R^i_{jk]} + 2R^m_{[jk}R^i_{|m|l]}, \tag{25}$$

которое представляет собой тождество Риччи в L^n.

Далее, из (23) и антисимметричности тензоров кручения и кривизны пространства L^n следует, что

$$\beta^i_{(jkl)} = 0. \tag{26}$$

Это соотношение связано с моноассоциативностью геодезических луп, отмеченной в п. 2.

Наконец, если пространство L^n не имеет кручения, то основные тензоры его геодезических луп принимают вид

$$\alpha^i_{jk} = 0, \quad \beta^i_{jkl} = R^i_{jkl}.$$

Заметим, что последние формулы дают возможность легко доказать теорему 2 из работы ([1]).

Отметим еще, что геодезические лупы пространства L^n, соответствующие разным его точкам, вообще говоря, не будут изотопными между собой. В самом деле, если бы эти лупы были изотопны, то, как это следует из ([8]), из соотношения $\alpha^i_{jk} = 0$ должна была бы вытекать симметрия тензора β^i_{jkl} по всем индексам. Но на L^n без кручения, отличном от локально аффинного пространства, это условие не выполняется.

7. В работе ([4]) было показано, что касательное пространство T_e произвольной дифференцируемой лупы l в ее единице наделяется структурой тройной системы — локальной тройной системы лупы l. Бинарная и тернарная операции в этой тройной системе индуцируются операциями коммутирования и ассоциирования в лупе l. Эти операции в T_e также называются коммутированием и ассоциированием. В координатной форме эти операции выражаются с помощью основных тензоров лупы l в виде

$$\langle \xi, \eta\rangle^i = 2\alpha^i_{jk}\xi^j\eta^k,$$

$$(\xi, \eta, \zeta)^i = \beta^i_{jkl}\xi^j\eta^k\zeta^l,$$

где ξ, η, ζ — векторы пространства T_e, а ξ^i, η^i, ζ^i — их координаты. (В отличие от работы ([4]) операция коммутирования обозначена здесь не квадратными, а угловыми скобками.) Операции коммутирования и ассоциирования связаны обобщенным тождеством Якоби, которое равносильно соотношению (24).

Геодезическая лупа l_a пространства аффинной связности L^n, определенная в окрестности его точки a, наделяет его касательное пространство T_a структурой тройной системы. В силу соотношений (23) операции коммутирования и ассоциирования в этой тройной системе запишутся в виде

$$\langle \xi, \eta \rangle^i = 2R^i_{jk} \xi^j \eta^k, \tag{27}$$

$$(\xi, \eta, \zeta)^i = (R^i_{jkl} - \nabla_l R^i_{jk}) \xi^j \eta^k \zeta^l. \tag{28}$$

Эту тройную систему назовем локальной тройной системой пространства аффинной связности L^n, связанной с его точкой a.

В силу косой симметрии тензоров R^i_j и R^i_{jkl} из (28) следует, что

$$(\xi, \xi, \xi) = 0,$$

т. е. все локальные тройные системы пространства L^n моноассоциативны. Поэтому имеет место

Теорема 2. *С каждой точкой пространства аффинной связности связана моноассоциативная тройная система, операции коммутирования и ассоциирования в которой определены формулами* (27) *и* (28).

Отметим, что для пространства аффинной связности без кручения введенные выше локальные тройные системы совпадают с тройными системами, определенными Ямагути ([5]), а затем рассмотренными П. И. Ковалевым ([9]). Указанная выше связь локальных тройных систем пространства аффинной связности с его геодезическими лупами выясняет алгебраический смысл формальных конструкций Ямагути и Ковалева.

8. В качестве приложения построенной выше теории рассмотрим один вопрос геометрии групп преобразований. На многообразии группы Ли G Э. Картан ([6]) рассматривает три способа параллельного переноса векторов и три аффинные связности, определяемые этими параллельными переносами. Эти связности обладают одной и той же системой геодезических линий, связанных с однопараметрическими подгруппами данной группы. Рассмотрим геодезические лупы, определяемые на группе Ли параллельными переносами Картана.

Пусть a — произвольная точка на многообразии группы Ли и u и v — две точки в некоторой ее окрестности. Параллельный перенос первого рода на G определяется Картаном при помощи правых сдвигов $R_x z = z \cdot x$. Геодезическая au перейдет при этом в геодезическую vw, где $v = R_x a$, $w = R_x u$ и $x = a^{-1} v$. Поэтому $w = ua^{-1}v$. Это равенство и определяет на G геодезическую лупу первого рода. Оно может быть переписано в виде

$$wa^{-1} = (ua^{-1})(va^{-1}), \tag{29}$$

откуда видно, что геодезическая лупа первого рода есть группа, изоморфная группе G.

Параллельный перенос второго рода определяется на G с помощью левых сдвигов $L_x z = x \cdot z$. Геодезическая au перейдет при этом в геодезическую vw, где $v = L_x a$, $w = L_x u$ и $x = va^{-1}$. Поэтому геодезическая лупа второго рода определяется на G равенством $w = va^{-1}u$, которое может быть переписано в виде

$$wa^{-1} = (va^{-1})(ua^{-1}). \tag{30}$$

Отсюда следует, что геодезическая лупа второго рода есть группа, изоморфная группе G^*, сопряженной группе G.

Параллельный перенос третьего рода определяется Картаном на группе G с помощью геодезической симметрии. Геодезическая симметрия S_x относительно точки x определяется равенством $S_x y = xy^{-1}x$. Параллельный перенос геодезической au в положение vw определяется с помощью двух последовательных симметрий S_a и S_c (рис. 3), где c — середина геодезического отрезка av. Таким образом,

$$w = S_c(S_a u) = c(au^{-1}a)^{-1}c = ca^{-1}ua^{-1}c.$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$wa^{-1} = (ca^{-1})(ua^{-1})(ca^{-1}).$$

Но так как c — середина отрезка av, то

$$ca^{-1} = \sqrt{va^{-1}},$$

ввиду чего предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$wa^{-1} = \sqrt{va^{-1}}(ua^{-1})\sqrt{va^{-1}}. \qquad (31)$$

Оно определяет геодезическую лупу третьего рода, которая уже не является группой. Единицей этой лупы является точка a.

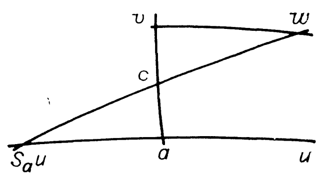

Рис. 3.

Сравнение соотношений (29)—(31), определяющих три геодезические лупы Картана, показывает, что эти лупы могут быть включены в однопараметрическое семейство луп, связанных с точкой a группы G и определяемых равенством

$$wa^{-1} = (va^{-1})^{\alpha}(ua^{-1})(va^{-1})^{1-\alpha}, \qquad (32)$$

где α — любое постоянное действительное число. Геодезические лупы Картана получаются отсюда при $\alpha = 0, 1$ и $1/2$ соответственно. Для всех этих луп точка a является единицей. Обозначим эти лупы через l_a^{α}.

Соотношение (32) показывает, что при постоянном α лупы l_a^{α}, определяемые различными точками a группы G, изоморфны между собой и изоморфны лупе l^{α}, определяемой равенством

$$w = v^{\alpha}uv^{1-\alpha}. \qquad (33)$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$w = (v^{\alpha}uv^{-\alpha})v = R_v(v^{\alpha}uv^{-\alpha}).$$

Пусть теперь v — фиксированная точка группы G, а точка u пробегает ее однопараметрическую подгруппу g. Тогда точка $v^{\alpha}uv^{-\alpha}$ пробегает ее подгруппу g', а точка w — линию, получаемую из g' сдвигом R_v. Ввиду этого из равенства (32) следует, что если a и v — фиксированные точки группы G, а точка u описывает ее геодезическую линию au, порождаемую семейством однопараметрических подгрупп, то точка w описывает геодезическую линию vw. Поэтому все лупы l_a^α являются геодезическими лупами аффинных связностей на группе Ли G, имеющих одну и ту же систему геодезических линий — систему, порождаемую однопараметрическими подгруппами группы G.

9. Найдем теперь тензоры кручения и кривизны аффинных связностей, порождаемых на группе G геодезическими лупами l_a^α. С этой целью представим бинарную операцию лупы l^α в координатной форме. Для этого воспользуемся формулой Кемпбела — Хаусдорфа, определяющей операцию умножения в группе G через операцию коммутирования в ее алгебре Ли $\mathfrak{G}$. С точностью до членов четвертого порядка эта формула имеет вид ([9])

$$z=\exp_e\{x+y+{}^1/_2[x, y]+{}^1/_{12}[x, [x, y]]+{}^1/_{12}[y, [y, x]]+\ldots\},$$

где $[x, y]^i = c^i_{jk}x^jx^k$, c^i_{jk} — структурные константы группы G, x^j, y^k и $[x, y]^i$ — нормальные координаты соответствующих элементов в окрестности единицы группы G. В координатной форме предыдущая формула перепишется в виде

$$(x\cdot y)^i = x^i + y^i + {}^1\!/_2\, c^i_{jk}x^jy^k + {}^1/_{12}c^i_{jm}c^m_{kl}\left(x^jx^ky^l + y^jy^kx^l\right) + o(\rho^3). \qquad (34)$$

Если обозначить нормальные координаты точек u и v, принадлежащих окрестности точки e, через u^i и v^i, то для точек v^α и $v^{1-\alpha}$ получим соответственно координаты αv^i, $(1-\alpha)v^i$. Дважды пользуясь формулой (34), найдем координаты точки w, определяемой равенством (33),

$$w^i = u^i + v^i + {}^1\!/_2\,(1-2\alpha)\,c^i_{jk}u^jv^k + {}^1/_{12}c^i_{jm}c^m_{kl}u^ju^kv^l + {}^1/_{12}(1-6\alpha+$$
$$+6\alpha^2)\,c^i_{km}c^m_{lj}u^jv^kv^l + o(\rho^3). \qquad (35)$$

Сравнивая это разложение с разложением (16), получим

$$\lambda^i_{jk} = {}^1\!/_2\,(1-2\alpha)\,c^i_{jk},\quad \mu^i_{jkl} = {}^1/_6 c^i_{(j|m|}c^m_{k)l},$$
$$\nu^i_{jkl} = {}^1/_6\,(1-6\alpha+6\alpha^2)\,c^i_{(k|m|}c^m_{l)j}.$$

Подставляя эти выражения в (17) и (18), найдем основные тензоры лупы l^α

$$\alpha^i_{jk} = {}^1\!/_2\,(1-2\alpha)\,c^i_{jk}, \qquad (36)$$
$$\beta^i_{jkl} = {}^1\!/_2\,\alpha(1-\alpha)\,c^i_{jm}c^m_{lk}. \qquad (37)$$

Найдем теперь тензоры кручения и кривизны аффинной связности, порождающей геодезическую лупу l^α на многообразии группы Ли G. Из соотношения (19) для тензора кручения получаем выражение

$$R^i_{jk} = {}^1\!/_2\,(1-2\alpha)\,c^i_{jk}. \qquad (38)$$

Для вычисления тензора кривизны воспользуемся формулой (21). Так как в силу (38) компоненты тензора R^i_{jk} постоянны на G и так же, как и структурные константы c^i_{jk} группы G, удовлетворяют тождествам Якоби, то формула (21) примет вид

$$R^i_{jkl} = \beta^i_{jkl}.$$

Поэтому на многообразии группы

$$R^i_{jkl} = \tfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\, c^i_{jm} c^m_{lk}. \tag{39}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *На многообразии группы Ли G существует однопараметрическое семейство аффинных связностей, геодезические линии которых определяются однопараметрическими подгруппами этой группы Ли. Их геодезические лупы определяются соотношением* (32), *а в координатной форме — соотношением* (35). *Тензоры кручения и кривизны этих связностей определяются формулами* (38) *и* (39). *Три связности Картана получаются из этого семейства при* $\alpha=0$, 1 *и* $^1/_2$.

Отметим еще, что операции коммутирования и ассоциирования в тройных системах T_α, индуцируемых рассмотренными выше связностями на группе Ли G, определяются в силу (27) и (28) формулами

$$\langle \xi, \eta\rangle^i = (1-2\alpha)\, c^i_{jk}\xi^j\eta^k,$$

$$(\xi, \eta, \zeta)^i = \tfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\, c^i_{jm} c^m_{lk}\xi^j\eta^k\zeta^l.$$

Поэтому эти операции следующим образом выражаются через операцию коммутирования в алгебре Ли группы G:

$$\langle \xi, \eta\rangle = (1-2\alpha)[\xi, \eta],$$

$$(\xi, \eta, \zeta) = {}^1/_2\alpha(1-\alpha)[\xi, [\zeta, \eta]].$$

В частности, для связностей Картана получим

при $\alpha=0$

$$\langle \xi, \eta\rangle = [\xi, \eta], \quad (\xi, \eta, \zeta) = 0;$$

при $\alpha=1$

$$\langle \xi, \eta\rangle = -[\xi, \eta], \quad (\xi, \eta, \zeta) = 0;$$

при $\alpha={}^1/_2$

$$\langle \xi, \eta\rangle = 0, \quad (\xi, \eta, \zeta) = 8^{-1}[\xi[\zeta, \eta]].$$

Поступила в редакцию
15 июня 1976 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Kikkawa M.* On local loops in affine manifolds. J. Sci. Hiroshima Univ. A—I. Math., 28 (1964), 199—207.

[2] *Сабинин Л. В.* Геометрия луп. Тезисы докладов 5-й Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии. Самарканд, 1972, 192.

[3] *Акивис М. А.* Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей. Исследования по теории квазигрупп и луп. Кишинев, «Штиинца», 1973, 3—12.

[4] *Акивис М. А.* О локальных алгебрах многомерных три-тканей. Сиб. мат. журн., 17, № 1 (1976), 5—11.

[5] *Yamaguti K.* On algebras of totally geodesic spaces (Lie tripe sistems). J. Sci. Hiroshima Univ. A—I. Math., 21 (1957), 107—113.

[6] *Cartan E.* La geometrie des groups de transformations. J. Math. pures et appl., 9, № 6 (1927), 1—119. (Русский пер. в кн.: Э. Картан. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М., Изд-во иностр. лит., 1949, 7—111.)

[7] *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.— Л., ОНТИ, 1936.

[8] *Акивис М. А.* О три-тканях многомерных поверхностей. Труды геометрического семинара ВИНИТИ, т. 2. М., изд. АН СССР, 1969, 7—31.

[9] *Ковалев П. И.* Тройные системы Ли и пространства аффинной связности. Мат. заметки, 14, № 1 (1973), 107—112.

[10] *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М., «Мир», 1964.