

Werk

Verlag: Izd. Akademii Nauk SSSR; Академия наук СССР. Московское математическое общество

Ort: Moskva

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN477674380_0090

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN477674380_0090 | LOG_0004

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

Н О В А Я С Е Р И Я

**ТОМ СОРОК ВОСЬМОЙ
ВЫПУСК ПЕРВЫЙ
Т. 48(90):1**

МАЙ

**ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959**

Редакционная коллегия: А. Д. Александров, П. С. Александров,
М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, А. И. Мальцев, К. К. Мар-
джанишвили (заместитель главного редактора), И. Г. Петровский (главный редактор),
В. И. Смирнов, С. П. Фиников

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
и МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

ОСНОВАН В 1866 ГОДУ МОСКОВСКИМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОБЩЕСТВОМ

НОВАЯ СЕРИЯ

Редакционная коллегия

А. Д. Александров, П. С. Александров, М. В. Келдыш, А. Н. Колмо-
горов, М. А. Лаврентьев, А. И. Мальцев, К. К. Марджанишвили
(зам. гл. редактора), И. Г. Петровский (гл. редактор), В. И. Смирнов,
С. П. Фиников

т. 48 (90)

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959

О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных

В. И. Арнольд (Москва)

Оглавление

Введение	3
Часть I. Доказательство теоремы 2	6
§ 1. Основная лемма	7
§ 2. Доказательство теоремы 2	17
Часть II. Доказательство теоремы 3	26
§ 3. Основные определения. Индуктивные свойства 1—4	27
§ 4. Индуктивное сохранение свойства 1	31
§ 5. Леммы о выводящих схемах	34
§ 6. Индуктивное сохранение выводящих схем	38
§ 7. Индуктивное сохранение разложения функций	41
§ 8. Арифметические леммы	45
§ 9. Индуктивное сохранение свойства 4	49
§ 10. Доказательство теоремы 3	58
Приложение. Пространство компонент множеств уровня непрерывной функции	59
А) Построение метрического пространства T_f	59
Б) Два отображения, связанные с непрерывной функцией	61
В) Односвязные множества	63
Г) Деревья	64
Д) Строение деревьев	66
Е) Реализации деревьев	69
Употребляемые без пояснений понятия и теоремы теоретико-множественной топологии	72
Литература	73

Введение

Настоящая работа посвящена доказательству следующей теоремы, сформулированной в заметке [1]:

Теорема 1. *Любая заданная на единичном кубе E^3 действительная непрерывная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных может быть представлена в виде*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2, x_3)],$$

где функции двух переменных h_{ij} и φ_{ij} действительны и непрерывны.

Для доказательства этой теоремы в заметке [1] используются две теоремы, полного доказательства которых там не приводится. Вот эти теоремы:

Теорема 2. Любая непрерывная заданная на E^3 функция $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть представлена в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i[\varphi_i(x_1, x_2), x_3],$$

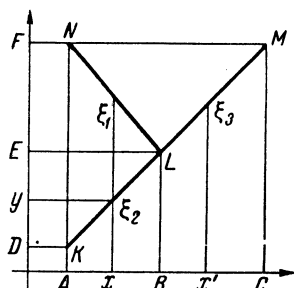
где h_i и φ_i — непрерывные функции, причем функции h_i действительны и определены на произведении $\Xi \times E^1$ дерева (см. [3], гл. X) Ξ на отрезок E^1 , а $\varphi_i(x_1, x_2)$ определены на квадрате и имеют в качестве значений точки Ξ . При этом Ξ — дерево, индекс ветвления точек которого не больше трех.

Теорема 3. Каково бы ни было семейство F действительных равно-

степенно непрерывных функций $f(\xi)$, заданных на дереве Ξ , все точки которого имеют индекс ветвления ≤ 3 , можно так реализовать дерево в виде гомеоморфного ему подмножества X трехмерного куба E^3 , что любая функция f семейства F может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ есть образ $\xi \in \Xi$ в дереве X , $f(x) = f(\xi)$, а $f_k(x_k)$ — непрерывные действительные функции одного переменного, причем f_k непрерывно зависят от f в смысле равномерной сходимости.



Фиг. 1. Как представить в виде $\varphi(x) + \psi(y)$ функцию, заданную на Y -образном дереве

Теорема 2 (за исключением последней фразы) содержится в работе А. Н. Колмогорова [2]. Там намечено и ее доказательство, но доказательства используемых при этом лемм не опубликованы. В части I настоящей работы излагаются доказательства этих лемм, причем так, чтобы индекс ветвления точек получающегося дерева не превосходил 3, а затем из них выводится теорема 2 в указанной выше формулировке.

Для наглядности рассматривается случай $n=2$ лемм заметки [2]. Доказательства (да и формулировки) лемм несколько отличны от тех, какие дал А. Н. Колмогоров. Это связано с введением пунктов 6) и 7) в основную лемму и с желанием получить теорему 2 в формулировке, приведенной выше.

Теорема 3 доказывается во второй части работы. Замысел этой теоремы чрезвычайно прост.

Пусть на Y -образном дереве Δ (фиг. 1) дана непрерывная функция $f(\xi)$, $\xi \in \Delta$. Тогда существуют такие непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$, что $f_1(x) + f_2(y) = f(\xi)$, коль скоро x и y — координаты точки $\xi \in \Delta$.

Доказательство проводится, например, так:

Пусть функция $f_1(x)$ на AB равна $f(\xi_1)$ для точки $\xi_1 \in LN$, абсцисса которой x . Чтобы на KL было $f = f_1 + f_2$, приходится определить $f_2(y)$ на DE как $f_2(y) = f(\xi_2) - f_1(x)$, где $\xi_2 \in KL$ — точка с координатами x, y . При этом в точке E $f_2 = 0$. На EF тоже пусть $f_2(y) = 0$. Наконец, чтобы на LM было $f = f_1 + f_2$, остается положить $f_1(x') = f(\xi_3)$, где $\xi_3 \in LM$ — точка LM с абсциссой x' . Легко видеть, что так построенные функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — искомые.

Легко построить аналогичную конструкцию для функций, заданных на более сложном дереве (фиг. 11). Вообще имеет место такая теорема:

Любое конечное дерево с точками ветвления индекса не более чем 3 может быть гомеоморфно отображено на плоский отрезочный комплекс K , такой, что каждая непрерывная функция $f(\xi)$ представима на K в виде $f(\xi) = f_1(x) + f_2(y)$, где x и y — координаты точки $\xi \in K$ **.*

Теорема 3 утверждает, что аналогичное явление имеет место в трехмерном пространстве уже для любого дерева, индекс ветвления точек которого не больше трех, а не только для конечного. Доказательство кажется очень громоздким, но по существу сводится к приведенным выше соображениям и предельному переходу от конечных деревьев к бесконечному дереву.

Теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы 2 и теоремы 3. Рискуя запутать читателя, которому легче доказать это самому, проведем, однако, такое простое рассуждение:

Из теоремы 2 следует, что функцию $f(x_1, x_2, x_3)$ можно представить в виде суммы трех функций $h_i(\xi_i, x_3)$ ($i = 1, 2, 3$), заданных на произведении дерева $(\xi_i \in \Xi)$, все точки которого имеют индекс ветвления не больше чем 3, на отрезок $(x \in E^1) : (\xi_i, x_3) \in \Xi \times E^1$. Теорема 3 утверждает, что функция $h(\xi)$ на таком дереве представляется в виде суммы трех непрерывных функций $h_j(x_j)$ ($j = 1, 2, 3$) от координат x_j некоторой реализации $x_j(\xi)$ дерева Ξ в трехмерном пространстве. Эти функции $h_j(x_j)$ непрерывно зависят от разлагаемой функции $h(\xi)$ (в смысле равномерной сходимости), если функция h принадлежит тому семейству F равностепенно непрерывных функций на дереве Ξ , для которого строится реализация. Функции $h_i(\xi_i, x_3)$, получающиеся из теоремы 2, можно рассматривать как такое семейство функций $h_i(\xi)$ на дереве Ξ , зависящих непрерывно от параметра $x_3 \in E^1$, и потому равностепенно непрерывных. Применяя теорему 3, найдем реализацию Ξ в виде $X \subset E^3$.

В разложении $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i(\xi_i, x_3)$ $\xi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$ есть точка дерева Ξ и непрерывно зависит от x_1 и x_2 (теорема 2). Поэтому после реализации Ξ в виде X каждая координата точки $x \in X$ становится функцией x_1 и x_2 , действительной и непрерывной. Если $\xi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$, а j -ая координата точки x , реализующей ξ_i , есть $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$, то, в силу теоремы 3, разложение $h_i(\xi_i, x_3)$, как функции $h_{i_{x_3}}(\xi_i)$, на сумму $\sum_{j=1}^3 h_{ij_{x_3}}(x_j(\xi_i))$ запишется в виде:

$$h_i[\xi_i(x_1, x_2), x_3] = \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3].$$

Следовательно,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3];$$

это и есть утверждение теоремы 1.

* Дерево с конечным числом точек ветвления.

** Читатель легко может восстановить доказательство этой теоремы после прочтения §§ 3—7. Возможно ли расположить аналогичным образом по плоскости бесконечное дерево, — неизвестно.

Через два месяца после окончания нашей работы [1] А. Н. Колмогоров [2] усилил теорему 1, показав, что каждая непрерывная функция на трехмерном кубе представима в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^7 h_i [\varphi_{i1}(x_1) + \varphi_{i2}(x_2) + \varphi_{i3}(x_3)],$$

где функции h_i и φ непрерывны, функции же φ_{ik} выбраны раз навсегда (независимо от f). Из этого результата А. Н. Колмогорова вытекает, что трехмерный куб можно расположить в *семимерном* пространстве так, что любая непрерывная на кубе функция будет представима как сумма непрерывных функций от (семимерных) координат. Аналогичное представление для квадрата согласно работе [2] осуществляется уже в пятимерном пространстве. Отсюда непосредственно следует, что в пятимерном пространстве можно *раз навсегда* поместить наше дерево Ξ так, что любая непрерывная на нем функция будет представима как сумма непрерывных функций от координат (в то время как в нашей теореме 3 представление в трехмерном пространстве зависит от семейства F). Однако, видоизменяя методы заметки [2], можно получить представление дерева Ξ , годное для всех непрерывных функций f и в трехмерном пространстве.

В построениях первой и второй части настоящей работы используется введенное А. С. Кронродом дерево компонент множеств уровня. Основные сведения об этом дереве помещены в приложениях. Приложение и каждая из двух частей работы независимы.

Пользуюсь случаем поблагодарить моих учителей А. Г. Витушкина и А. Н. Колмогорова за постоянное внимание, советы и помощь. В частности, А. Н. Колмогорову я обязан окончательным оформлением основной «индуктивной леммы» второй части.

Часть I

Доказательство теоремы 2

Здесь будет доказана теорема 2. Основная лемма работы [2] и лемма 2 доказываются в такой формулировке, что дерево Ξ , о котором идет речь в теореме, состоит из точек с индексом ветвления, не превосходящим трех.

Далее всюду приняты следующие обозначения:

R^2 — плоскость точек (x, y) ; E^2 — единичный замкнутый квадрат на ней, т. е. множество точек (x, y) с $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

Метрика на плоскости определяется расстоянием

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$$

$U_d(A)$ обозначает d -окрестность множества A , т. е. совокупность всех точек плоскости, расстояние которых до A меньше $d > 0$.

$\bar{A}$ — замыкание A .

Многоугольником называется замкнутая самонепересекающаяся ломаная. Открытым многоугольником Q называется расположенная

внутри многоугольника часть плоскости, а замкнутым многоугольником $\bar{Q}$ — замыкание открытого.

Открытой многоугольной полоской называется часть плоскости, ограниченная двумя непересекающимися многоугольниками, один из которых лежит внутри другого (отделяется другим от бесконечности). Замкнутая многоугольная полоска есть замыкание открытой. Множеством уровня c функции $u(x, y)$ называется множество точек (x, y) таких, что $u(x, y) = c$.

Список основных топологических терминов, употребляемых в настоящей работе, см. в конце приложения.

§ 1. Основная лемма

Представим себе на плоскости конечное число попарно не пересекающихся областей g_m и над каждой областью пусть имеется холм u_m . Все холмы образуют «горную страну» G . Представим себе (фиг. 2), что дана не одна страна G , а бесконечная последовательность Γ таких горных стран,

$$G_1, G_2, \dots, G_k, \dots,$$

причем «страна ранга k » G_k состоит из некоторого конечного числа m_k холмов ранга k u_{km}^r ($m = 1, \dots, m_k$) над областями g_{km}^r ; две области одной горной страны по-прежнему не пересекаются (фиг. 2). При больших k страна G_k имеет больше холмов, но их основания — области g_{km}^r — меньше.

Представим себе, наконец (и этого на фиг. 2 уже нет), три таких последовательности стран Γ^r ($r = 1, 2, 3$) — три системы Γ^r . Каждая состоит из горных стран G_k^r ($k = 1, 2, \dots$), а каждая горная страна G_k^r — из холмов u_{km}^r ($m = 1, \dots, m_k$).

В основной лемме строятся три такие системы холмов u_{km}^r , удовлетворяющих целому ряду требований. Например, каждый холм u_{km}^r строится так, чтобы над каждой областью $g_{k'm'}^r$ ($k' > k$) он имел горизонтальную площадку (требование 5)).

Основная лемма. На плоскости R^2 можно определить систему непрерывных действительных функций $u_{km}^r(x, y)$ с индексами, меняющимися в пределах

$$1 \leq r \leq 3, \quad 1 \leq k < \infty, \quad 1 \leq m \leq m_k,$$

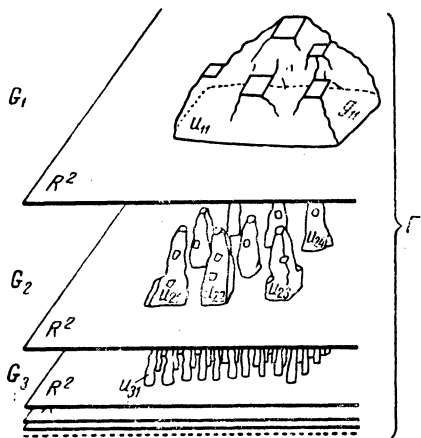
которая обладает следующими свойствами:

- 1) $0 \leq u_{km}^r \leq 1$.
- 2) $u_{km}^r \neq 0$ лишь на области g_{km}^r , диаметр которой меньше $d_k > 0$; $d_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; $u_{km}^r = 1$ лишь на множестве $\overline{g_{k+1}^{r*}}$.
- 3) Два множества g_{km}^r и $g_{k'm'}^r$ с общими индексами r и k при $m \neq m'$ не пересекаются.

4) При любом k в каждой точке квадрата E^2

$$0 < c \leq \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r \leq C,$$

где c и C — константы, не зависящие от k .



Фиг. 2. Система горных стран. Все горизонтальные плоскости R^2 — это одна и та же плоскость

5) Функция u_{km}^r постоянна на каждом множестве $g_{k'm'}^r$, с тем же индексом r при $k' > k$ и произвольных m и m' .

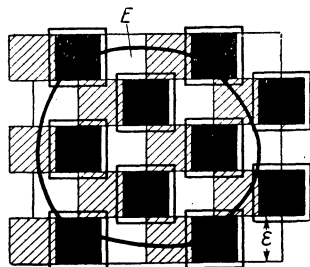
6) Граница каждого множества уровня каждой функции u_{km}^r связна и делит плоскость R^2 не более чем на три части.

7) При любом r $g_{11}^r \supset E^2$.

Функции u_{km}^r и множества g_{km}^r с одним и тем же индексом $r = r_0$ в дальнейшем называются соответственно функциями и множествами одной системы r_0 , а с одним и тем же индексом k (и любыми r и m) — соответственно функциями и множествами одного ранга.

Индекс m будет называться номером. Очевидно, при любом N число функций (множеств) ранга не выше N в каждой системе конечно.

Как известно, при любом $\varepsilon > 0$ ограниченную область $E \supset E^2$ плоскости R^2 можно замостить (покрыть) замкнутыми квадратами $P_{\varepsilon m}$ ($m = 1, \dots, m_\varepsilon$) со сторонами длины ε , параллельными осям координат, так, что все квадраты можно будет разбить на 3 системы $P_{\varepsilon m}^r$, $1 \leq r \leq 3$, причем расстояния между двумя квадратами одной системы будет не меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ (замощение Лебега, фиг. 3).



Фиг. 3. Замощение Лебега. Квадраты одной системы заштрихованы, квадраты другой системы — черные, квадраты третьей системы — белые. Для черных квадратов $P_{\varepsilon k m}^r$ построены $Q_{\varepsilon k m}^r$

Эти квадраты — зародыши областей g_{km}^r .

Все дальнейшие построения для каждого r производятся независимо. До конца построения функций u_{km}^r можно считать r фиксированным.

Множества g_{km}^r ($m = 1, \dots, m_k$) получаются из квадратов $P_{\varepsilon k m}^r$, где $\varepsilon_k > 0$ — число, выбор которого описан в дальнейшем. Области g_{km}^r будут получаться при «раздувании» $P_{\varepsilon k m}^r$, так что $P_{\varepsilon k m}^r \subset g_{km}^r \subseteq Q_{\varepsilon k m}^r$, где $Q_{\varepsilon k m}^r$ — замыкание квадрата, образующего $\frac{\varepsilon_k}{6}$ — окрестность $P_{\varepsilon k m}^r$: $\overline{U_{\frac{\varepsilon_k}{6}}(P_{\varepsilon k m}^r)} = Q_{\varepsilon k m}^r$ (см. фиг. 3).

Очевидно, при $m_1 \neq m_2$ $\rho(Q_{\varepsilon k m_1}^r, Q_{\varepsilon k m_2}^r) \geq \frac{\varepsilon_k}{6}$, поэтому $\rho(\overline{g_{km_1}^r}, \overline{g_{km_2}^r}) \geq \frac{\varepsilon_k}{6}$.

Таким образом, при этом построении удовлетворяется требование 3) основной леммы.

Чтобы удовлетворить требованию 2), очевидно, необходимо, чтобы $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; это, как легко видеть, выполняется при описанном ниже построении.

Это построение разбивается на этапы. Все, что будет построено на n -ом этапе, получает индекс n наверху, рядом с номером системы r .

Вообще все обозначения построены так, что $A_{\varepsilon_{km}}^{rn}$ следует читать: «объект A , построенный для функции u (множества g) системы r ранга k номера m , т. е. u_{km}^r (g_{km}^r), на n -ом этапе». При этом буквы означают:

P — квадрат-зародыш;

Q — приближение к g изнутри;

$\hat{Q}$ — приближение к g снаружи;

$^x O$ — приближение к множеству уровня $u = x$ ($0 < x < 1$) и к границе множества уровня $u = x$ при $x = 0$ и $x = 1$;

$^x \Theta$ — приближение к границе множества уровня $u = x$ ($0 < x < 1$).

Например, $^x \Theta_{\varepsilon_{km}}^{rn}$ обозначает приближение к границе множества уровня $u_{km}^r = x$, построенное на n -ом этапе.

Множество g_{km}^r начинаем строить на k -ом этапе, а на n -ом этапе ($n \geq k$) строим $n - k + 1$ -ое приближение к g_{km}^r изнутри и снаружи: $Q_{\varepsilon_{km}}^{rn} \subseteq g_{km}^r \subseteq \hat{Q}_{\varepsilon_{km}}^{rn}$. При этом $Q_{\varepsilon_{km}}^{r, n+1} \supseteq Q_{\varepsilon_{km}}^{rn}$ и g_{km}^r определяется как $\bigcup_{n=k}^{\infty} Q_{\varepsilon_{km}}^{rn}$, т. е. как сумма раздувающихся приближений изнутри.

Функции u_{km}^r строятся с помощью их множеств уровня. Построение начинается на k -ом этапе, где строится первое приближение $^0 O_{\varepsilon_{km}}^{rk} = \hat{Q}_{\varepsilon_{km}}^{rk} \setminus Q_{\varepsilon_{km}}^{rk}$ к множеству нулевого уровня. На следующем этапе строятся первые приближения к множествам уровня $\frac{1}{2}$ и 1 и некоторым другим и вторые приближения к множеству нулевого уровня. На каждом этапе посвящаются первые приближения к новым уровням и делаются следующие приближения к взятым раньше уровням.

Каждое приближение есть замкнутая многоугольная полоска, вложенная в предыдущее приближение, а само множество уровня — пересечение всех приближений к нему. Значения функций u на каждом таком множестве уровня подбираются так, чтобы u_{km}^r была непрерывной функцией, положительной на g_{km}^r , большей $\frac{1}{2}$ на $P_{\varepsilon_{km}}^r$, но всюду не превосходящей 1. Тогда выполняются требования 1) и 4) леммы.

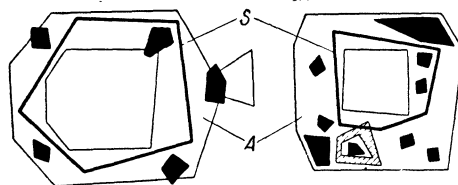
Мы будем пользоваться элементарной геометрической леммой, доказательство которой опускается; достаточно посмотреть на фиг. 4, чтобы убедиться в справедливости этой леммы.

Геометрическая лемма. Пусть A — замкнутая многоугольная полоска, ширина которой (т. е. наименьшее расстояние между граничными многоугольниками) больше $d > 0$. Пусть Q_m ($m = 1, \dots, M$) — замкнутые попарно не пересекающиеся многоугольники.

1) Если диаметр каждого из многоугольников Q_m не превосходит d , то можно построить многоугольник S строго внутри полоски A так,

чтобы он разделял ее границы и не пересекался с многоугольниками Q_m ($m = 1, \dots, M$).

2) Если строго внутри полосы A расположена другая замкнутая многоугольная полоска B и многоугольники Q_m не пересекаются с границами



Случай 1)

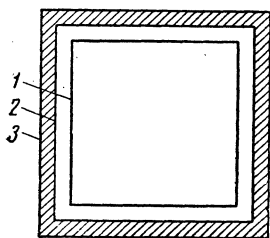
Случай 2)

Фиг. 4. Многоугольники Q_m — черные.
Полоска B заштрихована

A и с B , то многоугольник S , разделяющий границы A и не пересекающийся с Q_m , можно провести строго внутри полосы A так, чтобы он пересекался с полоской B по отрезку.

Теперь начнем первый этап.

Чтобы удовлетворить требованию 7) доказываемой основной леммы, положим $\varepsilon_1 = 1$, $m_1 = 1$, $P'_{11} = E^2$. Построим квадраты (фиг. 5)

Фиг. 5. 1 — граница P'_{11} .

2 — граница Q_{11}^1 , 3 — граница ${}^0O_{11}^1$.

Полоска ${}^0O_{11}^1$ — первое приближение к границе области g'_{11} — заштрихована

$$Q'_{11} = \hat{Q}_{11}^1 = \overline{U_1(P'_{11})} \text{ и } Q_{11}^1 = U_{\frac{1}{12}}(P'_{11});$$

это — первое приближение к g'_{11} , ибо, как мы увидим, $Q_{11}^1 \subseteq g'_{11} \subseteq \hat{Q}_{11}^1$. $\hat{Q}_{11}^1 \setminus Q_{11}^1 = {}^0O_{11}^1$ называется первым приближением к границе g'_{11} . Это — замкнутая многоугольная полоска, ширина которой $\frac{1}{12}$.

Если $\varepsilon_2 < \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4}$, то квадраты $Q_{\varepsilon_2 m}^r$ (*. ($m = 1, \dots, m_2$)) можно принять за Q_m в геометрической лемме, а первое приближение к границе g'_{11} — за полоску A .

Таким выбором ε_2 начинается второй этап (фиг. 6). Строим по ε_2 квадраты $P_{\varepsilon_2 m}^r, Q_{\varepsilon_2 m}^r = \hat{Q}_{\varepsilon_2 m}^2 = \overline{U_{\varepsilon_2}(P_{\varepsilon_2 m}^r)}$; $Q_{\varepsilon_2 m}^r = U_{\frac{\varepsilon_2}{12}}(P_{\varepsilon_2 m}^r)$ ($m = 1, \dots, m_2$). $Q_{\varepsilon_2 m}^r$ — первые приближения к областям g'_{2m} , а ${}^0O_{\varepsilon_2 m}^2 = \hat{Q}_{\varepsilon_2 m}^2 \setminus Q_{\varepsilon_2 m}^r$ — первые приближения к их границам.

Нам будет удобно вести построение так, чтобы границы областей g'_{kt} и $g'_{k'm'}$ получились не пересекающимися. Это в первом приближении может не выполняться: полоска ${}^0O_{11}^1$ может пересекаться с квадратами $Q_{\varepsilon_2 m}^r$. Однако на основании геометрической леммы можно в этой полоске провести многоугольник, отде-

* Построение их описано после формулировки основной леммы (см. фиг. 3). За фигурирующую там область E следует принять Q'_{11} .

ляющий $Q_{11}^{r_1}$ от бесконечности и извивающийся между квадратами $Q_{\varepsilon_2 m}^r$, не задевая их. Этот многоугольник, естественно, можно включить в обладающую тем же свойством замкнутую многоугольную полосу ${}^0O_{11}^{r_2}$, которая будет вторым приближением к границе g_{11}^r или к границе множества уровня $u_{11}^r=0$, чем и объясняется значок 0 слева вверх. Полоска ${}^0O_{11}^{r_2}$ определяет второе приближение $Q_{11}^{r_2}$ к g_{11}^r и может быть представлена в виде $\hat{Q}_{11}^{r_2} \setminus Q_{11}^{r_2}$.

Кроме того, на втором этапе строятся первые приближения к некоторым другим множествам уровня функции u_{11}^r . Легко видеть, что, поскольку $\varepsilon_2 < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12}$, найдется квадрат $Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$, лежащий целиком внутри P_{11}^r . Он объявляется первым приближением к множеству уровня 1 функции u_{11}^r , а полоска ${}^1O_{11}^{r_2} = \hat{Q}_{\varepsilon_2 m^*}^{r_2} \setminus Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$ — первым приближением к границе этого множества.

Далее, чтобы удовлетворить требованию 4), особо строим множество уровня $\frac{1}{2}$. Именно, границы P_{11}^r и $Q_{11}^{r_1}$ отстоят на $\frac{1}{12}$, а $\varepsilon_2 < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12}$; поэтому, применяя к заключенной между границами P_{11}^r и $Q_{11}^{r_1}$ полоске геометрическую лемму, строим многоугольник и затем замкнутую полосу $\frac{1}{2}O_{11}^{r_2}$, которая извивается между квадратами $\hat{Q}_{\varepsilon_2 m}^{r_2}$ ($m = 1, \dots, m_2$), не задевая их, лежит внутри $Q_{11}^{r_1}$ и отделяет P_{11}^r от бесконечности. Полоска $\frac{1}{2}O_{11}^{r_2}$ объявляется первым приближением к множеству уровня $\frac{1}{2}$ функции u_{11}^r . Следующие

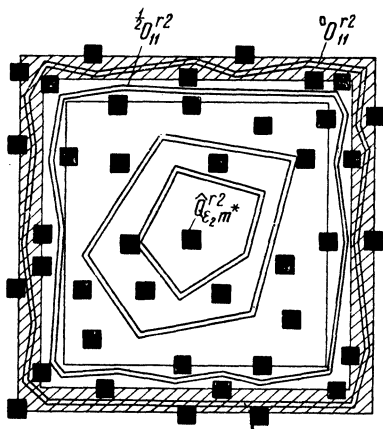
приближения $\frac{1}{2}O_{11}^{r_n}$ ($n > 2$) будут строиться вложенными в эту полосу.

Наконец, на втором этапе строятся первые приближения к множествам уровней функции u_{11}^r , содержащим g_{2m}^r , и определяются значения u_{11}^r на этих множествах.

Прежде всего выкинем навсегда те квадраты $Q_{\varepsilon_2 m}^r$, которые оказались вне $Q_{11}^{r_2}$ (и, значит, $\hat{Q}_{11}^{r_2}$). Остальные квадраты $Q_{\varepsilon_2 m}^r$ ($m \in M_{11}^{r_2}$) (исключая $Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$) лежат в кольцеобразных областях, на которые готовые полосы ${}^0O_{11}^{r_2}$, $\frac{1}{2}O_{11}^{r_2}$ и ${}^1O_{11}^{r_2}$ делят $Q_{11}^{r_2}$. Каждая кольцеобразная область есть открытая многоугольная полоска, отделяющая $Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$ и вообще все, что в ней лежит, от бесконечности.

Рассмотрим какой-нибудь квадрат $Q_{\varepsilon_2 m_0}^r$ ($m_0 \in M_{11}^{r_2}$, $m \neq m^*$). Примем замыкание открытой многоугольной полоски, где он лежит, за A в геометрической лемме, остальные квадраты $Q_{\varepsilon_2 m}^r$ ($m \neq m_0$) — за Q_m , а полосу ${}^0O_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2} = \hat{Q}_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2} \setminus Q_{\varepsilon_2 m_0}^r$ — за B . Проведем в соответствии с этой леммой многоугольник S , пересекающий ${}^0O_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2}$ по отрезку, отделяющий $\overline{Q_{\varepsilon_2 m^*}^r}$ от бесконечности, лежащий внутри открытой многоугольной полоски между двумя готовыми полосками и не задевающий квадратов $\overline{Q_{\varepsilon_2 m}^r}$ ($m \neq m_0$). Этот многоугольник S можно включить в обладающую теми же свойствами замкнутую многоугольную полосу d , так, чтобы $d \cup Q_{\varepsilon_2 m_0}^r$ тоже было замкнутой много-

угольной полоской (фиг. 6). Последняя и будет ${}^x O_{11}^{r2}$ — первым приближением к множеству уровня функции u'_{11} , содержащему g'_{2m} . Значение x_0 функции u'_{11} на этом множестве уровня определено ниже.



Фиг. 6. Тонкие линии — построения первого этапа. Черные квадратики — $Q'_{\epsilon_2 m}$. Их должно быть гораздо больше, но тогда на чертеже ничего не было бы видно. Черный квадратик в центре — $Q'_{\epsilon_2 m^*}$. Полоски, содержащие квадратики, показаны лишь некоторые: второй этап не закончен

Присоединив полоску ${}^x O_{11}^{r2}$ к готовым, выберем из M_{11}^{r2} новое $m \neq m_0$, $m \neq m^*$ и построим тем же способом ${}^x O_{11}^{r2}$ и так далее, пока не исчерпается множество M_{11}^{r2} и каждый квадрат $Q'_{\epsilon_2 m}$ ($m \in M_{11}^{r2}$) не будет включен в первое приближение к некоторому множеству уровня функции u'_{11} . Эти приближения являются многоугольными замкнутыми попарно не пересекающимися полосками. Множества ${}^x \Theta_{11}^{r2} = {}^x O_{11}^{r2} \setminus Q'_{\epsilon_2 m_i}$ называются Θ -образными замкнутыми полосками. Каждая из них делит плоскость на три части: $Q'_{\epsilon_2 m_i}$, часть, содержащую ${}^1 O_{11}^{r2}$, и часть, содержащую ${}^0 O_{11}^{r2}$ (фиг. 6). Они являются первыми приближениями к границам множеств уровня u'_{11} , содержащих g'_{2m_i} ($m_i \in M_{11}^{r2}$; $m_i \neq m^*$).

Определим, наконец, значения x_i .

Между границей множества g'_{11} и $\frac{1}{2} O_{11}^{r2}$ функция u'_{11} будет расти от 0 до $\frac{1}{2}$, а между $\frac{1}{2} O_{11}^{r2}$ и ${}^1 O_{11}^{r2}$ от $\frac{1}{2}$ до 1. Полоски ${}^x O_{11}^{r2}$ делятся $\frac{1}{2} O_{11}^{r2}$ на два класса: p_1 внешних, лежащих вне $\frac{1}{2} O_{11}^{r2}$, и p_2 внутренних. Перенумеруем их индексом $j = j(i)$ в порядке, определяемом отделимостью от бесконечности: внешние — от $j = 1$ до p_1 , внутренние — от $p_1 + 1$ до $p_1 + p_2$. Распределим возрастание u от 0 до $\frac{1}{2}$ равномерно между внешними полосками, объявив

j -ую полоску приближением к множеству уровня $u'_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{p_1 + 1}$. Для внутренних полосок возрастание — равномерное от $\frac{1}{2}$ до 1: j -ая полоска объявляется приближением к множеству уровня $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{j - p_1}{p_2 + 1}$.

Таким образом, на втором этапе построены:

1) Первые приближения $Q'_{\epsilon_2 m}$ и ${}^0 O_{\epsilon_2 m}^{r2}$ к множествам g'_{2m} и их границам соответственно.

2) Вторые приближения Q'_{11}^{r2} и ${}^0 O_{11}^{r2}$ к множеству g'_{11} и его границе.

3) Первые приближения к множеству уровня 1 функции u'_{11} и к его границе, к множеству уровня $\frac{1}{2}$ и к множествам уровней u'_{11} , на которых ле-

жат $g_{2m_i}^r (m_i \neq m^*; m_i \in M_{11}^{r2})$, а также к границам этих множеств, соответственно $\hat{Q}_{\varepsilon_2 m^*}^{r2}, {}^1O_{11}^{r2}, {}^{\frac{1}{2}}O_{11}^{r2}, x_i O_{11}^{r2}, x_i \Theta_{11}^{r2}$.

4) Значения x_i функции u_{11}^r на $g_{2m_i}^r$ и на содержащих их множествах уровня (пока не построенных).

Приближения к открытым множествам суть открытые многоугольники, содержащие предыдущие приближения, а к замкнутым — замкнутые многоугольники, многоугольные полосы и Θ -образные полосы, вложенные в предыдущие приближения.

Заметим, что сделанное нами на втором этапе для построения функций и множеств ранга 2 есть в точности то же (если отвлечься от масштаба ε_2), что на первом этапе делалось для построения функций и множеств ранга 1.

Вообще после n -го этапа будут налицо:

1) 1-ый этап построения функций и множеств n -го ранга, 2-й этап построения функций и множеств $n - 1$ -го ранга и т. д., до $n - 1$ -го этапа построения u_{2m}^r и g_{2m}^r . *

2) n -ые приближения Q_{11}^{rn} и ${}^0O_{11}^{rn}$ к множеству g_{11}^r и его границе соответственно.

3) $n - 1$ -ые приближения к множествам уровней функции u_{11}^r , которые мы начали строить на втором этапе и $n - 2$ -ые к тем, которые начали строить на третьем этапе, и т. д., до первых приближений $x_i O_{11}^{rn}$ и $x_i \Theta_{11}^{rn}$ к множествам уровней функции u_{11}^r , содержащим $g_{nm_i}^r$, и к границам этих множеств уровней. Здесь $m_i \in M_{11}^{rn}$, т. е. m_i пробегает те значения между 1 и m_n , при которых соответствующие квадраты $Q_{\varepsilon_n m_i}^r$ не лежат внутри $Q_{\varepsilon_k m'}^{rn}$ ($1 < k < n$; $m' \leq m_k$), но лежат внутри Q_{11}^{rn} .

4) Значения x_i функции u_{11}^r на g_{nm}^r ($m \in M_{11}^{rn}$).

При этом:

1°. Приближения к открытым множествам суть открытые многоугольники, границы которых не пересекаются попарно (и, в частности, с мелкими квадратами $Q_{\varepsilon_n m}^r = \hat{Q}_{\varepsilon_n m}^{rn}$). Эти приближения содержат предыдущие.

2°. Приближения к замкнутым множествам суть замкнутые многоугольники, многоугольные замкнутые и многоугольные Θ -образные замкнутые полосы, вложенные в предыдущие приближения. Многоугольники — границы этих приближений — не пересекаются с другими многоугольниками, построенными на n -ом этапе (и, в частности, с границами мелких квадратов $Q_{\varepsilon_n m}^r$).

3°. Каждая из полос $x_i O_{11}^{rn}$ и содержащаяся в ней $x_i \Theta_{11}^{rn}$ ($m_i \in M_{11}^{rn}$) отделяет $\hat{Q}_{\varepsilon_n m}^{rn}$ от бесконечности, а $x_i \Theta_{11}^{rn}$, кроме того, отделяет от всего остального $Q_{\varepsilon_n m_i}^{rn} \subset x_i O_{11}^{rn}$ — первое приближение к множеству $g_{nm_i}^r$, которое будет лежать на множестве уровня $u_{11}^r = x_i$.

* Заметим, что в обозначениях всюду отражен номер этапа, на котором построен объект, а не номер приближения. Например, $Q_{\varepsilon_n m}^{rn}$ — первое приближение к $g_{\varepsilon_n m}^r$.

4°. Значения u'_{11} на g'_{nm} ($m \in M'_{11}$) распределены равномерно.

Последняя фраза по определению имеет следующий смысл:

Пусть полоски A и B построены на n -ом этапе приближения к множествам урвней a и b функции u'_{11} , причем a и b определены (и приближения начали строить) до n -го этапа. Пусть между A и B на $n-1$ -ом этапе не было еще ни одной полоски — приближения к множеству урвня u'_{11} , а на n -ом этапе построены такие полоски C_i ($i=1, \dots, p$) (нумерация — от A к B). Если значение x_i функции u'_{11} на множестве урвня, для которого C_i есть первое приближение, равно $i \frac{b-a}{p+1}$, то между A и B значения u'_{11} на g'_{nm}

распределены *равномерно*. Условие 4° состоит в том, что так построены значения u'_{11} на g'_{nm} между любыми двумя полосками A и B указанного рода.

$n+1$ -й этап начинается с выбора ε_{n+1} . Так как все многоугольники, ограничивающие построенные на n -ом этапе приближения ко всем множествам урвней всех функций u'_{km} ($k \leq n$) и к их границам, не пересекаются попарно (если только не совпадают), то существует $d > 0$ такое, что расстояние между любыми двумя различными такими многоугольниками больше d . Выберем $\varepsilon_{n+1} < \frac{3d}{4}$. Это ε_{n+1} позволяет провести первый этап построения

множеств g'_{n+1m} и функций u'_{n+1m} , второй этап построения g'_{nm} и u'_{nm} и т. д., до n -го этапа построения g'_{2m} и u'_{2m} .

Так как этапы ранга, меньшего $n+1$, считаем уже пройденными для g'_{11} и u'_{11} , а для остальных g'_{km} и u'_{km} ($k \leq n$) они совершенно аналогичны, рассмотрим только для примера первый этап построения множеств g'_{n+1m} и функций u'_{n+1m} .

По ε_{n+1} строим лебегово покрытие из квадратов $P_{\varepsilon_{n+1}m}$ n -го приближения $\hat{Q}'_{11}$ к g'_{11} снаружи, разбиваем покрытие на три системы $P'_{\varepsilon_{n+1}m}$ и строим по ним первые приближения изнутри и снаружи к g'_{nm}

$$Q^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}} = U_{\frac{\varepsilon_{n+1}}{12}}(P'_{\varepsilon_{n+1}m}), \quad Q^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}} = \hat{Q}^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}} = \overline{U_{\frac{\varepsilon_{n+1}}{6}}(P'_{\varepsilon_{n+1}m})}$$

$$(m = 1, \dots, m_{n+1})$$

и первые приближения к границам g'_{nm}

$${}^0O^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}} = \hat{Q}^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}} \setminus Q^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}} \quad (m = 1, \dots, m_{n+1}).$$

(Квадраты $Q^{\varepsilon_{n+1}m}_{\varepsilon_{n+1}}$ в дальнейшем именуются мелкими квадратами.)

Так как $\varepsilon_{n+1} < \frac{3}{4}d$, можно после этого провести второй этап построения g'_{nm} и u'_{nm} , и т. д., n -ый этап построения g'_{2m} и u'_{2m} .

Пусть все это сделано. Тогда нужно провести $n+1$ -ый этап построения g'_{11} и u'_{11} .

Рассмотрим какую-нибудь замкнутую полосу ${}^x O_{11}^{rn}$ — приближение к множеству уровня x функции u'_{11} . Если $x = 0$ или $x = \frac{1}{2}$, то ${}^x O_{11}^{rn}$ не пересекается с множествами $\hat{Q}_{km}^{rn}$ ($k \leq n$). Она может пересекаться с квадратами $Q_{\varepsilon_{n+1}m}^r = \hat{Q}_{\varepsilon_{n+1}m}^{r, n+1}$, но их диаметр меньше $d \leq$ ширины полосы. Поэтому, применяя геометрическую лемму и расширяя многоугольник S до замкнутой многоугольной полосы, извивающейся внутри полосы, ${}^x O_{11}^{rn}$ не задевая мелких квадратов, получаем удовлетворяющие всем требованиям 1° — 4° полосы ${}^0 O_{11}^{r, n+1}$ и $\frac{1}{2} O_{11}^{r, n+1}$.

Если $x = 1$, то ${}^1 O_{11}^{r, n+1}$ будет ${}^0 O_{\varepsilon_2 m^*}^{r, n+1}$ — полоска, уже построенная, так как n -ый этап построения функции $u'_{\varepsilon_2 m^*}$ считаем сейчас уже сделанным.

Если $x \neq 0, \frac{1}{2}$ и 1, то полоска ${}^x_i O_{11}^{rn}$ содержит приближение к $g_{km_i}^r$ ($k \leq n$), построенное на n -см этапе, — $\hat{Q}_{\varepsilon_k m_i}^{rn}$, а поэтому и построенную при уже сделанных построениях $n + 1$ -го этапа полосу ${}^0 O_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$. Так как эта полоска, охватывающая $Q_{\varepsilon_k m_i}^{rn}$, и помещающаяся в $\hat{Q}_{\varepsilon_k m_i}^{rn}$, не пересекается с мелкими квадратами, можно принять ее за B в геометрической лемме, а за A принять ${}^x_i O_{11}^{rn}$. В результате применения леммы получается многоугольник S , 1) пересекающий полосу ${}^0 O_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$ по отрезку, 2) отделяющий ${}^1 O_{11}^{r, n+1}$ от ${}^0 O_{11}^{r, n+1}$, 3) лежащий внутри ${}^x_i O_{11}^{rn}$ и 4) извивающийся между мелкими квадратами, не задевая их. Раздвигая S до замкнутой многоугольной полосы d , обладающей свойствами 2), 3) и 4) и такой, что ${}^x_i O_{11}^{r, n+1} = d \cup \hat{Q}_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$ — тоже замкнутая многоугольная полоска (возможность чего очевидна), получаем следующее приближение ${}^x_i O_{11}^{r, n+1}$ к множеству уровня $u'_{11} = x_i$.

${}^{x_i} \Theta_{11}^{r, n+1} = {}^x_i O_{11}^{r, n+1} \setminus Q_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$ — следующее приближение к границе этого множества.

Проделав указанную операцию со всеми полосками ${}^x_i O_{11}^{rn}$, будем иметь совокупность замкнутых многоугольных непересекающихся полосок ${}^x O_{11}^{r, n+1}$, отделяющих ${}^1 O_{11}^{r, n+1}$ от бесконечности. Эти полосы будут называться готовыми.

Начнем строить первые приближения к множествам уровня функции u'_{11} , содержащим множества g_{n+1m}^r ранга $n + 1$.

Границы готовых полосок ${}^x_i O_{11}^{r, n+1}$ не пересекаются с мелкими квадратами. Рассмотрим номера m , отвечающие тем мелким квадратам, которые лежат в $Q_{11}^{r, n+1}$ и не попали ни в одну из готовых полосок. Совокупность всех таких m обозначим через $M_{11}^{r, n+1}$. Квадратики $\hat{Q}_{\varepsilon_{n+1}m}^{r, n+1}$ ($m \in M_{11}^{r, n+1}$) должны быть включены в первые приближения к множествам уровней. Готовые полосы разделяют $Q_{11}^{r, n+1}$ на открытые многоугольные полосы, в которых лежат мелкие квадратики. В каждой из них поступаем в точности так, как это уже описано при проведении второго этапа. Разница лишь в большем числе готовых полосок. В результате получаем полосы ${}^x_i O_{11}^{r, n+1}$ и Θ -образные полосы

$x_i \theta_{11}^{r, n+1}$, которые и будут приближениями к множествам уровней и их границам. Значения x_i в каждой открытой полоске между двумя готовыми распределаются равномерно.

Таким образом, можно вести построение, строя на каждом этапе объекты со свойствами 1°, 2°, 3°, 4°.

Пусть проделаны все этапы.

Определяем g_{km}^r как $\bigcup_{i=k}^{\infty} Q_{km}^i$.

Множества уровня функции u_{km}^r , на которых лежат множества $g_{k'm'}^r$ ($k' > k$), определяются как пересечения соответствующих многоугольных полосок — приближений. Значения функции на этих уровнях определены на k' -ом этапе.

На все области g_{km}^r функции u_{km}^r продолжаются по непрерывности. Ниже доказывается, что это можно делать и что полученные функции будут удовлетворять всем требованиям основной леммы.

Очевидно, что $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Вспоминая построение квадратов P , видим, что $\bigcup_{i,j} P_{k_i m_j}^r$ — всюду плотное на g_{km}^r множество. В силу

$$P_{k_i m_j}^r \subset g_{km}^r (k_i > k)$$

этого сумма Σ_{km}^r всех множеств уровней, на которых мы на каком-нибудь этапе определили u_{km}^r , всюду плотна в g_{km}^r . Покажем, что на множестве Σ_{km}^r функция u_{km}^r равномерно непрерывна.

Не ограничивая общности рассуждений, положим $k = m = 1$ и будем вести доказательство только для $u_{11} = u$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. На каждом $n + 1$ -м этапе между любыми двумя полосками $^x O_{11}^{r, n+1}$, $^y O_{11}^{r, n+1}$ будет находиться по крайней мере один квадрат $\hat{Q}_{\varepsilon_{n+1} m}^r$, если уровни $u = x$ и $u = y$ начали строить до $n + 1$ -го этапа. В самом деле, ширина открытой полоски O^n между $^x O_{11}^{r, n}$ и $^y O_{11}^{r, n}$ больше d , а квадраты $P_{\varepsilon_{n+1} m}^r$ имеют диаметр меньше d и входят в лебегово покрытие, так что хоть один из них $P_{\varepsilon_{n+1} m}^r$ имеет точки в O^n . Тогда он и вместе с ним $\hat{Q}_{\varepsilon_{n+1} m}^{r, n+1}$, очевидно, попадает в открытую полоску O^{n+1} между $^x O_{11}^{r, n+1}$ и $^y O_{11}^{r, n+1}$. Но на $n + 1$ -ом этапе ($n > 1$) значения между вновь построенными полосками распределялись равномерно. Поэтому наибольший промежуток между значениями u на двух множествах уровня, приближения к которым — соседние полоски среди полосок, полученных после n -го этапа, на каждом этапе уменьшается по крайней мере вдвое. Поэтому существует номер этапа k , такой, что если $^x O_{11}^{r, k}$ и $^y O_{11}^{r, k}$ — соседние полоски, то $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Выберем $\delta = \varepsilon_{k+1}$. Пусть $\rho(a, b) < \delta$. Тогда точки a и b могут разделяться только одной полоской $^z O_{11}^{r, k}$, так как расстояние между ограничивающими полоски многоугольниками больше $\varepsilon_{k+1} = \delta$. Поэтому существует полоска $^z O_{11}^{r, k}$, от которой другие полоски ни a , ни b не отделяют. Но, очевидно, в таких точках функция u отличается от z меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$ (так выбран ранг k). Поэтому $|u(a) - u(b)| < \varepsilon$. Итак, функция u равномерно непрерывна на всюду плотном подмножестве компакта g .

Эта функция может быть (и притом единственным образом) продолжена на $\bar{g}$.

Положим вне g $u=0$. Такие продолжения функции u_{km}^r удовлетворяют требованиям 1) — 7) основной леммы.

В самом деле, требования 1), 2), 3) и 7) выполнены очевидным образом.

Условие 4) выполнено с константами $c = \frac{1}{2}$ и $C = 3$, так как при любом k каждая точка E^2 покрыта не менее, чем одним, и не более, чем тремя, квадратами $P_{\varepsilon km}^r$ с какими-нибудь m и r , а на этих квадратах $\frac{1}{2} \leq u_{km}^r \leq 1$: для этого и устраивались специально уровни $u_{km}^r = \frac{1}{2}$.

Условие 5) выполнено, если $g_{k'm'}^r \subset g_{km}^r$, потому что

$$g_{k'm'}^r = \bigcup_{i=k'}^{\infty} Q_{\varepsilon k'm'}^{ri} \subseteq \bigcap_{i=k'+1}^{\infty} \hat{Q}_{\varepsilon k'm'}^{ri} \subseteq \bigcap_{i=k'+1}^{\infty} x_{m'}^{ri} O_{km}^{ri},$$

т. е. $g_{k'm'}^r$ целиком входит в множество уровня функции u_{km}^r . Если $g_{k'm'}^r \subset R^2 \setminus g_{km}^r$, то на $g_{k'm'}^r$ $u_{km}^r = 0$. Границы g_{km}^r и $g_{k'm'}^r$ по построению не пересекаются. Каждое из этих множеств есть область, и поэтому больше никаких случаев быть не может.

Условие 6) тоже выполнено. Для множеств уровней 0 и 1 это очевидно. (Легко видеть, что каждое из остальных множеств уровня функции u_{km}^r получается как пересечение последовательности замкнутых многоугольных полосок, а поэтому оно связно и делит плоскость на две части (одна содержит множество $u_{km}^r = 0$, другая — множество $u_{km}^r = 1$). Границы множеств уровней функции u_{km}^r , содержащих $g_{k'm'}^r$, делят плоскость не более, чем на 3 части, так как они получаются как пересечения последовательностей замкнутых многоугольных Θ -образных полосок. Границы остальных множеств уровня u_{km}^r исключая множество уровня 0, для которого 6) тривиально) совпадают с самими этими множествами, ибо каждое такое множество уровня не содержит точек всюду плотного на g_{km}^r открытого множества

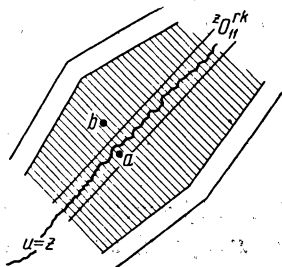
$$\bigcup_{i,j} g_{k_i m_j}^r, \\ g_{k_i m_j}^r \subset g_{km}^r$$

состоящего из всех входящих в g_{km}^r точек множеств той же системы следующих рангов.

Доказательство основной леммы закончено.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Пусть u_{km}^r — функции, удовлетворяющие условиям основной леммы, g_{km}^r — множества, где они положительны, d_k и $0 < c \leq C$ — определенные в условии



Фиг. 7. Полоски построены на k -ом этапе. В заштрихованной полосе u отличается от значения на уровне $u = z$ (приближение к которому — средняя полоска $z O_{11}^{rk}$) меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$.

этой леммы постоянные. Имея в виду построить представление функции трех переменных в виде, указанном в теореме 2, мы сначала разложим функцию двух переменных в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям u_{km}^r .

Лемма 1. Пусть на квадрате E^2 задано семейство F непрерывных функций, образующее компакт в равномерной метрике (т. е. состоящее из равномерно ограниченных и равномерно непрерывных функций и замкнутое относительно равномерной сходимости семейства). Тогда любая функция $f \in F$ может быть представлена в виде:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(f) u_{km}^r(x), \quad (1)$$

где коэффициенты a_{km}^r не зависят от x , непрерывно (в смысле равномерной метрики) зависят от $f \in F$ и таковы, что

$$|a_{km}^r(f)| \leq a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty,$$

причем a_k зависят лишь от семейства F .

Для доказательства этой леммы нам потребуется следующее утверждение:

Лемма об аппроксимации линейной комбинацией функций ранга k . Пусть $f(x)$ — непрерывная действительная функция на E^2 и

$$\max_{x \in E^2} |f(x)| \leq M.$$

Пусть k — натуральное число и

$$\max_{\rho(x, y) \leq d_k} |f(x) - f(y)| \leq \delta_k.$$

Тогда можно определить не зависящие от x коэффициенты b_m^r так, что

$$f(x) = S(x) + R(x), \quad (2)$$

где

$$S(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} b_m^r u_{km}^r(x), \quad (3)$$

$$|R(x)| \leq \left(1 - \frac{c}{C}\right) M + \delta_k. \quad (4)$$

При этом b_m^r можно выбрать непрерывно (в смысле равномерной метрики) зависящими от $f(x)$ и так, чтобы $|b_m^r| \leq \frac{M}{C}$.

Доказательство. Выберем в каждом множестве g_{km}^r точку x_{km}^r и положим $b_m^r = \frac{1}{C} f(x_{km}^r)$. Очевидно, b_m^r непрерывно зависят от f и $|b_m^r| \leq \frac{M}{C}$.

Покажем, что в каждой точке $x \in E^2$ имеет место неравенство (4), где $R(x)$ определено из (2) и (3) при указанном выборе b_m^r . Зафиксируем точку $x \in E^2$ (любую). Из свойств 2) и 3) функций u_{km}^r (см. основную лемму) следует, что в каждой точке x от нуля отличны не более, чем три функции u_{km}^r с заданным k , а именно отвечающие разным r . Пусть для данной точки x это будут $u_{km_r}^r$ ($r = 1, 2, 3$). Тогда в точке x

$$S(x) = \sum_{r=1}^3 b_{m_r}^r u_{km_r}^r(x) = \frac{1}{C} \sum_{r=1}^3 f(x_{km_r}^r) u_{km_r}^r(x).$$

Предположим сначала, что $x_{km_r}^r$ ($r = 1, 2, 3$) и x были выбраны столь удачно, что оказались совпадающими: $x_{km_r}^r = x$ ($r = 1, 2, 3$). Тогда $S(x)$ есть

$$S'(x) = \frac{1}{C} \sum_{r=1}^3 f(x) u_{km_r}^r(x) = \frac{f(x)}{C} \sum_{r=1}^3 u_{km_r}^r(x) \quad (5)$$

и, соответственно, $R(x)$ равно

$$R'(x) = f(x) - S'(x). \quad (6)$$

Но из требования 4) основной леммы вытекает:

$$0 < c \leq \sum_{r=1}^3 u_{km_r}^r(x) \leq C.$$

Поэтому для $|R(x)|$ имеем оценку:

$$|R'(x)| = |f(x) - S'(x)| = |f(x)| \left(1 - \frac{c}{C}\right) \leq M \left(1 - \frac{c}{C}\right). \quad (7)$$

Эта же оценка для $R'(x)$, определенного равенствами (5) и (6), имеет место, очевидно, и без предположения $x_{km_r}^r = x$ ($r = 1, 2, 3$). Чтобы оценить $R(x)$ в общем случае, рассмотрим

$$\begin{aligned} |R(x) - R'(x)| &= |S(x) - S'(x)| = \\ &= \frac{1}{C} \left| \sum_{r=1}^3 [f(x_{km_r}^r) - f(x)] u_{km_r}^r(x) \right| \leq \frac{1}{C} \sum_{r=1}^3 |f(x_{km_r}^r) - f(x)| u_{km_r}^r(x). \end{aligned}$$

Так как (см. условие 2) основной леммы) диаметр области g_{km}^r меньше d_k , то

$$|R(x) - R'(x)| < \frac{1}{C} \delta_k \sum_{r=1}^3 u_{km_r}^r(x)$$

или, на основании условия 4) основной леммы,

$$|R(x) - R'(x)| < \delta_k.$$

Сопоставляя с (7), видим, что наша лемма доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $f \in F$ — непрерывная на E^2 действительная функция и

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |f(x)| \leq M = M_0, \quad \sup_{\substack{x \in E^2, y \in E^2, f \in F \\ \rho(x, y) < d_k}} |f(x) - f(y)| = \delta_k.$$

При $k \rightarrow \infty$ $\delta_k \rightarrow 0$, поэтому можно выбрать столь большое $k_1 = k_1(F)$, что $\delta_{k_1} < \frac{c}{2C} M_0$. Применяя при $k = k_1$ лемму об аппроксимации и полагая $a_{k_1 m}^r = b_{k_1 m}^r$, мы получаем:

$$(8) \quad f(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_1}} a_{k_1 m}^r(f) u_{k_1 m}^r(x) + R_1(x),$$

причем

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |R_1(x)| \leq M_0 \left(1 - \frac{c}{C}\right) + \delta_{k_1} < M_0 \left(1 - \frac{c}{2C}\right),$$

где $a_{k_1 m}^r$ непрерывно зависят от $f \in F$ и

$$|a_{k_1 m}^r| < \frac{M_0}{C} = \frac{M}{C}.$$

Полагая $1 - \frac{c}{2C} = \theta$ и $\theta M_0 = M_1$, имеем:

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |R_1(x)| < M_1.$$

Очевидно, $R_1(x)$, отвечающие всевозможным $f \in F = F_0$, образуют компакт F_1 , как непрерывный образ компакта, в частности, эти $R_1(x)$ равномерно ограничены и равномерно непрерывны, причем каждая функция $R \in F_1$ от соответствующей ей $f \in F_0$ зависит непрерывно. Введем обозначение:

$$\sup_{\substack{x \in E^2, y \in E^2, R \in F_1 \\ \rho(x, y) < d_k}} |R_1(x) - R_1(y)| = \delta'_k.$$

Мы можем повторить предыдущее рассуждение, и в результате найдем такое $k_2 = k_2(F)$, что

$$R_1(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_2}} a_{k_2 m}^r(R_1) u_{k_2 m}^r(x) + R_2(x),$$

причем

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |R_2(x)| < \theta M_1 = \theta^2 M$$

и $a_{k,m}^r$ непрерывно зависят от $R_1 \in F_1$ и, стало быть, от $f \in F_0$, и

$$|a_{k,m}^r| < \frac{M_1}{C} = \frac{M}{C} \theta.$$

Продолжая таким же образом дальше, мы получим последовательность

$$R_n(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_{n+1}}} a_{k_{n+1}m}^r(R_n) u_{k_{n+1}m}^r(x) + R_{n+1}(x),$$

причем

$$\sup_{x \in E^3, f \in F} |R_{n+1}(x)| < \theta M_n = \theta^{n+1} M, \quad (8)$$

где $a_{k,m}^r$ непрерывно зависят от $f \in F$ и

$$|a_{k_{n+1}m}^r| < \frac{M_n}{C} = \frac{M}{C} \theta^n \quad (9)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$, если обозначить $R_0(x) = f(x)$).

Введем обозначение:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (R_i(x) - R_{i+1}(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_{i+1}}} a_{k_{i+1}m}^r u_{k_{i+1}m}^r(x). \quad (10)$$

Тогда, очевидно,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Из неравенств (8) и (9) видно, что последовательность $S_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно, причем $|a_{k_i m}^r| < a_{k_i} = \frac{M}{C} \theta^{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$).

Лемма 1 доказана, так как можно положить $a_{km}^r = 0$ при $k \neq k_i$ ($i = 1, 2, \dots$), и тогда из (10) получим (1).

При доказательстве теоремы 2 используется также следующая

Лемма 2. Пространство компонент множеств уровня функции

$$F_r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(x, y)$$

есть дерево, индекс ветвления точек которого не более трех.

Любая функция

$$f_r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r u_{km}^r \quad (*)$$

постоянна на каждой компоненте множества уровня функции F_r , если a_{km}^r — такие константы, что ряд (*) сходится равномерно и абсолютно.

Доказательство леммы 2. Зафиксируем r . Докажем сначала, что все компоненты множеств уровня функции $F_r(x, y)$ суть: 1) компоненты множеств уровня функций u_{km}^r ($k = 1, 2, \dots; m = 1, \dots, m_k$), 2) границы таких компонент, 3) отдельные точки, являющиеся пересечениями последовательностей множеств g_{km}^r ($k \rightarrow \infty$).

Возьмем точку a на плоскости. Либо a входит в бесконечное число множеств g_{km}^r , либо существует «последний ранг» $k_0 \geq 0$, после [которого точка a уже не входит ни в одно g_{km}^r ($k > k_0$).

Рассмотрим первый случай. Докажем, что такая точка есть компонента множества уровня функции F_r . Пусть точка a входит в бесконечную последовательность $\{g_{k_i m_i}^r\}$. Из условия 3) основной леммы следует, что k_i все различны. Будем считать, что всегда $k_{i+1} > k_i$. Легко вывести из основной леммы (требования 2) и 5)), что если множества g_{km}^r и $g_{k'm'}^r$ пересекаются и $k' > k$, то $g_{k'm'}^r \subset g_{km}^r$. В приведенном выше доказательстве основной леммы это получается автоматически (см. доказательство того, что выполнено требование 5)). Поэтому имеем последовательность вложенных множеств $g_{k_i m_i}^r \supset g_{k_{i+1} m_{i+1}}^r \supset \dots \ni a$. При этом $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_{k_i m_i}^r = a$, так как диаметры множеств $g_{k_i m_i}^r$ стремятся к нулю при $i \rightarrow \infty$ (требование 2) основной леммы).

На границе M_i каждого множества $g_{k_i m_i}^r$ значение функции F_r меньше, чем в точке a . Действительно, на M_i все функции u_{km}^r ($k \geq k_i$) равны нулю (это сразу следует из требований 2) и 5) основной леммы), а все функции u_{km}^r ($k < k_i$) принимают те же значения, что в точке a (требование 5)). В точке же a все функции $u_{k_j m_j}^r$ ($j \geq i$) положительны, и поэтому $F_r(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(a)$ больше, чем F_r на M_i .

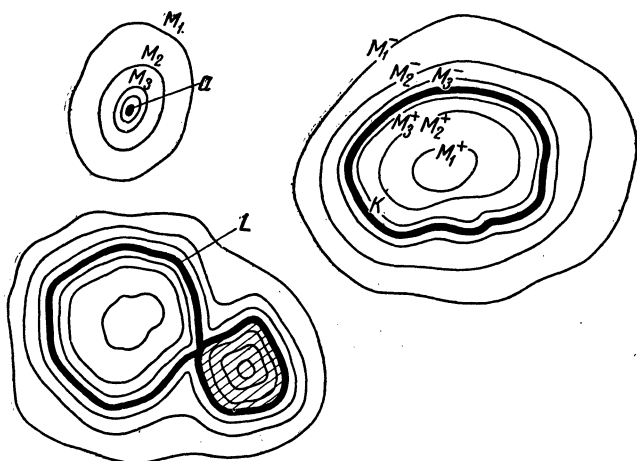
Но каждый континуум, содержащий a , пересекается с каким-нибудь из множеств M_i , ибо $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ отделяет a от всех вообще точек $R^2 \setminus a$ (фиг. 8). Значит, на каждом континууме, содержащем a , найдется точка b , где $F_r(b) \neq F_r(a)$, а это как раз и означает, что a есть компонента множества уровня функции F_r .

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть точка $a \in g_{k_0 m_0}^r$ не входит ни в одно g_{km}^r ($k > k_0$). Точка a принадлежит некоторому континууму K — множеству ненулевого уровня z функции $u_{k_0 m_0}^r$.

Предположим сначала, что K не содержит областей g_{km}^r ($k > k_0$). Тогда $0 < z < 1$. Докажем, что K есть компонента множества уровня функции F_r .

Выберем две последовательности z_i^+ и z_i^- ($i = 1, 2, \dots$), сходящиеся к z сверху и снизу и такие, что множества M_i^- и M_i^+ уровней z_i^- и z_i^+ ($i = 1, 2, \dots$) функции $u_{k_0 m_0}^r$ не содержат областей g_{km}^r и $0 < z_i^- < z < z_i^+ < 1$. Это можно сделать потому, что $0 < z < 1$ и областей g_{km}^r — счетное множество. Континуумы M_i^+ и M_i^- , очевидно, отделяют K от точек, где $u_{k_0 m_0}^r$ больше z_i^+ и

меньше z_i^- , а все вместе, т. е. $\bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i^+ \cup M_i^-)$, отделяют K вообще от всех точек $R^2 \setminus K$, так как в каждой точке $R^2 \setminus K$ $u_{k_0 m_0}^r$ больше какого-ни-



Фиг. 8. Изображены все три типа компонент. В третьем случае $z \neq 1$. Заштриховано $g_{k'm'}^r$. Случай $z = 1$ представляется читателю]

будь z_i^+ или меньше какого-нибудь z_i^- . На K , равно как и на каждом множестве M_i^+ и M_i^- , функция F_r не меняется, так как все слагаемые с u_{km}^r ($k > k_0$) равны там нулю, в силу предположения об отсутствии на K , M_i^+ и M_i^- множеств g_{km}^r . Но значения F_r на K , на M_i^+ и на M_i^- различны, так как все слагаемые u_{km}^r с $k < k_0$ [на этих континуумах одинаковы (требование 5)], все слагаемые u_{km}^r с $k > k_0$ равны нулю, а функция $u_{k_0 m_0}^r$ равна z на K , z_i^+ на M_i^+ и z_i^- на M_i^- .

Каждый континуум $M \neq K$, содержащий K , пересекает $\bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i^+ \cup M_i^-)$ (фиг. 8). Поэтому он имеет точки, где F_r отлично от значения F_r в точках K . Это и значит, что K — компонента множества уровня функции F_r .

В оставшемся случае доказательство аналогично проведенному, и мы его только наметим. Если множество $K \ni a$ уровня $u_{k_0 m_0}^r = z$ содержит $g_{k'm'}^r$, то компонентой множества уровня функции F_r , содержащей a , будет L — граница K (фиг. 8). Действительно, точка a не входит в $g_{k'm'}^r$ (так как k_0 — «последний ранг»). Граница K делит плоскость не более, чем на три части (требование 6)). Сначала пусть $z \neq 1$. Тогда в двух из этих частей $u_{k_0 m_0}^r$ принимает значения, большие и меньшие z , а в третьей — $g_{k'm'}^r$, $u_{k'm'}^r$ положительно. Точка a не может лежать ни в одной из этих частей и лежит на границе K . На континууме L функция F_r постоянна, так как постоянны все функции u_{km}^r (требования 5) и 6)). Чтобы доказать, что L — компонента множества уровня функции F_r , остается отделить ее континуумами с другими значениями F_r от всех точек $R^2 \setminus L$. Для этого приходится использовать

множества уровней, близких к нулю, функции $u_{k'm'}^r$ и множества уровней, близких к z , функции $u_{k_0 m_0}^r$ (фиг. 8).

Оставленный случай $z=1$ еще проще, так как граница множества $u_{k_0 m_0}^r = 1$ делит плоскость лишь на две части (это непосредственно следует из построения функций u_{km}^r , но может быть выведено и из требований 2) и 6) основной леммы).

Итак, строение компонент множеств уровня функции F , выяснено. Ни одна из них не делит плоскость более, чем на три части. Отсюда следует (приложение, теорема 3^a), что дерево функции F , не имеет точек, индекс ветвления которых превосходит 3.

Чтобы покончить с доказательством леммы 2, отметим еще, что на каждой компоненте множества уровня F , все функции u_{km}^r постоянны. Отсюда сразу следует второе утверждение леммы.

Теорема 2. Любая непрерывная на E^3 действительная функция $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть представлена в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i[\varphi_i(x_1, x_2), x_3],$$

где h_i и φ_i — непрерывные функции, причем функции h_i действительны и определены на произведении $\Xi \times E^1$ дерева на отрезок E^1 , а $\varphi_i(x_1, x_2)$ определены на квадрате E^2 и имеют в качестве значений точки Ξ . При этом Ξ — дерево, индекс ветвления точек которого не больше трех.

Доказательство. Функцию трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ можно рассматривать как семейство функций двух переменных, зависящее от третьего переменного, как от параметра: $f_{x_3}(x_1, x_2)$; где функция $f_{x_3}(x_1, x_2)$ при каждом x_3 определена на одном и том же квадрате $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ и в точке (a, b) равна $f(a, b, x_3)$. Очевидно, каждая из функций $f_{x_3}(x_1, x_2)$ непрерывна и (в смысле равномерной метрики) непрерывно зависит от параметра x_3 , $0 \leq x_3 \leq 1$, а потому семейство функций $f_{x_3}(x_1, x_2)$ образует компакт. Мы можем поэтому применить лемму 1 и тогда будем иметь:

$$f_{x_3}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(x_3) u_{km}^r(x_1, x_2).$$

Так как $|a_{km}^r(x_3)| \leq a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$, то каждый из трех рядов

$$f_{x_3}^r(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(x_3) u_{km}^r(x_1, x_2) \quad (r = 1, 2, 3)$$

сходится абсолютно и равномерно (по основной лемме из всех функций u_{km}^r ($m = 1, \dots, m_k$) в каждой точке отлична от нуля только одна). Покажем что $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$ от x_3 зависит непрерывно (все в том же смысле).

В самом деле, пусть дано $\epsilon > 0$. Выберем N столь большое, чтобы

$\sum_{k=N}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{4}$. Поскольку $a_{km}^r(x_3) u_{km}^r(x_1, x_2)$ непрерывно зависят от x_3 , то же относится и к конечной сумме, поэтому найдется столь малое $\delta > 0$, что при $|y - z| < \delta$ будет

$$\sup_{x_1, x_2 \in E^2} \left| \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(y) u_{km}^r(x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(z) u_{km}^r(x_1, x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$(r=1, 2, 3).$$

А так как

$$\sup_{x, x_3 \in E^2} \left| \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(y) u_{km}^r(x_1, x_2) - \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(z) u_{km}^r(x_1, x_2) \right| \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2},$$

получается, что при $|y - z| < \delta$ всегда

$$\sup_{x_1, x_2 \in E^2} |f_y^r(x_1, x_2) - f_z^r(x_1, x_2)| < \varepsilon \quad (r = 1, 2, 3).$$

Теперь мы применим лемму 2 и увидим, что каждая функция $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$ при любом $x_3 \in [0, 1]$ постоянна на каждой [компоненте множества уровня одной и той же построенной заранее и от $f(x_1, x_2, x_3)$ вовсе не зависящей функ-

$$\text{ции } F_r(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(x_1, x_2).$$

Рассмотрим (см. приложение) дерево компонент множеств уровня непрерывной функции $F_r(x_1, x_2)$. Отображение $t(a) = \varphi_r(x_1, x_2)$ сопоставляет каждой точке x квадрата $E^2 = A$ точку φ_r дерева T^r , изображающую компоненту t множества уровня $F_r(x_1, x_2)$, которой принадлежит (x_1, x_2) . Мы можем рассматривать это отображение как функцию $\varphi_r(x_1, x_2)$, определенную на квадрате, со значениями из дерева. Если угодно, можно реализовать дерево на плоскости; тогда это отображение можно записать с помощью двух действительных функций, заданных на квадрате. Отображение $t(a)$ непрерывно. Функции $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$ порождают на T^r функции $f_{x_3}^r(\varphi_r)$, равные значениям $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$ в любой точке компоненты t -прообраза φ_r на E^2 ; в силу леммы 2, во всех точках одной компоненты это значение одно и то же. Очевидно, получающиеся функции $f_{x_3}^r(\varphi_r)$ непрерывны на T^r и непрерывно зависят от x_3 . Поэтому семейство $f_{x_3}^r(\varphi_r)$ ($x_3 \in [0, 1]$) можно рассматривать как непрерывную действительную функцию $f^r(x_3, \varphi_r)$ на произведении дерева на отрезок изменения x_3 :

$$f_{x_3}^r(x_1, x_2) = f^r(x_3, \varphi_r(x_1, x_2)).$$

Из трех деревьев T^r ($r = 1, 2, 3$) мы можем составить одно дерево Ξ . По лемме 2 каждое из трех деревьев имеет лишь точки с индексом ветвления 1, 2, 3. Дерево Ξ можно, конечно, построить с тем же свойством. Каждая

из функций $f^r(x_3, \varphi_r)$ ($r = 1, 2, 3$) может быть непрерывно продолжена на произведение всего дерева Ξ на отрезок (все равно как). Обозначим это продолжение через $h_r(\varphi_r, x_3)$ ($r = 1, 2, 3$). Из соотношения (1) леммы 1 получаем во введенных обозначениях:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=1}^3 h_r[\varphi_r(x_1, x_2), x_3].$$

Теорема 1 доказана.

Часть II

Доказательство теоремы 3

Далее будет строиться упоминающееся в формулировке теоремы 3 дерево $X \subset E^3$, гомеоморфное универсальному дереву Ξ , не имеющему точек с индексом ветвления, большим трех. Последнее дерево, как известно (см. приложение, теорема 5), может быть получено приклеиванием веточек. Точнее, Ξ может быть представлено в виде

$$\Xi = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n}, \quad \Delta_n \subset \Delta_{n+1},$$

где Δ_n — конечные деревья (кривые комплексы), Δ_1 — простая дуга и Δ_{n+1} получается из Δ_n приклеиванием в точке ρ_n , не являющейся точкой ветвления, простой дуги σ_n (фиг. 9). Заметим, что множество точек ρ_n , ветвления дерева Ξ — не более, чем счетное. В дальнейшем все, что относится к абстрактному дереву Ξ , обозначается греческими буквами, а соответствующие образы его реализации X — соответствующими латинскими буквами. Реализация X будет построена в виде

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}, \quad D_n \subset D_{n+1},$$

где D_n — отрезочные комплексы в трехмерном пространстве; гомеоморфизм Ξ и X будет построен как продолжение гомеоморфизмов Δ_n и D_n .

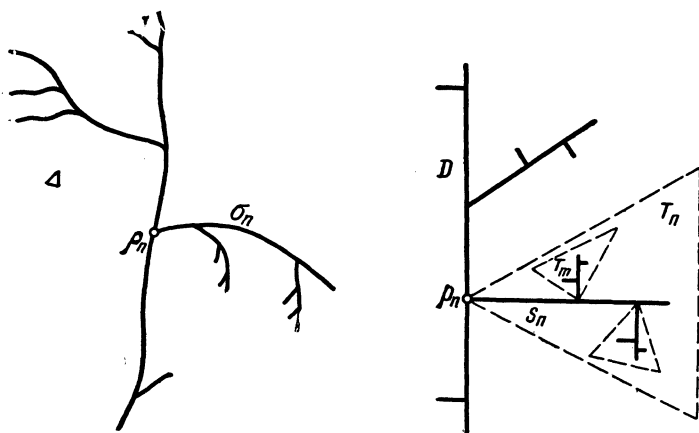
Известно, что, для того чтобы X было реализацией Ξ (и, значит, деревом), достаточно выполнения следующих условий (см. приложение, леммы 10 и 11):

α) Каждая вновь пристраиваемая ветка s_n , кроме основания, всеми своими точками и точками всех своих суков должна находиться внутри открытого пока пустого симплекса T_n . При этом для всех суков s_m , приклеиваемых к s_n ($p_m \in s_n$) позднее ($m > n$) $\bar{T}_m \subset T_n$ (фиг. 9).

На фиг. 9 и у Менгера ([3], гл. X), располагавшего дерево X на плоскости, симплексы T суть треугольники. В нашем случае они будут тетраэдрами. Это не меняет существа дела.

β) Симплексы T_n должны быть достаточно малыми: диаметры T_n стремятся к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

γ) Точки p_n , в которых пристраиваются новые ветви, не должны быть уже до этого точками ветвления или концевыми точками для D_n .



Фиг. 9. Конечные деревья: «абстрактное» кривое Δ и реализующий комплекс D

В дальнейшем (§§ 3—7) при построении D_n и X мы всегда будем иметь возможность выбирать точки p_n и направления отрезков s_n достаточно свободно: каждый раз запрещенные для выбора точки или направления будут иметь всюду плотное дополнение. Что касается длин s_n , то мы будем их выбирать достаточно малыми. Условия α), β) и γ) можно поэтому считать выполненными на каждом шагу. Чтобы не затемнять последующее изложение, не будем больше оговаривать это. Мы считаем, что, пристраивая каждую ветку s_n , мы строим соответствующий тетраэдр T_n и заботимся о выполнении условий α), β) и γ).

Чтобы получаемое дерево X удовлетворяло условиям теоремы 3, т. е. чтобы каждая непрерывная функция данного семейства представлялась на нем в виде суммы функций координат, при построении придется выбирать p_n и s_n с некоторыми ограничениями. Для точной формулировки этих ограничений, которой и посвящен следующий параграф, требуется целый ряд понятий.

§ 3. Основные определения. Индуктивные свойства 1—4

Пусть K — расположенная в трехмерном * пространстве конечная совокупность отрезков или прямых, отрезки (прямые) которой не параллельны координатным плоскостям.

Определение 1 (фиг. 10). Молнией называется система принадлежащих K точек $a_0 \neq a_1 \neq \dots \neq a_{n-1} \neq a_n$, если отрезки $a_{i-1}a_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) перпендикулярны координатным осям x_{α_i} и $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \dots \neq \alpha_n$. Отрезки $a_{i-1}a_i$ называются звеньями молнии. Если $a_0 = a_n$, то молния называется замкнутой.

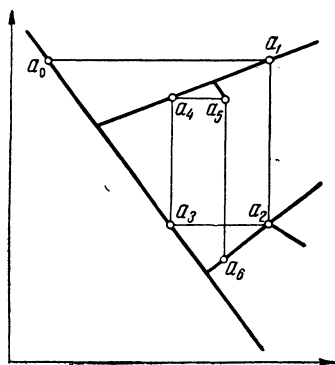
Наглядно молнию нужно представлять себе так. Начало a_0 есть точка из K . Выбираем первое направление α_1 . Плоскость, проходящая через

* В §§ 3—7 число измерений могло бы быть произвольным ≥ 2 . Чертежи соответствуют двумерному случаю.

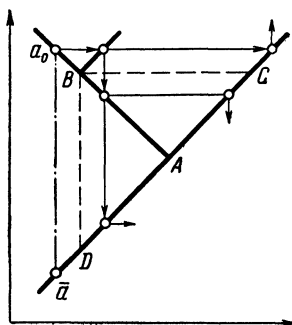
a_0 и перпендикулярная оси x_{α_1} (мы будем говорить «плоскость координатного направления α_1 ») пересекается с K в точке a_1 . Мы будем говорить, что она уводит из a_0 в a_1 . Точно так же звено a_1a_2 лежит в плоскости направления α_2 ($\neq \alpha_1$), так что в a_1 , вообще говоря, — излом. В точке a_2 направление снова меняется на α_3 ($\neq \alpha_2$), и мы приходим в точку a_3 , и т. д. до a_n — конца молнии.

Несколько видоизменив описанный процесс, мы придем к выводящей схеме. В заметке [1] дано ее формальное определение. Более наглядно

Определение 2 (фиг. 11). Начало выводящей схемы — точка $a_0 \in K$.



Фиг. 10. Молния $a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6$



Фиг. 11. Выводящая схема из точки a_0 . Если добавить точку $\bar{a}$, то полученная двойная выводящая схема будет классом точки a_0 .

Начало называется также концом ранга 0. Выберем координатное направление α_0 и проведем через точку a_0 плоскость этого направления. Она будет, вообще говоря, иметь несколько точек пересечения с K , кроме точки a_0 . Назовем эту плоскость плоскостью ранга 1 и эти точки — концами ранга 1. Плоскость ранга 1 *приводит* из a_0 в каждый из концов ранга 1.

Далее продолжается тот же процесс. В каждом конце a ранга n выбирается свое координатное направление α , отличное от того, по которому мы в этот конец пришли.* Проведем через a плоскость этого направления. Если (кроме a) такая плоскость не встречает точек K , с точкой a больше ничего не делаем; она называется свободным концом. Если же a не является свободным концом, то получаем точки пересечения плоскости с K , которые все называются концами ранга $n+1$. Таким образом, *построенная плоскость ранга $n+1$ уводит* из несвободного конца ранга n и *приводит* к концам ранга $n+1$.

Если этот процесс закончится, т. е. все концы некоторого ранга N будут свободными, и если все концы всех рангов попарно различны**, то вся

* Т. е. от направления плоскости ранга n , в пересечении которой с K лежит точка a .

** Т. е. при построении мы не приходим в одну точку два раза.

конструкция называется схемой, выводящей из точки a_0 по направлению α_0 . N называется рангом схемы.

Таким образом, выводящая схема состоит из начала a_0 , «несущих» плоскостей различных рангов и концов различных рангов.

Нам понадобится некоторое обобщение выводящей схемы — двойная выводящая схема. Она отличается от простой, определенной выше, только тем, что из некоторых ее точек (концов) выводят две плоскости, а не одна. Таким образом, все три плоскости координатного направления, проходящие через такую точку, могут быть несущими в двойной схеме, если одна из них приводит и две уводят. Двойные схемы можно получать, например, соединяя простые, у которых общие — только начала, или присоединяя к некоторому несвободному концу a простой схемы A выводящую схему B , для которой a является началом и которая, кроме a , с A общих точек не имеет.

Каждый свободный конец a двойной (и простой) выводящей схемы может быть соединен с началом a_0 единственной молнией, все точки которой являются концами схемы, а все звенья лежат в несущих плоскостях схемы. Если бы таких молний было несколько, концы схемы не могли бы быть попарно различны. Указанные молнии называются молниями схемы. Они, конечно, не замкнуты и не содержат замкнутых частей.

Определения устойчивости. Мы скажем, что две молнии (выводящие схемы) на K — одного типа, если их точки можно взаимно однозначно сопоставить так, чтобы соответствующие точки лежали на тех же отрезках (прямых) K^* , а соответствующие звенья были перпендикулярны одним и тем же координатным осям.

Мы скажем, что молния $a_0 \dots a_n$ не длиннее молнии $b_0 \dots b_m$ ($m \geq n$), если она одного типа с частью $b_0 \dots b_n$ второй молнии.

Выводящая схема A не длиннее выводящей схемы B , если можно установить соответствие между их молниями, при котором все молнии A не длиннее соответствующих молний B . Типы выводящих схем, которые не длиннее данной, образуют конечное множество.

Мы скажем, что A — схема выводящая из a_0 — устойчива, если точка a_0 имеет такую окрестность, что выводящие схемы точек K , лежащих в этой окрестности, не длиннее A . Например, комплекс K фиг. 11 допускает схему выводящую из любой точки, с любым первым направлением. При этом для любой точки, кроме точек ветвления A , B и концов C , D исходящих из B молний, схема устойчива.

Молнии одного типа осуществляют отображение множества своих начал в множество своих концов. Это отображение — линейное и невырожденное (так как отрезки K не перпендикулярны координатным осям). В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим обстоятельством.

Совокупность всех точек K , которые являются вершинами молний, выходящих из точки a_0 , называется классом достижимых из a_0 точек или просто классом точки a_0 на K . Аналогично определяется класс множества точек. Заметим, что класс точки и, следовательно, класс не более чем счетного множества есть не более чем счетное множество. Все

* Внутри отрезка отрезочного комплекса K не лежат точки ветвления. Комплекс фиг. 11 состоит из 5 отрезков. Это замечание не относится к совокупностям прямых K .

выводящие схемы точки a_0 и точек одного с ней класса лежат в том же классе.

Теперь мы можем сформулировать индуктивную лемму, доказываемую в §§ 4—9.

Вернемся к функциям f на дереве Ξ .

Пусть ω_n — верхняя грань колебаний функций $f \in F$ на компонентах разности $\Xi \setminus \Delta_n$. При $n \rightarrow \infty$ $\omega_n \rightarrow 0$.

В самом деле, если Ξ' — реализация Ξ , построенная (см. приложение, теорема 5) на плоскости, то F породит семейство F' равностепенно непрерывных функций на плоском континууме Ξ' . Так как (см. условие β) и фиг. 9) диаметры треугольников T_n при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, а каждая компонента $\Xi' \setminus \Delta'_n$ лежит в треугольнике T_m ($m > n$), то при достаточно большом n диаметр компонент $\Xi' \setminus \Delta'_n$ будет столь мал, что колебание любой функции $f' \in F'$ на каждой компоненте будет сколь угодно мало. Поэтому можно выбрать такую последовательность

$$n_1 < n_2 < \dots < n_r < \dots,$$

что $\omega_n \leq \frac{1}{r^2}$ при $n \geq n_r$.

Индуктивными свойствами называются следующие четыре свойства реализующего Δ_n дерева D_n — лежащего в трехмерном кубе отрезочного комплекса, отрезки которого не перпендикулярны осям координат, — гомеоморфизма Δ_n на D_n и функций $f_k^m(x_k)$ ($m \leq n$; $k = 1, 2, 3$):

1. Пусть A_n — множество точек D_n , являющихся образами лежащих на Δ_n точек ветвления Ξ *. Пусть K_n — совокупность прямых, отрезки которых составляют D_n . Пусть C_n — класс множества вершин замкнутых молний на K_n .

Тогда:

- а) C_n — не более чем счетное множество,
- б) C_n не пересекается с A_n (и, значит, с классом A_n на K_n),
- в) никакие две точки A_n не принадлежат одному классу на K_n .

2. На D_n выделено конечное число таких типов простых выводящих схем, что из любой точки $a_0 \in D_n$ по любому направлению выводит схема одного из этих «канонических» типов.

3. Любая функция $f \in F$ представляется на D_n в виде $f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k)$, где x_k — координаты точки $x \in D_n$, $f_k^n(x_k)$ — непрерывные функции, непрерывно зависящие от $f(x)$.

4. Если $n_r < n \leq n_{r+1}$, то

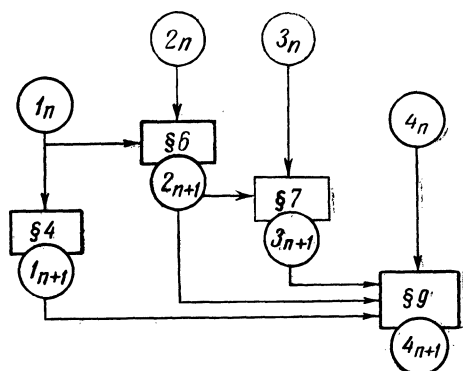
$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < \left(3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}\right) \frac{1}{r^2}.$$

Индуктивная лемма. Если дерево D_n , гомеоморфизм Δ_n на D_n и функции $f_k^m(x_k)$ ($k = 1, 2, 3$; $m \leq n$) обладают свойствами 1—4, то

* Точнее, следовало бы сказать «точек ρ_m », так как в приложении не доказана теорема 4. Далее всюду под точками ветвления можно понимать точки ρ_m и ρ_m .

можно построить обладающее теми же свойствами дерево D_{n+1} , отображение Δ_{n+1} на D_{n+1} и функции $f_k^{n+1}(x_k)$, приклеив в точке p_n ветку-отрезок s_n , не перпендикулярный координатным осям.

Схема доказательства:



i_n обозначает свойство i дерева D_n , гомеоморфизма Δ_n на D_n и функций $f_k^n(x_k)$. В параграфе, обозначенном в рамке, свойство i_{n+1} выводится из свойств, соединенных с этим параграфом стрелками.

§ 4. Индуктивное сохранение свойства 1

Мы будем предполагать, что D_n обладает свойством 1, и покажем, какие надо наложить требования на s_n , чтобы это свойство сохранилось на D_{n+1} . Требования получаются не очень стеснительные: направление может выбираться из всюду плотного множества второй категории *, длина может быть сколь угодно малой.

Итак, пусть на K_n , т. е. D_n , к которому добавлены лучи, продолжающие отрезки D_n ,

а) класс C_n точек замкнутых молний не более, чем счетен;

б) точки замкнутых молний K_n не достижимы на K_n из точек A_n — образов на D_n точек ветвления E ;

в) никакие две точки A_n не достижимы одна из другой на K_n .

Сначала ограничим выбор направления s_n так, чтобы гарантировать на D_{n+1} выполнение условия а). Типов молний — не более, чем счетное множество при любом выборе s_n , так как тип задается начальной и последующими прямыми K_n и направлениями перехода, т. е. конечной последовательностью элементов конечного множества. В каждом типе или замкнутая молния отсутствует, или имеется одна, или все молнии типа замкнуты. Это следует из линейности соответствующего типу отображения начальной прямой на конечную. В случае, когда все молнии типа замкнуты, мы назовем замкнутую молнию устойчивой. Очевидно, достаточно отсутствия на K_{n+1} устойчивых замкнутых молний: тогда условие а) на D_{n+1} будет выполнено.

Пусть D_{n+1} построено и отрезок s_n не перпендикулярен осям. Устойчивые замкнутые молнии могут появиться только среди молний, имеющих общие точки с прямой l , несущей s_n .

* Т. е. из дополнения к сумме счетного числа нигде не плотных множеств.

Пусть M — такая точка. Ее можно принять за начало замкнутой молнии. Пусть уравнения прямой l в системе координат, у которой O перенесен в p_n , а оси параллельны прежним, таковы:

$$x_2 = bx_1, \quad x_3 = cx_1;$$

b и c не равны нулю, так как отрезок s_n не параллелен координатным плоскостям. Пусть, для определенности, замкнутая молния выходит из точки $M(x_0, bx_0, cx_0)$ по направлению x_1 и впервые снова попадает на l опять в M , куда приходит по направлению x_2 . Пусть прямая, куда молния приводит на i -ом шагу, имеет уравнения $x_2 = b_i x_1 + \beta_i$, $x_3 = c_i x_1 + \gamma_i$. Коэффициенты b_i и c_i опять, конечно, оба не равны нулю. Вторая точка молнии имеет тогда координаты $x_0, b_1 x_0 + \beta_1, c_1 x_0 + \gamma_1$. Если второе направление есть, например, x_2 , то координаты третьей точки

$$\frac{b_1 x_0 + \beta_1 - \beta_2}{b_2}, \quad b_1 x_0 + \beta_1, \quad c_2 \frac{b_1 x_0 + \beta_1 - \beta_2}{b_2} + \gamma_2.$$

Вообще координаты каждой точки линейно зависят от x_0 , коэффициенты определяются промежуточными прямыми. Мы предположим, что молния до замыкания не проходит через l . Тогда для последней точки имеем координаты

$$l_1 x_0 + \lambda_1, \quad l_2 x_0 + \lambda_2, \quad l_3 x_0 + \lambda_3;$$

так как направление x_2 приводит к точке x_0, bx_0, cx_0 , получается $bx_0 = l_2 x_0 + \lambda_2$. Для устойчивой замкнутости необходимо, чтобы равенство выполнялось при всех x_0 , т. е. $b = l_2$ и $\lambda_2 = 0$. Таким образом, такая замкнутая молния устойчива, лишь когда l лежит в плоскости $x_2 = l_2 x_1$. Соответствующие направления l назовем запрещенными.

Если молния замыкается, побывав несколько раз на l , необходимым условием устойчивости будет, как легко видеть, $b^i c^j = l_0$, где l_0 — некоторая константа, зависящая от K_n и типа молнии. Здесь i — разность между числом приходов молнии на l по направлению x_2 и числом уходов с l по этому направлению, j — аналогичное число для направления x_3 . Если направление l — не запрещенное (т. е. $b^i c^j \neq l_0$), то устойчивых замкнутых молний рассматриваемого типа быть не может. Пусть $(l_0 - 1)^2 + i^2 + j^2 \neq 0$. Тогда направления l , при которых $b^i c^j = l_0$, образуют нигде не плотное множество (кривую) в пространстве направлений. Поэтому все вообще направления, запрещаемые каким-нибудь типом молний, для которых $(l_0 - 1)^2 + i^2 + j^2 \neq 0$, лежат на счетном множестве гладких кривых и оставляют всюду плотное множество второй категории не запрещенных направлений.

Если же $i = 0$, $j = 0$ и $l_0 = 1$, то замкнутая молния будет устойчивой при любых b и c и, в частности, если направить l по прямой q , на отрезке $q_n \in D_n$ которой лежит точка p_n , где приклеивается ветка s_n . Правда при этом некоторые, но заведомо не все, точки молнии (именно, лежащие на l и на q) сольются. Однако легко видеть, что на K_n определится устойчивая замкнутая молния, и точки q будут входить в ее класс. Но на q есть точки A_n , так что получается противоречие с условием в), которому D_n удовлетворяет.

Окончательный результат таков: можно выбрать направление l из всюду плотного множества второй категории так, что D_{n+1} будет удовлетворять условию а).

Переходим к условию в). Рассмотрим две точки ветвления E , образы которых лежат на D_n (в A_n). s_n надо выбрать так, чтобы эти точки из A_n на D_{n+1} нельзя было соединить молнией. Для молний, не содержащих точек s_n , это уже выполнено, так как на D_n выполнено условие в). Пар точек A_n — счетное множество. Типов молний тоже. Рассмотрим один из таких типов и одну из пар. Условие, что молния этого типа соединяет эти точки, приводит к запрещенным направлениям l , при которых такое соединение может произойти, и, точно так же, как в предыдущем доказательстве, все запрещенные направления лежат на счетном множестве гладких кривых K такого же рода требованию приводит и сохранение условия б) для точек A_n и замкнутых молний K_{n+1} .

Нужно теперь позаботиться о выполнении условия б) для точек $A_{n+1} \setminus A_n$ (лежащих на s_n) и условия в) для таких пар точек A_{n+1} , из которых хотя бы одна точка лежит на s_n . Поэтому, выбрав в соответствии со сказанным выше направление l из всюду плотного множества второй категории (из дополнения к запрещенным направлениям), отображим σ_n на s_n .

Итак, K_{n+1} построено. Нанесем на l точки класса A_n . Это счетное множество не должно пересекаться с образами точек ветвления E на s_n . Такому же запрету подвержено множество точек замкнутых молний на K_{n+1} и классы (на K_{n+1}) этих точек. Множество запрещенных точек или, как мы будем говорить, запрет — не более чем счетное множество, благодаря выбору l .

Требования а) и б) будут выполнены на D_{n+1} , а требование в) — на D_n , если мы не будем отображать точки ветвления E в запретные точки s_n . Такое отображение σ_n на l , при котором будет обеспечено также и выполнение условия в) на D_{n+1} , сейчас будет описано. При этом отрезок s_n может быть произвольно малым. Последнее будет использовано в дальнейшем.

Итак, пусть выбрано направление s_n и его размер. На s_n есть запрет — множество точек, не более чем счетное, куда не должны попадать образы α точек α ветвления E , лежащих на σ_n . Отображение должно быть гомеоморфным, и мы должны следить, чтобы точки α не были достижимы на K_{n+1} одна из другой.

Занумеруем точки ветвления E на σ_n в последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ (ρ_n не включается в эту последовательность). Это счетное множество всюду плотно на σ_n^* . Поэтому подобное** отображение этого множества на всюду плотное подмножество s_n может быть продолжено до гомеоморфизма σ_n на s_n . Остается отобразить точки α на s_n . Так как среди точек α_i нет концов σ_n , их образы a_i располагаются на интервале s'_n , замыкание которого есть s_n .

Рассмотрим на s_n счетную систему интервалов δ_i^k , $1 \leq k < \infty$, $1 \leq i \leq i_k$, такую, что:

- 1) при любом $k \quad \bigcup_{i=1}^{i_k} \delta_i^k = s'_n$,
- 2) все интервалы $\delta_1^k, \dots, \delta_{i_k}^k$ меньше ϵ_k ; $\epsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

* Если это не так, добавим к точкам α еще некоторые точки σ_n .

** Т. е. сохраняющее порядок.

Если в каждый интервал δ_i^k попадет образ a_j какой-нибудь точки α_j , то точки a_j ($j = 1, 2, \dots$) образуют всюду плотное подмножество s_n . Занулируем все интервалы в одну последовательность δ_i ($i = 1, 2, \dots$).

Будем считать, что на σ_n и s_n выбрано направление так, что ρ_n и r_n — левые концы.

Первый шаг. Выберем в интервале δ_1 незапрещенную точку a_1 . Это будет образ точки α_1 . Точки класса a_1 образуют на s_n не более чем счетное множество. Добавим их к запрету.

Второй шаг. Точка α_1 делит σ_n на левую и правую части. Пусть α_{i_1} — точка α с наименьшим номером в левой части, а α_{i_2} — в правой части. Точка a_1 делит интервалы δ на лежащие левее a_1 , правее a_1 и содержащие a_1 . Среди интервалов, которые не лежат правее a_1 , с номером, большим 1, найдем тот, у которого номер наименьший. В нем выберем незапрещенную точку левее a_1 . Это будет α_{i_1} — образ α_{i_1} . Включим в запрет точки одного с ней класса. Возьмем из невыбранных интервалов δ , лежащих не левее a_1 , тот, номер которого наименьший. В этом интервале найдем незапрещенную точку α_{i_2} правее a_1 . Добавим к запрету точки ее класса.

Вообще после n -го шага σ_n будет разделено на 2^n интервалов $2^n - 1$ точками $\alpha_1, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_{11}}, \alpha_{i_{12}}, \dots, \alpha_{i_{\underbrace{11\dots 1}_{n-1 \text{ раз}}}}$.

$n+1$ -й шаг. Выберем в каждом из 2^n интервалов точку α с наименьшим индексом и обозначим этот индекс в самом левом интервале через $i_{\underbrace{11\dots 1}_{n \text{ раз}}}$, потом через $i_{\underbrace{11\dots 11}_{n-1 \text{ раз}}}, \dots$, в самом правом — через $i_{\underbrace{11\dots 11}_{n \text{ раз}}}$.

Отображение этих 2^n точек $\alpha_{i_{11\dots 1}}, \dots, \alpha_{i_{11\dots 11}}$ на s_n происходит совершенно так же, как в подробно описанном втором шаге. Каждый раз образ α — точка a — выбирается в интервале δ , не более левом, чем образ α_i — левого конца интервала (α_i, α_j) , из которого взята точка α , и не более правом, чем a_j ; при этом берется интервал с наименьшим номером из всех невыбранных интервалов δ , обладающих этим свойством. В самом интервале δ точка a выбирается между α_i и a_j из незапрещенных точек. Затем к запрету присоединяется класс точки a и строится образ следующей точки α , пока не кончится $n+1$ -ый шаг.

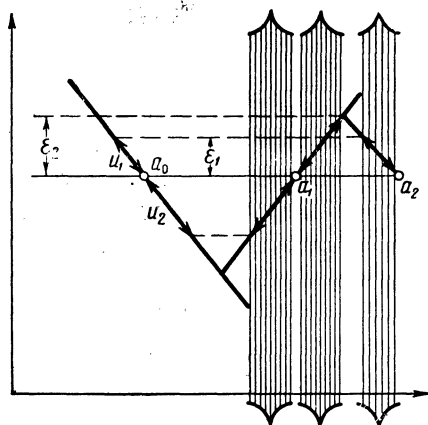
Доказательство того, что отображение точек α в a определено после проведения всех шагов для всех α , что это — подобное отображение и что при порождаемом им гомеоморфизме σ_n на s_n сохраняются свойства а), б) и в), может быть проведено без затруднений.

§ 5. Леммы о выводящих схемах

Прежде чем переходить к доказательству возможности сохранения индуктивных свойств 2, 3, 4, изучим несколько подробнее выводящие схемы *отрезочного комплекса* K . Безразлично, будут ли эти схемы простые или двойные.

Если отбросить в выводящей схеме начало, то оставшееся можно рассматривать как совокупность непересекающихся выводящих схем из концов первого ранга (укороченных схем).

Лемма 1 (фиг. 12). Если все укороченные схемы A_i данной схемы A устойчивы, а начальная точка a_0 не есть точка ветвления K , то схема A устойчива.



Фиг. 12. Выводящая схема $a_0 a_1 a_2$ имеет ранг 1. Заштрихованы слои выводющих схем полукрестностей

Доказательство. Пусть $\epsilon_1 > 0$ — такое число, что ϵ_1 -сдвиг* начальных точек a_i укороченных схем не удлиняет этих схем (см. определение устойчивости в § 3). Кроме того, из устойчивости A_i следует, что a_i не являются точками ветвления K . Так как комплекс K — замкнутое множество, существует такое $\epsilon_2 > 0$, что плоскость, параллельная первой плоскости схемы A и отстоящая от нее менее, чем на ϵ_2 , пересекает только те отрезки K , где лежат a_0 и точки a_i .

Выбрав $\epsilon < \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, получим ϵ -окрестность точки a_0 , существование которой доказывает устойчивость схемы A .

Лемма 2. Если ни одна из вершин выводящей схемы не является точкой ветвления, то такая выводящая схема устойчива.

Доказательство. Доказательство этой леммы — индуктивное. Если ранг схемы — 0 и точка a_0 — свободный конец и не точка ветвления K , то, очевидно, существует в K окрестность точки a_0 , составленная из точек с таким же свойством (см. на фиг. 12 точки a_1 и a_2 с указанными окрестностями устойчивости). Если для схем ранга n утверждение леммы 2 доказано, то для схем следующего ранга оно следует из леммы 1.

Лемма 3. Пусть выводящая из точки a схема A устойчива. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что любая несущая плоскость соответствующей схеме A выводящей из точки b схемы B отстоит меньше, чем на ϵ , от соответствующей ей плоскости схемы A , если только начальная точка b отстоит от a меньше, чем на δ .

Доказательство. Выводящая схема A имеет конечное количество несущих плоскостей $\Pi'_i(a)$ каждого направления $r = 1, 2, 3$.

* Напоминаю, что расстояние между точками (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) есть $\max_{1 \leq i \leq 3} (|x_i - x'_i|)$

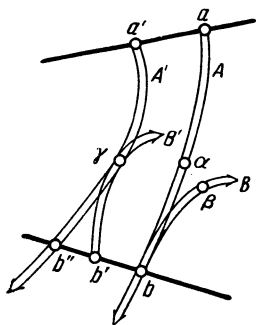
Для схемы B , выводящей из точки b в интервале устойчивости схемы A , определены соответствующие плоскостям, точкам, молниям схемы A плоскости, точки, молнии схемы B (обратное, вообще говоря, неверно, так как молнии схемы B могут обрываться раньше).

Рассмотрим плоскости $\Pi'_i(b)$ (так обозначается плоскость, которой в схеме A отвечает $\Pi'_i(a)$).

Координата x_r для всех точек $\Pi'_i(b)$ — одна и та же; она линейно зависит от любой координаты начальной точки b . Отсюда следует, ввиду конечности числа несущих плоскостей схемы A , что для любой точки b в некоторой достаточно малой окрестности точки a все плоскости схемы B менее, чем на ε , отстоят от соответствующих плоскостей схемы A .

Заметим, что отрезки комплекса всегда предполагаются не перпендикулярными осям координат; из конечности числа отрезков следует, что наклон их к координатным плоскостям ограничен снизу. Поэтому из леммы 3 следует,

что при достаточно малом изменении начала схемы сколь угодно мало сдвигаются ее вершины, которые не исчезают. Эти свойства мы будем называть непрерывной зависимостью устойчивой выводящей схемы от ее начала. Конечное число устойчивых выводящих схем A_i равномерно непрерывно зависит от начала в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta > 0$, общее для всех этих схем.



Фиг. 13. К лемме 4. Толстые стрелки изображают выводящие схемы

Лемма 4 (фиг. 13). Пусть класс точки b не содержит точек замкнутых молний. Пусть A — устойчивая выводящая из a схема, а B — выводящая из b устойчивая схема, первое направление которой — то же, что и направление, по которому

приводит в b схема A . Тогда точки a и b имеют такие окрестности u_a и u_b , что если схема A' (схема, соответствующая A , выводящая из $a' \in u_a$) проходит через точку $b' \in u_b$, то схема B' (соответствующая B , выводящая из $b' \in u_b$) не имеет с A' общих точек, если только $b' \neq b''$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность всех точек схем A и B . Пусть наименьшее расстояние между двумя не совпадающими точками $\eta > 0$. Выберем у точек a и b такие окрестности u_a и u_b , чтобы при $a' \in u_a$, $b' \in u_b$ точки схем A' и B' отстояли от соответствующих им точек схем A и B меньше, чем на $\frac{\eta}{3}$. Такие окрестности можно выбрать в силу замечания к лемме 3. Эти окрестности — искомые.

В самом деле, пусть a' , b' и b'' — точки, о которых идет речь в условии леммы. Предположим, что точка γ лежит на A' и на B' сразу (фиг. 13). Как точке схемы A' , ей соответствует точка $\alpha \in A$. Как точке схемы B' , ей соответствует точка $\beta \in B$. Докажем, что точки α и β совпадают. В самом деле, в противном случае они удалены не менее, чем на η , в силу определения η . Однако точка γ удалена от β , как соответствующая ей, меньше, чем на $\frac{\eta}{3}$, и от α тоже меньше, чем на $\frac{\eta}{3}$, по той же самой причине. Полученное противоречие убеждает нас, что $\alpha = \beta$. Но отсюда следует, что молния,

соединяющая b с β в B , целиком лежит в A : в противном случае b с $\beta = \alpha$ можно было бы соединить молнией через A другим путем, а ведь класс точки b по условию леммы не содержит замкнутых молний. Схема A' не длиннее A . Она содержит точку γ , соответствующую α , и b'' , соответствующую b . Отсюда следует, что A' содержит соединяющую точки b и γ молнию того же типа, что молния $(b\alpha) \in A$. В силу таких же соображений, молнии $(b\beta) = (b\alpha)$ и $(b'\gamma)$ — одного типа. Следовательно, одного типа и молнии $b'\gamma$ и $b''\gamma$. Но это противоречит невырожденности соответствующего типу линейного преобразования, ибо точки b' и b'' предполагались различными. Противоречие доказывает лемму 4.

В § 8 мы будем пользоваться еще одним свойством устойчивых схем. Назовем его свойством N . Схема A , выводящая из точки $a_0 \in K$, обладает свойством N , если точка a_0 лежит на отрезке $\Delta \subset K$, где имеет такие односторонние окрестности* u_1 и u_2 (а в случае, когда a_0 — концевая точка K , одну такую одностороннюю окрестность), что для всех точек $a'_0 \in u_1$ имеются выводящие схемы A' (a'_0) одного типа и не длиннее схемы A , а для всех точек $a''_0 \in u_2$ имеются выводящие схемы A'' (a''_0) одного типа не длиннее схемы A .

Рассматривая фиг. 12, можно понять, что эти типы не обязательно совпадают, а могут все три (тип A , тип A' и тип A'') быть различными.

Имеет место

Лемма 5. *Устойчивая выводящая схема обязательно обладает своим свойством N .*

Лемма 5 выводится из леммы 6 так же, как лемма 2 из леммы 1.

Лемма 6. *Пусть A — схема, выводящая из точки a_0 на K . Если каждая из укороченных схем A_i схемы A обладает свойством N , а точка a_0 не есть точка ветвления K , то схема A обладает свойством N .*

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 1.

Введем теперь понятие выводящей схемы интервала.

Для этого рассмотрим выводящие схемы точек интервала u комплекса K . Пусть они все одного типа (как, например, для схем A' точек интервала u_a в определении свойства N). Совокупности соответствующих друг другу точек этих схем образуют интервалы, куда молнии одного типа отображают интервал u . Соответствующие друг другу плоскости этих схем образуют слои. Если параллельные слои попарно не пересекаются, то имеем выводящую схему интервала u . Она состоит из интервалов схемы, аналогичных концам, которые лежат в пересечении K со слоями схемы, аналогичными плоскостям. Интервал схемы ранга 0 — это u ; совокупность плоскостей первого направления схем точек u — слой ранга 1. Он уводит с u и приводит на интервалы схемы ранга 1. И так далее. С комбинаторной точки зрения выводящая схема интервала устроена так же, как выводящая схема точки. Вместо свободных концов тут свободные интервалы.

Следующее понятие для схем точек не вводилось. Интервалом слоя назовем пересечение слоя с перпендикулярной ему осью координат. Выводящие схемы точек u сопоставляют каждой точке u точку в каждом интервале схемы и плоскость в каждом слое. Тем самым определяется линейное отображение u на каждый интервал слоя.

* Т. е. интервалы лежащие на Δ и имеющие точку a_0 предельной.

Применяя леммы 2, 3 и 5 к дереву D_n , которое обладает индуктивными свойствами 1 и 2, убедимся, что D_n имеет выводящую из точки p_n и из каждой точки класса p_n схему, которая устойчива, обладает свойством N и непрерывно зависит от начала. В самом деле, схема существует, так как D_n обладает индуктивным свойством 2, а класс точки p_n не содержит точек ветвления, в силу свойства 1, так что к этой схеме применимы леммы.

§ 6. Индуктивное сохранение выводящих схем

В § 4 было показано, как пристроить к D_n веточку s_n , сколь угодно малую, так, чтобы D_{n+1} обладало свойством 1. Чтобы D_{n+1} обладало индуктивными свойствами 2, 3 и 4, нужно, чтобы s_n было достаточно малым. Выбрав направление прямой l в соответствии с § 4, а затем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, в соответствии с требованиями настоящего и следующих параграфов, а потом построив s_n в ε -окрестности p_n , как это сделано в § 4, мы получим, что на построенном дереве D_{n+1} все четыре индуктивных свойства имеют место.

В настоящем параграфе доказывается, что если D_n обладает свойствами 1 и 2 и направление l выбрано правильно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что если s_n укладывается в ε -окрестности p_n , то D_{n+1} обладает индуктивным свойством 2.

Согласно свойству 2 дерево D_n имеет конечное множество типов канонических выводящих схем. Мы несколько преобразуем эти типы. Мы добиваемся получения конечного числа выводящих схем A_i , проходящих через p_n и таких, что для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что плоскости канонических схем точек, лежащих вне δ -окрестностей начал a_i схем A_i , не пересекают ε -окрестность p_n .

Пусть существующие канонические типы этим свойством не обладают. Так как типов конечное число, какой-нибудь из них не регулярен. Под этим понимается наличие в типе выводящих канонических схем, имеющих сколь угодно близкие к p_n плоскости при отсутствии схемы, проходящей через p_n . Выберем из последовательности начальных точек указанных схем сходящуюся к точке a подпоследовательность и рассмотрим совокупность предельных точек множества точек всех этих схем. Эта совокупность может не быть выводящей схемой. Но она содержит p_n , и, добавив к некоторым ее точкам (а их, очевидно, конечное число) их выводящие схемы, получим выводящую схему точки a . Добавляемые точки все различны и не повторяют бывших ранее, так как в классе p_n нет точек замкнутых молний.

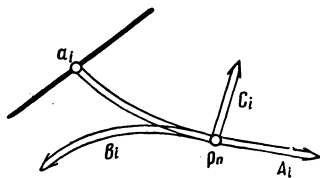
В силу леммы 2, полученная схема устойчива. Поэтому в некоторой окрестности точки a выводящими схемами будут схемы, соответствующие ей в силу устойчивости. Заменим в этой окрестности точки a нерегулярный тип выводящих схем этими схемами. Полученные новые типы будем считать каноническими. Ясно, что остаток канонического нерегулярного типа регулярен. Это легко доказать, используя линейность соответствующих отображений.

Проделав такую операцию со всеми старыми нерегулярными типами, мы получим новые канонические типы; теперь мы их будем называть просто каноническими. Конечное число точек a_i имеют канонические схемы, проходящие через p_n . Все нерегулярные типы находятся теперь в интервалах ус-

тойчивости этих схем A_i . Из линейности отображения окрестности a_i в окрестность p_n при помощи соответствующих молний канонических схем вытекает следующее утверждение:

Для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что с ε -окрестностью точки p_n могут пересекаться плоскости только тех новых канонических схем, начала которых лежат в δ -окрестностях точек a_i и которые соответствуют A_i в смысле устойчивости.

Пусть A_i — каноническая выводящая из a_i схема, проходящая через p_n . Рассмотрим следующие канонические выводящие схемы (фиг. 14):



Фиг. 14. Толстые стрелки изображают выводящие схемы

B_i — схема, выводящая из p_n по тому направлению, по которому A_i в p_n приходит.

C_i — выводящая из p_n схема, первое направление которой отлично от направлений, по которому A_i из p_n уходит и в p_n приходит, и от первого направления B_i . (В случае, когда $p_n = a_i$, схема B_i не определена, и мы ее не рассматриваем.)

Все эти схемы проходят через p_n и потому устойчивы.

Согласно индуктивному условию 1, построенные выводящие схемы не имеют общих точек, кроме p_n , а B_i и A_i удовлетворяют условию леммы 4.

Рассмотрим совокупность всех точек всех трех схем. Пусть $\eta > 0$ — наименьшее расстояние между двумя точками этой совокупности. Применяя к A_i и B_i лемму 4, найдем δ_1 -окрестность точки a_i и ε_1 -окрестность точки p_n такие, что A'_i и B'_i не пересекаются, если их начала лежат в указанных окрестностях (определение A'_i и B'_i см. в лемме 4). Применяя к устойчивым схемам A_i , B_i , C_i лемму 3, найдем такие $\delta_2 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, что все точки схем A'_i , B'_i , C'_i отстоят менее, чем на $\frac{\eta}{3}$, от соответствующих им точек A_i , B_i , C_i , если только начало A'_i лежит в δ_2 -окрестности a_i , а начала остальных схем — в ε_2 -окрестности p_n ; здесь C'_i — схема того же типа, что C_i , или более короткая.

Выберем $\delta > 0$ меньшим δ_1 и δ_2 . Найдем по нему $\varepsilon_3 > 0$ такое, что с ε_3 -окрестностью p_n пересекаются плоскости только тех канонических выводящих схем, начала которых лежат в δ -окрестностях точек a_i и первое направление которых — то же, что у A_i . Выберем $\varepsilon > 0$ меньшим ε_1 , ε_2 , и ε_3 . Из конечности числа типов A_i следует, что все числа ε и δ можно выбирать равномерно по i , так что в результате получаем систему δ -окрестностей точек a_i и ε -окрестность p_n такие, что:

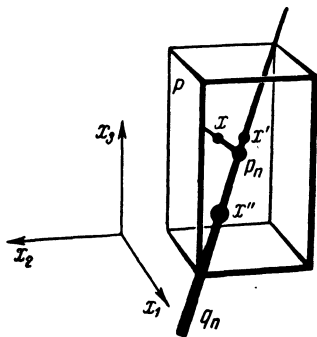
А) С ε -окрестностью p_n пересекаются плоскости тех лишь канонических схем, начала которых лежат в δ -окрестностях точек a_i и которые соответствуют A_i .

Б) Схемы A'_i и B'_i не пересекаются, если их начала лежат в указанных δ - и ε -окрестностях.

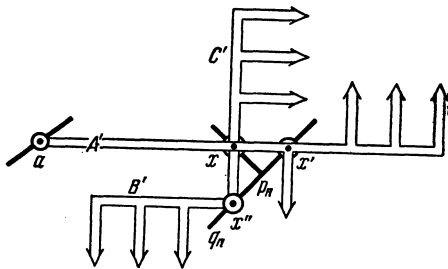
В) При переходе от A_i , B_i , C_i к A'_i , B'_i , C'_i точки этих схем сдвигаются меньше, чем на $\frac{\eta}{3}$, если только начала остаются в указанных окрестностях

Вспомогая, что такое $\eta > 0$, видим, что если начала лежат в указанных окрестностях, то схемы B'_i, C'_i не могут иметь общих точек, кроме начала, так же как и C'_i с A'_i и B'_i с A'_i .

Впишем в полученную окрестность точки p_n параллелепипед P с ребрами координатных направлений, центром в p_n и диагональю, лежащей на q_n . Внутри P приклеим в p_n к q_n отрезок $2s_n$ направления l (см. § 3) (фиг. 15).



Фиг. 15. Приклеивание $2s_n$



Фиг. 16. Выводящая схема точки a на D_{n+1}

Отрезок s_n вдвое меньше. Размеры s_n будут еще ограничиваться сверху в дальнейшем. Для сохранения на D_{n+1} свойства 2 достаточно, чтобы $2s_n \subset P$. Докажем это.

Если плоскости канонической схемы D_n , выводящей из какой-нибудь точки D_n , не пересекаются с $2s_n$, то схема останется выводящей и на D_{n+1} . В частности, так заведомо будет для всех точек, лежащих вне δ -окрестностей точек a_i . Из свойства А) следует, что достаточно построить выводящую схему из каждой точки δ -окрестности a_i по первому направлению A_i . Пусть a — такая точка. Каноническая схема A'_i , выводящая из a на D_n , с первым направлением схемы A_i соответствует A_i , так как δ -окрестность меньше интервала устойчивости.

Пусть A пересекает $2s_n$ в точке x . Тогда A'_i пересекает q_n в некоторой точке x' ; $x \neq x'$, если $a \neq a_i^*$. Далее всюду предполагается, что $a \neq a_i$. Проведем через x' плоскость, первое направление которой — то же, что и у C_i . Пусть x'' — точка пересечения этой плоскости с q_n . Из выбора направления $2s_n$ следует, что $x'' \neq x'$ и x .

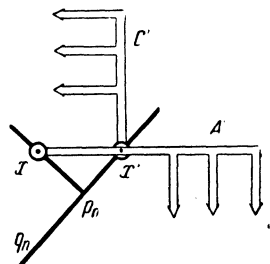
Построим (фиг. 16) выводящие схемы из точки x'' — C'_i и B'_i . Из свойств ϵ - и δ -окрестностей Б) и В) следует, что схемы A'_i и B'_i а также A'_i и C'_i , не имеют общих точек, а B'_i и C'_i имеют общим только начало. Легко видеть, что плоскости A'_i, B'_i, C'_i , не проходящие через x, x', x'' , не могут пересекаться с P .

Все до сих пор встречавшиеся выводящие схемы выводили на D_n . Из них, однако, легко составить схему, выводящую из a уже на D_{n+1} . Схема A'_i не выводит на D_{n+1} только потому, что точка x — на ней не свободная. Выберем в этой точке направление первой плоскости схемы C_i . Полученная плос-

* В случае $a=a_i$ схема A_i остается выводящей и на D_{n+1} .

кость пересекает D_{n+1} (кроме точки x) еще в точке x'' и точках первого ранга схемы C_i . Из точек первого ранга выйдем по направлениям, по которым из них выходим в C_i . Из точки x'' выводим на D_n схему B'_i . Так как эти схемы не пересекаются, кроме как в точке x'' , и не имеют общих точек с A'_i , а плоскости схем A'_i , B'_i , C_i не пересекаются с P (кроме тех четырех плоскостей, которые рассмотрены тут и проходят через x , x' , x''), получается выводящая из a на D_{n+1} схема. В случае $a_i = p_n$, $a \in 2s_n$ точку x'' строить не надо; схема C_i строится у точки x' (фиг. 17). Доказательство аналогично предыдущему.

Доказательство индуктивного выполнения свойства 2 на D_{n+1} при условии выполнения свойств 1 и 2 на D_n будет закончено, если мы укажем конечное число типов выводящих схем. Но мы фактически это и сделали при построении выводящей схемы из точки a . В самом деле, легко видеть, что множество типов схем, которые тут используются (схем A'_i , B'_i и C'_i) конечно, так как они не длиннее схем A_i , B_i , C_i , которые суть схемы канонических типов на D_n .



Фиг. 17. Выводящая схема точки x на D_{n+1}

§ 7. Индуктивное сохранение разложения функций

Этот параграф содержит построение представления функции, заданной на конечном дереве D_n , в виде суммы функций координат.

Лемма 7. Пусть A — схема, выводящая из точки a_0 комплекса K , и $f(x)$ — функция, заданная на K и отличная от нуля только в точке a_0 . Тогда существуют такие функции $f_k(x_k)$ координат x_k точки x , что для любой точки $x \in K$

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k), \quad (*)$$

причем функции $f_k(x_k)$ отличны от нуля только в тех точках k -ой оси, где ее пересекают плоскости схемы A .

Доказательство. Положим $f_k^0(x_k) \equiv 0$. Если подставить f_k^0 в правую часть (*), то это равенство не будет выполняться только в точке ранга 0 схемы A . Функции $f_k^0(x_k)$ назовем нулевым приближением к $f_k(x_k)$. Функции n -го приближения $f_k^n(x_k)$ будут построены так, чтобы:

1) Равенство (*) при подстановке $f_k^n(x_k)$ вместо $f_k(x_k)$ нарушалось только в точках ранга n схемы A .

2) $f_k^n(x_k) = f_k^{n-1}(x_k)$ ($n = 1, 2, \dots$), если точка x_k k -ой оси не лежит на плоскости ранга n схемы A .

Функции нулевого приближения обладают свойством 1), и если ранг схемы A равен N , то $f_k^{N+1}(x_k)$ удовлетворяют, очевидно, всем требованиям леммы 7. Если $f_k^{n-1}(x_k)$ построены с выполнением условий 1) и 2), то положим

$$f^{n-1}(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^{n-1}(x_k).$$

$f(x) - f^{n-1}(x) = \Delta^n(x)$ — n -ая невязка — отлична от нуля в точках ранга $n-1$ схемы A . Пусть a — такая точка, и пусть выводящая из нее плоскость π пересекает k -ую ось в точке $x_k(a)$. Из определения выводящей схемы следует, что все $x_k(a)$, отвечающие разным a и n , различны. Введя в точках $x_k(a)$ поправки $\Delta_k^n(x_k) = \Delta^n(a)$ к $f_k^{n-1}(x_k)$, положим $f_k^n(x_k) = f_k^{n-1}(x_k) + \Delta_k^n(x_k)$. Очевидно, $f_k^n(x_k)$ обладают свойствами 1), 2), так что все $f_k^{N+1}(x_k)$ можно построить. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть A — схема, выводящая из интервала s комплекса K , и $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на K и отличная от нуля лишь на s . Тогда существуют такие непрерывные функции $f_k(x_k)$ координат x_k точки x , что для любой точки $x \in K$

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

причем функции $f_k(x_k)$ отличны от нуля только в интервалах слоев схемы A .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 7. Все точки и плоскости заменяются интервалами и слоями, а функции, отличающиеся от нуля разве в отдельных точках, — непрерывными функциями, отличающимися от нуля только в отдельных непересекающихся интервалах, на концах которых они обращаются в нуль. В частности, такими будут все невязки и поправки.

Лемма 9. Утверждения лемм 7 и 8 верны для двойных схем.

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится опять с помощью распределения поправок. В точках (интервалах), из которых выводят две плоскости (два слоя), можно одну из них игнорировать, получить простую схему и воспользоваться леммой 7 (8). Но тогда поправки и невязки всех рангов будут одинаково велики. Можно уменьшить величину поправок, если использовать обе выводящие плоскости (оба слоя) для «распределения поправки по двум направлениям».

Пусть, например, из точки a_0 выводят две плоскости π_1 и π_2 направлений x_1 и x_2 . Для выполнения в точке a_0 равенства (*) можно положить

$$\Delta_1^1(x_1) = \gamma_1 \Delta^1(x), \quad f_1^1(x_1) = f_1^0(x_1) + \Delta_1^1(x_1),$$

$$\Delta_2^1(x_2) = \gamma_2 \Delta^1(x), \quad f_2^1(x_2) = f_2^0(x_2) + \Delta_2^1(x_2),$$

где, как и раньше, $f_k^0(x_k) \equiv 0$, $\Delta^1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^3 f_k^0(x_k)$ и где $\gamma_1, \gamma_2 > 0$,

$\gamma_1 + \gamma_2 = 1$. Тогда равенство (*) не будет выполнено во всех концах ранга 1, и поправку придется вводить в большем числе точек, чем если, полагая $\gamma_2 = 0$, игнорировать π_2 ; но зато величина невязки и следующих поправок будет меньше.

При окончательном построении функций $f_k(x_k)$ в § 9 используется распределение поправок по двум направлениям.

Лемма 10. Пусть на отрезочном комплексе K даны две непрерывны функции: «старая»

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^3 \bar{f}_k(x_k),$$

где $\bar{f}_k(x_k)$ — непрерывные функции координат x_k точки $x \in K$, и «новая» $f(x)$, отличная от старой лишь на интервале s , имеющем на K выводящую схему (простую или двойную) A . Тогда можно найти «поправки к $\bar{f}_k$ » — непрерывные функции $g_k(x_k)$, отличные от нуля лишь на интервалах лоев схемы A и такие, что, если обозначить $f_k(x_k) = \bar{f}_k(x_k) + g_k(x_k)$, то на всем K

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k).$$

Лемма 10 непосредственно следует из лемм 8 и 9, если ввести функцию $g(x) = f(x) - \bar{f}(x)$. Процесс распределения поправок по двум направлениям, приводящий к построению $g_k(x_k)$ ($\sum_{k=1}^3 g_k(x_k) = g(x)$), определяет невязки

$\Delta^n(x)$, поправки $\Delta_k^n(x_k) = \gamma_k(x) \Delta^n(x)$ и приближения $g_k^n(x_k) = g_k^{n-1}(x_k) + \Delta_k^n(x_k)$.

Ясно, что функции $f_k^n(x_k) = \bar{f}_k(x_k) + g_k^n(x_k)$ можно рассматривать, как при-

ближения к $f_k(x_k)$; невязки $f(x) - \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k)$ и поправки $f_i^n(x_i) - f_i^{n-1}(x_i)$ бу-

дут при этом те же самые. Построение $f_k^n(x_k)$ ($k = 1, 2, 3$; $n = 0, 1, 2, \dots, N+1$), описанное выше, также называется далее распределением поправок.

Лемма 11. Для сохранения на D_{n+1} индуктивного свойства 3 достаточно, чтобы интервал $2s_n$ имел на $D_n \cup 2s_n$ выводящую схему. Построение разложения $f(x)$ в сумму функций координат f_k^{n+1} может быть проведено путем введения поправок к f_k^n с помощью распределения поправок по двум направлениям, определяемым (вообще говоря, двойной) выводящей схемой $2s_n$.

Доказательство. Пусть на $D_n \cup 2s_n$ $2s_n$ имеет выводящую схему A , на D_n каждая непрерывная функция представляется в виде суммы функций координат (индуктивное требование 3_n). Примем за старую функцию $f^n(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k)$, а за новую $f(x)$ на D_{n+1} . Для $D_n \cup 2s_n$ доопределим ее так, чтобы разность со старой была на $2s_n$ четной относительно середины $2s_n$. Тогда мы будем находиться в условиях леммы 10, из которой следует возможность представления $f(x)$ на D_{n+1} в виде суммы функций координат способом распределения поправок по двум направлениям. Если каждая поправка непрерывно зависит от разлагаемой функции (а это может быть, очевидно, достигнуто в условиях лемм 7—11), то разложение $f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^{n+1}(x_k)$ непрерывно зависит от f . В § 7 каждая поправка непрерывно зависит от разлагаемой функции.

Если веточка s_n построена так, как это указано в §§ 3—5, то на D_{n+1} выполнены требования 1_{n+1} и 2_{n+1} . Последнее требование состоит в том, что на D_{n+1} имеется конечное число канонических выводящих схем интервалов. Для этого необходимо только, чтобы (§ 5) направление s_n было выбрано правильно и чтобы веточка s_n лежала в достаточно малой окрестности P точки p_n .

Лемма 12. Пусть на D_n выполнены условия 1_n и 2_n . Если s_n лежит в достаточно малой окрестности $P' \subset P$ точки p_n , то $2s_n$ имеет на $D_n \cup 2s_n$ выводящую схему.

Доказательство. Рассмотрим построенные выше канонические для D_{n+1} выводящие схемы точек $2s'_n$ на D_{n+1} с данным первым направлением (фиг. 17). Когда x изменяется на $2s'_n$, x' пробегает одностороннюю окрестность u точки p_n на q_n . В силу устойчивости схем A и C , существует полуокрестность $\tilde{u}$ с той же стороны от p_n , для точек которой все схемы A' и все схемы C' будут одного типа (лемма 5).

Точки и параллельные плоскости A и C попарно не совпадают (исключая точку p_n). Из непрерывной зависимости A' и C' от начальной точки x' следует, что если x' меняется в достаточно малой окрестности точки p_n , то точки и плоскости схем A' и C' сколько угодно близки к соответствующим элементам схем A и C . Пусть $\eta > 0$ — наименьшее из расстояний между любой плоскостью π одной из схем A , C и не лежащей на π точкой одной из этих схем. Пусть $\varepsilon > 0$ — радиус такой окрестности точки p_n , что плоскости и точки схем A и C сдвигаются меньше, чем на $\frac{\eta}{3}$, когда x' меняется в ε -окрестности p_n . Тогда пересечение $\tilde{u}$ с ε -окрестностью p_n дает полуокрестность точки p_n , которая есть интервал $\hat{u}$, имеющий на D_{n+1} непересекающиеся выводящие схемы (см. § 5) A^* и C^* .

Это следует из того, что все схемы A' и C' — одного типа; любые два параллельных слоя этих схем, очевидно, отстоят не менее, чем на $\frac{\eta}{3}$. Теперь, если отрезок $2s_n$ поместить в достаточно малую окрестность P_1 точки p_n (именно такую, чтобы x' попадало в $\hat{u}$), то интервал $2s_n$ будет на D_{n+1} иметь выводящую схему с первым направлением, совпадающим с первым направлением A .

Из лемм 11 и 12 вытекает, что для сохранения на D_{n+1} индуктивного свойства 3 достаточно, чтобы отрезок s_n был мал и имел правильно выбранное (§§ 3—5) направление. Эти требования не противостоят выдвинутому раньше.

В § 7 используется некоторое обобщение леммы 12.

Назовем N -характеристикой χ_N выводящей схемы A_u интервала u на K совокупность направлений выводящих слоев интервалов, ранг которых меньше N , отнесенных к этим интервалам. N -характеристика χ_N , u и K определяют однозначно элементы схемы A_u , ранг которых не превосходит N^* .

* В N -характеристике могут быть указаны направления слоев, выводящих из интервалов, которых в схеме A_u нет, так как эта схема может раньше оборваться свободным концом.

Лемма 13. Пусть на D_n выполнены условия 1_n и 2_n . Каково бы ни было $N > 0$, существует окрестность $P(N)$ точки p_n и такие выводящие схемы A_u интервалов $u \subset P(N)$, что:

- 1) Среди них существуют схемы $A_u^{\chi N}$ с любой N -характеристикой.
- 2) Интервалы схем $A_u^{\chi N^1}$ и $A_u^{\chi N^2}$, отличные от u , не пересекаются, если первые направления этих схем — разные.
- 3) Если интервалы $u_1 \in P(N)$, $u_2 \subseteq P(N)$ не пересекаются, то никакие интервалы схем $A_{u_1}^{\chi N}$ и $A_{u_2}^{\chi N}$ не пересекаются.

Доказательство леммы 13 аналогично доказательству леммы 12 и представляется читателю.

До сих пор наши построения не зависели от того, входит ли функция f в класс F , о котором говорится в индуктивной лемме. В § 9 построенное тут разложение будет, уже в зависимости от F , специализировано, что не нарушит возможности разложить любую функцию на D_n в сумму функций координат. Мы можем, очевидно, не нарушая общности, считать, что F — компакт. Легко видеть, что в пределах F непрерывная зависимость f_k^n от f равномерна.

§ 8. Арифметические леммы

В этом параграфе доказываются две арифметические леммы, с помощью которых в следующем параграфе распределяются по двум направлениям поправки.

Лемма 14. Пусть

$$a + b + c = d, \quad (1)$$

где

$$|a|, |b|, |c| < 3 + \theta, \quad (2)$$

$$|d| \leq 1. \quad (3)$$

Пусть

$$a' = a + \Delta a, \quad (4)$$

где

$$|\Delta a| < 1 + \varepsilon, \quad (5)$$

$$0 < \varepsilon < \theta < 1. \quad (6)$$

Тогда можно определить числа $\Delta b(a, b, c, \Delta a)$ и $\Delta c(a, b, c, \Delta a)$ так, чтобы при

$$b' = b + \Delta b, \quad c' = c + \Delta c \quad (7)$$

было

$$|b'|, |c'| < 3 + \theta + \varepsilon, \quad (8)$$

$$a' + b' + c' = d \quad (9)$$

$$|\Delta b|, |\Delta c| \leq \max \left(\left| |\Delta a| - \frac{\varepsilon^2}{30} \right|, \varepsilon \right) \quad (10)$$

и чтобы

зависимость Δb и Δc от $a, b, c, \Delta a$, меняющихся в указанных ((1) — (6)) пределах, была непрерывна, а при $\Delta a \rightarrow 0$ Δb и Δc стремились к нулю. } (11)

Доказательство. Докажем прежде всего, что в условиях леммы

$$|b + c| < 4 + \theta. \quad (12)$$

В самом деле, из (1) вытекает: $b + c = d - a$. Поэтому $|b + c| \leq |d| + |a|$. Но так как, согласно (2) и (3), $|a| < 3 + \theta$, $|d| \leq 1$, то $|b + c| < 4 + \theta$. Из (12) и (2) получаем:

$$2(3 + \theta) \pm (b + c) > 2 + \theta. \quad (13)$$

Мы определим, чтобы удовлетворить требованиям леммы, Δb и Δc так:

$$\begin{aligned} \Delta b &= -\gamma_b \Delta a, & 0 < \gamma_b < 1, \\ \Delta c &= -\gamma_c \Delta a, & 0 < \gamma_c < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Если при этом $\gamma_b + \gamma_c = 1$, то (9) будет выполнено.

Если при этом γ_b и γ_c от $a, b, c, \Delta a \neq 0$ зависят непрерывно, то верно (11). Чтобы подобрать γ_b и γ_c , не нарушая оценки (8), введем

$$\begin{aligned} \lambda_b^- &= 3 + \theta - b + \frac{\varepsilon}{2}, & \lambda_c^- &= 3 + \theta - c + \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lambda_b^+ &= 3 + \theta + b + \frac{\varepsilon}{2}, & \lambda_c^+ &= 3 + \theta + c + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти (положительные в силу (2)) числа характеризуют запас, имеющийся для введения поправок Δb и Δc ; так, λ_b^- показывает, сколько можно прибавить к b , чтобы сумма b' не превысила $3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2}$ (см. (8)).

Неравенство (13) показывает, что не превосходящую по модулю 2 поправку Δa можно распределить, подобрав γ_b и γ_c в (14), между 0 и 1 так, чтобы выполнялось (8). Именно, положим при $\Delta a > 0$

$$\gamma_b = \frac{\lambda_b^+}{\lambda_b^+ + \lambda_c^+}, \quad \gamma_c = \frac{\lambda_c^+}{\lambda_b^+ + \lambda_c^+}, \quad (16a)$$

и при $\Delta a < 0$

$$\gamma_b = \frac{\lambda_b^-}{\lambda_b^- + \lambda_c^-}, \quad \gamma_c = \frac{\lambda_c^-}{\lambda_b^- + \lambda_c^-}. \quad (16b)$$

Докажем, что из (1) — (7), (14), (15), (16a) и (16b) следуют (8), (9), (10), (11). Действительно, (9) выполнено вследствие очевидного равенства $\gamma_b + \gamma_c = 1$. Из (12), (13) и (15) получаем:

$$2 < \lambda_b^\pm + \lambda_c^\pm = 2\left(3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \pm (b + c) < 15, \quad (17)$$

и поэтому γ_b и γ_c зависят от a, b, c , Δa непрерывно при $\Delta a \neq 0$; так как $0 < \gamma_b, \gamma_c < 1$, (11) выполнено. Из (5), (6) и (17) вытекает, что

$$\frac{|\Delta a|}{\lambda_b^\pm + \lambda_c^\pm} < \frac{1 + \varepsilon}{2} < 1.$$

Поэтому $|\Delta b| < \lambda_b^\pm$, $|\Delta c| < \lambda_c^\pm$. Но из (15) следует:

$$|b \mp \lambda_b^\pm| < 3 + \theta + \varepsilon, \quad |c \mp \lambda_c^\pm| < 3 + \theta + \varepsilon,$$

тем более, в силу (7), (14) и (16a), (16b), $|b'| < 3 + \theta + \varepsilon$, $|c'| < 3 + \theta + \varepsilon$, т. е. выполнено (8). Остается доказать (10). В случае $|\Delta a| \leq \varepsilon$

(10) есть очевидное следствие соотношений $0 < \gamma_b < 1$, $0 < \gamma_c < 1$. Из (15) и (2) вытекает, что $\lambda_{b,c}^{\pm} > \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому и в силу (17) $\gamma_{b,c} > \frac{\varepsilon}{30}$. Отсюда, согласно (14), $|\Delta b|$, $|\Delta c| > |\Delta a| \frac{\varepsilon}{30}$. Поэтому в случае $|\Delta a| \geq \varepsilon$ $|\Delta b| > \frac{\varepsilon^2}{30}$, $|\Delta c| > \frac{\varepsilon^2}{30}$. Но так как (см. (14) и (16)) $|\Delta b| + |\Delta c| = |\Delta a|$, то отсюда вытекает: $|\Delta b| < |\Delta a| - \frac{\varepsilon^2}{30}$, $|\Delta c| < |\Delta a| - \frac{\varepsilon^2}{30}$, т. е. (10), и лемма 14 доказана.

Лемма 15. Пусть

$$a + b + c = d \quad (1)$$

$$|a|, |b|, |c| < 3 + \theta, \quad (2)$$

$$|d| < 1 + \varepsilon. \quad (3)$$

Пусть

$$d' = d + \Delta d, \quad (4)$$

где

$$|\Delta d| < 1 + \varepsilon, \quad (5)$$

$$0 < \theta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (6)$$

Тогда можно определить числа $\Delta a(a, b, c, \Delta d)$, $\Delta b(a, b, c, \Delta d)$ так, чтобы при

$$a' = a + \Delta a, \quad b' = b + \Delta b \quad (7)$$

было

$$a' + b' + c = d', \quad (8)$$

$$|a'| < 3 + \theta + \varepsilon, \quad |b'| < 3 + \theta + \varepsilon, \quad (9)$$

$$|a - \Delta b| < 3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

и чтобы

$$\left. \begin{array}{l} \text{зависимость } \Delta a \text{ и } \Delta b \text{ от } a, b, c \text{ и } \Delta d, \text{ меняющихся в указан-} \\ \text{ных (см. (1)–(6)) пределах, была непрерывна, а при} \\ \Delta d \rightarrow 0 \text{ } \Delta a \text{ и } \Delta b \text{ стремились к нулю.} \end{array} \right\} \quad (11)$$

Доказательство. Для выполнения неравенств (9) достаточно, чтобы

$$0 \leq \Delta a < \lambda_a^+ \text{ или } -\lambda_a^- < \Delta a \leq 0, \quad (12)$$

$$0 \leq \Delta b < \lambda_{b1}^+ \text{ или } -\lambda_{b1}^- < \Delta b \leq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_a^+ &= 3 + \theta + \varepsilon - a, & \lambda_a^- &= 3 + \theta + \varepsilon + a, \\ \lambda_{b1}^+ &= 3 + \theta + \varepsilon - b, & \lambda_{b1}^- &= 3 + \theta + \varepsilon + b, \end{aligned} \quad (13)$$

так как a и b удовлетворяют соотношению (2).

Чтобы выполнялось (10), достаточно, чтобы

$$0 \leq \Delta b < \lambda_{b2}^+ \text{ или } -\lambda_{b2}^- < \Delta b \leq 0, \quad (14)$$

где

$$\lambda_{b2}^+ = 3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2} + a, \quad \lambda_{b2}^- = 3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2} - a, \quad (15)$$

опять в силу (2).

Полагая теперь

$$\lambda_b^+ = \min(\lambda_{b1}^+, \lambda_{b2}^+), \quad \lambda_b^- = \min(\lambda_{b1}^-, \lambda_{b2}^-), \quad (16)$$

найдем, что

$$\lambda_b^+ + \lambda_a^+ > 2, \quad \lambda_b^- + \lambda_a^- > 2. \quad (17)$$

В самом деле, из (1) имеем: $a + d = d - c$. Поэтому $|a + b| \leq |d| + |c|$ и, в силу (2) и (3),

$$|a + b| < 4 + \theta + \varepsilon. \quad (18)$$

Но, вследствие (13), $\lambda_a^+ + \lambda_{b1}^+ = 6 + 2\theta + 2\varepsilon - (a + b)$. Поэтому из (18) следует: $\lambda_a^+ + \lambda_{b1}^+ > 2$. В то же время, в силу (13) и (15), $\lambda_a^+ + \lambda_{b2}^+ = 6 + 2\theta + 2\varepsilon > 2$. Согласно (16), первое из неравенств (17) доказано; доказательство второго аналогично.

Теперь положим

$$\Delta a = \gamma_a \Delta d, \quad \Delta b = \gamma_b \Delta d, \quad (19)$$

где при $\Delta d > 0$

$$\gamma_a = \frac{\lambda_a^+}{\lambda_a^+ + \lambda_b^+}, \quad \gamma_b = \frac{\lambda_b^+}{\lambda_a^+ + \lambda_b^+} \quad (20a)$$

и при $\Delta d < 0$

$$\gamma_a = \frac{\lambda_a^-}{\lambda_a^- + \lambda_b^-}, \quad \gamma_b = \frac{\lambda_b^-}{\lambda_a^- + \lambda_b^-}. \quad (20b)$$

Докажем, что из (1)–(7), (13), (15), (16), (19), (20a) и (20b) следуют (8), (9), (10), (11).

В самом деле, из (20), очевидно, получаем: $\gamma_a + \gamma_b = 1$, откуда, в силу (19), (1), (4) и (7), вытекает (8). Из (2), (13), (15) и (16) следует, что все λ положительны, и поэтому $0 < \gamma_a < 1$, $0 < \gamma_b < 1$. Так как при $\Delta d \neq 0$ γ_a и γ_b зависят от a, b, c и Δd непрерывно (см. (20a) и (20b)), то отсюда, согласно (19), вытекает (11).

Наконец, из (17), (3) и (16) получается:

$$\frac{\Delta d}{\lambda_a^+ + \lambda_b^+} < \frac{1 + \varepsilon}{2} < 1, \quad \frac{-\Delta d}{\lambda_a^- + \lambda_b^-} < \frac{1 + \varepsilon}{2} < 1. \quad (21)$$

Принимая во внимание положительность λ , из (20a) и (20b), (19) и (21), находим:

$$0 \leq \Delta a < \lambda_a^+ \quad \text{или} \quad -\lambda_a^- < \Delta a \leq 0,$$

$$0 \leq \Delta b < \lambda_b^+ \quad \text{или} \quad -\lambda_b^- < \Delta b \leq 0,$$

откуда, в силу (16), следуют соотношения (12) и (14). Но из (12) вытекает (9), а из (14) — неравенство (10). Лемма 15 доказана.

§ 9. Индуктивное сохранение свойства 4

В этом параграфе будет показано, как надо распределять поправки в методе § 7, чтобы выполнялось индуктивное требование 4_{n+1} .

Были введены (§ 3) числа n_r . Колебание любой функции f рассматриваемого класса F на любой компоненте дополнения к Δ_n в Ξ не превосходит $\frac{1}{r^2}$, если только $n \geq n_r$. В частности, это имеет место на каждой веточке σ_n при $n \geq n_r$.

Мы будем обозначать через $f^n(\xi)$ определенную на Δ_n функцию, совпадающую там с $f \in F$, а также ее непрерывное продолжение на любое Δ_m ($m > n$) и на все Ξ , постоянное на каждой компоненте дополнения к Δ_n в Ξ . Что такое продолжение возможно и единственно, непосредственно вытекает из того, что пересечение Δ_n с замыканием каждой компоненты $\Xi \setminus \Delta_n$ состоит из одной точки. Соответствующую $f^n(\xi)$ функцию на D_m и на X мы будем обозначать через $f^n(x)$. Введем функцию ($n_r < m \leq n_{r+1}$)

$$g^m(x) = f^m(x) - f^{n_r}(x). \quad (1)$$

На D_{n_r} она равна 0, от $f \in F$ зависит непрерывно и всюду не превосходит $\frac{1}{r^2}$, в силу определения r и $f^m(x)$.

Пусть $n_r \leq n < n_{r+1}$. Пусть D_n и $f_k^n(x_k)$ определены так, что выполнены требования $1_n, 2_n, 3_n, 4_n$. Тогда (при $n = n_r$ это тривиально)

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < \left(3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}\right) \frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать s_n и $f_k^{n+1}(x_k)$ так, чтобы выполнялись требования 3_{n+1} и 4_{n+1} .

Начиная с этого места и до конца настоящего параграфа, r не меняется. Для сокращения формул во всех оценках множитель $\frac{1}{r^2}$ опускается. Так, неравенство (2) записывается теперь в виде

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < 3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}. \quad (2')$$

Это можно воспринимать как временное изменение масштаба оси f или можно считать, что мы ограничиваемся случаем $r = 1, \frac{1}{r^2} = 1$, так как остальные случаи рассматриваются аналогично.

Итак, пусть на D_n выполнены требования $1_n, 2_n, 3_n, 4_n$. Тогда там

$$g^n(x) = \sum_{k=1}^3 g_k^n(x_k), \quad (3)$$

где $g_k^n(x_k) = f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)$ при $n > n_r$, а при $n = n_r$ $g_k^n(x_k) = 0, g^n(x) = 0$. Как обычно, x_k суть координаты точки x ; в (3) $x \in D_n$. Выполнение на D_n требования 4_{n+1} означает, что

$$|g_k^n(x_k)| < 3 + \theta_n, \quad (4)$$

где введено обозначение

$$\theta_n = \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}. \quad (5)$$

Мы построим D_{n+1} в согласии с § 7 и выберем непрерывно зависящие от $f \in F$ функции $g_k^{n+1}(x_k)$ так, чтобы при $x \in D_{n+1}$

$$\sum_{k=1}^3 g_k^{n+1}(x_k) = g^{n+1}(x), \quad (6)$$

$$|g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}. \quad (7)$$

При этом $n_r < n + 1 \leq n_{r+1}$ и остается положить

$$f_k^{n+1}(x_k) = f_k^{n_r}(x_k) + g_k^{n+1}(x_k), \quad (8)$$

чтобы доказать 3_{n+1} и 4_{n+1} .

Когда n растет от n_r до n_{r+1} , то θ_n растет от 0 до 1, и при возрастании n на 1 θ_n каждый раз увеличивается на $\frac{1}{n_{r+1} - n_r}$. Выберем ε , $0 < \varepsilon < \frac{1}{n_{r+1} - n_r}$. Тогда $\theta_n + \varepsilon < \theta_{n+1}$. Это ε не меняется на протяжении настоящего параграфа.

Построение $2s_n$. На D_n есть точка p_n , куда предстоит приклеивать s_n .

Рассмотрим (фиг. 18) лучи l' и l'' , на которые точка p_n делит прямую, где лежит q_n . Когда направление s_n выбрано, то проходящие через точки $2s_n$ три координатные плоскости пересекают эти лучи. Выберем теперь направление $2s_n$ так, чтобы один из лучей l' — он получает название главного — пересекался плоскостями одного направления, это направление называется далее главным направлением; плоскости остальных двух направлений пересекают луч l'' — он называется отныне подсобным, — и из них произвольно выбирается одно, именуемое подсобным. Конечно, всю эту операцию можно проделать, не выбирая направления s_n из запрещенных в § 4, что и предполагается. Итак, направление s_n выбрано.

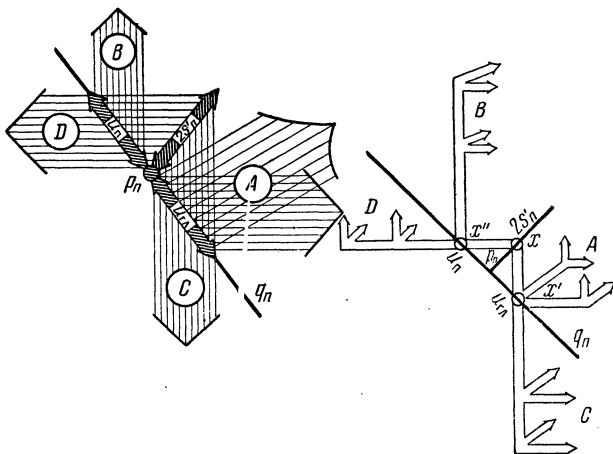
Справедливы утверждения:

А. Изо всякой достаточно малой полуокрестности $u_{г.л.}$ точки p_n на главном луче можно выпустить на D_n двойную схему A интервала $u_{г.л.}$ так, чтобы по два слоя выводило из всех интервалов рангов $0, 1, 2, \dots, N$, где N выбрано равным $\left[\frac{30}{\varepsilon^2}\right] + 1$ (чтобы $N \frac{\varepsilon^2}{30} > 1$), и так чтобы среди направлений слоев ранга 1 не было главного.

Изо всякой достаточно малой полуокрестности $u_{п.}$ точки p_n на подсобном луче можно выпустить на D_n двойную схему B интервала $u_{п.}$ так, чтобы по два слоя выводило из интервалов рангов $1, 2, \dots, N$, а первое направление было главным; N — то же, что в предыдущем абзаце. Схему C с такой же N -характеристикой можно выпустить и из полуокрестности $u_{г.л.}$, если она достаточно мала. Наконец, если интервал $u_{п.}$ достаточно мал, то на D_n можно из него выпустить двойную выводящую схему D , первое направление которой — подсобное и у которой раздвоение происходит в интервалах ранга $1, 2, \dots, N$.

Б. Если упомянутые полуокрестности $u_{гн}$ и u_n достаточно малы, то у построенных в А схем интервалы попарно не пересекаются, кроме тех, которые совпадают по построению (на l' и l'').

Эти утверждения следуют из леммы 13 § 7.



Фиг. 18. Двойная выводящая схема интервала $2s'_n$ на $D_{n+1} \cup 2s_n$. Слева заштрихованы первые слои; правое изображение схематичней

Отрезок $2s_n$ выбранного выше направления будет приклеен к p_n в окрестности P точки p_n , которая выбирается теперь так, чтобы выполнялись следующие три требования:

1) Колебание каждой функции $g_k^n(x_k)$, отвечающей $f \in F$, в P должно быть меньше $\frac{\varepsilon}{4}$.

2) Окрестность P должна быть столь малой, чтобы при условии $s_n \subset P$ можно было отобразить s_n на s_n (см. § 4) и удовлетворить требованиям 1_{n+1} , 2_{n+1} (§§ 4, 6).

3) Проекция $2s_n$ на l' и l'' по главному и подсобному направлениям должны попадать в построенные выше (см. утверждения А и Б) полуокрестности $u_{гн}$ и u_n точки p_n на q_n при $2s_n \subset P$.

Достаточно малая окрестность P точки p_n удовлетворяет требованию 1) ввиду равномерной непрерывности функций $f \in F$, непрерывной зависимости $g_k^n(x_k)$ от $f \in F$ и возможности применить лемму Арцеля — Асколи к измененным лишь на постоянные функции $g_k^n(x_k)$ и $f \in F$. Ранее (§§ 4, 6) установлено, что при достаточно малой P выполнено требование 2). Наконец, возможность удовлетворить требованию 3) при достаточно малой окрестности P есть следствие утверждений А и Б.

Теперь выберем удовлетворяющую требованиям 1), 2), 3) окрестность P . В P возьмем $2s_n$ выбранного выше направления. Построим отображение σ_n на s_n как в § 4. На $D_{n+1} = D_n \cup s_n$, в силу 2), выполнены условия 1_{n+1} и 2_{n+1} .

Построим на $D_n \cup 2s_n$ (фиг. 18) двойную выводящую схему интервала $2s_n$ следующей структуры:

1. Начальный интервал $2s_n$ имеет два выводящих слоя, направления которых — главное и подсобное.

2. Из интервала первого ранга, лежащего на главном направлении, выводит схема A (см. утверждение А). Из остальных интервалов первого ранга куда приводит слой главного направления, выводит схема C (см. утверждение А).

3. Из интервалов первого ранга, куда приводит слой подсобного направления, таким же образом выводят схемы B (из u_n) и D (из остальных).

Эта конструкция действительно является выводящей схемой (двойной). В самом деле, схемы A, B, C, D на D_n не пересекаются (кроме общих интервалов на $u_{г.л}$ и u_n). Так как (исключая начальные интервалы) эти схемы не имеют интервалов на $u_{г.л}$ и u_n , то их слои ранга больше 1 не пересекают $u_{г.л}$ и u_n , а стало быть, и $2s_n$. Слои же первого ранга не пересекают $2s_n$ ввиду определения главного и подсобного направлений.

Назовем полученную схему большой схемой.

Каждая молния большой схемы, выводящая из $2s_n$, либо проходит через по крайней мере N отличных от $2s_n$ интервалов, где большая схема двоятся, либо обрывается свободным концом меньшего ранга. Во всяком случае из всех интервалов ранга $1, 2, \dots, N$ в большой схеме, которые входят в схемы A и C , и из интервалов рангов $2, 3, \dots, N+1$ в большой схеме, которые входят в схемы B и D , выводят два слоя. Это следует из утверждений А и Б.

Построение функций $g_k^{n+1}(x_k)$. Мы видели (см. (3)), что на D_n

$$g^n(x) = \sum_{k=1}^3 g_k^n(x_k).$$

Эта же формула может рассматриваться как определение функции $g(\cdot)$ в координатном параллелепипеде, натянутом на D_n , — в произведении составляющих определения функций $g_k^n(x_k)$ ($k=1, 2, 3$). На D_{n+1} определена функция $g^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) - f^{n_r}(x)$. Функции $g_k^{n+1}(x_k)$ требуется найти так, чтобы на D_{n+1} было

$$g^{n+1}(x) = \sum_{k=1}^3 g_k^{n+1}(x_k). \quad (*)$$

Таким образом, при $x \in D_n$ и, в частности, в точке p_n

$$\sum_{k=1}^3 g_k^{n+1}(x_k) = g^n(x).$$

Доопределим $g^{n+1}(x)$ на $2s_n$ так, чтобы функция

$$g^{n+1}(x) - g^n(x) = \Delta_0(x), \quad (9)$$

рассматриваемая на $2s_n$, была четной относительно середины этого интервала. Очевидно, функция $\Delta_0(x)$ определена и непрерывна на $D_n \cup \overline{2s_n}$ и отлична от нуля только на $2s_n$.

Определим функции $g_k^{n+1}(x_k)$ так, чтобы равенство $(*)$ выполнялось на $D_n \cup \overline{2s_n}$ всюду, с помощью распределения поправок по двум направлениям, соответствующим большой схеме.

В качестве нулевого приближения к $g_k^{n+1}(x_k)$ возьмем ${}^0g_k^{n+1}(x_k) = g_k^n(x_k)$. При подстановке нулевого приближения в равенство (*) вместо $g_k^{n+1}(x_k)$ равенство будет нарушаться только на $2s_n$. Первое приближение получим из нулевого исправлением на интервалах слоев ранга 1 большой схемы. Если $x \in 2s_n$ и, например, x_1 и x_2 — соответствующие x точки этих интервалов слоев, то мы положим

$$\Delta_1^1(x) = \gamma_1 \Delta_0(x),$$

$$\Delta_2^1(x) = \gamma_2 \Delta_0(x),$$

и тогда при $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, если

$${}^1g_1^{n+1}(x_1) = {}^0g_1^{n+1}(x_1) + \Delta_1^1(x_1),$$

$${}^1g_2^{n+1}(x_2) = {}^0g_2^{n+1}(x_2) + \Delta_2^1(x_2),$$

$${}^1g_3^{n+1}(x_3) = {}^0g_3^{n+1}(x_3),$$

равенство (*) будет нарушено лишь на интервалах первого ранга. Вообще в $i-1$ -ом приближении равенство (*) нарушается на $D_n \cup 2s_n$ только на интервалах большой схемы ранга $i-1$. Тогда i -е приближение получается из $i-1$ -го исправлением на интервалах слоев ранга i большой схемы. Если x принадлежит слою u ранга $i-1$ большой схемы и, например, u_2 и u_3 — интервалы слоев, выводящих из u , причем x соответствуют $x_2(x) \in u_2$ и $x_3(x) \in u_3$, и $i-1$ -я невязка в точке x есть

$$\Delta_{i-1}(x) = g^{n+1}(x) - \sum_{k=1}^3 {}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k), \quad (10)$$

то полагаем

$$\begin{aligned} \Delta_2^i(x_2(x)) &= \gamma_2 \Delta_{i-1}(x), \\ \Delta_3^i(x_3(x)) &= \gamma_3 \Delta_{i-1}(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\gamma_2 + \gamma_3 = 1$. (Мы не предполагаем, что γ_2 и γ_3 — постоянные числа: это функции x , и они будут определены ниже.) Теперь положим

$${}^i g_2^{n+1}(x_2) = {}^{i-1} g_2^{n+1}(x_2) + \Delta_2^i(x_2) \text{ и т. д.} \quad (12)$$

и i -ое приближение построено, так как равенство (*) нарушается разве лишь на интервалах ранга i большой схемы. Описанный процесс в § 7 назван распределением поправок. Благодаря устройству большой схемы он идет с двумя направлениями при $1 \leq i \leq N$ или $2 \leq i \leq N+1$, а после заканчивается, как в случае простой выводящей схемы, когда все интервалы некоторого ранга станут свободными.

Остается распорядиться γ_1 и γ_2 при каждом распределении поправок так, чтобы (см. (7)) было

$$|{}^i g_k^{n+1}| < 3 + \theta_{n+1}$$

и чтобы все поправки $\Delta_k^i(x_k)$ были непрерывны, обращались в нуль на концах интервалов слоев большой схемы и непрерывно зависели от x и $f \in F$. Тогда равенство (*), т. е. (6), будет выполнено из-за результатов лемм § 7, и, в силу (5), (6), (7) и (8), выполнение условий 3_{n+1} и 4_{n+1} будет доказано.

Лемма 16. Пусть на интервал ранга $i \geq 1$ большой схемы приводит слой направления x_1 и уведут слой направлений x_2 и x_3 . Пусть $x \in \Pi$. Тогда

$$|{}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_n \quad (k = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$\left| \sum_{k=1}^3 {}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k) \right| \leq 1. \quad (14)$$

Доказательство. Так как u — интервал ранга i , то при распределении поправок его раньше не трогали: ${}^{i-1}g_k^n(x_k) = g_k^n(x_k)$. Поэтому (13) следует из (4), а (14) — из оценки $g^n(x)$ (см. определение $g^n(x)$).

Лемма 17. Пусть в предположениях леммы 16 $\Delta_{i-1}(x)$ — непрерывная на $\bar{u}$, обращающаяся в нуль на концах и невязка (см. (10)), непрерывно зависящая от $f \in F$, причем

$$|\Delta_{i-1}(x)| \leq 1 + \varepsilon.$$

Тогда можно подобрать поправки $\Delta_2^i(x)$, $\Delta_3^i(x)$ так, чтобы:

$$1) \quad |\Delta_2^i(x)|, \quad |\Delta_3^i(x)| < \max \left(\left| |\Delta_{i-1}(x)| - \frac{\varepsilon^2}{30} \right|, \varepsilon \right),$$

$$2) \quad |{}^i g_2^{n+1}(x_2)|, \quad |{}^i g_3^{n+1}(x_3)| < 3 + \theta_{n+1},$$

$$3) \quad \Delta_2^i(x) + \Delta_3^i(x) = -\Delta_{i-1}(x),$$

$$4) \quad \Delta_2^i(x) \text{ и } \Delta_3^i(x) \text{ зависят от } x \text{ и от } f \in F \text{ непрерывно и при } \Delta_{i-1}(x) \rightarrow 0 \\ \Delta_2^i(x) \rightarrow 0, \quad \Delta_3^i(x) \rightarrow 0$$

(здесь положено в соответствии с (12), ${}^i g_k^{n+1}(x_k) = {}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k) + \Delta_k^i(x_k)$)

Доказательство. Числа $a = {}^{i-1}g_1^{n+1}(x_1)$, $b = {}^{i-1}g_2^{n+1}(x_2)$, $c = {}^{i-1}g_3^{n+1}(x_3)$, $d = g^n(x)$ (по лемме 16) и $s = \Delta_{i-1}(x)$, $\theta = \theta_n$ и ε удовлетворяют условиям арифметической леммы 14, с заключением которой совпадает в этих обозначениях заключение настоящей леммы, если положить

$$\Delta_2^i(x) = \Delta b, \quad \Delta_3^i(x) = \Delta c.$$

Замечание. Очевидно, леммы 16 и 17 останутся верными, если произвести перестановку x_1, x_2, x_3 в их условиях и заключениях.

Лемма 18. Если первые невязки $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ не превосходят $1 + \varepsilon$:

$$|\Delta_0(x)| \leq 1 + \varepsilon, \quad |\Delta_1(x)| \leq 1 + \varepsilon, \quad |\Delta_2(x)| \leq 1 + \varepsilon,$$

и функции первого и второго приближений ${}^1 g_k^{n+1}(x_k)$, ${}^2 g_k^{n+1}(x_k)$ меньше $3 + \theta_{n+1}$:

$$|{}^1 g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}, \quad |{}^2 g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1},$$

то можно выбрать $g_k^{n+1}(x_k)$,

$$|g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1},$$

так, чтобы выполнялось равенство (*). Если $\Delta_0(x)$ и $\Delta_1(x)$, ${}^1g_k^{n+1}$ и ${}^2g_k^{n+1}$ непрерывно зависят от x и $f \in F$, то $g_k^{n+1}(x_k)$ можно выбрать также непрерывно зависящими от x и $f \in F$,

Доказательство. Действительно, в этом случае лемма 17 применима для всех интервалов большой схемы, ранг которых больше 0 и из которых выводятся два слоя, так как при применении леммы 17 к распределению поправок Δ_i только уменьшается, когда i растет. Применяя заключение 1) леммы 17, видим, что если от начала большой схемы до данного ее интервала было N интервалов, из которых вывело по два слоя, то при таком распределении поправок Δ_i меньше $\max\left(\left|1 + \varepsilon - N \frac{\varepsilon^2}{30}\right|, \varepsilon\right)$. Но в большой схеме каждая молния со свободным концом либо имеет по крайней мере N первых интервалов, из которых выводятся два слоя, не считая начала, либо все интервалы молнии до свободного включительно имеют по два выводящих слоя. Принимая во внимание, что $N \frac{\varepsilon^2}{30} > 1$, видим, что в обоих случаях все поправки Δ_{N+1} по модулю меньше ε . При дальнейшем распределении поправок с помощью простых выводящих схем интервалов ранга $N + 1$, как в лемме 8 § 7, функции $g_k^n(x_k)$ будут получать на все новых и новых интервалах поправки, по модулю меньшие ε . Но тогда на этих интервалах

$$|g_k^{n+1}(x_k)| < |g_k^n(x_k)| + \varepsilon < 3 + \theta_n + \varepsilon < 3 + \theta_{n+1},$$

и так как на интервалах меньшего ранга это неравенство следует из леммы 17 (ранг > 1) и условия леммы 18 (ранг 0 и 1), то последняя доказана

Если определить теперь $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, {}^1g_k^{n+1}, {}^2g_k^{n+1}$ так, чтобы они удовлетворяли условиям леммы 18, то, очевидно, построение функции g_k^{n+1} с выполнением требований 3_{n+1} и 4_{n+1} будет закончено. Рассмотрим сначала распределение и поправки с интервала нулевого ранга $2s_n$. Там $\Delta_0(x) = g^{n+1}(x) - g^n(x)$, ${}^0g_k^{n+1}(x_k) = g_k^n(x_k)$, причем $\Delta_0(x)$ — непрерывно зависящая от x, f , обращающаяся в нуль на концах $2s_n$ невязка. Пусть, для определенности, координаты главного и подсобного направлений точки $x \in 2s_n$ суть x_1 и x_2 , u_1 и u_2 — интервалы первого ранга большой схемы, соответственно главный и подсобный, и пусть $x' \in u_1, x'' \in u_2$ — точки, отвечающие там x (фиг. 18). Мы будем писать также $x_1(x), x_2(x), x(x_1), x(x_2), x(x'), x_2(x'_1)$ и т. п. для выражения этого соответствия.

Лемма 19. Если точка x лежит в определенной выше окрестности P точки p_n , то

$$\left| \sum_{k=1}^3 g_k^n(x_k) \right| < 1 + \varepsilon;$$

если $x \in 2s_n$, то

$$|\Delta_0(x)| = |g^{n+1}(x) - g^n(x)| < 1 + \varepsilon.$$

Доказательство. В точке $p_n = (p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}) \in D_n$

$$\sum_{k=1}^3 g_k^n(p_{n_k}) = g^n(p_n)$$

(см. определение $g^n(x)$),

$$|g^n(p_n)| \leq 1.$$

В силу первого требования к окрестности P , там

$$|g_k^n(x_k) - g_k^n(p_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сравнивая с предыдущим, получаем первое из заключений леммы.

Функция $|g^{n+1}(x) - g^n(x)|$ четна (см. определение $g^n(x)$) на $2s_n$ и на концах этого отрезка обращается в нуль. Поэтому второе заключение леммы достаточно проверить на s_n .

Имеем, по определению g^n :

$$g^{n+1}(p_n) - g^n(p_n) = 0$$

и

$$|g^{n+1}(x) - g^{n+1}(p_n)| < 1.$$

Первое требование к P обеспечивает выполнение неравенства

$$|g^n(x) - g^n(p_n)| < \frac{3}{4}\varepsilon,$$

которое вместе с предыдущим неравенством доказывает лемму 19.

Лемма 20. Для $x \in 2s_n$ можно подобрать $\Delta_1^1(x)$ и $\Delta_2^1(x)$ [мы будем также писать $\Delta_1^1(x_1)$ и $\Delta_2^1(x_2)$, понимая под этим $\Delta_1^1(x(x_1))$ и $\Delta_2^1(x(x_2))$] так, чтобы:

- 1) $\Delta_1^1(x) + \Delta_2^1(x) = \Delta_0(x)$,
- 2) $|{}^1g_k^{n+1}(x_k)| = |{}^0g_k^{n+1}(x_k) + \Delta_k^1(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}$,
- 3) $|{}^0g_1^{n+1}(x_1) - \Delta_1^1(x(x_1))| < 3 + \theta_n + \frac{\varepsilon}{2}$,
- 4) $\Delta_1^1(x)$ и $\Delta_2^1(x)$ зависят от x и $\Delta_0(x)$ непрерывно и при $\Delta_0(x) \rightarrow 0$ $\Delta_k^1(x) \rightarrow 0$.

Доказательство. Числа

$$a = {}^0g_1^{n+1}(x_1), \quad b = {}^0g_2^{n+1}(x_2), \quad c = {}^0g_3^{n+1}(x_3),$$

$$s = g^{n+1}(x), \quad \theta = \theta_n \text{ и } \varepsilon$$

удовлетворяют, в силу выполнения условия 4_n , определения θ_n и ε и леммы 19, всем требованиям арифметической леммы 15. Применяя ее, получим заключение леммы 20, если положим

$$\Delta_1^1(x) = \Delta a, \quad \Delta_2^1(x) = \Delta b.$$

В частности, при таком определении Δ_k^1 и ${}^1g_k^{n+1}$ будет:

$$|\Delta_1^1(x)| < 1 + \varepsilon \text{ и } |{}^1g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}.$$

Чтобы условие леммы 18 выполнялось, нужно определить еще Δ_k^2 и ${}^2g_k^{n+1}$ так, чтобы было $|\Delta_3(x)| \leq 1 + \varepsilon$ и $|{}^2g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}$. Для тех интервалов большой схемы, где она ветвится, т. е. для всех, кроме $u_2 \subseteq u_n$, это можно сделать с помощью леммы 17.

Мы ввели точку $x''(x)$ с координатами x_k'' , причем точка x'' и ее координаты суть функции (линейные) точки x или любой из ее координат, и наоборот. Имеем:

$${}^1g_2^{n+1}(x_2'') = {}^0g_2^{n+1}(x_2'') + \Delta_2^1(x_2'') \quad (x_2'' = x_2).$$

Остальные функции первого приближения совпадают с функциями нулевого приближения. Положим, в соответствии с распределением поправок по направлениям большой схемы,

$${}^2g_1^{n+1}(x_1'') = {}^0g_1^{n+1}(x_1'') + \Delta_1^2(x_1''), \text{ где } \Delta_1^2(x_1'') = -\Delta_2^1(x(x_1'')).$$

В силу выбора $\Delta_2^1(x)$ (см. лемму 20),

$$|\Delta_1^2(x_1'')| \leq 1 + \varepsilon.$$

Лемма 21. При введенных выше обозначениях

$$|{}^2g_1^{n+1}(x_1'')| < 3 + \theta_{n+1}.$$

Доказательство. Согласно заключению 3) леммы 20

$$|{}^0g_1^{n+1}(x_1) - \Delta_2^1(x(x_1))| < 3 + \theta_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

где x_1 — координата любой точки $x \in 2s_n$, в частности $x(x'')$. В силу первого требования к P (а u'' лежит, конечно, в P),

$$|{}^0g_1^{n+1}(x_1) - {}^0g_1^{n+1}(x_1'')| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда

$$|{}^0g_1^{n+1}(x_1'') - \Delta_2^1(x(x_1))| < 3 + \theta_n + \frac{3}{4}\varepsilon < 3 + \theta_{n+1},$$

что и требовалось доказать, так как $\Delta_1^2(x_1'') = -\Delta_2^1(x(x_1))$.

Так как каждая следующая поправка не превосходит в описанном выше процессе предыдущей невязки, из отмеченного уже факта, что $|\Delta_1^2(x_1'')| \leq 1 + \varepsilon$, получаем: $|\Delta_3(x)| \leq 1 + \varepsilon$. Принимая во внимание лемму 21, убедимся, что наш выбор $\Delta_k^2(x_k)$ действительно удовлетворяет условиям леммы 18. Эта лемма доказана, и мы получаем в итоге функции $g_k^{n+1}(x_k)$, удовлетворяющие всем сформулированным в начале параграфа требованиям и неравенствам (6) и (7). Полагая (см. (8))

$$f_k^{n+1}(x_k) = f_k^n(x_k) + g_k^{n+1}(x_k),$$

получаем разложение, обладающее свойствами 3_{n+1} , 4_{n+1} .

Тем самым закончено доказательство индуктивной леммы, так как при $n = 1$ она тривиальна.

Таким образом, дерево $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$, гомеоморфизм X на Ξ и разложения функций из F в сумму функций координат на D_n построены с выполнением всех требований индуктивной леммы.

§ 10. Доказательство теоремы 3

В результате применения процессов, описанных в предыдущем параграфе, получатся деревья D_n , реализующие Δ_n , причем $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$ реализует Ξ в виде подмножества трехмерного пространства.

На каждом дереве D_n каждая функция $f \in F$ представляется в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k),$$

где непрерывные функции f_k^n координат x_k точки $x \in D_n$ зависят непрерывно от F . Последовательность $f_k^n(x_k)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится. Это вытекает из того, что $|f_k^n(x_k) - f_{k,r}^n(x_k)|$ не больше $\frac{4}{r^2}$ при $n_r < n \leq n_{r+1}$ и, следовательно,

$$|f_k^n(x_k) - f_{k,r}^n(x_k)| < \sum_{l=r}^{\infty} \frac{4}{l^2} \quad (n > n_r).$$

Обозначим через $f_k(x_k)$ пределы этих последовательностей. Сумма этих трех функций является непрерывной функцией $f(x_1, x_2, x_3)$. Для точек $(x_1, x_2, x_3) \in D_n$

$$\sum_{k=1}^3 f_k^m(x_k) = f(x) \text{ при всех } m \geq n.$$

Поэтому и в пределе

$$\sum_{k=1}^3 f_k(x_k) = f(x) \text{ в каждой точке } x \in D_n \text{ при любом } n.$$

Но $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ — всюду плотное подмножество своего замыкания X . Непрерывные функции $f(x)$ и $\sum_{k=1}^3 f_k(x_k)$ совпадают в силу этого на всем X .

Доказательство будет закончено, если мы убедимся в непрерывной зависимости $f_k(x_k)$ от f .

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим столь большое N , что $|f_k^n(x_k) - f_k(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $n \geq N$ и f_k^n, f_k , отвечающих любой функции $f \in F$.

В силу требования 3_n, функции $f_k^n(x_k)$ при фиксированном $n = N$ зависят от $f \in F$ непрерывно. Поэтому f имеет такую окрестность радиуса δ , что для

$f' \in F$ и $|f' - f| < \delta$ будет $|f'_k(x_k) - f_k(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех x_k . Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|f' - f| < \delta$, то $|f'_k(x_k) - f_k(x_k)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Таким образом, каково бы ни было семейство F действительных равномерно непрерывных функций $f(\xi)$, заданных на дереве Ξ , все точки которого имеют индекс ветвления ≤ 3 , можно так реализовать дерево в виде подмножества X трехмерного куба E^3 , что любая функция семейства F может быть представлена в виде

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ есть образ $\xi \in \Xi$ в дереве X , $f_k(x_k)$ — непрерывные действительные функции одного переменного, причем f_k непрерывно зависят от f в смысле разномерной сходимости.

Это и есть теорема 3.

Как было показано во введении, отсюда следует теорема 1.

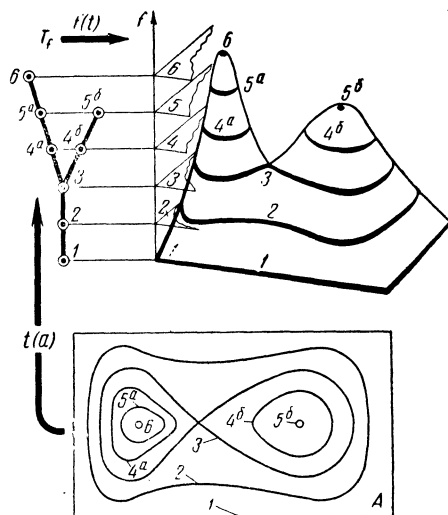
Приложение

Пространство компонент множеств уровня непрерывной функции

Что совокупность компонент множества уровня непрерывной функции на квадрате есть дерево, ясно из фиг. 19. Здесь мы придадим точный смысл этим словам, следуя А. С. Кронроду [4], который ввел понятие пространства компонент множеств уровня, и К. Менгеру [3], изучившему деревья. Доказываемые ниже теоремы являются главным орудием в обеих частях работы. В конце приложения помещен (для неспециалистов) перечень предполагающихся известными начальными сведениями из теоретико-множественной топологии.

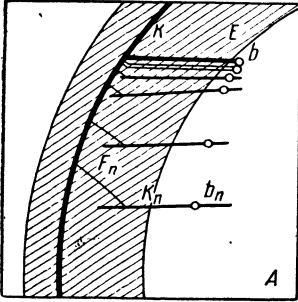
А) Построение метрического пространства T_f

Пусть на континууме A задана непрерывная действительная функция $f(a)$ (фиг. 19). Множеством уровня этой функции называется множество всех тех точек a , где $f(a)$ принимает одно значение f . Таким образом, множества уровня замкнуты, попарно не пересекаются и вместе составляют все A . В свою очередь, каждое множество уровня естественным образом разбивается на компоненты — попарно не пересекающиеся континуумы.



Фиг. 19. Множества уровня, пространство компонент и график функции. Некоторые компоненты обозначены цифрами. Индекс ветвления точек $1, 5^6, 6 \in T_f$ равен 1, точек $2, 4^6, 4^5, 5^6$ равен 2, точки 3 равен 3. Соответствующие компоненты соответственно не делят A , делят на 2 и 3 части

Рассмотрим совокупность T_f всех компонент всех множеств уровня непрерывной функции $f(a)$. T_f называется пространством компонент множеств уровня $f(a)$. Сейчас мы определим там метрику, так что под T_f далее понимается метрическое пространство. Компоненты множеств уровня $f(a)$ являются подмножествами A и точками T_f . Одну и ту же компоненту мы будем обозначать в первом случае большой буквой, а во втором — соответствующей маленькой буквой.



Фиг. 20. К лемме 1. Если компоненты K_n со сколь угодно малым $\rho(k, k_n)$ имеют точки b_n вне E , то и K имеет точку b вне E . Жирная линия — $\overline{\text{lt}} F_n$

Как известно, колебанием функции на множестве называется разность между верхней и нижней гранями функции на этом множестве. Колебание непрерывной функции на компакте конечно и неотрицательно.

Пусть K_1 и K_2 — компоненты множеств уровня непрерывной на континууме A функции $f(a)$. $P(K_1, K_2)$ обозначает нижнюю грань колебаний $f(a)$ на всех континуумах $F \subseteq A$, содержащих K_1 и K_2 :

$$P(K_1, K_2) = \inf_{K_1 \cup K_2 \subset F \subseteq A} [\max_{a \in F} f(a) - \min_{a \in F} f(a)].$$

Если определить теперь расстояние между точками k_1 и k_2 пространства компонент как $\rho(k_1, k_2) = P(K_1, K_2)$, то T_f станет метрическим пространством. Действительно, очевидно,

$$0 \leq \rho(k_1, k_2) = \rho(k_2, k_1) \leq \rho(k_1, k_3) + \rho(k_3, k_2).$$

Чтобы доказать, что из $\rho(k_1, k_2) = 0$ следует $k_1 = k_2$, мы воспользуемся более общим фактом:

Лемма 1. Для любого открытого множества $E \subseteq A$, содержащего компоненту K множества уровня непрерывной на континууме A функции $f(a)$, найдется $\delta > 0$ такое, что если $\rho(k, k_1) < \delta$, то компонента K_1 входит в E .

Доказательство. В противном случае (фиг. 20) существует последовательность компонент K_n таких, что $\rho(k, k_n) < \frac{1}{n}$, хотя при каждом n K_n содержит точку b_n , не входящую в E . По определению $\rho(k, k_n)$ существуют при $n = 1, 2, \dots$ континуумы $F_n \subseteq A$, каждый из которых содержит K и K_n с тем же n , такие, что на F_n колебание $f(a)$ меньше $\frac{2}{n}$, а потому значения f на F_n отличаются от значения $f(a)$ в точках K меньше, чем на $\frac{2}{n}$. Последовательность не лежащих в E точек b_n ($n = 1, 2, \dots$) имеет ввиду компактности $A \setminus E$ предельную точку $b \in A \setminus E$. Нижний топологический предел $\text{lt } F_n$ связанных подмножеств F_n компакта A не пуст, ибо он содержит K . Следовательно, верхний топологический предел $\overline{\text{lt}} F_n$ связан. В точках верхнего предела $f(a)$ принимает то же значение, что и на K , так как в любой окрестности такой точки есть точки F_n со сколь угодно большим n , а в них $f(a)$

отличается от $f(a)$ ($a \in K$) меньше, чем на $\frac{2}{n}$. Верхний предел, очевидно, содержит и $K \subset E$ и $b \in A \setminus E$. Это противоречит тому, что K — компонента, лежащая внутри E , так как верхний предел — связное множество, где $f(a)$ постоянная, — целиком входит в одну компоненту. Лемма доказана.

На основании леммы 1 из $\rho(k_1, k_2) = 0$ вытекает, что K_1 и K_2 вместе входят в любое открытое множество, если в это множество входит или K_1 или K_2 , что возможно, лишь когда $K_1 = K_2$, так как иначе расстояние между K_1 и K_2 в A положительно.

Таким образом, метрика в T_f определена. Определяемая этой метрикой топология в T_f совпадает с введенной в работе [4], если A локально связно. А. С. Кронрод вводит топологию в T_f с помощью окрестностей, которые определяются как множества K , пересекающиеся с некоторыми открытыми множествами $E \subseteq A$. При этом сразу видно, что топология в T_f зависит только от разбиения A на компоненты.

Б) Два отображения, связанные с непрерывной функцией

Рассмотрим (см. фиг. 19) два отображения:

1. $t(a)$ отображает A на T_f и ставит в соответствие каждой точке a континуума A точку $t \in T_f$ — ту компоненту $T \subseteq A$, в которой лежит a .

2. $f(t)$ отображает T_f в действительную прямую f и ставит в соответствие каждой точке $t \in T_f$ число f — значение $f(a)$ в точках компоненты $T \subseteq A$, отвечающей $t \in T_f$.

Обозначая функции $f(a)$ и $f(t)$ одной буквой, мы не перепутаем их, так как у них совсем разные области определения. Мы будем говорить, что заданная на A функция $f(a)$ порождает на T_f функцию $f(t)$.

Если A локально связно, то оба эти отображения непрерывны.

1. Ввиду непрерывности $f(a)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что колебание $f(a)$ на любом множестве диаметра $< \delta$ меньше ε . Ввиду локальной связности A δ -окрестность точки $a \in A$ имеет связную подокрестность $u_\delta(a)$. Очевидно, если b входит в $u_\delta(a)$, K_a и K_b — компоненты множеств уровня, содержащие a и b , то $\rho(k_a, k_b) < \varepsilon$.

2. Если k_1, k_2 — две точки T_f , отвечающие K_1, K_2 , и $\rho(k_1, k_2) < \varepsilon$, $a_1 \in K_1$, $a_2 \in K_2$, то $|f(a_1) - f(a_2)| < \varepsilon$, так как колебание функции не меньше ее приращения. Тогда и $|f(k_1) - f(k_2)| < \varepsilon$.

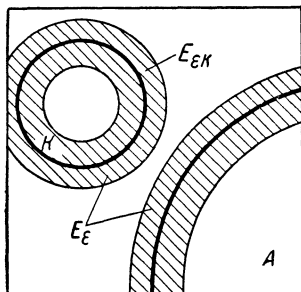
Непрерывность $t(a)$ и $f(t)$ доказана.

Если на A дана непрерывная функция $g(a)$, постоянная на каждой компоненте каждого множества уровня функции $f(a)$, то $g(a)$ также порождает непрерывную функцию $g(t)$ на T_f (именно, равную значению $g(a)$ в каждой точке соответствующей компоненты) и при этом $g(t(a)) = g(a)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что колебание $g(a)$ на множестве диаметра меньше δ меньше ε . Пусть $E_\delta(T)$ — δ -окрестность компоненты $T \subseteq A$, т. е. множество всех точек A , имеющих точки T ближе чем на расстоянии δ . По лемме 1 $t(T)$ имеет в T_f окрестность, все компоненты которой лежат внутри $E_\delta(T)$. Итак, мы по $\varepsilon > 0$ нашли окрестность точки $t \in T_f$, в которой $|g(t) - g(t_1)| < \varepsilon$. Непрерывность функции $g(t)$ доказана.

Рассмотрим прообразы точек при отображениях $t(a)$ и $f(t)$. Прообраз $t \in T_f$ есть компонента $T \subseteq A$, т. е. связное множество.

Определение [7]. Непрерывное отображение называется **монотонным**, если прообраз каждой точки связан.

Монотонным отображением можно преобразовать квадрат с границей в сферу, а в тор, как мы увидим дальше, нельзя. Монотонные отображения — это, так сказать, стягивания без склеивания. При монотонных отображениях сохраняются некоторые топологические свойства множеств. Поэтому монотонность $t(a)$ даст некоторые сведения о пространстве T_f .



Фиг. 21. К лемме 2. Построение окрестности $E_{\epsilon T}$ компоненты T

При отображении $f(t)$ прообраз точки — это совокупность тех точек T_f , где $f(t)$ принимает одно и то же значение, т. е. совокупность всех компонент одного множества уровня $f(a)$.

Далее всюду A предполагается локально связным, так что функции $t(a)$ и $f(t)$ непрерывны.

Лемма 2. *Каждая точка $t \in T_f$ имеет сколь угодно малую окрестность $u(t)$ (т. е. для любого открытого подмножества $E \subset T_f$, содержащего t , найдется открытое множество $u(t)$, $t \in u(t) \subset E$) такую, что ее граница состоит из некоторых точек двух множеств уровня $f(t)$.*

Доказательство. Пусть T — соответствующая t компонента и α — значение $f(a)$ в точках T . Рассмотрим (см. фиг. 21) открытое множество E_ϵ всех точек $a \in A$, где $|f(a) - \alpha| < \epsilon$. E_ϵ содержит T , и пусть $E_{\epsilon T}$ обозначает компоненту E_ϵ , содержащую T ($E_{\epsilon T}$ — область, так как A локально связно). Если точка входит в $E_{\epsilon T}$, то и вся содержащая эту точку компонента множества уровня $f(a)$, очевидно, входит в $E_{\epsilon T}$. Ясно, что на границе $E_{\epsilon T}$ $f(a) = \alpha \pm \epsilon$. Покажем, что образ $u_\epsilon(t)$ области $E_{\epsilon T}$ при отображении $t(a)$ удовлетворяет требованиям леммы 2 при достаточно малом $\epsilon > 0$.

1. $u_\epsilon(t)$ есть открытое множество в T_f , содержащее $t \in T_f$.

Это утверждение устанавливается применением леммы 1 к $E_{\epsilon T}$ и содержащимся в этой области компонентам.

2. Пусть K — компонента, которая при отображении $t(a)$ переходит в одну из граничных точек $u_\epsilon(t)$; тогда K входит в границу $E_{\epsilon T}$.

Это утверждение доказывается путем применения леммы 1 к областям, содержащим K .

3. При достаточно малом $\epsilon > 0$ колебание функции $f(a)$ на E_ϵ и, тем более, на континууме $\overline{E_{\epsilon T}}$ сколь угодно мало, откуда видно, что при достаточно малом $\epsilon > 0$ $u_\epsilon(t)$ — сколь угодно малая окрестность t .

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 вытекает, что множество уровня функции $f(t)$ — нульмерное подмножество T_f , так как любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой с этим множеством уровня не пересекается.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Действительная непрерывная функция $f(a)$, заданная на локально связном континууме A , есть произведение двух непрерывных отображений: монотонного отображения $t(a)$ континуума A на простран-*

ство T_f компонент множеств уровня функции $f(a)$ и отображения $f(t)$ пространства T_f на действительную прямую, при котором прообраз каждой точки f нульмерен. Непрерывная на A и постоянная на каждой компоненте множества уровня $f(a)$ функция $g(a)$ порождает непрерывную на T_f функцию $g(t)$, так что $g(a) = g(t(a))$.

В) Односвязные множества

Определение. Локально связный континуум M называется односвязным [7], если его нельзя представить в виде суммы двух континуумов, пересечение которых несвязно.

Например, окружность и тор не односвязны.

Замечание. Это определение эквивалентно следующим:

Локально связный континуум односвязен, если любое разделяющее его компактное подмножество имеет компоненту, уже разделяющую.

Локально связный континуум односвязен, если любое его непрерывное отображение на окружность гомотопно отображению в точку.

Из односвязности еще не следует возможность непрерывно стянуть простую замкнутую кривую на M в точку.

Лемма 3 [7]. *Монотонный образ F_2 односвязного локально связного континуума F_1 есть односвязный локально связный континуум.*

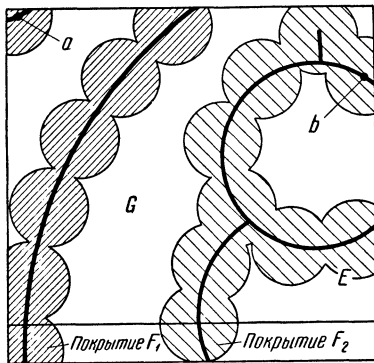
Лемма 4 [7]. *При монотонном отображении компакта полный прообраз континуума есть континуум.*

Доказательство леммы 4. В противном случае этот полный прообраз может быть разбит на два непересекающихся замкнутых множества A и B , образы которых A' и B' пересекаются. Если C' — точка пересечения образов, то ее прообраз пересекается и с A , и с B , причем он лежит в $A \cup B$, а потому не связан. Следовательно, отображение — не монотонное.

Доказательство леммы 3. Действительно, F_2 , как непрерывный образ локально связного континуума, есть локально связный континуум. Пусть A_2 и B_2 — континуумы из F_2 , $A_2 \cup B_2 = F_2$. В силу леммы 4, прообразы A_2 и B_2 — множества A_1 и B_1 — суть континуумы. Очевидно, $A_1 \cup B_1 = F_1$, поэтому $A_1 \cap B_1$ связно ввиду односвязности F_1 . Но $A_2 \cap B_2$ есть образ $A_1 \cap B_1$ и, следовательно, связное множество. Лемма 3 доказана.

Лемма 5 [7]. *Эвклидовы кубы любой размерности и сферы размерности два и выше односвязны.*

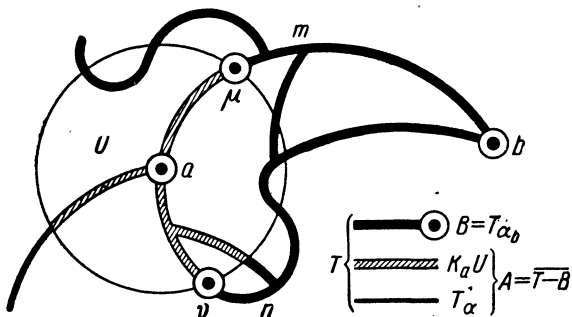
Доказательство. Предположим противное, и пусть, для определенности, квадрат $E = A \cup B$, где A и B — континуумы, пересечение $A \cap B$ которых распадается на два непересекающихся компакта: $A \cap B = F_1 \cup F_2$. Пусть расстояние между F_1 и F_2 больше $h > 0$. Рассмотрим сферические окрестности



Фиг. 22. К лемме 5. Если бы было $A \cup B = E$, $A \cap B = F_1 \cup F_2$, то отделяющая точку $a \in F_1$ от точки $b \in F_2$ область G пересекалась бы с соединяющими a и b множествами A , B , что противоречит связности G , так как $A \cap B = F_1 \cup F_2$ лежит вне G .

всех точек F_1 и F_2 радиуса $\frac{h}{3}$. Они покрывают $F_1 \cup F_2$. Из них можно выбрать конечное число, причем ясно, что получающиеся конечные покрытия F_1 и F_2 не пересекаются (фиг. 22). Очевидно, квадрат разбит конечным числом кривых, каждая из которых состоит из конечного числа дуг окружностей, на части трех сортов: входящие в покрытие F_1 , входящие в покрытие F_2 и прочие. Покрытия F_1 и F_2 удалены далее, чем на $\frac{h}{3}$. Поэтому прочие области разделяют их. Пусть точки $a \in F_1$ и $b \in F_2$. Каждая ломаная*, пересекающаяся с a и с b , пересекает одну из областей прочих точек. Мы будем считать очевидным для E (кубов и сфер) элементарный комбинаторный факт, что среди рассматриваемых областей есть одна — G , уже разделяющая a и b . Заметим только, что в случае тора и других неодносвязных множеств этот факт не имеет места. Континуумы A и B оба содержат a и b , поэтому в G есть точки как A (они уже не могут входить в B), так и B (они не лежат в A , ибо $A \cap B = F_1 \cup F_2$). Оба множества $A \cap \bar{G}$, $B \cap \bar{G}$ замкнуты и не пересекаются, а в сумме дают $\bar{G}$, так как $A \cup B = E$. Это противоречит связности $\bar{G}$. Противоречие показывает ошибочность предположения о неверности леммы 5.

Сопоставляя теорему 1 и леммы 3 и 5, получаем следующее важное свойство пространства T_f .



Фиг. 23. К лемме 6. Содержащий цикл $ambna$ локально связный одномерный континуум T можно разбить на две связные части (B — жирная кривая, $A = \overline{T \setminus B}$) с несвязным пересечением

Теорема 2. *Пространство компонент множеств уровня непрерывной функции, заданной на односвязном локально связном континууме, есть односвязный локально связный континуум. В частности, таким является пространство компонент множеств уровня функции, непрерывной на кубе любой размерности и на сфере размерности, большей единицы.*

Г) Деревья

Определение. Деревом называется локально связный континуум, не содержащий гомеоморфных образов окружности [3].

* А значит, и каждый континуум.

Любые две точки дерева можно, так как оно — локально связный континуум, соединить простой дугой и, так как дерево не содержит гомеоморфов окружности, только одной.

Лемма 6 [7]. *Одномерный односвязный локально связный континуум есть дерево.*

Доказательство. Предположим, что (фиг. 23) такой континуум T имеет две точки a и b , которые могут быть соединены непересекающимися дугами amb и anb . Ввиду одномерности T точка a имеет не содержащую b в своем замыкании окрестность U , граница которой нульмерна. Пусть $K_a U$ — компонента точки a в этой окрестности. Ввиду локальной связности T $K_a U$ — открытое множество в T . Рассмотрим $T \setminus K_a U$. Это замкнутое множество состоит из компонент — континуумов T_α , так что $T = (K_a U) \cup (\bigcup_\alpha T_\alpha)$. В частности, среди них имеется компонента $T_{\alpha_b} \ni b$. Положим $B = T_{\alpha_b}$ и $A = \overline{T \setminus B}$. Очевидно, $A \cup B = T$, B — континуум и A — компакт. Покажем, что и A связно. В самом деле, из того, что $T = (K_a U) \cup (\bigcup_\alpha T_\alpha)$ вытекает: $T \setminus B = (K_a U) \cup (\bigcup_{\alpha \neq \alpha_b} T_\alpha) = \bigcup_{\alpha \neq \alpha_b} ((K_a U) \cup T_\alpha)$. Легко видеть, что каждое множество $(K_a U) \cup T_\alpha$ связно, откуда получается, что $T \setminus B$ и, следовательно, A связны.

Покажем еще, что $A \cap B$ содержится в границе U . Действительно, $A \cap B = \overline{B} \cap \overline{T \setminus B}$, т. е. $A \cap B$ есть граница $B = T_{\alpha_b}$ и, следовательно, входит в границу $K_a U$, которая входит в границу U . Каждая из дуг amb , anb пересекается с границей U , так как a лежит внутри, а b — вне U . Пусть μ и ν — первые точки пересечения этих дуг с границей U , считая от a . $A \cap B$ содержит μ и ν , так как, очевидно, обе эти точки не входят в $K_a U$, но входят в B , а именно в границу B . Из нульмерности границы U следует, что $A \cap B$ несвязно, так как нульмерное связное множество не может иметь двух разных точек. Таким образом, мы получили разложение T в сумму двух континуумов A и B , пересечение которых несвязно. Значит, T — не односвязный локально связный континуум. Противоречие с условием леммы доказывает, что T не может содержать гомеоморфов окружности; следовательно, T — дерево, что и требовалось доказать.

Лемма 7. *Пространство компонент множества уровня действительной непрерывной на компакте функции не более чем одномерно.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что каждая точка $t \in T_f$ имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой входит в сумму двух множеств уровня $f(t)$ и потому пуста или нульмерна. Следовательно, пространство T_f не более, чем одномерно.

Очевидно, пространство T_f может быть нульмерным только в том случае, если функция f — константа. Оставляя в стороне этот случай, когда T_f сводится к одной точке, мы можем сделать из теоремы 2 и лемм 6 и 7 такой вывод:

Теорема 3 [4]. *Пространство компонент множеств уровня непрерывной действительной функции, заданной на [локально связном односвязном континууме, есть дерево.*

Пространство компонент множеств уровня непрерывной действительной функции, заданной на n -мерном кубе или на сфере размерности $n \geq 2$, есть дерево.

Назовем индексом ветвления точки дерева количество * частей (компонент), на которые распадается дерево после удаления этой точки.

Если дерево T — пространство компонент множеств уровня непрерывной функции, то индекс ветвления точки дерева связан со структурой соответствующей этой точке компоненты.

Теорема 3^a [4]. Число частей, на которые компонента множества уровня непрерывной функции разбивает область определения этой функции, равно индексу ветвления соответствующей точки пространства компонент.

Доказательство. В самом деле, отображение $f(a)$ осуществляет однозначное соответствие между частями области определения функции f и пространства компонент (фиг. 19).

Д) Строение деревьев

Мы видели, что любые две точки дерева можно соединить простой дугой и притом ровно одной. С помощью этого свойства мы получим, следуя Менгеру [3], удобное представление деревьев и изучим их структуру, сведя дело к конечным деревьям, т. е. деревьям с конечным числом точек ветвления. Мы ограничимся рассмотрением деревьев, не имеющих точек с индексом ветвления, большим трех, так как только такие используются в ч. I и ч. II настоящей работы.

Пусть Ξ — дерево, не имеющее точек с индексом ветвления, превосходящим 3. Выберем в компакте Ξ счетное всюду плотное множество $A: a_1, a_2, \dots$. Пара точек a_1, a_2 определяет в Ξ единственную простую дугу $a_1 a_2$ — обозначим ее через σ_0 . Выберем из оставшихся точек $a_3, a_4, \dots$ первую по порядку, не входящую в σ_0 , и обозначим ее через $\bar{a}_3^{-1}$. В Ξ имеется единственная простая дуга $a_1 \bar{a}_3$. Обозначим через ρ_1 первую от $\bar{a}_3$ точку σ_0 на этой дуге. (Этой точкой может быть и a_1 или a_2 .) Обозначая через σ_1 простую дугу $\bar{a}_3 \rho_1$ и полагая $\sigma_0 = \Delta_1$, $\Delta_1 \cup \sigma_1 = \Delta_2$, видим, что при $i = 1$ простая дуга σ_i , точка ρ_i и конечные деревья Δ_i , Δ_{i+1} обладают следующими свойствами:

$$1_i) \Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \sigma_i,$$

$$2_i) \sigma_i \cap \Delta_i = \rho_i,$$

$$3_i) \Delta_i \text{ содержит все точки } a_k (k \leq i + 1).$$

Если конечные деревья Δ_i ($i = 1, \dots, n$) построены и все $\Delta_{i+1}, \Delta_i, \sigma_i, \rho_i$ ($i = 1, \dots, n - 1$) удовлетворяют условиям 1_i), 2_i), 3_i), то легко построить Δ_{n+1} . Для этого выберем из не попавших в Δ_n точек A точку с наименьшим номером, и пусть это будет $\bar{a}_{n+2}$. В силу 3_{n-1}), номер этой точки больше n , так что, включая ее в Δ_{n+1} , мы обеспечим выполнение условия 3_n). Простая дуга $a_1 \bar{a}_{n+2} \subset \Xi$, соединяющая эти точки, определена однозначно. Пусть ρ_n — первая от $\bar{a}_{n+2}$ точка $a_1 \bar{a}_{n+2}$. Обозначим $\bar{a}_{n+2} \rho_n$ через σ_n . Тогда условия 1_n) и 2_n) выполнены. Таким образом, мы можем определить $\Delta_n, \sigma_n, \rho_n$ при всех $n \geq 1$, и условия 1_n), 2_n), 3_n) будут все выполнены.

Каждое конечное дерево Δ_n не имеет точек ветвления с индексом ветвления, превосходящим 3. Действительно в противном случае в некоторой точке $a \in \Delta_n$ сходятся 4 непересекающихся, кроме как в точке a , простых дуги

* Или мощность множества частей, если это множество — бесконечное.

$ad_r (r = 1, \dots, 4)$. Обозначим через B_r множество точек дерева, которые соединяются с a при помощи дуг, пересекающихся с дугой ad_r (конечно, исключая точку a). Такие множества при разных r не пересекаются, так как простая дуга, соединяющая две точки Δ_n , единственна. Компоненты открытого в локально связном континууме Ξ множества $\Xi \setminus a$ открыты, поэтому любые две точки такой компоненты можно соединить простой дугой. Отсюда видно, что каждое множество B_r составляет целую компоненту $\Xi \setminus a$. Следовательно, этих компонент по крайней мере 4, чего не может быть, так как индекс ветвления каждой точки дерева Δ_n меньше 4.

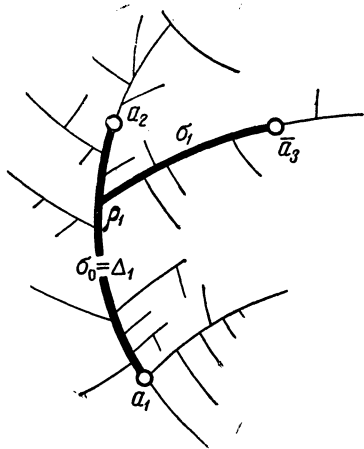
Вследствие условия 3₂) и того, что A всюду плотно,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n} = \Xi.$$

Подмножества $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ не делят Ξ , так

как $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ связна, а при добавлении к связному множеству некоторых^{*} его предельных точек связность не нарушается. В частности, точки множества $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ не делят Ξ . Точки дерева, которые его не делят, называются концами дерева.

Прежде, чем подвести итог изучению структуры дерева, изменим конструкцию Δ_n так, чтобы точки ρ_n не были для Δ_n концами. Пусть, например, σ_0 имеет одним из своих концов a_2 точку ρ_{n_1} . Присоединим σ_{n_1} к σ_0 и полученную простую дугу обозначим через σ_0^1 . Если один из концов σ_0^1 есть ρ_{n_2} , то σ_{n_2} мы тоже присоединим к σ_0^1 и получим простую дугу $\sigma_0^2 = \sigma_0^1 \cup \sigma_{n_2}$, и так далее, либо до тех пор, пока конец σ_0^N не будет такой точкой, которая не есть ρ_m ни при каком m , либо до бесконечности. В первом случае мы положим $\sigma_0^N = \sigma_0^{\text{новая}}$. Во втором пусть l — предельная точка концов σ_0^N ; она не делит Ξ , так как иначе l отделяла бы от a_1 некоторые точки $a_n \in A^*$, и тогда l входила бы в одно из множеств Δ_n , и, по построению σ_n , l не могла бы быть предельной для концов Δ_n . Стало быть, $l \neq \rho_m$ ни при каком m , и во втором случае мы положим $\sigma_0^{\text{новая}} = a_1 l$. После того, как такой обработке подвергнутся оба конца σ_0 , мы возьмем из не содержащихся в $\sigma_0^{\text{новая}}$ целиком дуг σ_n первую и повторим с ее концом те же операции. При этом мы не тронем готовой дуги и, продолжая этот процесс, придем к новой системе $\Delta_n^{\text{новое}}$, $\rho_n^{\text{новое}}$, $\sigma_n^{\text{новое}}$, элементы которой будем обозначать просто через Δ_n , ρ_n , σ_n , причем, кроме свойств 1), 2), 3), эта система обладает еще свойством



Фиг. 24. Жирная линия — Δ_2 , Δ_1 и Δ_2 не удовлетворяют требованию 4) леммы 8

* Ибо компоненты $\Xi \setminus l$ суть области.

4) $\rho_m \neq \rho_n$ при $m \neq n^*$.

Таким образом, доказана

Лемма 8. Каждое дерево Ξ , точки которого имеют индекс ветвления, не превосходящий трех, может быть представлено в виде

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n,$$

где Δ_n — конечные деревья, составленные из дуг σ_n приклеиванием их в точках ρ_n так, что:

1) $\Delta_1 = \sigma_0$,

2) $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \sigma_n$,

3) $\sigma_n \cap \Delta_n = \rho_n$,

4) $\rho_m \neq \rho_n$ при $m \neq n$ и точки ρ_n не являются концевыми для Δ_n .

Можно показать, что только точки ρ_n имеют индекс ветвления, больший двух, и что лемма 8 без условия 4) справедлива для всякого дерева. Отсюда получается

Теорема 4 [3]. Каждое дерево Ξ состоит из всюду плотного в Ξ множества, составленного из точек не более чем счетного количества простых дуг, попарно пересекающихся не более чем в одной точке, и множества, состоящего из концов Ξ (которое может быть всюду плотным в Ξ и иметь континуальную мощность). Индекс ветвления точек Ξ — не более чем счетный и больше двух только в счетном множестве точек (именно, в точках пересечения простых дуг, указанных выше).



Фиг. 25. К теоремам 4, 6, 7

Конечно, представление дерева в таком виде, как и в лемме 8, неоднозначно. Доказательство теоремы 4 здесь не приводится, так как эта теорема не используется в настоящей работе.

Рассмотрим еще строение компонент остатка $\Xi \setminus \Delta_N$. Это множество открыто в Ξ , его компоненты — области, и в каждой из них любые две точки можно соединить, не выходя за пределы компоненты, простой дугой.

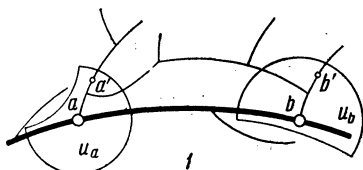
Лемма 9. Пусть Ξ , σ_n , ρ_n , Δ_n ($n = 1, 2, \dots$) — объекты, определенные в лемме 8. Тогда:

1. Граница каждой компоненты K множества $\Xi \setminus \Delta_N$ состоит из одной точки, а именно из точки ρ_m ($m = m(N, K) \geq N$).

2. Любые две точки $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ при достаточно большом N лежат в разных компонентах $\Xi \setminus \Delta_N$.

* Старые ρ могли совпадать (фиг. 24), когда к ρ — концу Δ — последовательно приклеивали две веточки. В новой конструкции это исключено, и поэтому из того, что Δ не имеют точек с индексом ветвления, превосходящим 3, вытекает свойство 4).

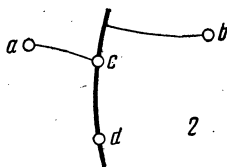
Доказательство. 1. Предположим, что эта граница имеет две разные точки $a, b \in \Delta_N \cap \bar{K}$ (фиг. 26, 1). Точки a, b имеют непересекающиеся связные окрестности, так как Ξ локально связно. Пусть $a' \in u_a \cap K$ — точка первой из них u_a , а $b' \in u_b \cap K$ — точка второй. Точки a' и b' можно соединить простой дугой, целиком лежащей в K , а точки a и b принадлежат Δ_N , как точки границы K , и потому соединимы простой дугой ab в Δ_N . Дуги ab и $a'b'$ не пересекаются, и из возможности соединить простей дугей a с a' в u_a , а b с b' в u_b получаем, что в Ξ имеется кривая $aa'b'ta$, содержащая, очевидно, гомеоморф окружности. Итак, [граница K есть] одна точка.



Фиг. 26. К лемме 9. Жирная линия—дерево Δ_N . 1 — Если бы граница компоненты дополнения к Δ_N имела две разные точки a и b , то Ξ содержало бы гомеоморф окружности.

2 — При достаточно большом N Δ_N разделяет

любые две точки $a, b \in \Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$



Так как $\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_n$ всюду плотно в Ξ (по лемме 8), то существует пересекающаяся с областью K дуга σ_n . Среди таких дуг пусть σ_m имеет наименьший номер. Очевидно, $m \geq N$. Так как Δ_{m+1} содержит эту дугу (условие 2) леммы 8), а Δ_m не пересекается с K , то σ_m пересекает границу K . Но эта граница — точка, принадлежащая Δ_N и, тем более, Δ_m , поэтому (условие 3) леммы 8) первое утверждение доказано.

2. Пусть a и b — две точки $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, acd и bcd — простые дуги, соединяющие a и b с точкой $d \in \Delta_1$, c — последняя от d общая точка этих двух дуг (фиг. 26, 2). Она может совпадать лишь с одной из точек a, b, d , и мы можем поэтому считать $a \neq c$. Тогда c отделяет a от d , ибо, если бы a и d попали в одну компоненту открытого множества $\Xi \setminus c$, их можно было бы соединить простой дугой, минуя c , и в Ξ был бы гомеоморф окружности, так как эта дуга не совпадает с простой дугой acb . Следовательно, $c \in \Delta_N$ при некотором N , так как из леммы 8 видно, что точки $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ не делят Ξ . Это Δ_N отделяет a от b , ибо точки a и b можно соединить простой дугой acb и, стало быть, нельзя соединить никакой другой. Лемма 9 доказана.

Е) Реализации деревьев

Все деревья можно уложить на плоскость гомеоморфно. Мы построим гомеоморфное данному дереву Ξ , индекс ветвления точек которого не превосходит трех, плоское множество, следуя в основном Менгеру [3].

Пусть $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ — представление леммы 8. Выберем на плоскости отрезки

зок s_0 и открытый треугольник T_0 , содержащий s_0 внутри. Отобразим s_0 на s_0 гомеоморфно с помощью гомеоморфизма f_1 . Тогда на s_0 появится точка p_1 — образ p_1 . Мы можем построить открытый треугольник T_1 диаметра меньше d_1 (это положительное число будет определено позже) с вершиной в p_1 , не пересекающий $D_1 = s_0$, кроме как в точке p_1 , и помещающийся внутри T_0 вместе с замыканием.

Выберем внутри T_1 точку и соединим ее с p_1 . Получим отрезок s_1 . Отобразим гомеоморфно s_1 на s_1 . Построен гомеоморфизм f_2 Δ_2 на $D_2 = s_0 \cup s_1$.

Пусть на плоскости R^2 уже построены отрезочные комплексы D_i из отрезков s_i при помощи треугольников T_i и точек p_i , а также f_{i+1} — гомеоморфизмы Δ_{i+1} на D_{i+1} , причем $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ и (см. фиг. 9)

- 1) $D_1 = s_0$,
- 2) $D_{i+1} = D_i \cup s_i$,
- 3) $D_i \cap T_i = p_i$,
- 4) $(R^2 \setminus T_i) \cap s_i = p_i$,
- 5) при $i > j$ $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j = 0$ или же $\bar{T}_i \subset T_j$,
- 6) диаметр T_i меньше $d_i > 0$,
- 7) f_i отображает Δ_{i-1} так же, как f_{i-1} ($i > 1$).

Пусть дано произвольное $d_n > 0$. На Δ_n имеется, вообще говоря, точка $p_n \in s_k$ ($k \leq n$) (если ее нет, Δ_n — искомое дерево). Гомеоморфизм f_n определяет на D_n точку $p_n \in s_k$ — образ p_n . Легко выбрать в треугольнике T_k такой маленький открытый треугольник T_n , чтобы:

- 1) одной из его вершин была точка p_n ,
- 2) $\bar{T}_n \subset T_k$,
- 3) T_n не пересекался бы с s_k ,
- 4) $\bar{T}_n$ не пересекалось бы с $\bar{T}_i$ ($i < n$), если T_k не входит в T_i ,
- 5) диаметр T_n был меньше d_n .

Выбрав в T_n точку и соединив ее с p_n , получим отрезок, который обозначим через s_n . Очевидно, отобразив гомеоморфно s_n на s_n , мы определим искомый гомеоморфизм f_{n+1} на Δ_{n+1} , так что будут выполнены условия 1)–7). Мы доказали, что верна

Лемма 10. Пусть $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ — представление леммы 8, d_n — положительные числа. На плоскости R^2 можно построить с помощью отрезков s_n , точек p_n и треугольников T_n комплексы D_n и гомеоморфизмы $f_n: \Delta_n \rightarrow D_n$, так, чтобы при любом $n = 2, 3, \dots$ выполнялись условия 1)–7).

Пусть теперь Ξ , Δ_n , D_n , s_n , p_n , p_n , T_n , f_n ($n = 1, 2, \dots$) — такая система объектов и пусть $d_n > 0$, $d_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

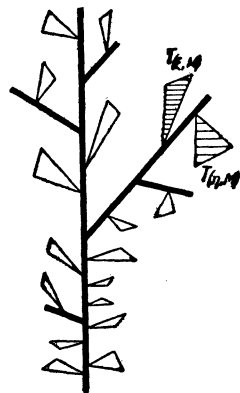
Лемма 11. В указанных выше обозначениях $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ есть дерево, гомеоморфное Ξ , и гомеоморфизм можно построить так, чтобы на Δ_n он совпадал с f_n при $n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Определим последовательность отображений f'_n ($n = 1, 2, \dots$) всего Ξ в X , а именно на D_n , так, чтобы на Δ_n f'_n совпадало с f_n . Мы получим f'_n на Ξ как $f_n(\varphi_n(\xi))$: произведение непрерывного отображения φ_n всего Ξ на Δ_n и f_n , которое переводит Δ_n в D_n гомеоморфно. Такое отображение будет совпадать с f_n на Δ_n , если φ_n оставляет каждую точку Δ_n на месте. Поэтому на Δ_n мы определим отображение φ_n так:

$\varphi_n(\xi) = \xi$ ($\xi \in \Delta_n$). Каждая компонента $K \subset \Xi \setminus \Delta_n$, согласно утверждению 1 леммы 9, имеет единственную граничную точку ρ_m ($m = m(K, n) \geq n$). Положим $\varphi_n(\xi) = \rho_{m(K, n)}$ ($\xi \in K$). Теперь $\varphi_n(\xi)$ всюду определено; мы докажем, что это отображение непрерывно. Точка $\xi \in \Xi \setminus \Delta_n$ имеет целую окрестность K , преобразующуюся в ту же точку, что и ξ . Остается доказать непрерывность в точках Δ_n . Укажем для такой точки ξ окрестность, переходящую в любую наперед заданную окрестность u_ξ . Такой является (существующая в силу локальной связности Ξ) связная окрестность $v \subseteq u_\xi$ точки ξ . Точки η этой окрестности ξ переходят внутрь нее при преобразовании φ_n . Действительно, для точек $\eta \in \Delta_n$ это очевидно. Пусть $\eta \in \Xi \setminus \Delta_n$, тогда η входит в некоторую компоненту K множества $\Xi \setminus \Delta_n$. Пусть $\rho = \rho(K, n)$ — граница K . Во-первых, $\rho \in v$, так как точки η и ξ области v можно соединить лежащей в v простой дугой, на которой найдется точка границы K , ибо начало этой дуги η принадлежит K , а конец ξ не принадлежит K ; эта точка — ρ (лемма 9). Во-вторых, образ ρ при отображении φ_n есть ρ по определению φ_n . Непрерывность φ_n доказана, а из нее сразу вытекает непрерывность $f'_n(\xi) = f_n(\varphi_n(\xi))$.

Последовательность отображений f'_n ($n = 1, 2, \dots$) равномерно сходится на Ξ .

Фиг. 27. К лемме 11. Жирное дерево D_ε — гомеоморф Δ_ε , разделяющего ξ и η . Нарисованы некоторые из треугольников T_m ($m \geq 6$), для которых $\rho_m \in D_\varepsilon$. Среди них заштрихованы $T_{(\xi, M)}$ и $T_{(\eta, M)}$ ($M > 6$), содержащие образы ξ и η при всех преобразованиях f'_m ($m > M$)



В самом деле, пусть дано $\varepsilon > 0$. Из $d_n \rightarrow 0$ следует, что при $n \geq N(\varepsilon)$ будет $d_n < \varepsilon$. Покажем, что в каждой точке $\xi \in \Xi$ и при любом $n > N(\varepsilon)$ $\rho(f'_n(\xi), f'_{N(\varepsilon)}(\xi)) < \varepsilon$. Это следует из того, что образ ξ при отображении f'_n лежит в треугольнике $\bar{T}_m$ ($m > N(\varepsilon)$) при $\rho_m \in D_{N(\varepsilon)}$ или на D_N , согласно условиям 1)–7) леммы 10.

Таким образом, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ есть непрерывное отображение. Очевидно, оно на Δ_n совпадает с f_n . Докажем, что разным точкам Ξ отвечают разные образы в X . Для точек $\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ это очевидно. Точки ξ и η из $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ при достаточно большом N лежат в разных компонентах K_1, K_2 дополнения к Δ_N (лемма 9). Отсюда и из определения f'_n с помощью свойств 3), 4) из формулировки леммы 8 следует, что, начиная с некоторого $M > N$, образы ξ, η при f'_m ($m \geq M$) лежат в разных треугольниках $T_{(\xi, M)}, T_{(\eta, M)}$, замыкания которых пересекаются с D_N (фиг. 27). В силу условия 5) леммы 10, получаем: $\bar{T}_{(\xi, M)} \cap \bar{T}_{(\eta, M)} = \emptyset$, откуда видно, что $f(\xi) \neq f(\eta)$. Точно так же можно рас-

смотреть и случай $\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$, $\eta \in \Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Образ всего Ξ при отображении f содержит все D_n и потому есть X . Следовательно, f — взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта Ξ на X , т. е. гомеоморфизм; откуда вытекает, что X — дерево. Лемма 11 доказана.

Процесс построения в доказательстве лемм 10 и 11 дерева X и отображения f по удовлетворяющим условиям 1)–4) леммы 8 Ξ , Δ_n , σ_n , ρ_n ($n=1, 2, \dots$) и $d_n \rightarrow 0$ можно назвать приклеиванием веточек. Тогда наш результат можно сформулировать так:

Теорема 5 [3]. Пусть дано дерево Ξ , индекс ветвления точек которого не превосходит трех. Тогда на плоскости можно построить приклеиванием веточек гомеоморфное Ξ дерево X и f — гомеоморфизм Ξ и X .

Аналогичным методом может быть доказана более общая

Теорема 6 [3]. Любое дерево Ξ имеет гомеоморфный образ на плоскости.

Множество M называют универсальным для класса множеств A_α , если каждое множество A_α имеет в M гомеоморфный образ.

Теорема 7 [3]. Если в представлении теоремы 4 множество точек пересечения простых дуг всюду плотно и индекс ветвления Ξ в каждой из них равен n (соответственно счетен), то такое дерево универсально для класса всех деревьев, индекс ветвления точек которых не превосходит n (соответственно для всех деревьев). Деревья, описанные выше, действительно существуют.

Теоремы 6, 7 не используются в работе; читатель может доказать их сам или найти в [3]. Заметим без доказательства, что пространство компонент множеств уровня непрерывной функции на квадрате может быть универсальным деревом. Примером (для случая $n=3$) является построенная в части I настоящей работы функция $F(x, y)$ (§ 2).

Употребляемые без пояснений понятия и теоремы теоретико-множественной топологии

1. Понятия ([6], гл. VII и VIII; [7]; [8]; [9]).

Метрическое пространство. Топологическое пространство. Открытые и замкнутые множества, граница. Непрерывное отображение и гомеоморфизм. Всюду плотное множество. Связность.

Компакт — метрическое пространство, в котором из любой бесконечной последовательности точек можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Континуум — связный компакт. Компонента точки множества (или просто компонента множества) — наибольшее связное подмножество множества, содержащее данную точку.

Множество локально связно, если в любой окрестности* любой его точки лежит связная подокрестность той же точки.

Множество нульмерно, если в любой окрестности любой его точки лежит подокрестность той же точки, граница которой пуста.

Множество одномерно, если в любой окрестности любой его точки лежит подокрестность той же точки, граница которой нульмерна.

* Здесь и далее окрестность точки — это любое открытое множество, содержащее эту точку.

Область — открытое связное множество. Простая дуга — множество, гомеоморфное отрезку. Множество A отделяет B от C , если всякий континуум, пересекающий B и C , пересекает A . Если A отделяет $b \in B \subset M$ от $c \in C \subset M$, то говорят, что A делит M .

Точка x входит в верхний топологический предел $\overline{\text{It}} M_i$ множеств M_i ($i = 1, 2, \dots$), если в любой ее окрестности имеются точки бесконечного количества множеств M_i . Точка входит в нижний топологический предел $\underline{\text{It}} M_i$, если в любой ее окрестности есть точки всех множеств M_i , кроме, быть может, конечного числа их.

2. Теоремы.

Метрическое пространство, являющееся непрерывным образом компакта, — компакт, континуума — континуум, локально связного континуума — локально связный континуум [6].

Взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта есть гомеоморфизм [6]. Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.

Компоненты компакта — континуумы; компоненты открытого множества в локально связном пространстве — области [6].

В области локально связного континуума любые две точки можно соединить простой дугой ([3], [7], [9]).

Пересечение последовательности вложенных континуумов $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ есть континуум [6].

Если множества $B \subset M$ и $C \subset M$ лежат в разных компонентах $M \setminus A$, то A отделяет B от C . Если замкнутое подмножество A локально связного континуума M отделяет B от C , то B и C лежат в разных компонентах $M \setminus A$.

Множество, состоящее из двух не совпадающих простых дуг с общими концами, содержит простую замкнутую дугу (гомеоморф окружности). Тем же свойством обладает сумма четырех простых дуг aa' , $a'b'$, $b'b$, ba , если $a'b' \cap ba = 0$ и $aa' \cap b'b = 0$.

В компакте верхний топологический предел последовательности связных множеств связан, если только нижний не пуст [6].

Связное нульмерное множество состоит из одной точки [8].

Равномерно непрерывная и заданная на всюду плотном подмножестве компакта функция может быть продолжена до непрерывной на всем компакте. Такое продолжение единственно.

Взаимно однозначное и подобное (сохраняющее порядок) соответствие счетных всюду плотных подмножеств двух отрезков может быть продолжено до гомеоморфизма отрезков. Такое продолжение единственно.

(Поступило в редакцию 25/XII 1958 г.)

Литература

1. В. И. Арнольд, О функциях трех переменных, ДАН СССР, т. 114, № 4 (1957), 679—681.
2. А. Н. Колмогоров, О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных, ДАН СССР, т. 108, № 2 (1956), 179—182.

3. K. Menger, Kurventheorie, Berlin — Leipzig, 1932.
 4. А. С. Кронрод, О функциях двух переменных, Успехи матем. наук, т. V, вып. 1 (35) (1950), 24—133.
 5. А. Н. Колмогоров, О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения, ДАН СССР, т. 114, № 5 (1957), 953—956.
 6. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, Москва — Ленинград, ОНТИ, 1937.
 7. S. Kuratowski, Topologie, II, Warszawa, 1952.
 8. В. Гуревич, Г. Волман, Теория размерности, Москва, ГИИЛ, 1948.
 9. А. С. Пархоменко, Что такое линия, Москва, Гостехиздат, 1954.
-

О строении связных локально бикompактных групп

В. М. Глушков (Киев)

Введение

За последние годы усилиями целого ряда алгебраистов и топологов вопрос о локальном строении локально бикompактных групп был продвинут достаточно далеко. В настоящее время известно ([3], теорема А), что всякая локально бикompактная группа локально распадается в прямое произведение бикompактной группы и локальной группы Ли. Отсюда непосредственно следует, что любая связная локально бикompактная группа изоморфна фактор-группе прямого произведения бикompактной группы и связной группы Ли по центральной дискретной подгруппе. К сожалению, однако, локально бикompактные группы обладают, вообще говоря, многими неизоморфными разложениями указанного выше вида (бикompактно-лиевыми разложениями), что до известной степени обесценивает значение этих разложений (особенно для классификационных целей).

В настоящей работе указан способ построения таких бикompактно-лиевых разложений локально бикompактных групп, компоненты которых определяются соответствующими группами однозначно с точностью до локального изоморфизма.

Исследуются некоторые представления произвольных связных локально бикompактных групп в виде фактор-групп прямых произведений групп, имеющих более простое строение.

На произвольные связные локально бикompактные группы переносится часть результатов о группах Ли с изоморфными алгебрами Ли. Строятся, в частности, аналоги универсальных накрывающих групп. Особенно близкими к группам Ли оказываются, как это естественно ожидать, связные локально связные локально бикompактные группы. Они исчерпываются топологическими прямыми произведениями связных (конечномерных) групп Ли и фактор-группами таких произведений по центральным вполне несвязным подгруппам. Установлена любопытная связь между локальной связностью и линейной связностью: связная локально бикompактная группа тогда и только тогда локально связна, когда она линейно связна.

Доказательства большинства приведенных фактов существенно опираются на результаты более ранних работ автора [3] и [4]. Широко используется введенное в [4] понятие алгебры Ли для произвольной локально бикompактной группы; элементами этой алгебры являются все однопараметрические подгруппы соответствующей группы, рассматриваемые вместе с той или иной параметризацией.

§ 1. Бикомпактно-лиевы разложения

1.1. Как известно ([3], теорема А), любая локально бикомпактная группа G локально разлагается в прямое произведение $B \times L$, где B — бикомпактная группа, а L — локальная группа Ли. Всякое разложение указанного вида мы будем называть бикомпактно-лиевым (локальным) разложением группы G , группу B — бикомпактной компонентой, а локальную группу Ли L — лиевой компонентой этого разложения (случай тривиальных компонент не исключается).

Подгруппа M , порожденная элементами множества L , не является, вообще говоря, группой Ли, но, очевидно, существует одна и, с точностью до изоморфизма, только одна связная группа Ли H , допускающая непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм на подгруппу M . Условимся называть определенную таким образом группу H группой Ли, соответствующей данному бикомпактно-лиевому разложению исходной группы G .

1.2. Пусть H — связная группа Ли, R — ее дискретная центральная подгруппа, B — бикомпактная группа, φ — взаимно однозначный гомоморфизм группы R в центр группы B , D — подгруппа прямого произведения $G = B \times H$, состоящая из всех элементов вида $(\varphi(r), r)$, где $r \in R$. Ясно, что D — дискретная центральная подгруппа в G , изоморфная подгруппе R . Фактор-группу G/D условимся называть правильно склеенным произведением групп B и H , подгруппы R и $\varphi(R)$ — компонентами склеивания (в подгруппах H и B соответственно), взаимно однозначный гомоморфизм φ — склеивающим гомоморфизмом, а дискретную подгруппу D — ядром склеивания.

Лемма 1. Подгруппы D , R и $\varphi(R)$ являются абелевыми группами с конечным числом образующих.

Доказательство. Подгруппа R дискретна и содержится в центре связной группы Ли H . Тогда, ввиду известного результата Мальцева о том, что всякая связная группа Ли имеет связные абелевы подгруппы, содержащие почти весь центр ([7], теорема 9), группа R является конечным расширением дискретной подгруппы связной коммутативной группы Ли и имеет поэтому конечное число образующих. Но тогда конечное число образующих имеют также изоморфные ей группы D и $\varphi(R)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть G — локально бикомпактная группа, $B \times L$ — любое ее бикомпактно-лиево разложение, H — группа Ли, соответствующая этому разложению; тогда открытая подгруппа, порожденная элементами множеств B и L , изоморфна правильно склеенному произведению групп B и H .

Доказательство. Обозначим через φ взаимно однозначный непрерывный гомоморфизм группы H на группу M , порожденную элементами множества L (см. п. 1.1). Легко видеть, что отображение $(b, h) \rightarrow b\varphi(h)$ осуществляет непрерывный гомоморфизм прямого произведения $G_0 = B \times H$ на открытую подгруппу BM группы G . Поскольку этот гомоморфизм индуцирует локальный изоморфизм групп G_0 и G , его ядро D дискретно, а $BM \cong G_0/D$. Если $d = (b, h)$ — любой элемент из D , то $b^{-1} = \varphi(h)$. Сохранив, таким образом, в пересечении $B \cap M$, элементы b и $\varphi(h)$ центральны в B и M соответственно. Но тогда, очевидно, элемент d централен в G_0 .

Далее, легко видеть, что множество $(B, \varphi^{-1}(L))$ пересекается с D лишь по единице. Поэтому компонента R подгруппы D в прямом множителе H дискретна. Отображение $\psi: r \rightarrow (\varphi(r))^{-1}$ осуществляет, очевидно, взаимно однозначный гомоморфизм группы R в группу B ; а подгруппа D состоит из элементов вида $(\psi(r), r)$ с $r \in R$. Таким образом, G_0/D — правильно склеенное произведение групп B и H , что и требовалось доказать.

Справедливо также предложение, обратное лемме 2:

Лемма 3. Любое правильно склеенное произведение бикомпактной группы B и связной группы Ли H является локально бикомпактной группой, допускающей бикомпактно-лиевое разложение, бикомпактная компонента которого изоморфна B , а соответствующая этому разложению группа Ли изоморфна H .

Доказательство. Пусть $G = B \times H$, а G/D — данное правильно склеенное произведение. Из определения правильно склеенного произведения вытекает существование такой окрестности единицы L в группе H , что локальная группа BL пересекается с D лишь по единице. Не нарушая общности, можно считать, что $L = L^{-1}$. В таком случае, как легко видеть, $(BD/D) \times (LD/D)$ представляет собою бикомпактно-лиевое разложение группы G/D . Так как пересечение $D \cap B$ состоит лишь из единицы, то $BD/D \cong B$. Лиева компонента разложения порождает подгруппу HD/D , являющуюся взаимно однозначным непрерывным гомоморфным образом группы $H/(H \cap D) = H$. Тем самым лемма доказана.

1.3. Одна и та же локально бикомпактная группа обладает, вообще говоря, многими неизоморфными бикомпактно-лиевыми разложениями. Действительно, одномерный соленид, например, обладает двумя неизоморфными бикомпактно-лиевыми разложениями. В первом из них бикомпактная компонента совпадает с самой группой, а лиева компонента тривиальна, во втором же разложении бикомпактная компонента вполне несвязна, а лиева компонента одномерна.

Для уменьшения произвола в выборе бикомпактно-лиевых разложений введем понятие минимального бикомпактно-лиевого разложения.

Определение. Бикомпактно-лиевое разложение $B \times L$ группы G называется минимальным, если не существует такого бикомпактно-лиевого разложения $D \times M$ этой группы, что $B \subset D$, а M — собственная локальная подгруппа локальной группы L .

1.4. Связные топологические группы, все абелевы нормальные делители которых вполне несвязны, условимся называть полупростыми.

Как показал Ивасава ([6], теорема 14), любая локально бикомпактная группа G содержит единственный максимальный связный бикомпактный нормальный делитель B . Группа B , как и всякая связная бикомпактная группа, представима в виде произведения двух связных бикомпактных подгрупп A и P , первая из которых абелева, а вторая полупроста ([1], стр. 103). Очевидно, что подгруппа P содержит любой полупростой бикомпактный нормальный делитель группы G . Таким образом, всякая локально бикомпактная группа G обладает единственным максимальным полупростым бикомпактным нормальным делителем P . Ясно, что фактор-группа G/P уже не содержит нетривиальных полупростых бикомпактных нормальных делителей.

Лемма 4. Максимальный полупростой бикомпактный нормальный делитель P локально бикомпактной группы G содержится в бикомпактной компоненте любого минимального бикомпактно-лиевого разложения этой группы.

Доказательство. Пусть $B \times L$ — данное минимальное бикомпактно-лиево разложение группы G . Если бы нормальный делитель P не содержался в B , то фактор-группа G/B , локально изоморфная L , содержала бы нетривиальный связный полупростой бикомпактный нормальный делитель. Но в группе Ли любой полупростой связный бикомпактный нормальный делитель отщепляется в виде локального прямого множителя. Вследствие минимальности разложения $B \times L$ все такие множители должны быть тривиальными, откуда $P \subset B$, что и требовалось доказать.

1.5. Значение минимальных бикомпактно-лиевых разложений определяется следующим предложением:

Теорема 1. У любых двух минимальных бикомпактно-лиевых разложений одной и той же локально бикомпактной группы G как бикомпактные, так и левые компоненты локально изоморфны.

Доказательство. Пусть $B_1 \times L_1$ и $B_2 \times L_2$ — два минимальных бикомпактно-лиевых разложения группы G . Обозначим через H пересечение подгрупп, порожденных элементами множеств $B_1 L_1$ и $B_2 L_2$. Подгруппы $D_1 = B_1 \cap H$ и $D_2 = B_2 \cap H$ инвариантны в H и локально изоморфны группам B_1 и B_2 соответственно. Кроме того, поскольку подгруппа H открыта в G , она локально бикомпактна и допускает, как нетрудно видеть, бикомпактно-лиевы разложения $D_1 \times M_1$ и $D_2 \times M_2$, где $M_1 = H \cap L_1$ и $M_2 = H \cap L_2$. Локальные подгруппы L_1 и M_1 локально изоморфны и порождают, очевидно, одну и ту же подгруппу группы G . То же самое имеет место и в отношении локальных подгрупп L_2 и M_2 . Поэтому бикомпактно-лиевы разложения $D_1 \times M_1$ и $D_2 \times M_2$ минимальны, и для доказательства теоремы достаточно доказать локальную изоморфность групп D_1 и D_2 , а также локальных групп M_1 и M_2 .

Ясно, что подгруппы D_1 и D_2 инвариантны в H и определяют в ней левые фактор-группы. Но тогда фактор-группа H/C по пересечению C подгрупп D_1 и D_2 также является группой Ли ([3], лемма 3). Из леммы 4 легко следует, что все связные бикомпактные нормальные делители группы H/C коммутативны и, значит, содержатся в центре связной компоненты единицы этой группы ([8], лемма 2).

Рассмотрим алгебру Ли $A(D_1)$ группы D_1 в том смысле, как она введена в работе автора [4]. Как показано в [4], алгебра $A(D_1)$ распадается в топологическую прямую сумму одномерных и компактных конечномерных подалгебр. Алгебра $A(C)$ группы C составляет идеал в алгебре $A(D_1)$, а определяемая ею алгебра вычетов $A(D_1)/A(C)$ изоморфна алгебре Ли фактор-группы D_1/C ([4], теорема 1). В нашем случае это будет, очевидно, конечномерная коммутативная алгебра. Теперь уже нетрудно видеть, что алгебра $A(D_1)$ распадается в прямую сумму алгебры $A(C)$ и конечномерной коммутативной алгебры S .

В силу теоремы 1 из [4], естественный гомоморфизм группы D_1 на фактор-группу D_1/C индуцирует изоморфизм алгебры S на алгебру Ли группы D_1/C . Поэтому найдется такая окрестность V нуля алгебры S , которая при

каноническом отображении ψ алгебры $A(D_1)$ в группу D_1 переходит в множество $\psi(V)$, пересекающееся с C лишь по единице и дающее в произведении с C некоторую окрестность единицы в D_1 . Так как $\psi(V)$ есть, очевидно, локальная группа Ли, то, в силу леммы 5 из [3], группа D_1 распадается в локальное прямое произведение группы C и коммутативной локальной группы Ли $\psi(V)$, локально изоморфной группе D_1/C . Поскольку то же самое имеет место и для группы D_2 , локальная изоморфность групп D_1 и D_2 будет установлена, если доказать локальную изоморфность групп D_1/C и D_2/C или, что то же самое, изоморфность алгебр Ли этих групп. Легко видеть также, что $(D_1/C) \times (M_1C/C)$ и $(D_2/C) \times (M_2C/C)$ представляют собою два минимальных бикомпактно-лиевых разложения группы Ли H/C . Так как лиевы компоненты этих разложений локально изоморфны соответственно локальным группам M_1 и M_2 , то для окончания доказательства теоремы достаточно доказать локальную изоморфность одноименных компонент любых двух минимальных бикомпактно-лиевых разложений группы Ли $H/C = H'$.

Пусть $D' \times M'$ — минимальное бикомпактно-лиевое разложение группы H' . Ему соответствует разложение алгебры Ли K этой группы в прямую сумму двух подалгебр: $K = P + R$, где P — коммутативная подалгебра, содержащаяся в центральной подалгебре A , соответствующей максимальному связному бикомпактному нормальному делителю группы H' (который, как отмечено выше, содержится в центре связной компоненты единицы группы H'). Покажем, что алгебра R не имеет одномерных прямых слагаемых, содержащихся в A . Действительно, если от R отщепляется одномерное прямое слагаемое $Z \subset A$: $R = Z + T$, то, заменяя в случае необходимости образующий элемент z подалгебры Z линейной комбинацией $z + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_k t_k$, где $t_1, \dots, t_k$ — некоторый базис алгебры $A \cap T$, нетрудно добиться, чтобы подгруппа $F' \subset H'$, соответствующая подалгебре $P + Z$, была замкнутой в H' . Но тогда, как нетрудно видеть, существует бикомпактно-лиевое разложение группы H' , у которого бикомпактной компонентой служит F' , а лиева компонента является собственной подгруппой локальной группы M' . Так как, не нарушая общности, можно считать подгруппы F' и D' связными, то $F' \subset D'$, и мы приходим к противоречию с минимальностью разложения $D' \times M'$.

Теперь ясно, что для установления справедливости теоремы достаточно доказать изоморфизм любой пары таких разложений алгебры K в прямую сумму двух подалгебр: $K = A_1 + R_1$, $K = A_2 + R_2$, у которых первые прямые слагаемые содержатся в фиксированной центральной подалгебре A , а от вторых нельзя отщепить ни одного одномерного прямого слагаемого, содержащегося в A . Для решения же этого последнего вопроса достаточно, в свою очередь, доказать равенство размерностей коммутативных подалгебр A_1 и A_2 , ибо изоморфизм алгебр R_1 и R_2 будет в таком случае вытекать из изоморфизма всех разложений алгебры K в прямые суммы неразложимых слагаемых (аналог теоремы Ремака — Шмидта для алгебр Ли). Действительно, разложения алгебр R_1 и R_2 в прямые суммы неразложимых слагаемых могли бы отличаться разве лишь числом одномерных прямых слагаемых, что однако, ввиду равенства размерностей, исключено.

Из очевидных прямых разложений $A = A_1 + (A \cap R_1)$, $A = A_2 + (A \cap R_2)$ непосредственно вытекает, что равенство размерностей алгебр A_1 и A_2 эквивалентно равенству размерностей пересечений $A \cap R_1$ и $A \cap R_2$. Докажем,

что каждое из этих пересечений совпадает с пересечением $A \cap N$, где N — коммутант алгебры K (этого, ввиду сказанного выше, достаточно для доказательства теоремы). Ясно, что $A \cap N$ содержится как в $A \cap R_1$, так и в $A \cap R_2$. С другой стороны, оба пересечения $A \cap R_1$ и $A \cap R_2$ содержатся в N , ибо в противном случае от алгебр R_1 и R_2 отщеплялись бы одномерные прямые слагаемые, содержащиеся в A , что противоречит указанным выше свойствам разложений $A_1 + R_1$ и $A_2 + R_2$. Следовательно, $A \cap R_1 = A \cap R_2 = A \cap N$ и теорема доказана.

1.6. Все предыдущие рассуждения относились к произвольным локально бикompактным группам. Начиная с настоящего пункта, мы ограничимся лишь связным случаем. Так как связная группа не может иметь собственных открытых подгрупп, то, как вытекает непосредственно из леммы 2, любому бикompактно-лиевому разложению $B \times L$ связной локально бикompактной группы G отвечает представление этой группы в виде правильно склеенного произведения бикompактной группы B и связной группы Ли, соответствующей данному разложению. Этот общий результат нуждается в связном случае в дальнейших уточнениях. Первое из этих уточнений относится к конструкции самого правильно склеенного произведения. Дело в том, что, как нетрудно показать на примерах, бикompактные компоненты бикompактно-лиевых разложений связных локально бикompактных групп, вообще говоря, несвязны. Возникает вопрос, при каких условиях правильно склеенное произведение несвязной бикompактной группы и связной группы Ли является связной группой? Ответ на этот вопрос дает следующая

Лемма 5. Фактор-группа G/C прямого произведения $G = A \times B$ локально бикompактной группы A на связную группу B тогда и только тогда связна, когда произведение компоненты D подгруппы C в прямом множителе A на связную компоненту единицы K этого множителя всюду плотно в A .

Доказательство. Если подгруппа DK всюду плотна в A , то подгруппа KBC/C всюду плотна в G/C . Поскольку эта последняя подгруппа, очевидно, связна, связно и ее замыкание G/C .

Предположим теперь, что замыкание F подгруппы DK отлично от A . Ясно, что F — инвариантная подгруппа в A и, ввиду локальной бикompактности группы A , A/F — неединичная вполне несвязная группа. Так как $A/F \cong G/FB$, а подгруппа FB содержит C , то G/C не может в этом случае быть связной группой, ибо она обладает нетривиальной вполне несвязной фактор-группой. Лемма доказана.

1.7. Исследуем теперь строение бикompактных нормальных делителей в связных группах.

Лемма 6. Любой бикompактный нормальный делитель B связной группы G распадается в произведение своего центра Z и связной полупростой инвариантной в G бикompактной подгруппы P .

Доказательство. Обозначим через P максимальный полупростой бикompактный нормальный делитель группы B . Будучи характеристической в B , подгруппа P инвариантна в G . Но тогда, ввиду теоремы 1 из [3], произведение подгруппы P на ее централизатор C в группе B совпадает с B . Подгруппа C , очевидно, бикompактна и инвариантна в G . Связная компонента K ее единицы не содержит нетривиальных полупростых подгрупп и потому,

в силу известного результата о строении связанных бикомпактных групп ([1], стр. 103), коммутативна. Как показал Мальцев ([3], лемма 4), любой коммутативный бикомпактный нормальный делитель связной группы содержится в ее центре. Таким образом, подгруппа K центральна в G . Будучи вполне несвязным нормальным делителем связной группы G/K , бикомпактная группа C/K центральна в G/K . Если R/K — замыкание любой циклической подгруппы из C/K , то R — абелев бикомпактный нормальный делитель группы G . По уже упоминавшейся лемме Мальцева, он входит в центр группы G . Но тогда, очевидно, центральными в G являются все элементы подгруппы C . Теперь ясно, что C совпадает с центром группы B . Поскольку же, как отмечалось выше, $PC = B$, лемма доказана.

1.8. В произвольной связной группе Ли G имеется связная подгруппа, содержащая почти весь центр, то есть такая, что ее пересечение с центром группы G имеет в нем конечный индекс ([7], теорема 9). Отсюда непосредственно вытекает, что минимальные числа образующих всех дискретных центральных подгрупп группы G имеют конечную верхнюю грань $k = k(G)$, которую мы будем называть дискретным рангом центра группы G . Легко видеть, что если связная группа Ли H изоморфна фактор-группе группы G по центральной дискретной подгруппе, то дискретный ранг ее центра не превосходит дискретного ранга центра группы G . В частности, изо всех локально изоморфных связных групп Ли наибольший дискретный ранг центра имеет односвязная группа.

Лемма 7. Для любого бикомпактно-лиевого разложения $B \times L$ связной локально бикомпактной группы G фактор-группа B/D по связной компоненте единицы D бикомпактной группы B коммутативна и имеет всюду плотную подгруппу с конечным числом образующих, не превосходящим дискретного ранга центра связной односвязной группы Ли, локально изоморфной локальной группе L .

Доказательство. Связная локально бикомпактная группа $G' = G/D$ допускает, очевидно, бикомпактно-лиевое разложение $B' \times L'$, где $B' = B/D$, а L' — часть локальной группы LD/L , локально изоморфная L . Так как, группа G' не содержит собственных открытых подгрупп, то, в силу леммы 2, она изоморфна правильно склеенному произведению группы B' и некоторой связной группы Ли H' , локально изоморфной L' . Применяя леммы 1 и 5, получим, что в группе B' имеется всюду плотная абелева группа с конечным числом образующих, абстрактно изоморфная дискретной центральной подгруппе из H' . Отсюда вытекает коммутативность группы B' . Учитывая сделанные в начале настоящего пункта замечания, приходим к выводу о справедливости утверждений леммы.

1.9. Бикомпактную группу B , разлагающуюся в произведение (не обязательно прямое) своего центра и связной бикомпактной полупростой инвариантной подгруппы, условимся называть связно вкладываемой, если в фактор-группе, определяемой связной компонентой ее единицы, всюду плотна подгруппа с конечным числом образующих (ясно, что эта фактор-группа коммутативна).

Легко видеть, что в центре всякой связно вкладываемой бикомпактной группы B найдется абелева подгруппа с конечным числом образующих, даю-

щая в произведении со связной компонентой единицы этой группы подгруппу, всюду плотную в B . Всякую подгруппу A с такими свойствами будем называть правильной подгруппой группы B .

Из лемм 2, 3, 5, 6, 7 непосредственно вытекает

Теорема 2. Пусть B — произвольная связно вкладываемая бикомпактная группа, A — некоторая ее правильная подгруппа, H — любая связная группа Ли, в центре которой имеется подгруппа C , абстрактно изоморфная A , φ — какой-нибудь абстрактный изоморфизм группы C на группу A . Тогда правильно склеенное произведение групп B и H со склеивающим гомоморфизмом φ представляет собою связную локально бикомпактную группу, допускающую бикомпактно-линево разложение, бикомпактная компонента которого изоморфна B , а линева компонента локально изоморфна H . При этом с помощью указанной конструкции может быть получена любая связная локально бикомпактная группа.

1.10. Лемма 8. Любая связная локально бикомпактная группа G распадается в произведение своего максимального полупростого бикомпактного (связного) нормального делителя P и связной компоненты единицы K его централизатора N . Все бикомпактные нормальные делители группы K содержатся в центре этой группы.

Доказательство. В силу теоремы 1 из [3], $PN = G$. Будучи замкнутой подгруппой связной локально бикомпактной группы, подгруппа N представима в виде теоретико-множественной суммы счетного числа своих бикомпактных подмножеств. Поэтому непрерывный гомоморфизм φ группы N на локально бикомпактную группу $PN/PK = G/PK$, индуцируемый естественным гомоморфизмом $G \rightarrow G/PK$, открыт ([12], теорема 8), и, следовательно, $N/(N \cap PK) \cong G/PK$. Так как группа $N/(N \cap PK)$ вполне несвязна, а группа G/PK связна, то последний изоморфизм возможен лишь тогда, когда обе эти группы — единичные. Таким образом, $G = PK$, чем доказано первое утверждение леммы. Второе же утверждение является непосредственным следствием леммы 6 и максимальной полупростоты бикомпактного нормального делителя P .

Имея в виду, что непрерывный гомоморфизм связной локально бикомпактной группы на связную локально бикомпактную группу всегда открыт, в качестве непосредственного следствия леммы 8 получаем следующее предложение:

Теорема 3. Любая связная локально бикомпактная группа изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения связной полупростой бикомпактной группы и связной локально бикомпактной группы, все бикомпактные нормальные делители которой содержатся в ее центре.

Замечание. Из упомянутой в доказательстве леммы 1 теоремы Мальцева вытекает, что всякая связная группа Ли обладает максимальным центральным бикомпактным нормальным делителем (вообще говоря, несвязным). Поскольку связные локально бикомпактные группы являются проективными пределами связных групп Ли ([10], теорема 5), отсюда и из теоремы 3 вытекает наличие максимального бикомпактного нормального делителя во всякой связной локально бикомпактной группе. Ясно, что такой нормальный делитель единственен.

§ 2. Связные локально бикompактные группы с изоморфными алгебрами Ли

2.1. В работе автора [4] алгебра Ли произвольной локально бикompактной группы определена как некоторым естественным образом топологизированное множество всех ее вещественных однопараметрических подгрупп $x(t)$, $y(t)$, ..., на котором введены операции умножения на вещественное число: $\alpha x(t) = x(\alpha t)$, сложения: $x(t) + y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x\left(\frac{t}{n}\right) y\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n$, и коммутирования: $[x(t), y(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x\left(-\frac{t}{n}\right) y\left(-\frac{t}{n}\right) x\left(\frac{t}{n}\right) y\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{n^2}$. Там же

было показано, что алгебра Ли A произвольной локально бикompактной группы распадается в прямую сумму трех подалгебр A_1 , A_2 , A_3 . Первая из них, в свою очередь, распадается в топологическую прямую сумму конечномерных компактных некоммутативных простых алгебр Ли, вторая — в топологическую прямую сумму одномерных алгебр, а третья является конечномерной алгеброй Ли, не имеющей нетривиальных одномерных или компактных прямых слагаемых. Алгебру A_1 мы будем называть компактной полупростой частью алгебры A , алгебру A_2 — коммутативной частью, а алгебру A_3 — некомпактной частью. Все эти три части определяются алгеброй A однозначно с точностью до топологического изоморфизма.

2.2. Пусть A — произвольная вещественная топологическая алгебра Ли имеющая строение, указанное в предыдущем пункте. Существует единственная бикompактная группа P , разлагающаяся в топологическое прямое произведение связных односвязных простых некоммутативных компактных групп Ли, алгебра Ли которой изоморфна компактной полупростой части алгебры A . Мы будем называть эту группу канонической группой, соответствующей компактной полупростой части алгебры A . Существует далее единственная связная коммутативная группа K , разлагающаяся в топологическое прямое произведение одномерных векторных групп, алгебра Ли которой изоморфна коммутативной части алгебры A . Мы будем называть эту группу K канонической группой, соответствующей коммутативной части алгебры A . Наконец, связную односвязную группу Ли N , алгебра Ли которой изоморфна некомпактной части алгебры A , будем называть канонической группой, соответствующей некомпактной части алгебры A .

Обозначим через α мощность множества одномерных прямых слагаемых, в топологическую прямую сумму которых разлагается коммутативная часть алгебры A , а через k — дискретный ранг центра группы Ли N (см. п. 1.8) и построим вполне несвязную бикompактную абелеву группу W , разлагающуюся в топологическое прямое произведение $\alpha + k$ экземпляров групп, изоморфных аддитивной группе целых p -адических чисел, по каждому из всех простых чисел $p = 2, 3, 5, \dots$.

Определение. Топологическое прямое произведение построенных выше групп P , K , N и W будем называть канонической группой, соответствующей алгебре Ли A .

Легко видеть, что алгебра Ли определенной таким образом канонической группы изоморфна исходной алгебре A .

2.3. Лемма 9. *Если $B \times L$ — минимальное бикомпактно-лиевое разложение связной локально бикомпактной группы G и если алгебра Ли группы L имеет нетривиальные коммутативные прямые слагаемые, то в группе G найдется векторная группа R и локальная группа Ли K такие, что $B \times R \times K$ представляет собою локальное прямое разложение группы G , а алгебра Ли группы K не имеет нетривиальных коммутативных прямых слагаемых.*

Доказательство. Локальную группу Ли L можно, очевидно, разложить в прямое произведение некоторой коммутативной локальной группы Ли M и локальной группы Ли N , алгебра Ли которой не имеет нетривиальных коммутативных прямых слагаемых. Обозначим через R коммутативную подгруппу, порожденную элементами множества M . Каждый элемент $x \in R$ содержится, очевидно, в некоторой однопараметрической подгруппе $x(t)$. Как известно ([1], стр. 110), имеет место альтернатива: либо $x(t)$ — одномерная векторная группа, либо ее замыкание есть связная бикомпактная абелева группа. Второй случай исключается, ибо в противном случае с помощью рассуждений, уже применявшихся в доказательстве теоремы 1, можно было бы прийти в противоречие с минимальностью разложения $B \times L$. Таким образом, $x(t)$ — одномерная векторная группа. Отсюда следует, в частности, что пересечение $B \cap R$ содержит лишь единицу, и, значит, ввиду бикомпактности B , $RB/B \cong R$. Являясь связной коммутативной подгруппой группы Ли G/B и имея лишь векторные однопараметрические подгруппы, группа RB/B , а следовательно, и группа R сами являются векторными группами.

Ясно, что естественный гомоморфизм $G \rightarrow G/BK$ индуцирует локальный изоморфизм некоторой части K локальной группы N на окрестность единицы в группе G/BK . Таким образом, $B \times R \times K$ есть локальное прямое разложение группы G . Поскольку алгебры Ли локальных групп K и N совпадают, лемма доказана.

Теорема 4. *Любая связная локально бикомпактная группа G с алгеброй Ли A изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе канонической группы Y , соответствующей алгебре A .*

Доказательство. Пусть B — максимальный бикомпактный полупростой нормальный делитель группы G , а C — связная компонента единицы его централизатора. Группа G изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения $B \times C$ (непосредственное следствие леммы 7), вследствие чего алгебры Ли групп G и $B \times C$ изоморфны ([4], теорема 1). Легко видеть также, что все вполне несвязные нормальные делители канонической группы Y содержатся в ее центре. Поэтому достаточно доказать, что группа $B \times C$ изоморфна фактор-группе группы Y по вполне несвязной центральной подгруппе, иначе говоря, не нарушая общности, можно предполагать, что $G = B \times C$.

Пусть $D \times L$ — минимальное бикомпактно-лиевое разложение группы C . По лемме 9, существуют векторная группа R и локальная группа Ли K такие, что группа C разлагается в локальное прямое произведение $D \times R \times K$, а алгебра Ли $A(K)$ группы K не имеет нетривиальных коммутативных прямых слагаемых. Ясно также, что алгебра $A(K)$ не имеет нетривиальных компактных прямых слагаемых. Поэтому, как нетрудно видеть, она изоморфна некомпактной части алгебры A . Обозначим через H соответствующую ей связную

односвязную группу Li , а через k — дискретный ранг центра группы H . Группа G изоморфна, очевидно, фактор-группе по дискретной центральной подгруппе прямого произведения $B \times D \times R \times H$, причем алгебра Li этого прямого произведения изоморфна A . Поэтому, не нарушая общности, можно доказывать теорему в предположении, что $G = B \times D \times R \times H$.

Далее, связная локально бикompактная группа C/R имеет, как нетрудно видеть, бикompактно-лиевое разложение $D' \times K'$, где $D' \cong D$, а $K' \cong K$. Группа Li , соответствующая этому разложению, локально изоморфна H , и потому, ввиду леммы 7, в фактор-группе группы D по связной компоненте D_0 ее единицы всюду плотна абелева подгруппа с конечным числом образующих (не превосходящим дискретного ранга k центра группы H).

Из леммы 8 вытекает, что бикompактный нормальный делитель D группы C коммутативен. Если D^* — его группа характеров, то из только что полученного результата о строении фактор-группы D/D_0 с помощью перехода к двойственному гомоморфизму заключаем, что периодическая часть группы D^* допускает изоморфное вложение в прямое произведение X групп типа p^∞ , взятых по k экземпляров для каждого простого числа p , и некоторого множества групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел. Можно предполагать при этом, что фактор-группа X/D^* — периодическая. Двойственным такому вложению будет, очевидно, представление группы D в виде фактор-группы по вполне несвязной подгруппе прямого произведения $F \times M$, где F — топологическое прямое произведение одномерных соленидов, а M — вполне несвязная бикompактная абелева группа, разлагающаяся в топологическое прямое произведение групп, изоморфных аддитивной группе целых p -адических чисел, по k экземпляров для каждого простого числа p .

Снова, как и выше, получим, что группа G изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения $B \times F \times M \times R \times H$, что эти две группы имеют изоморфные алгебры Li и что, не нарушая общности, можно положить $G = B \times F \times M \times R \times H$. Таким же способом можно привести наши рассуждения к случаю, когда группа B распадается в топологическое прямое произведение связных односвязных некоммутативных компактных простых групп Li . Легко видеть теперь, что B — каноническая группа, соответствующая компактной полупростой части алгебры A , а H — каноническая группа, соответствующая некомпактной части этой алгебры.

Далее, нетрудно показать, что одномерный соленид изоморфен фактор-группе прямого произведения одномерной векторной группы и счетного множества аддитивных групп целых p -адических чисел, взятых по одному экземпляру для каждого простого числа p , причем фактор-группа берется по некоторой дискретной подгруппе указанного прямого произведения. Действительно, группа характеров одномерного соленида S изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, которая обладает тем очевидным свойством, что фактор-группа по любой ее циклической подгруппе разлагается в прямое произведение квазициклических p -групп, по одной для каждого простого числа p . Поэтому любая вполне несвязная подгруппа одномерного соленида, фактор-группа по которой — (связная) одномерная группа Li , разлагается в топологическое прямое произведение аддитивных групп целых p -адических чисел, по одному экземпляру для каждого простого числа p . Такое строение будет

иметь, в частности, бикомпактная компонента любого бикомпактно-лиевого разложения группы S , имеющего одномерную лиеву компоненту. Существование требуемого представления одномерного солениода в виде фактор-группы теперь очевидно.

Используя последний результат и замечая, что алгебра Ли группы $F \times R$ изоморфна коммутативной части алгебры A , приходим к выводу, что топологическое прямое произведение T аддитивных групп целых p -адических чисел, взятых по α экземпляров для каждого простого числа p , и множества мощности α одномерных векторных групп имеет вполне несвязную подгруппу, фактор-группа по которой изоморфна группе $F \times R$. Но тогда группа G изоморфна фактор-группе по вполне несвязной подгруппе прямого произведения $B \times T \times M \times N$. Поскольку же все вполне несвязные инвариантные подгруппы этого прямого произведения содержатся в его центре, теорема доказана.

2.4. В процессе доказательства теоремы 4 нами было доказано также следующее предложение:

Теорема 5. Любая связная локально бикомпактная группа изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе Z прямого произведения некоторого множества связных некоммутативных простых компактных групп Ли, некоторого множества одномерных солениодов, некоторой связной односвязной группы Ли и, наконец, аддитивных групп целых p -адических чисел, взятых в некотором конечном числе экземпляров для каждого простого числа p .

Разумеется, компонента подгруппы Z в произведении всех вполне несвязных прямых множителей всюду плотна в этом произведении. Обратно, в силу леммы 5, конструкция, указанная в условии теоремы 5, всегда приводит к связной локально бикомпактной группе.

2.5. Доказанная выше теорема 4 представляет собою аналог известного результата о связных группах Ли с изоморфными алгебрами Ли: если M — множество всех связных групп Ли, алгебры Ли которых изоморфны фиксированной алгебре A , то существует такая группа (универсальная накрывающая групп множества M), что любая группа из множества M изоморфна фактор-группе группы G по дискретной центральной подгруппе. Аналогичный результат устанавливается теоремой 4 о множестве N всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых топологически изоморфны некоторой фиксированной топологической алгебре Ли A : существует такая группа G , что любая группа из множества N изоморфна фактор-группе группы G по центральной вполне несвязной подгруппе.

Естественно, что во втором более общем случае потребовалась факторизация не по дискретным, а по вполне несвязным центральным подгруппам: примеры не локально изоморфных связных локально бикомпактных групп с изоморфными алгебрами Ли дают хотя бы одномерный солениод и одномерная векторная группа. Однако между этими случаями имеется и другое, более существенное различие. В то время, как в первом случае упомянутая выше группа G , которую мы будем называть *универсальной*, всегда принадлежит к исходному множеству групп, во втором случае это не имеет места: построенная нами (в теореме 4) универсальная группа оказывается, вообще говоря, несвязной и не локально бикомпактной. Нетрудно убедиться, что причина здесь не в недостаточности наших рассмотрений, а в самом существе дела.

Пусть N — множество всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых одномерны. Как следует из результатов работы [4], это множество состоит из всех связных коммутативных локально бикомпактных групп размерности 1 и содержит, в частности, одномерную векторную группу R и одномерный солениод S . Покажем, что множество N не может иметь в качестве универсальной группы (в смысле настоящего пункта) связной локально бикомпактной группы. Действительно, если бы связная локально бикомпактная группа G была универсальной для множества N , то она должна быть непременно одномерной ([4], теорема 2), а следовательно, и коммутативной (как проективный предел одномерных связных групп Ли). Таким образом, G — либо одномерная векторная, либо одномерная бикомпактная группа. В первом случае, однако, она не может иметь фактор-групп, изоморфных S , а во втором — изоморфных R .

В только что рассмотренном примере универсальной группой служит, очевидно, прямое произведение одномерной векторной группы и аддитивных групп целых p -адических чисел, взятых по одной для каждого простого числа p . Эта группа несвязна, но локально бикомпактна. Нетрудно, впрочем, подобрать пример такого множества связных локально бикомпактных групп с изоморфными алгебрами Ли, у которых универсальная группа не может быть локально бикомпактной.

Действительно, легко видеть, что никакая локально бикомпактная группа не может иметь фактор-групп, изоморфных векторным группам сколь угодно высокой размерности. Поэтому, например, множество всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых разлагаются в топологические прямые суммы счетного (бесконечного) числа одномерных подалгебр, не может иметь локально бикомпактных универсальных групп.

Нетрудно доказать, что множество всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых изоморфны данной фиксированной алгебре Ли A , имеет локально бикомпактную универсальную группу в том и только в том случае, когда коммутативная часть алгебры A конечномерна.

§ 3. Локально связные группы

3.1 Если ограничиться рассмотрением лишь локально связных связных локально бикомпактных групп, то результаты предыдущих параграфов допускают дальнейшие уточнения. Легко понять, в частности, что в любом бикомпактно-лиевом разложении $B \times L$ связной локально связной локально бикомпактной группы G фактор-группа бикомпактной компоненты B по связной компоненте D ее единицы дискретна. В таком случае $D \times L$, очевидно, также будет бикомпактно-лиевым разложением группы G . Ясно также, что группа D должна быть локально связной. Используя лемму 2, приходим к следующему результату:

Теорема 6. *Всякая связная локально связная локально бикомпактная группа изоморфна правильно склеенному произведению связной локально связной бикомпактной группы и связной группы Ли.*

Заметим, что предложение, обратное теореме 6, также, очевидно, верно.

3.2. **Теорема 7.** *Всякая связная локально связная локально бикомпактная группа G изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе группы H , разлагающейся в топологическое прямое*

произведение связной односвязной группы Ли, некоторого множества связных односвязных компактных некоммутативных простых групп Ли и некоторого множества одномерных векторных групп. При этом группа H определяется заданием не самой группы G , а лишь ее алгебры Ли.

Доказательство. Ввиду теоремы 4, существует такой непрерывный и открытый гомоморфизм ψ прямого произведения связной группы H , определяемой по алгебре Ли группы G , и некоторой вполне несвязной бикompактной абелевой группы на группу G , ядром которого служит вполне несвязная центральная подгруппа. Этот гомоморфизм индуцирует непрерывный гомоморфизм φ группы H в группу G . Ядро гомоморфизма φ , очевидно, вполне несвязно и содержится в центре группы H , остается доказать лишь, что гомоморфизм φ открыт и отображает H на группу G .

Всякому бикompактно-лиевому разложению $B_\alpha \times L_\alpha$ группы G соответствует разложение группы H в топологическое прямое произведение $K_\alpha \times H_\alpha$, где H_α — конечномерная группа Ли, $\varphi(K_\alpha) \subset B_\alpha$, а $\varphi(H_\alpha)$ совпадает с подгруппой, порожденной элементами множества L_α . Как уже было отмечено в предыдущем пункте, можно ограничиться рассмотрением только таких бикompактно-лиевых разложений группы G , бикompактные компоненты которых связны.

Если $B_\alpha \times L_\alpha$ и $B_\beta \times L_\beta$ — два бикompактно-лиевых разложения группы G , то будем говорить, что второе разложение больше первого, и обозначать это с помощью неравенства $\beta > \alpha$ тогда и только тогда, когда $B_\beta \subset B_\alpha$, а локальная группа L_β разлагается в прямое произведение локальной группы L_α и некоторой локальной группы Ли L'_β . Наименьшими в этом смысле будут минимальные бикompактно-лиевы разложения в смысле § 1, следующими за ними — разложения, полученные с помощью минимальных бикompактно-лиевых разложений их бикompактных компонент и т. д.

Пусть g — произвольный элемент из G . Для каждого бикompактно-лиевого разложения $B_\alpha \times L_\alpha$ группы G , имеющего связную бикompактную компоненту B_α , выделим такой элемент $h_\alpha \in H_\alpha$, что:

$$1) \quad \varphi(h_\alpha) g^{-1} \in B_\alpha,$$

$$2) \quad h_\beta h_\alpha^{-1} \in K_\gamma \text{ при } \beta > \gamma, \alpha > \gamma.$$

Возможность такого выделения можно установить с помощью индукции по частично упорядоченному множеству индексов α . Действительно, если $B_0 \times L_0$ — минимальное разложение группы G , то, ввиду очевидного равенства $B_0 \cdot \varphi(H_0) = G$, можно выбрать элемент $h_0 \in H_0$ со свойством: $\varphi(h_0) g^{-1} \in B_0$. Если элемент h_α уже выбран, то пусть $B_\beta \times L'_\beta$ — минимальное бикompактно-лиевое разложение (связной) группы B_α . Ясно, что $B_\beta \times L'_\beta \times L_\alpha = B_\beta \times L_\beta$ — бикompактно-лиевое разложение группы G , а $\beta > \alpha$. Если H'_β — подгруппа группы H , которая отображается на подгруппу, порожденную элементами множества L'_β , с помощью отображения φ , то, как легко видеть, $H_\beta = H'_\beta \times H_\alpha$ и $B_\alpha = B_\beta \cdot \varphi(H'_\beta)$. Поэтому можно выбрать элемент $h'_\beta \in H'_\beta$ такой, что $\varphi(h'_\beta h_\alpha) g^{-1} \in B_\beta$. Элемент $h'_\beta h_\alpha$ примем за h_β . Продолжая таким образом, получим набор элементов $\{h_\alpha\}$, обладающий отмеченными выше свойствами 1) и 2).

Поскольку для любой окрестности единицы U в группе H найдется такой индекс γ , что $K_\gamma \subset U$, свойство 2) означает правофундаментальность направленного множества $\{h_\alpha\}$ (оно будет, впрочем, также и левофундаментальным). Будучи топологическим прямым произведением полных в смысле Вейля (даже локально бикompактных!) подгрупп, группа H также полна в смысле Вейля ([2], теорема 5). Поэтому направленное множество элементов $\{h_\alpha\}$ сходится к некоторому элементу $h \in H$.

Пусть теперь W — произвольная окрестность единицы в G , а V — такая ее окрестность, что $V^2 \subset W$. Существует такой индекс α , для которого $B_\alpha \subset V$ ([3], теорема А). Ввиду непрерывности гомоморфизма φ , индекс α можно выбрать так, чтобы одновременно имело место включение $\varphi(hh_\alpha^{-1}) \in V$. Так как, на основании свойства 1), элемент $\varphi(h_\alpha)g^{-1}$ также принадлежит V , то элемент $\varphi(hh_\alpha^{-1}) \cdot \varphi(h_\alpha)g^{-1} = \varphi(h)g^{-1}$ содержится в $V^2 \subset W$. Ввиду произвольности W , это означает, что $\varphi(h) = g$, а поскольку g — произвольный элемент из G , нами доказано, что гомоморфизм φ отображает H на всю группу G .

Фактически нами доказано также, что при любом α имеет место равенство

$$3) \quad \varphi(K_\alpha) = B_\alpha.$$

Выбирая полную систему окрестностей единицы $\{H_{\alpha, \delta}\}$ в каждой из групп H_α , легко заметить, что $\{K_\alpha \cdot H_{\alpha, \delta}\}$ представляет собою полную систему окрестностей единицы в группе H . Вместе с тем из соотношения 3) непосредственно вытекает, что гомоморфизм φ переводит любую из этих окрестностей в окрестность единицы группы G . Следовательно, отображение φ открыто, и теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 7 мы использовали фактически лишь то обстоятельство, что группа G обладает бикompактно-лиевыми разложениями со сколь угодно малыми связными бикompактными компонентами. Очевидно, что *всякая связная, но не локально связная локально бикompактная группа допускает хотя бы одно бикompактно-лиевое разложение, в бикompактной компоненте которого связная компонента единицы определяет недискретную фактор-группу.*

3.3. Следующее предложение переносит на произвольные локально связные локально бикompактные группы одно известное свойство групп Ли:

Теорема 8. *В любой локально связной локально бикompактной группе G имеется окрестность единицы U , каждый элемент которой содержится в вещественной однопараметрической подгруппе.*

Доказательство. Так как непрерывный гомоморфизм переводит однопараметрические подгруппы в однопараметрические, то достаточно установить наличие окрестности единицы с требуемыми свойствами в группе H из условия предыдущей теоремы. Группа H представляет собою топологическое прямое произведение некоторой связной односвязной группы Ли L , некоторого множества связных некоммутативных компактных простых групп Ли P_α и некоторого множества одномерных векторных групп R_β . В группе L найдется окрестность единицы V , каждый элемент которой содержится в однопараметрической подгруппе этой группы. Но тогда окрестность единицы

U группы H , являющаяся произведением множеств P_α , R_β и V , обладает тем же свойством. Действительно, все элементы подгрупп P_α содержатся в однопараметрических подгруппах ([5], следствие 2 из теоремы 1.2), для групп R_β такое свойство тривиально. Но тогда оно имеет место и для произведения K всех групп P_α и R_β , а значит, и для множества $K \cdot V = U$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Любая связная локально связная локально бикомпактная группа порождается множеством своих элементов, содержащихся в однопараметрических подгруппах.

Следствие 2. Любая связная локально связная локально бикомпактная группа линейно связна.

3.4. Теорема 9. *Любая линейно связная локально бикомпактная группа G локально связна.*

Доказательство. Ввиду теоремы А из [3], в группе G существует полная система окрестностей единицы вида $B \times L$, где B — бикомпактная группа, а L — локальная группа Ли. Предположим, что группа G не локально связна. На основании замечания, сделанного в конце предыдущего пункта, найдется фактор-группа H группы G , допускающая бикомпактно-лиевое разложение $D \times K$ с вполне несвязной недискретной бикомпактной компонентой D . Вместе с тем группа H , очевидно, линейно связна. Покажем, что существование группы с такими свойствами ведет к противоречию.

Действительно, обозначим через N подгруппу, порожденную элементами множества K . Являясь непрерывным гомоморфным образом связной группы Ли, группа N не может совпадать с H , ибо иначе соответствующий гомоморфизм был бы непременно открытым ([9], теорема 12) и, следовательно, группа H сама была бы группой Ли, что противоречит наличию у нее вполне несвязной недискретной замкнутой подгруппы D .

Таким образом, $N \neq H$, и в H найдется элемент h , не содержащийся в N . Пусть $h(t)$ — непрерывный путь, соединяющий этот элемент с единицей: $h(0) = e$, $h(1) = h$. Так как $V = DK$ — окрестность единицы в H , то найдется такое число $\alpha > 0$, что $h(t) \in V$ при $0 \leq t \leq \alpha$. Ввиду полной несвязности подгруппы D , это возможно лишь тогда, когда

$$4) \quad h(t) \in N \text{ при } 0 \leq t \leq \alpha.$$

Обозначим через δ верхнюю грань чисел α , для которых имеет место соотношение 4). Ясно, что $0 < \delta \leq 1$. Найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $h(t) \in W \cdot h(\delta)$ при $\delta - \varepsilon \leq t \leq \delta$, где W — окрестность единицы в H с $W^2 \subset V$ и $W^{-1} = W$. Тогда, как легко проверить, $h(t) \in V \cdot h(\delta - \varepsilon)$ при $\delta - \varepsilon \leq t \leq \delta$. Так как множество $V \cdot h(\delta - \varepsilon)$ представляет собою окрестность элемента $h(\delta)$, то, ввиду определения числа δ , найдется такое число $\varepsilon_1 \geq 0$, что $h(\delta + \varepsilon_1) \in N$, а при $\delta - \varepsilon \leq t \leq \delta + \varepsilon_1$ $h(t) \in V \cdot h(\delta - \varepsilon)$.

Множество $V \cdot h(\delta - \varepsilon)$ разлагается в топологическое произведение множества $K \cdot h(\delta - \varepsilon)$ и вполне несвязного множества D . Пусть $h(t)$ ($\delta - \varepsilon \leq t \leq \delta + \varepsilon_1$) проходит внутри этого множества, а его проекция в D соединяет точку e с точкой $d \neq e$. Ввиду полной несвязности множества D , это

невозможно. Таким образом, предположение о том, что группа G не локально связна, привело нас к противоречию, и, следовательно, теорема доказана.

Из только что доказанной теоремы и следствия 2 предыдущей теоремы вытекает

Следствие. Связная локально бикompактная группа тогда и только тогда линейно связна, когда она локально связна.

3.5. Теорема 10. *В центре любой связной локально бикompактной группы G имеется хотя бы одна вполне несвязная бикompактная подгруппа, фактор-группа по которой локально связна.*

Доказательство. Согласно теореме 4, $G \cong (H \times D)/C$, где H — связная локально связная группа, а D — бикompактная вполне несвязная центральная в $H \times D$ подгруппа. Так как подгруппа DC/C группы $(H \times D)/C$ также центральна, бикompактна и вполне несвязна, то, ввиду теоремы о гомоморфизме, достаточно доказать локальную связность группы $(H \times D)/DC$. Поскольку же последняя группа изоморфна фактор-группе локально связной группы $(H \times D)/D \cong H$, теорема доказана.

Следствие. Связная локально бикompактная группа без центра или с дискретным центром локально связна.

(Поступило в редакцию 2/IX 1957 г.)

Литература

1. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, Москва, ИИЛ, 1950.
2. Н. Я. Виленкин, К теории слабо сепарабельных групп, Матем. сб., **22(64)** (1948), 135—177.
3. В. М. Глушков, Строение локально бикompактных групп и пятая проблема Гильберта, Успехи матем. наук, т. XII, вып. **2(74)** (1957), 3—41.
4. В. М. Глушков, Алгебры Ли локально бикompактных групп, Успехи матем. наук, т. XII, вып. **2(74)** (1957), 137—142.
5. Е. Б. Дынкин и А. Л. О니щик, Компактные группы Ли в целом, Успехи матем. наук, т. X, вып. **4(66)** (1956), 3—74.
6. K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math., **50**, N 3 (1949), 507—558.
7. А. И. Мальцев, On the theory of Lie groups in the large, Матем. сб., **16(58)** (1945), 163—190.
8. А. И. Мальцев, Топологические разрешимые группы, Матем. сб., **19(61)** (1946), 165—174.
9. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, Гостехиздат, 1954.
10. H. Yamabe, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math., **58**, N 2 (1953), 351—365.

Письмо в редакцию

В статье «Локально нильпотентные группы без кручения, полные над простыми топологическими полями» (Матем. сб., **37(79)** (1955), 477—506) по моей вине пропущено условие p -адической полноты в формулировке теоремы 4.7. Теорема должна формулироваться следующим образом:

Нильпотентные группы Ли конечного ранга над полем p -адических чисел и только они являются p -адически полными, локально бикompактными, локально нильпотентными группами без кручения, удовлетворяющими второй аксиоме счетности.

В доказательстве теоремы исправлений делать не нужно, так как пропущенное в формулировке условие в нем используется.

В. М. Глушков

Об оценке среднего модуля в классе ограниченных однолистных функций

И. Е. Базилевич (Москва)

Для класса S функций

$$w = f(z) = z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad (1)$$

однолистных и регулярных в круге $|z| < 1$, мною была доказана [1], в частности, следующая теорема:

В классе S образ $D^*(r)$ круга $|z| \leq r < 1$, соответствующий функции $f^*(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, покрывает наибольшую часть окружности $|w| = x$, если $x \geq e^{\frac{\pi}{e}} r$.

На основании этого предложения были получены далее оценки интегралов $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi$, $\int_0^{2\pi} |f^2(re^{i\varphi})| d\varphi$, $0 \leq r < 1$, и коэффициентов c_n .

Целью настоящей статьи является усиление указанной теоремы на случай ограниченных функций из класса S и оценка их среднего модуля.

Рассмотрим класс S_M ограниченных функций $f(z) \in S$, $|f(z)| < M$. Для этих функций справедливы ([1], [2]), следующие теоремы, на которые мы будем опираться в дальнейшем.

А. Для каждой пары чисел z_1 и z_2 , $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$, справедливы следующие неравенства:

$$\frac{|f(z_1)f(z_2)| \sqrt{1-|z_1|^2} \sqrt{1-|z_2|^2}}{|z_1 z_2| \sqrt{1-\tau^2} |f(z_1)|^2 \sqrt{1-\tau^2} |f(z_2)|^2} \leq \leq \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leq \frac{|f(z_1)f(z_2)| \sqrt{1-\tau^2} |f(z_1)|^2 \sqrt{1-\tau^2} |f(z_2)|^2}{|z_1 z_2| \sqrt{1-|z_1|^2} \sqrt{1-|z_2|^2}}, \quad (A)$$

где $\tau = M^{-1}$.

Знак равенства слева имеет место для каждой пары z_1 и z_2 , подчиненной дополнительному условию $|z_1| = |z_2| = r < 1$, а справа — только при $z_1 = z_2$, т. е. для $f'(z)$. Экстремальные функции в левом неравенстве конформно отображают круг $|z| < 1$ на области, полученные из круга $|w| \leq M$ удалением двух отрезков (с произвольным отношением их длин), лежащих на общем диаметре и примыкающих одним из своих концов к окружности $|w| = M$.

При $\tau = 0$ отсюда вытекают известные неравенства Г. М. Голузина и Лёвнера.

Б. Для каждой пары чисел z_1 и z_2 , $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$, справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \tau |f(z_1)|}{1 - \tau |f(z_1)|} \cdot \frac{1 - |z_1|}{1 + |z_1|} \cdot \frac{1 + \tau |f(z_2)|}{1 - \tau |f(z_2)|} \cdot \frac{1 - |z_2|}{1 + |z_2|} \leq \\ & \leq \left| \frac{V\bar{f(z_1)} + V\bar{f(z_2)}}{V\bar{f(z_1)} - V\bar{f(z_2)}} \cdot \frac{\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}}{\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2}} \right|^2 \leq \\ & \leq \frac{1 - \tau |f(z_1)|}{1 + \tau |f(z_1)|} \cdot \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|} \cdot \frac{1 - \tau |f(z_2)|}{1 + \tau |f(z_2)|} \cdot \frac{1 + |z_2|}{1 - |z_2|}, \end{aligned} \quad (B)$$

где $\tau = M^{-1}$.

Экстремальные функции в обеих частях неравенства конформно отображают круг $|z| < 1$ на области, полученные из круга $|w| < M$ удалением одного радиального отрезка, примыкающего одним из своих концов к окружности $|w| = M$.

Замечание. В этой формулировке последние неравенства легко получаются из неравенства (11₇) работы [1] (стр. 150) при помощи хорошо известного преобразования.

Теорема 1. Для каждой функции $f(z) \in S_M$, $M > 4$, мера $l(r, x, M)$ пересечения окружности $|w| = x$ с образом $D(r)$ круга $|z| \leq r < 1$ не превосходит меры $l^*(r, x, M)$ пересечения той же окружности с образом $D^*(r)$ круга $|z| \leq r < 1$, соответствующим функции

$$f^*(z; \tau) = \frac{(1+z)^2 - 2\tau z - (1+z)V(1+z)^2 - 4\tau z}{2\tau z}, \quad \tau = M^{-1},$$

т. е.

$$l(r, x, M) \leq 2x \arccos \frac{(1-r^2)^2 x - r[(1+r^2)(1+\tau^2 x^2) - 4\tau r x]}{2[r(1+\tau^2 x^2) - \tau x(1+r^2)]}, \quad (I)$$

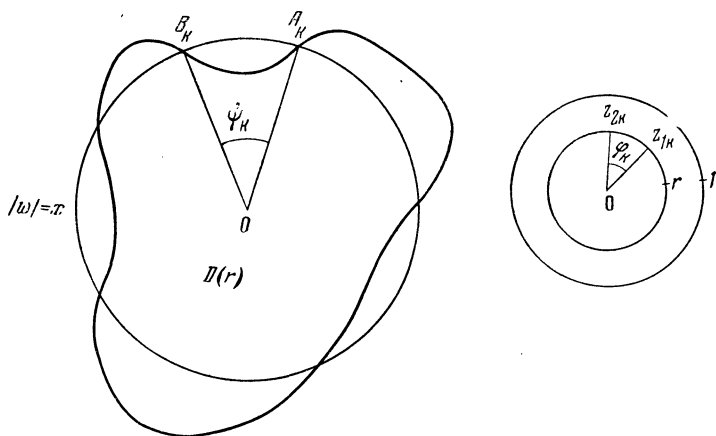
если $0,5 \leq r < 1$ и $x \geq 8r$. Экстремальная функция $f^*(z; \tau)$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w| < M$ из которого удален радиальный сегмент от точки $w = M$ до $w = \frac{2 - \tau - 2\sqrt{1 - \tau}}{\tau}$.

Доказательство. Рассмотрим область $D(r)$ и окружность $|w| = x$. По принципу Линделёфа ([3], стр. 291; [4]) эта окружность при $x > r$ не может содержаться в $D(r)$. Если же она содержит внутри себя область $D(r)$, то теорема, очевидно, справедлива. Поэтому рассмотрим случай пересечения линии уровня L_r (границы области $D(r)$) с окружностью $|w| = x$ (фиг. 1). Пусть одна из дуг $\widetilde{A_k B_k}$ окружности $|w| = x$ имеет свои концы на L_r и лежит вне $D(r)$. Обозначим соответствующий ей центральный угол через $\psi_k = \psi_k(x)$. Пусть прообразами точек A_k и B_k на окружности $|z| = r$ будут соответственно z_{1k} и z_{2k} . Обозначим центральный угол дуги $\widetilde{z_{1k} z_{2k}}$ окружности $|z| = r$ через $\varphi_k = \varphi_k(x)$. В силу аналитичности линии L_r число n_x таких дуг $\widetilde{A_k B_k}$ конечно. Наша задача состоит в оценке снизу величины

$$\psi = \sum_{k=1}^{n_x} \psi_k.$$

Для каждого угла ψ_k воспользуемся неравенствами (В), в которых положим $|z_{1k}| = |z_{2k}| = r$ и $|f(z_{1k})| = |f(z_{2k})| = x$. Тогда получим:

$$\frac{1-r}{1+r} \cdot \frac{1+\tau x}{1-\tau x} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_k}{4} \leq \operatorname{tg} \frac{\psi_k}{4} \leq \frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1-\tau x}{1+\tau x} \operatorname{tg} \frac{\varphi_k}{4}. \quad (\text{В}')$$



Фиг. 1

Аналогично первое из неравенств (А) в наших условиях дает:

$$x \leq \frac{r}{1-r^2} \frac{\sin \frac{\psi_k}{2}}{\sin \frac{\varphi_k}{2}} (1 - \tau^2 x^2), \quad (\text{А}')$$

так как

$$\frac{|z_{1k} - z_{2k}|}{2r} = \sin \frac{\varphi_k}{2}, \quad \frac{|f(z_{1k}) - f(z_{2k})|}{2x} = \sin \frac{\psi_k}{2}.$$

Возможно одно из двух:

- 1) один из углов $\varphi_k = \varphi^*$ удовлетворяет неравенству $\frac{\pi}{4} \leq \frac{\varphi^*}{4} \leq \frac{\pi}{2}$,
- 2) ни один из углов φ_k не удовлетворяет указанному неравенству, т. е.

для всех номеров k $0 < \frac{\varphi_k}{4} < \frac{\pi}{4}$.

В первом случае $\sin \frac{\varphi^*}{2}$ убывает при возрастании $\frac{\varphi^*}{4}$ в интервале $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Поэтому мы можем лишь увеличить правую часть неравенства (А'), заменив величину $\frac{\varphi^*}{2}$ из левого неравенства (В') ее верхней графью. Перепишем неравенство (А') в форме

$$x \leq \frac{r}{1-r^2} (1 - \tau^2 x^2) \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi^*}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi^*}{4} \right) \frac{\operatorname{tg} \frac{\psi^*}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi^*}{4}}$$

и подставив в правую часть $\frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1-\tau x}{1+\tau x} \cdot \operatorname{tg} \frac{\psi^*}{4}$ вместо $\operatorname{tg} \frac{\varphi^*}{4}$, получим:

$$x \leq r \left[\frac{(1-\tau x)^2}{(1-r)^2} \cdot \sin^2 \frac{\psi^*}{4} + \frac{(1+\tau x)^2}{(1+r)^2} \cos^2 \frac{\psi^*}{4} \right]. \quad (2)$$

Покажем, что при условии $0 < \frac{\psi^*}{4} < \frac{\pi}{2}$ правая часть неравенства (2) монотонно возрастает вместе с ψ^* , а потому это неравенство в рассматриваемом случае 1) дает оценку угла ψ^* снизу. С этой целью преобразуем его так:

$$x \leq r \left[\frac{(1+r^2)(1+\tau^2 x^2) - 4\tau r x}{(1-r^2)^2} - \frac{2r(1+\tau^2 x^2) - 2\tau x(1+r^2)}{(1-r^2)^2} \cos \frac{\psi^*}{2} \right]. \quad (2')$$

В силу леммы Шварца, $\tau x = \tau |f(z)| < r$, если $f(z) \neq z$, $|z| = r$, а потому $r(1+\tau^2 x^2) - \tau x(1+r^2) > 0$, что и доказывает утверждение. Так как $\frac{l(r, x, M)}{x} = 2\pi - \psi^*$, то

$$\cos \frac{l(r, x, M)}{2x} = \cos \left(\pi - \frac{\psi^*}{2} \right) = -\cos \frac{\psi^*}{2}.$$

Подставляя в неравенство (2') величину $\cos \frac{\psi^*}{2}$, получим:

$$x \leq r \left[\frac{(1+r^2)(1+\tau^2 x^2) - 4\tau r x}{(1-r^2)^2} + \frac{2r(1+\tau^2 x^2) - 2\tau x(1+r^2)}{(1-r^2)^2} \cos \frac{l(r, x, M)}{2x} \right].$$

Отсюда в рассматриваемом случае 1) и следует утверждение теоремы:

$$l(r, x, M) \leq 2x \arccos \frac{x(1-r^2)^2 - r[(1+r^2)(1+\tau^2 x^2) - 4\tau r x]}{2r(1+\tau^2 x^2) - 2\tau x(1+r^2)}. \quad (I)$$

Знак равенства здесь имеет место для указанной в теореме функции $f^*(z; \tau)$, так как для этой функции каждое из неравенств, которыми мы пользовались, превращается в равенство. Легко видеть также, что все экстремальные функции рассматриваемой задачи в случае 1) получаются из функции $f^*(z; \tau)$ преобразованием поворота единичного круга.

Рассмотрим теперь другую возможность. Пусть B — наибольшая односвязная область, содержащая $w = \infty$ и внешняя по отношению к кругу $|w| \leq x$ и к области $D(r)$ (фиг. 2). Ее граница Γ состоит из дуг $\widetilde{A_k B_k}$ окружности $|w| = x$ и дуг линии уровня L_r , внешних по отношению к кругу $|w| \leq x$.

Мы оценим снизу $\sum_{k=1}^{n'_x} \psi_k$, где сумма распространяется только на дуги $\widetilde{A_k B_k} \in \Gamma$.

На основании неравенства (A') имеем:

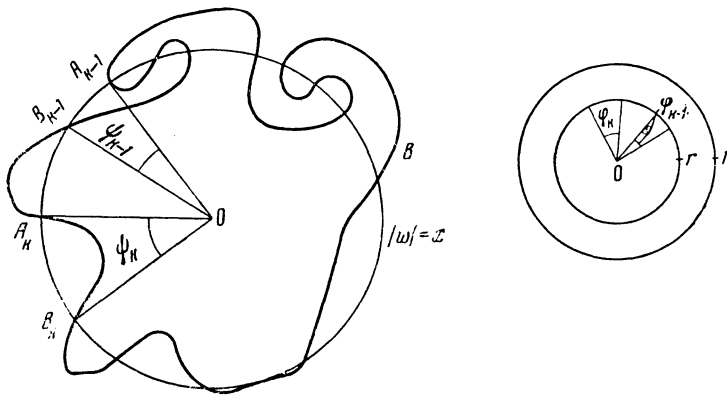
$$\frac{1-r^2}{r} x \sum_{k=1}^{n'_x} \sin \frac{\varphi_k}{2} \leq \sum_{k=1}^{n'_x} (1-\tau^2 x^2) \sin \frac{\psi_k}{2};$$

но в силу того, что $0 < \frac{\varphi_k}{4} < \frac{\pi}{4}$, для всех номеров k справедливо неравенство $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\varphi_k}{2} \leq \sin \frac{\varphi_k}{2}$ и, кроме того, $\sin \frac{\psi_k}{2} < \frac{\psi_k}{2}$. Поэтому, полагая $\sum_{k=1}^{n'_x} \varphi_k = \varphi$

и $\sum_{k=1}^{n'_x} \psi_k = \psi$, получим:

$$\frac{1-r^2}{r} \cdot x \cdot \frac{\varphi}{\pi} < \frac{\psi}{2} (1-\tau^2 x^2). \quad (3)$$

Отметим на окружности $|z| = r$ прообразы точек A_k и B_k и соответствующий им угол φ_k . Так как смежные по отношению к φ_k дуги окружности $|z| = r$ отображаются в дуги, лежащие вне круга $|w| \leq x$, то мера $r\tilde{\varphi}$ тех дуг окружности $|z| = r$, на которых $|f(z)| < x$, не превосходит $r\varphi = r \sum_{k=1}^{n'_x} \varphi_k$, откуда $\tilde{\varphi} \leq \varphi$. Оценим $\tilde{\varphi}$ снизу. Полагая $x = kr$, $k > 1$, рассмотрим интеграл



Фиг. 2

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|f(re^{i\theta})|}{kr} d\theta = \ln \frac{1}{k},$$

который запишем так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{|f(re^{i\theta})|}{kr} d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{kr}{|f(re^{i\theta})|} d\theta = \ln \frac{1}{k}.$$

Отсюда

$$\ln k \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{kr}{|f(re^{i\theta})|} d\theta \leq \frac{\tilde{\varphi}}{2\pi} \ln k \frac{[(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r)\sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}]}{2}, \quad (4)$$

так как $\ln^+ \frac{kr}{|f(re^{i\theta})|} > 0$ лишь на множестве меры $\tilde{\varphi}$ и, на основании известной теоремы искажения ([5], стр. 62; [6], стр. 28) для ограниченных однолистных функций, справедливо неравенство

$$|f(re^{i\theta})| \geq \frac{2r}{(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r)\sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}}.$$

Так как последнее выражение есть $\min_{|z|=r} |f^*(z; \tau)| < r$, то

$$A = \frac{(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r)\sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}}{2} > 1.$$

Положим $k = A^\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда неравенство (4) после сокращения на $\ln A > 0$ даст оценку $\tilde{\varphi}$ снизу в форме

$$\alpha \leq \frac{\tilde{\varphi}}{2\pi}(\alpha + 1),$$

откуда

$$\varphi \geq \tilde{\varphi} \geq \frac{2\pi\alpha}{\alpha + 1}, \quad (5)$$

причем

$$x = kr = A^\alpha r.$$

Из неравенств (3) и (5) следует:

$$\frac{1-r^2}{r} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha+1} \cdot x \leq \frac{\psi}{2} (1 - \tau^2 x^2). \quad (6)$$

Остается сравнить оценки (2) и (6). Если окажется, что при некоторых значениях $\alpha > 0$ и $0 < r < 1$ нижняя грань для ψ , полученная из неравенства (6), окажется больше, чем нижняя грань для ψ^* , полученная из неравенства (2), то это будет значить, что сумма длин дуг $\widetilde{A_k B_k}$ окружности $|\omega| = x$, не покрытых областью $D(r)$, не меньше (при втором предположении относительно φ_k), чем для функции $f^*(z; \tau)$, указанной в теореме, так как равенство в (2) реализуется как раз этой функцией для всех значений x , заключенных между $\min_{|z|=r} |f^*(z; \tau)|$ и $\max_{|z|=r} |f^*(z; \tau)|$.

Из неравенств (2) и (6) выводим уравнения, определяющие нижние грани ψ^* и ψ :

$$x = r \left[\frac{(1-\tau x)^2}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\psi^*}{4} + \frac{(1+\tau x)^2}{(1+r)^2} \cos^2 \frac{\psi^*}{4} \right], \quad (2)$$

$$x = \frac{1+\alpha}{4\alpha} \cdot \frac{r}{1-r^2} (1 - \tau^2 x^2) \psi, \quad (6)$$

где

$$x = rA^\alpha = r \left[\frac{(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r) \sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}}{2} \right]^\alpha.$$

Отбрасывая в равенстве (2) второе слагаемое и оценивая снизу $\sin \frac{\psi^*}{4} \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\psi^*}{4}$, получим:

$$\psi^* < \frac{2\pi(1-r)}{1-\tau x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}, \quad (2')$$

и из (6):

$$\psi \geq \frac{4\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1-r^2}{r} \cdot \frac{x}{1-\tau^2 x^2}. \quad (6')$$

Сравнивая эти неравенства, видим, что из неравенства

$$\frac{2\pi(1-r)}{1-\tau x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}} \leq \frac{4\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1-r^2}{r} \cdot \frac{x}{1-\tau^2 x^2}$$

будет следовать, что $\psi^* \leq \psi$. Упрощая последнее неравенство, получаем:

$$\pi \leq \frac{2\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1+r}{1+\tau x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}. \quad (7)$$

Это неравенство будет выполнено, если $\pi \leq \frac{2x}{1+\alpha} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}$, так как, в силу леммы Щварца, $\tau x < r$ и потому $\frac{1+r}{1+\tau x} > 1$. Но rA^α и $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ возрастают вместе с α ; поэтому достаточно найти такое $\alpha = \alpha_0$, для которого при $0,5 \leq r < 1$ и $\tau \leq 0,25$ выполняется неравенство $\pi \leq \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}$; тогда при $\alpha > \alpha_0$ это неравенство также будет выполнено. Возьмем $\alpha_0 = 3$. Тогда

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}} \geq \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{7}}{2} \right]^{\frac{3}{2}} > 2,8 \text{ и } \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\pi < \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}} \text{ при } \alpha_0 = 3, \quad 0,5 \leq r < 1 \text{ и } \tau \leq 0,25.$$

Это и доказывает теорему.

Замечание. В условии теоремы указаны простейшие неравенства для r , x и τ , при выполнении которых эта теорема справедлива. Как можно заметить из доказательства, теорема верна для таких значений r , x и τ , при которых нижняя грань для ϕ из неравенства (6) больше, чем нижняя грань для ψ^* из неравенства (2).

Обозначим через $S_M^{(k)}$ подкласс симметричных функций $f_k(z)$, полученных преобразованием $f_k(z) = \sqrt[k]{f(z^k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) из функций $f(z)$ класса S_M . На основании теоремы 1 и геометрического смысла указанного преобразования легко устанавливается

Теорема 1'. Для каждой функции $f_k(z) \in S_M^{(k)}$, $M > 4$, мера $l_k(r, x, M)$ пересечения окружности $|w| = x$ с образом $D_k(r)$ круга $|z| \leq r < 1$ не превосходит меры $l_k^*(r, x, M)$ пересечения той же окружности с образом $D_k^*(r)$ круга $|z| \leq r < 1$, соответствующим функции $f_k^*(z; \tau) = \sqrt[k]{f^*(z^k; \tau)}$, если $0,5 \leq r^k < 1$ и $x^k \geq 8r$, т. е.

$$l_k(r, x, M) \leq 2x \cdot \arccos \frac{x^k(1-r^k)^2 - r^k[(1+r^{2k})(1+\tau^2 x^{2k}) - 4r^k \tau]}{2r^k(1+\tau^2 x^{2k}) - 2\tau x^k(1+r^{2k})}. \quad (I_k)$$

Теорема 2. Для всякой функции $f_k(z) \in S_M^{(k)}$ справедливо неравенство

$$M_\alpha = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_k(\rho e^{i\theta})|^\alpha \cdot |f_k'^2(\rho e^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_k^*(\rho e^{i\theta}; \tau)|^\alpha \cdot |f_k^{*2}(\rho e^{i\theta}; \tau)| d\theta + \\ + c_k(r, \alpha), \quad (II)$$

где $c_k(r, \alpha) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 1$ и

$$f_k^{*k}(z; \tau) = \frac{(1+z^k)^2 - 2\tau z^k - (1+z^k)\sqrt{(1+z^k)^2 - 4\tau z^k}}{2\tau z^k}, \quad \tau = M^{-1} \leq 0,25.$$

Замечание. Величина $c_k(r, \alpha)$ не зависит от M и, во всяком случае, не превосходит $4^{\frac{\alpha}{k}} \max_{0 \leq \tau \leq 0,5} \varepsilon_k^*(r; \tau)$, где $\varepsilon_k^*(r; \tau)$ — площадь той области, заключенной между окружностью $|\omega| = \sqrt[k]{4}$ и линией уровня L_r функции $f_k^*(z; \tau)$, которая стягивается к граничному отрезку при $r \rightarrow 1$, а потому может быть оценена (см., например, [1]). Естественно предполагать, что неравенство теоремы справедливо и при $c_k(r, \alpha) = 0$, однако доказать это не удается.

Для доказательства неравенства (II) достаточно подсчитать M_α интегрированием по области $D_k(r)$:

$$M_\alpha = \iint_{D_k(r)} x^{1+\alpha} d\psi dx = \int_0^{\sqrt[k]{4}} x^\alpha l_k(r, x, M) dx + \int_{\sqrt[k]{4}}^{\sqrt[k]{M}} x^\alpha l_k(r, x, M) dx.$$

В силу теоремы 1', второе слагаемое имеет наибольшую величину для функции $f_k^*(z; \tau)$, а первое отличается от $\int_0^{\sqrt[k]{4}} x^\alpha l_k^*(r, x, M) dx$ не более, чем на $4^{\frac{\alpha}{k}} \varepsilon_k^*(r; \tau)$, что и доказывает теорему 2.

В частности, при $\alpha = 0$ мы получаем отсюда оценку площади $\sigma_k(r)$ области $D_k(r)$. Далее, хорошо известны следующие соотношения:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = 4\pi \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \rho^{2n-1} d\rho = 4 \int_0^r \frac{\sigma_1(\rho)}{\rho} d\rho,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi = \int_0^{2\pi} |f_2(\sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}})|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} |f_2(\sqrt{r} e^{i\varphi})|^2 d\varphi = 4 \int_0^{\sqrt{r}} \frac{\sigma_2(\rho)}{\rho} d\rho.$$

Заменяя в них величины $\sigma_1(\rho)$ и $\sigma_2(\rho)$ соответственно через $\sigma_1^*(\rho; \tau) + \varepsilon_1^*(\rho; \tau)$ и $\sigma_2^*(\rho; \tau) + \varepsilon_2^*(\rho; \tau)$ при $\rho^k \geq 0,5$ ($k = 1, 2$) и через $\pi \max_{|z|=\rho} |f_k(z)|^2$ ($k = 1, 2$) при $0 \leq \rho^k < 0,5$, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. Для каждой функции $f(z) \in S_M$ имеют место неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi &\leq \int_0^{2\pi} |f^*(re^{i\varphi}; \tau)|^2 d\varphi + c_1(r), \\ \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi &\leq \int_0^{2\pi} |f^*(re^{i\varphi}; \tau)| d\varphi + c_2(r), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

в которых $c_1(r)$ и $c_2(r)$ не зависят от M и не превосходят, во всяком случае, величин:

$$c_1(r) \leq \pi \int_0^{0,5} \frac{\rho d\rho}{(1-\rho)^4} + 4 \int_{0,5}^r \frac{\varepsilon_1^*(\rho; \tau)}{\rho} d\rho \text{ и } c_2(r) \leq \pi \int_0^{\sqrt{0,5}} \frac{\rho d\rho}{(1-\rho^2)^2} + 4 \int_{\sqrt{0,5}}^{\sqrt{r}} \frac{\varepsilon_2^*(\rho; \tau)}{\rho} d\rho.$$

Положим

$$I(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi, \quad I(1, f) = \lim_{r \rightarrow 1} I(r, f)$$

и отметим простую оценку величины $I(1, f)$ в классе функций $f(z) \in S_M$.

Теорема 4. Для каждой функции $f(z) \in S_M$ справедливо неравенство

$$I(1, f) \leq \frac{8}{3\pi} \sqrt{M} + C, \quad (\text{IV})$$

где C — абсолютная постоянная, которая может быть оценена (см. замечание). Главный член при $M \rightarrow +\infty$ в этой оценке является точным.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, достаточно вычислить интеграл

$$I(1, f^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\varphi}; \tau)| d\varphi = \int_0^{2\pi} |f_2^*(e^{i\varphi}; \tau)|^2 d\varphi.$$

Но

$$f_2^*(z; \tau) = \frac{z^2 - 1 + \sqrt{(1-z^2)^2 + 4\tau z^2}}{2\tau z}, \quad \tau = M^{-1} \leq 0,25$$

и

$$f_2^*(e^{i\varphi}; \tau) = \frac{\sqrt{\tau - \sin^2 \varphi} + i \sin \varphi}{\tau}.$$

Поэтому

$$I(1, f^*) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin \sqrt{\tau}} \frac{d\varphi}{\tau} + \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \sqrt{\tau}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 \varphi - \tau - 2 \sin \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - \tau}}{\tau^2} d\varphi.$$

В результате вычислений получаем:

$$I(1, f^*) = \frac{4 \arcsin \sqrt{\tau}}{\pi \tau} + \frac{2 \sqrt{1-\tau}}{\pi \tau \sqrt{\tau}} - \frac{2 \arcsin \sqrt{\tau}}{\pi \tau^2}.$$

Далее имеем:

$$(1 - \tau)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{8}\tau^2 - \dots,$$

$$(1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\tau + \frac{3}{8}\tau^2 + \dots,$$

$$\arcsin \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau} + \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{3}{40}\tau^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Наконец,

$$I(1, f^*) = \frac{8\sqrt{M}}{3\pi} + \frac{4}{15\pi\sqrt{M}} + \dots < \frac{8\sqrt{M}}{3\pi} + \text{const}, \quad (8)$$

что и доказывает утверждение.

Замечание. Абсолютная постоянная C складывается из абсолютной постоянной $c_2(1)$ теоремы 3 (при $r=1$) и верхней грани остаточного члена в разложении (8) по степеням $M \geq 4$.

Следствие. Пусть нечетная функция $\varphi(z) = z + b_3 z^3 + \dots$ принадлежит классу S . Тогда справедливы неравенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}|^2 r^{2k-2} \leq \frac{8}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r^{k-1} + C \quad (9_1)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}|^2 r^{2k-1} \leq \frac{16}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r^{2k-1} + C, \quad (9_2)$$

где C — абсолютная постоянная теоремы 4.

Доказательство. Положим

$$\psi(z) = \frac{1}{r_0} \varphi(r_0 z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{2k-1} z^{2k-1}, \quad 0 < r_0 < 1.$$

Тогда $\psi(z) \in S_M$, где $M = \frac{1}{r_0} \max_{|z|=r_0} |\varphi(z)|$. На основании теоремы 4 мы можем

написать:

$$I(1, \psi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{2k-1}|^2 \leq \frac{8}{3\pi} M + C \leq \frac{8}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{2k-1}| + C.$$

Но $\beta_{2k-1} = b_{2k-1} r^{2k-2}$ и поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}|^2 r_0^{4k-4} \leq \frac{8}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r_0^{2k-2} + C.$$

Полагая $r_0^2 = r$, мы и получаем неравенство (9₁).

Чтобы получить неравенство (9₂), достаточно воспользоваться одной из лемм Хеймана [7], в силу которой имеем:

$$\frac{1-r_0^2}{r_0} \max_{|z|=r_0} |\varphi(z)| \leq \frac{1-r_0^4}{r_0^2} \max_{|z|=r_0} |\varphi(z^2)| \leq \frac{1-r_0^4}{r_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r_0^{4k-2}.$$

Отсюда следует:

$$M \leq \frac{1+r_0^2}{r_0^2} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r_0^{4k-2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r_0^{4k-4}$$

и

$$I(1, \phi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_{2k-1}|^2 \leq \frac{16}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r_0^{4k-4} + C,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}|^2 r_0^{4k-4} \leq \frac{16}{3\pi} \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r_0^{4k-4} + C.$$

Полагая $r_0^2 = r$, получаем неравенство (9₂).

Замечание: Для каждой индивидуальной функции $\varphi(z) \in S$ Хейманом [7] установлены предельные равенства вида

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r^2) \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}| r^{2k-1} = \sqrt{\alpha}$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1} (1-r^2) \sum_{k=1}^{\infty} |b_{2k-1}|^2 r^{2k-1} = \alpha.$$

Из них следует, что для каждой отдельно взятой функции $\varphi(z) \in S$ коэффициенты $\frac{8}{3\pi}$ и $\frac{16}{3\pi}$ неравенств (9) не являются наилучшими при $r \rightarrow 1$ и $\alpha > 0$. Однако надо иметь в виду, что эти неравенства являются *равностепенными для всего семейства нечетных функций* $\varphi(z) \in S$ и $0 \leq r < 1$.

(Поступило в редакцию 19/IX 1957 г.)

Литература

1. И. Е. Базилевич, О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций, Матем. сб., **28(70)** (1951), 147—164.
 2. И. Е. Базилевич, О теоремах искажения в теории однолистных функций, Матем. сб., **28(70)** (1951), 283—292.
 3. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
 4. А. Ф. Бермант, О некоторых обобщениях принципа Э. Линделёфа и их применениях, Матем. сб., **20(62)** (1947), 55—112.
 5. R. Nevanlinna, Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises, Övers. av Finska Vet. Soc. Förh. (1919), 62.
 6. Н. А. Лебедев, Об областях значений функционалов, заданных на классах аналитических функций, Докторская диссертация, ЛГУ, 1955.
 7. W. K. Hayman, The asymptotic behaviour of p -valent functions, Proc. London Math. Soc., **5**, № **19** (1955), 257—284.
-

Об одном методе начертательной геометрии

В. А. Маневич (Москва)

В настоящей работе рассматривается взаимно однозначное соответствие между точками пространства и парами точек на плоскости, основанное на свойствах линейного комплекса и нулевой системы. Это соответствие легло в основу предлагаемого ниже метода начертательной геометрии.

Рассмотрим два проективных пучка $|O| \bar{\wedge} |O'|$ (см. фиг. 1), которые лежат в разных плоскостях и у которых общий луч сам себе соответствует. На основании известной теоремы прямые, пересекающие соответственные лучи этих пучков, образуют линейный комплекс Σ , относительно которого устанавливается нулевая корреляция. Таким образом, благодаря проективным пучкам $|O|$ и $|O'|$ образуется нулевая система.

Пусть γ — произвольная плоскость, пересекающая плоскости α и β соответственно по прямым γ_α и γ_β ,

$$\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta \equiv P \subset OO', \quad a \cap \gamma_\alpha \equiv M.$$

$$b \cap \gamma_\alpha \equiv N, \quad a' \cap \gamma_\beta \equiv M', \quad b' \cap \gamma_\beta \equiv N'.$$

Прямые MM' и NN' , являясь лучами комплекса Σ , лежащими в плоскости γ , и потому они пересекаются в точке $Q \equiv MM' \cap NN'$, которая является нулевой точкой плоскости γ .

Повернем плоскости α и β около OO' до их совпадения; получим эпюр с осью OO' . Пучки $|O|$ и $|O'|$ при этом вращении останутся проективными, но будут лежать в одной плоскости — в плоскости эпюра, а так как общий луч OO' этих пучков сам себе соответствует, то $|O| \bar{\wedge} |O'|$.

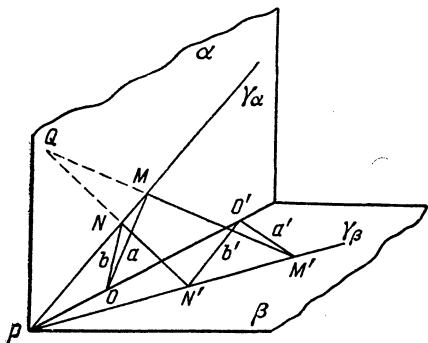
Пусть g — ось перспективы пучков $|O|$ и $|O'|$. Перспективные ряды γ_α и γ_β после вращения остались также перспективными, но центр их перспективы Q занял на эюре новое положение Q_1 . Будем считать точку Q_1 на эюре соответствующей точке Q в пространстве. Однако, это соответствие не взаимно однозначно. В том случае, когда плоскость γ задается на эюре своими следами γ_α и γ_β , можно построить единственную точку Q_1 , соответствующую нулевой точке Q плоскости γ . Возьмем в плоскости эпюра произвольную точку K (см. фиг. 2) и посмотрим, сколько существует плоскостей в пространстве, нулевые точки которых отображаются в точку K , и какова зависимость существует между следами этих плоскостей на эюре.

Возьмем произвольную точку $F \in OO'$. Поставим перед собой следующую задачу:

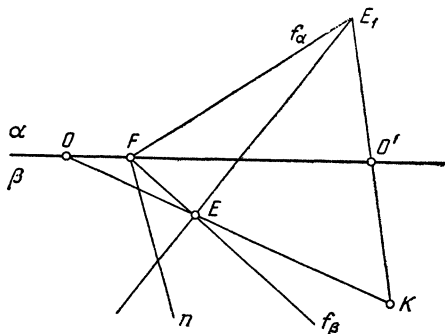
Существуют ли плоскости, проходящие через точку F , нулевые точки которых отображаются в точку K ? Если такие плоскости существуют, найти их следы.

Решим эту задачу. Пусть n — произвольная прямая, проходящая через точку F . Посмотрим, может ли n быть следом искомой плоскости.

Для этого рассмотрим перспективные пучки $|O'|$ и $|K|$ с осью перспективы n . Так как $|O'| \bar{\wedge} |O|$ с осью перспективы g , то $|O| \bar{\wedge} |K|$. Для того чтобы n была следом искомой плоскости, нужно, чтобы пучки $|O|$ и $|K|$ были перспективны. Пучки $|O|$ и $|K|$ будут перспективны в том случае, когда



Фиг. 1



Фиг. 2

общий луч OK сам себе соответствует; последнее возможно только в том случае, когда прямая n проходит через точку $E \equiv OK \cap g$. В этом случае второй след искомой плоскости будет проходить через точку $E_1 \equiv O'K \cap g$.

Таким образом, через произвольную точку F прямой OO' можно провести единственную плоскость f , нулевая точка которой будет отображаться в точку K . Прямая FE будет следом f_β , прямая FE_1 — следом f_α (так как $|O'|$ лежит в плоскости β , а $|O|$ — в плоскости α). Точки F и K вполне определяют на эмпоре положение плоскости, нулевая точка которой отображается в точку K . Нетрудно видеть, что существует пучок плоскостей с осью EE_1 (где E и E_1 — следы этой прямой на плоскостях β и α), нулевые точки которых отображаются в точку K . Покажем, что произвольной точке пространства M соответствует на эмпоре пара точек, одна из которых лежит на прямой OO' . Действительно, пусть μ — нулевая плоскость точки M , $\mu \cap OO' \equiv M'$. Так как плоскость μ — вполне определенная, можно построить, как было указано выше, единственную точку M_1 , соответствующую точке M . Пара точек (M_1, M') — искомая.

Обратное тоже верно, т. е. произвольная пара точек (F, K) , из которой $F \in OO'$, определяет единственную точку пространства. Действительно, точки F и K определяют следы единственной плоскости, нулевая точка которой отображается в точку K .

Если рассмотреть произвольную точку X_1 плоскости α , то ее нулевая плоскость будет проходить через точку O' и через прямую $O'X_1 \subset \text{пл. } \beta$, соответствующую прямой OX_1 . Таким образом, всякой точке X_1 плоскости α соответствует пара точек (X_1, O') . Если рассмотреть произвольную точку Y_1 плоскости β , то ее нулевая плоскость будет проходить через точку O и через прямую $OY_1 \subset \text{пл. } \alpha$, соответствующую прямой $O'Y_1$. Таким образом, всякой точке Y_1 плоскости β соответствует пара точек (Y_1, O) .

Итак, существует взаимно однозначное соответствие между точками X пространства и парами точек (X_1, X') эпюра, где $X' \in OO'$.

Пусть MN — произвольная прямая, где M и N — следы этой прямой соответственно на плоскостях α и β . Посмотрим, как построить прямую, сопряженную прямой MN относительно линейного комплекса Σ .

Прямой OM пучка $|O|$ соответствует прямая m пучка $|O'|$; следовательно, плоскость Mm есть нулевая плоскость для точки M . Прямой $O'N$ пучка $|O'|$ соответствует прямая n пучка $|O|$; следовательно, плоскость Nn есть нулевая плоскость для точки N , $n \cap MO' \equiv M'$, $m \cap ON \equiv N'$. Прямая $M'N'$ является прямой пересечения плоскостей Mm и Nn и потому она сопряжена относительно комплекса Σ прямой MN . Построение точек M', N' на эпюре является очень простым.

Рассмотрим вопрос о представлении на эпюре произвольной прямой пространства. Пусть MN — произвольная прямая пространства, а $M'N'$ — прямая, сопряженная ей относительно линейного комплекса Σ . Тогда точки прямой MN являются нулевыми точками плоскостей, проходящих через прямую $M'N'$. Будем искать геометрическое место точек эпюра, соответствующих нулевым точкам плоскостей пучка $|M'N'|$ (см. фиг. 3).

Возьмем произвольную плоскость ζ пучка $|M'N'|$,

$$\zeta \cap OO' \equiv X, \quad \zeta_\alpha \cap g \equiv P, \quad \zeta_\beta \cap g \equiv K.$$

На основании вышеизложенного выводим, что точка $Y \equiv PO' \cap KO$ соответствует нулевой точке плоскости ζ . Когда плоскость ζ вращается около прямой $M'N'$, точка X пробегает прямую OO' . Имеем:

$$M'(M'X) \overline{\wedge} g(P), \quad N'(N'X) \overline{\wedge} g(K),$$

$$M'(M'X) \overline{\wedge} N'(N'X);$$

следовательно,

$$g(P) \overline{\wedge} g(K),$$

$$O(O'K) \overline{\wedge} g(K), \quad O'(O'P) \overline{\wedge} g(P),$$

отсюда,

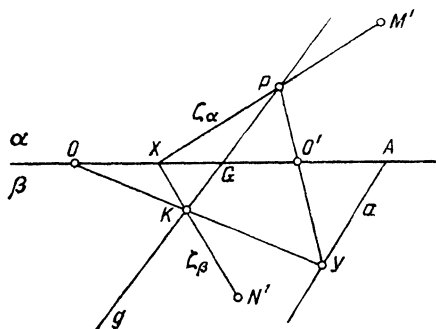
$$O(O'K) \overline{\wedge} O'(O'P);$$

но у этих пучков луч OO' сам себе соответствует и потому $O(O'K) \overline{\wedge} O'(O'P)$.

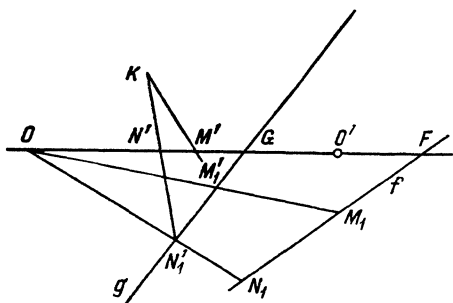
Пусть a — ось перспективы этих пучков: $a \cap OO' \equiv A$. $OO'(X) \overline{\wedge} g(K)$ с центром перспективы в точке N' . $g(K) \overline{\wedge} a(Y)$ с центром перспективы в точке O . Следовательно, $OO'(X) \overline{\wedge} a(Y)$, причем точке $G \equiv OO' \cap g$ ряда OO' соответствует точка $A \equiv a \cap OO'$ ряда a . Каждой паре соответственных точек проективных рядов a и OO' соответствует единственная точка прямой MN , и, наоборот, каждой точке прямой MN соответствует пара соответственных точек рядов OO' и a . Так как MN — произвольная прямая пространства, то все вышесказанное относится к любой прямой пространства.

Нетрудно заметить, что прямая a будет проходить через точки M и N , так как эти точки прямой MN отображаются на эпюр соответственно в пары (M, O') и (N, O) .

Пусть между прямыми OO' и f , где f — произвольная прямая (см. фиг. 4), установлено проективное соответствие следующим образом: точке $F \equiv f \cap OO'$ ряда f соответствует точка $G \equiv OO' \cap g$ ряда OO' , точкам M_1 и N_1 ряда f соответствуют точки M' и N' ряда OO' (M_1, N_1 — произвольные точки прямой f ; M', N' — произвольные точки прямой OO'),



Фиг. 3



Фиг. 4

$$OO' (G, M', N', \dots) \overline{\wedge} f (F, M_1, N_1, \dots),$$

$$f (F, M_1, N_1, \dots) \overline{\wedge} g (G, M'_1, N'_1, \dots)$$

с центром перспективы в точке O ; следовательно,

$$g (G, M'_1, N'_1, \dots) \overline{\wedge} OO' (G, M', N', \dots).$$

Пусть центром перспективы этих рядов будет точка K . Очевидно, точка K будет одним из следов прямой KZ (Z — второй след этой прямой, он находится аналогично; на основании вышеизложенного можно сказать, что K — след на плоскости β), сопряженная которой относительно Σ будет отображаться в проективные ряды

$$f (F, M_1, N_1, \dots) \overline{\wedge} OO' (G, M', N', \dots).$$

Между прямолинейными рядами f и OO' можно установить ∞^2 проективных соответствий, таких, что точке $F \in f$ соответствует точка $G \in OO'$. Следовательно, существует ∞^2 прямых, отображающихся в различные проективные соответствия между прямыми f и OO' . Так как прямых f в плоскости эпюра ∞^2 , то существует ∞^4 проективных соответствий между прямыми эпюра f и прямой OO' , которые отображают ∞^4 прямых пространства.

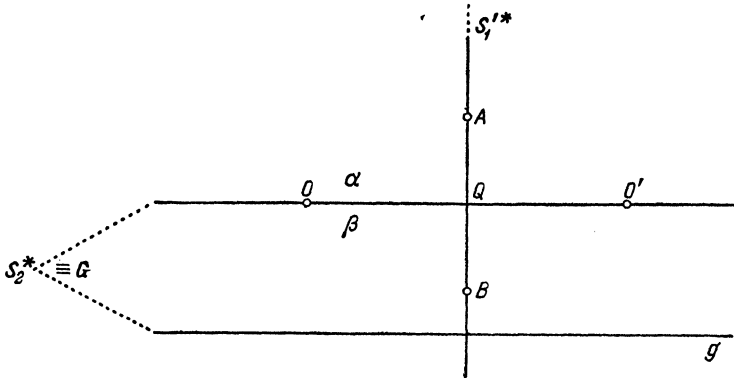
Итак, каждая прямая пространства отображается на эпюр в два проективных ряда, один из которых есть OO' .

Посмотрим, как изображаются на эпюре плоскости, проходящие через прямую OO' . OO' является лучом линейного комплекса, определяемого пучками $|O| \overline{\wedge} |O'|$; поэтому нулевые точки плоскостей пучка $|OO'|$ лежат на прямой OO' . Пусть M — произвольная точка прямой OO' , а μ — нулевая

$$OO' (O, O', Q, \dots) \overline{\wedge} OO' (\beta, \alpha, \gamma, \dots),$$

$$OO' (\beta, \alpha, \gamma, \dots) \overline{\wedge} AB (B, A, S_1^*, \dots);$$

следовательно, $OO' (O, O', Q, \dots) \overline{\wedge} AB (B, A, S_1^*, \dots)$. [На эюре [получим следующую картину (см. фиг. 6):



Фиг. 6

Прямая AB задана своими следами $A (A, O')$ и $B (B, O)$, причем $AB \cap OO' \equiv Q$, $AQ = BQ$; точка S_1^* спроектировалась в точку S_1^{**} . Точке Q должна соответствовать точка $G \equiv OO' \cap g$ (g — ось перспективы пучков $|O|$ и $|O'|$); так как $AB (B, A, S_1^*, Q) \overline{\wedge} OO' (O, O', Q, G)$, то $G \equiv S_2^*$, где S_2^* — несобственная точка прямой OO' .

Обратно, если имеется вышеуказанный эюр, то точке Q ($OQ = O'Q$) соответствует нулевая плоскость γ , которая является бисекторной плоскостью четных квадрантов, так как она проходит через S_1^* .

Рассмотрим прямую MN :

$$MN (M, N, K, \dots) \overline{\wedge} OO' (\alpha, \beta, \gamma, \dots);$$

следовательно,

$$MN (M, N, K, \dots) \overline{\wedge} OO' (O', O, Q, \dots)$$

и

$$MN (M, N, K, S^*) \overline{\wedge} OO' (O', O, Q, S_2^*).$$

Так как несобственные точки рядов MN и OO' являются соответствующими, то рассматриваемые проективные ряды MN и OO' сохраняют простое отношение. Пусть X — произвольная точка прямой MN , X' — соответствующая точка [на OO' ; тогда $\frac{MX}{XN} = \frac{O'X'}{X'O}$. Если X_1 и X_2 — ортогональные проекции точки X соответственно на плоскости β и α , то $\frac{MX}{XN} = \frac{O'X'}{X'O} = \frac{XX_2}{XX_1}$.

Последнее дает возможность легко переходить от задания точки в данном эюре к заданию точки в эюре Монжа.

Кратко остановимся на следующих метрических задачах.

1) Измерение отрезков. Пусть отрезок AB перпендикулярен пло-

скости β . Нетрудно видеть, что главное изображение этого отрезка A_1B_1 равно по длине самому отрезку AB . Итак, длина любого отрезка, перпендикулярного плоскости β , равна его главному изображению.

Аналогичное утверждение справедливо и для отрезков, перпендикулярных плоскости α . Вообще, так как главное изображение фигуры есть параллельная проекция оригинала на плоскость α (β) из точки S^* , то можно сказать, что длина любого отрезка, параллельного одной из плоскостей α или β , равна его главному изображению. Последнее дает возможность находить длину отрезка, занимающего произвольное положение в пространстве.

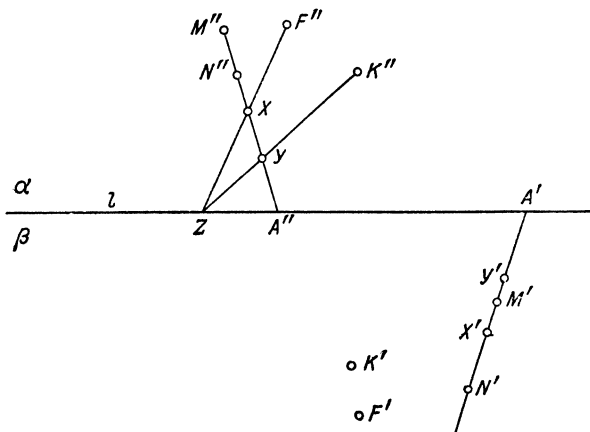
2) Перпендикулярность прямой к плоскости.

Задача. Через данную точку $A(A_1, A')$ провести перпендикуляр к плоскости $f(f_\alpha, f_\beta)$.

Решим эту задачу. Находим следы любой прямой M_α и N_β , перпендикулярной плоскости $f(f_\alpha, f_\beta)$. (Построение проводится так же, как в эпюре Монжа.) Прямая, проходящая через точку A_1 и параллельная прямой $M_\alpha N_\beta$, будет искомой (проективное соответствие, выделяемое искомой прямой, вполне определено).

С помощью рассматриваемого эпюра докажем следующую теорему:

Пять произвольных лучей (общего положения) линейного комплекса вполне определяют этот комплекс.



Фиг. 7

Доказательство. Пусть ось эпюра l есть луч линейного комплекса (см. фиг. 7). Четыре остальных луча линейного комплекса заданы с помощью своих следов на плоскостях α и β . Комплекс будет построен, если мы найдем положение прямой g и точек O и O' . Имеем:

$$M'N' \cap l \equiv A', \quad M''N'' \cap l \equiv A''.$$

Между прямыми $M'N'$ и $M''N''$ установим проективное соответствие

$$M'N'(M', N', A', \dots) \bar{\wedge} M''N''(M'', N'', A'', \dots). \quad (1)$$

Рассмотрим перспективное соответствие

$$F''(F''Z) \bar{\wedge} K''(K''Z), \quad (2)$$

высекающее на $M''N''$ проективное соответствие

$$M''N''(X) \bar{\wedge} M''N''(Y).$$

В проективном соответствии (1) точке X соответствует точка X' , точке Y — точка Y' . Соответствие между точками X' и Y' будет проективным, так как оно является произведением проективных соответствий (1) и (2). Имеем:

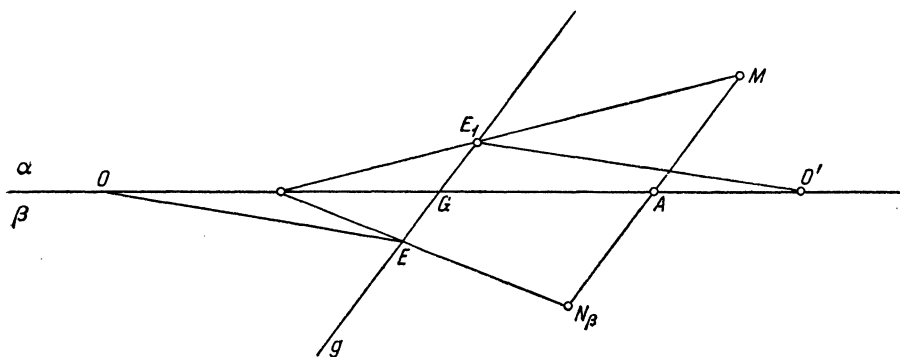
$$K'(K'Y') \bar{\wedge} F'(F'X').$$

Эти пучки высекают на прямой l проективное соответствие, в котором A' — двойная точка. Обозначим через O' вторую двойную точку этого проективного соответствия. Построенные выше соответствия определяют на прямой l точку O , соответствующую точке O' . Вурф лучей $(OM'', ON'', OF'', OK'', l) = (O'M', O'N', OF', OK', l)$; следовательно, пучки $|O|$ и $|O'|$ перспективны; ось перспективы этих пучков g является искомой прямой. Комплекс построен.

Диаметры нуль-системы. Прямые, сопряженные относительно линейного комплекса несобственным прямым пространства, называются диаметрами нуль-системы. Пусть T^* — нулевая точка несобственной плоскости пространства. В силу инцидентности диаметры нуль-системы должны проходить через T^* , и потому они будут параллельны между собой. Посмотрим, как располагаются диаметры на эпюре. Следы несобственной плоскости совпадают с несобственной прямой плоскости эпюра.

Нулевые точки плоскостей, следы которых на эпюре совпадают, проектируются из S^* в точки прямой g . Следовательно, T^* проектируется из S^* на эпюр в несобственную точку прямой g .

Таким образом, диаметры рассматриваемой нуль-системы изображаются на эпюре прямыми, параллельными прямой g .



Фиг. 8

Проведем произвольную прямую OE и $O'E_1 \parallel OE$ (см. фиг. 8) (точки E и E_1 лежат на g). Тогда, очевидно, точки E_1 и E являются следами некоторого диаметра на плоскостях α и β . Имеем: $\triangle OGE \sim \triangle O'GE_1$. Следовательно,

$$\frac{E_1G}{GE} = \frac{O'G}{GO}.$$

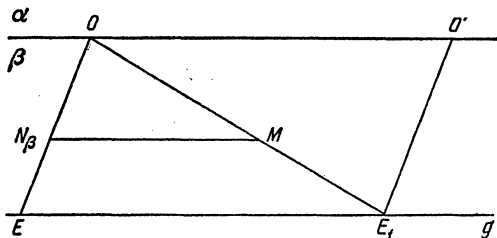
Пусть M и N_β — следы произвольного диаметра, $MN_\beta \cap OO' \equiv A$. Учи-

тая, что все диаметры параллельны между собой, имеем:

$$\frac{MA}{AN_{\beta}} = \frac{O'G}{GO}.$$

Эта формула дает возможность строить любой диаметр нуль-системы.

На эпюре, в котором $g \parallel OO'$, вышеприведенные построения примут следующий вид (см. фиг. 9):



Фиг. 9

$$\frac{MN_{\beta}}{E_t E} = \frac{MN_{\beta}}{O'O} = \frac{OM}{OE_1}.$$

Эта формула дает возможность строить любой диаметр на данном эпюре.

Ось нуль-системы (ось линейного комплекса). Диаметр нуль-системы, перпендикулярный к нулевым плоскостям свсих точек, называется осью линейного комплекса или нуль-системы. Покажем, что линейный комплекс имеет единственную ось. Действительно, проведем плоскость, перпендикулярную диаметрам нуль-системы. Тогда прямая, сопряженная несобственной прямой этой плоскости, будет осью линейного комплекса или рассматриваемой нуль-системы.

Ниже приводится построение оси линейного комплекса на нашем эпюре (см. фиг. 10).

Теорема. *Линейный комплекс вполне определен своей осью и произвольным лучом.*

Доказательство. Пусть даны ось комплекса a и его произвольный луч l . Проведем через l две взаимно перпендикулярные плоскости α и β ,

$$a \cap \text{пл. } \alpha \equiv M,$$

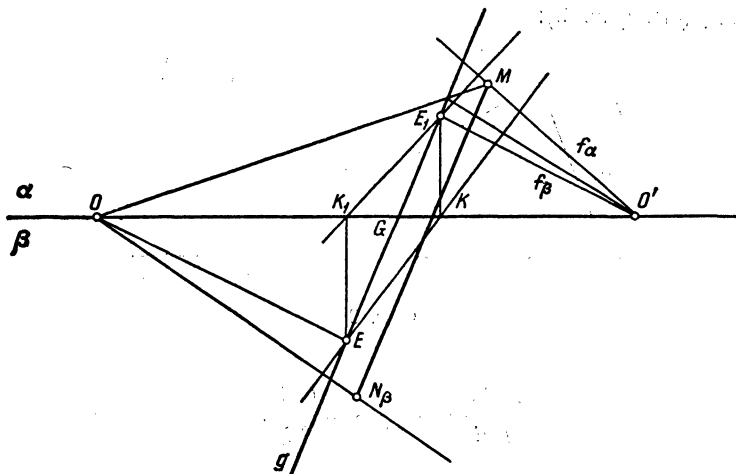
$$a \cap \text{пл. } \beta \equiv N_{\beta}.$$

Повернув плоскости α и β до их совмещения, получим эпюр с осью l (эпюр Монжа). Через точку M проведем плоскость $f(f_{\alpha}, f_{\beta})$, перпендикулярную прямой MN_{β} , пл. $f \cap l \equiv O'$. Через точку N_{β} проводим прямую, параллельную прямой f_{β} , до пересечения с l в точке O . Пусть $OM \cap f_{\beta} \equiv K$. Через точку K проводим прямую g , параллельную MN_{β} . O, O' и g определяют линейный комплекс (так как определяют его эпюр).

На основании вышеизложенного определенный таким образом комплекс имеет MN_{β} своей осью, а $OO' \equiv l$ — своим лучом. Полученный комплекс

не будет зависеть от выбора двух взаимно перпендикулярных плоскостей α и β .

В работе [1] доказано, что при приведении системы векторов к какой-либо точке главный вектор параллелен центральной оси (оси нуль-системы), а главный момент параллелен нормали к полярной плоскости (нулевой плоскости) точки приведения. Отсюда непосредственно вытекает построение

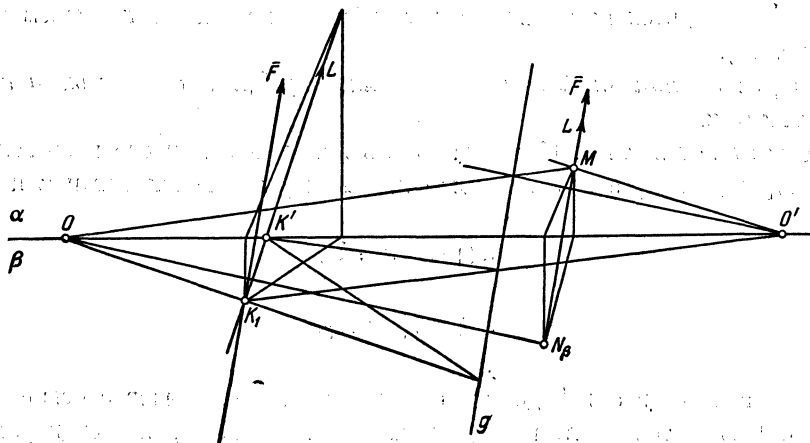


Фиг. 10

$(M, O') (N_\beta, O)$ — следы оси линейного комплекса на плоскостях α и β

главного вектора и главного момента системы сил в произвольной точке пространства на эпюре (см. фиг. 11).

Известно также (см. [2]), что если система сил задана главным вектором и главным моментом, направленным по оси нуль-системы, то данную



Фиг. 11

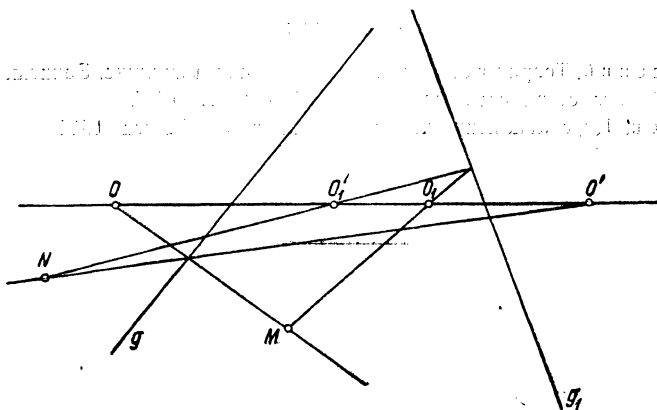
Приведение системы сил в произвольную точку $K(K_1, K')$

систему сил можно заменить двумя силами, из которых одна направлена по произвольной прямой, а другая — по прямой, сопряженной первой. Подобные замены можно просто осуществить на рассматриваемом эпюре.

Применение данного метода позволяет легко получить свойство линейной конгруэнции.

Действительно, линейную конгруэнцию можно задать на чертеже (см. фиг. 12) прямой OO' , на которой имеется пара точек O_1, O'_1 , и прямыми g и g_1 .

Прямая g и точки O, O' определяют некоторый линейный комплекс Σ ; прямая g_1 и точки O_1, O'_1 определяют другой линейный комплекс Σ_1 . Общие лучи этих комплексов принадлежат линейной конгруэнции.



Фиг. 12

Возьмем на чертеже произвольную точку M . Лучу OM пучка $|O|$ соответствует луч $O'N$ пучка $|O'|$; лучу O_1M пучка $|O_1|$ соответствует луч O'_1N пучка $|O'_1|$. Точки M и N являются следами некоторого луча линейной конгруэнции. Так как точка M была взята произвольно, то можно сказать, что на чертеже установлено взаимно однозначное точечное соответствие, в котором M и N — пара соответственных точек. Легко видеть, что это соответствие является коллинеацией с двойной прямой OO' .

Таким образом, получена известная теорема:

Два коллинеарных поля, линия пересечения которых сама себе соответствует, определяют линейную конгруэнцию.

Рассмотрим три пары перспективных пучков $|O| \overline{\wedge} |O'|$, $|O_1| \overline{\wedge} |O'_1|$, $|O_2| \overline{\wedge} |O'_2|$, центры которых лежат на одной прямой (оси эпюра), а осями перспективы которых являются соответственно прямые g, g_1, g_2 . Этими данными определяются три линейных комплекса, общие лучи которых принадлежат одной поверхности второго порядка F^2 .

Геометрическое место точек X , для которых лучи пучков $|O'|$, $|O'_1|$, $|O'_2|$, соответствующие лучам OX, O_1X, O_2X , пересекаются в одной точке X' , есть кривая второго порядка α^2 . Точки X' образуют кривую второго порядка β^2 (это положение можно использовать для построения прибора, вычерчивающего кривые второго порядка). Кривые α^2 и β^2 являются следами поверхности F^2 соответственно на плоскостях α и β .

Таким образом, линейчатая поверхность второго порядка вполне определяется на эпюре тремя произвольными прямыми g, g_1, g_2 и тремя произ-

вольными парами точек O, O' ; O_1, O'_1 ; O_2, O'_2 , лежащих на одной прямой (оси эюра).

Такое определение позволяет просто решать на эюре позиционные задачи на линейчатые поверхности второго порядка.

(Поступило в редакцию 19/VII 1957 г.)

Литература

1. Н. З а н ч е в с к и й, Теория винтов и приложения ее к механике, Записки Матем. отд. Новороссийского об-ва естествоиспытателей, Одесса, 1889.
2. О. Д з и о б е к, Курс аналитической геометрии, ч. II, Одесса, 1912.

Об устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя системы линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами

Б. Ф. Былов (Москва)

Постановка задачи

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (0.1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

где $a_{ij}(t)$ — непрерывные почти-периодические функции, а функции $F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывны при $t \geq 0$ по совокупности переменных и удовлетворяют условиям

$$|F_i(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) - F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \delta \sum_{j=1}^n |\bar{x}_j - x_j|, \quad (0.2)$$

$$F_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\delta > 0$ — некоторая константа. Вместе с системой (0.1) рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (0.3)$$

для которой функции F_i будем называть возмущающими.

Пусть $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ — решение системы (0.3). Характеристическим показателем этого решения называется число

$$\lambda = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \dots + x_n^2(t)}.$$

Как известно, существует лишь конечная система чисел, являющихся характеристическими показателями линейной системы уравнений [1]. Обозначим через Λ наибольший характеристический показатель системы (0.3).

Назовем наибольший характеристический показатель Λ устойчивым сверху по отношению к возмущающим функциям рассматриваемого типа, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых F_i , удовлетворяющих условиям (0.2), характеристический показатель любого решения системы (0.1) не превосходит величины $\Lambda + \varepsilon$.

В работе приводятся некоторые условия для матрицы коэффициентов системы (0.3), при выполнении которых наибольший характеристический показатель Λ этой системы будет устойчив сверху.

§ 1. Предварительные замечания

1. Системы (0.1) и (0.3) будем записывать в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t, x), \quad (1.1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \quad (1.2)$$

Смысл $A(t)$, $F(t, x)$ и x в этой записи очевиден из предыдущего.

2. Введем обозначения:

$$A) \sup_{(i, j, t)} |a_{ij}(t)| = K,$$

$$B) \|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)},$$

$$C) \|A(t)\| = \max_{(i, j)} \left\{ \sqrt{\sum_{v=1}^n a_{iv}^2(t)}, \sqrt{\sum_{\mu=1}^n a_{\mu j}^2(t)} \right\}.$$

3. Так как элементы матрицы $A(t)$ являются почти-периодическими функциями, то для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотная система ε -периодов матрицы $A(t)$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое L , что во всяком отрезке длины L находится по крайней мере одно значение τ , такое, что $\sup_{-\infty < t < \infty} \|A(t + \tau) - A(t)\| \leq \varepsilon$.

4. Через $S(0)$ обозначим совокупность $\{x(t)\}$ решений системы (1.2), для каждого из которых $\|x(0)\| = 1$, а через $S(\tau)$ — совокупность $\{x(t, \tau)\}$ решений, таких, что $\|x(\tau, \tau)\| = 1$. Очевидно, что если $x(t, \tau) \in S(\tau)$, то найдется такое $x(t) \in S(0)$, что $x(t, \tau) = \frac{x(t)}{\|x(\tau)\|}$.

5. Легко убедиться, что при любом $\alpha > 0$ для каждого $x(t) \in S(0)$ будет выполняться неравенство

$$\|x(t)\| \leq B(\alpha) e^{(\Lambda + \alpha)t},$$

где $B(\alpha)$ — некоторая константа, зависящая от величины α , но не зависящая от выбранного решения $x(t) \in S(0)$.

6. Пусть $x(t) \in S(0)$. Положим тогда

$$p(t) = \frac{d}{dt} \ln \|x(t)\| = \frac{1}{2 \|x(t)\|^2} \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(t) x_i x_j. \quad (1.3)$$

Таким образом, каждому решению $x(t) \in S(0)$ соответствует некоторая функция $p(t)$. Не исключена возможность, что различным решениям соответствует одна и та же функция $p(t)$. Обозначим через P совокупность функций $p(t)$. Заметим, что функции $p(t)$ ограничены в совокупности, как легко видеть из определяющего их равенства (1.3). Следовательно, для любой $p(t) \in P$

$$|p(t)| \leq \bar{p},$$

де $\bar{p}$ — некоторая константа. Из определения функций $p(t)$ вытекает также, что при любом $x(t) \in S(0)$

$$\|x(t)\| = e^{\int_0^t p(\xi) d\xi},$$

где $p(t)$ — соответствующая этому решению функция из совокупности P . Так как Λ — наибольший характеристический показатель системы (1.2), то для любой функции $p(t) \in P$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p(\xi) d\xi = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t)\| \leq \Lambda, \quad (1.4)$$

причем для некоторых $p(t) \in P$ имеет место равенство.

7. Множество действительных чисел разобьем на два класса по следующим признакам: число α отнесем к первому классу, если существует такое $T \geq 0$, что для любой $p(t) \in P$ и любых t и τ при $t - \tau \geq T$ имеет место неравенство

$$\int_{\tau}^t p(\xi) d\xi \leq (\Lambda + \alpha)(t - \tau). \quad (1.5)$$

Ко второму классу отнесем остальные действительные числа. Первый класс не пуст, так как при $\alpha \geq |\bar{p} - \Lambda|$ соотношение (1.5) выполняется при любых t и τ ($t \geq \tau$). Во второй класс входят все отрицательные числа, ибо выполнение (1.5) при некотором $\alpha < 0$ противоречило бы тому, что Λ — наибольший характеристический показатель (ср. п. 6). Заметим далее, что если некоторое α_1 принадлежит первому классу, то $\alpha > \alpha_1$ также принадлежит первому классу. Поэтому проведенное разбиение множества действительных чисел на два класса является сечением, определяющим некоторое $\alpha_0 \geq 0$, которое является точной нижней гранью чисел первого класса.

Определим функцию $T(\alpha)$ на множестве чисел первого класса, положив $T(\alpha)$ равной нижней грани тех T , для которых при $t - \tau \geq T$ имеет место (1.5).

Легко видеть, что и при $t - \tau \geq T(\alpha)$ неравенство (1.5) будет иметь место для любой $p(t) \in P$. При $\alpha \geq |\bar{p} - \Lambda|$ будем, в частности, иметь: $T(\alpha) = 0$. Из определения $T(\alpha)$ следует, что $T(\alpha)$ — невозрастающая функция α .

8. Если $x(t, \tau) \in S(\tau)$ — некоторое решение системы (1.2), то

$$\|x(t, \tau)\| = e^{\int_{\tau}^t p(\xi) d\xi},$$

где $p(t)$ — некоторая функция из совокупности P . Поэтому, как это следует из п. 7, при $\alpha > \alpha_0$ и $t - \tau \geq T(\alpha)$

$$\|x(t, \tau)\| \leq e^{(\Lambda + \alpha)(t - \tau)}.$$

Так как при $0 \leq t - \tau \leq T(\alpha)$

$$\|x(t, \tau)\| \leq e^{\bar{p}(t-\tau)} \leq e^{\bar{p}T(\alpha)},$$

то, полагая $B_1(\alpha) = e^{\bar{p}T(\alpha)}$, для всех $t \geq \tau$ будем иметь:

$$\|x(t, \tau)\| \leq B_1(\alpha) e^{(\Lambda + \alpha)(t-\tau)}. \quad (1.6)$$

Заметим, что константа $B_1(\alpha)$ не зависит ни от выбора решения $x(t, \tau) \in S(\tau)$, ни от самого τ .

Пусть теперь $X(t)$ — какая-либо матрица, составленная из n линейно независимых решений системы (1.2) (каждый столбец матрицы состоит из функций, образующих одно из линейно независимых решений). Известно, что $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ тоже является матрицей решений, причем $X(\tau, \tau) = E$.

Так как каждое из n решений $\{x^{(i)}(t, \tau)\}$, порождающих матрицу $X(t, \tau)$, принадлежит совокупности $S(\tau)$, то из (1.6) вытекает, что

$$\|X(t, \tau)\| \leq B_2(\alpha) e^{(\Lambda + \alpha)(t-\tau)} \quad (1.7)$$

при $\alpha > \alpha_0$ и всех $t \geq \tau$. Из замечания, сделанного выше, следует, что $B_2(\alpha)$ не зависит ни от выбора исходной матрицы решений $X(t)$, ни от τ . Особо отметим, что выполнения условия (1.7) для всех $\alpha > 0$ (т. е. для случая $\alpha_0 = 0$) достаточно для устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя системы (1.2) [2].

9. Пусть $\alpha < \alpha_0$ — произвольное число из второго класса и пусть α_1 таково, что $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$. Так как α_1 принадлежит второму классу, то существует последовательность функций $\{p_i(t)\} \in P$ и соответствующая последовательность отрезков $[\tau_i, t_i]$, для которых

$$\int_{\tau_i}^{t_i} p_i(\xi) d\xi > (\Lambda + \alpha_1)(t_i - \tau_i) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

в то же время $(t_i - \tau_i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Для каждой функции $p_i(t)$ из указанной последовательности проведем разбиение полуоси $[0, \infty)$ на отрезки точками $\{h_k\}_i$, полагая при этом $h_0 = 0$.

Способ определения последующих значений h_k укажем рекуррентно. Пусть h_k найдено, тогда:

1) Если

$$\int_{h_k}^{h_{k+1}} p_i(\xi) d\xi \leq \Lambda + \alpha,$$

то положим $h_{k+1} = h_k + 1$.

2) Если

$$\int_{h_k}^{h_{k+1}} p_i(\xi) d\xi > \Lambda + \alpha,$$

то h_{k+1} полагаем равным наименьшему из тех значений $t > h_k + 1$, для которых

$$\int_{h_k}^t p_i(\xi) d\xi = (\Lambda + \alpha)(t - h_k).$$

Если же такого значения t нельзя указать, т. е. если для всех $t > h_k + 1$ окажется, что

$$\int_{h_k}^t p_i(\xi) d\xi > (\Lambda + \alpha)(t - h_k),$$

то процесс определения последующих точек разбиения на этом шаге заканчиваем. Последний из отрезков разбиения в этом случае будет иметь бесконечную длину.

Чтобы не усложнять обозначений, мы не вводим дополнительного индекса для точки h_k , указывающего на принадлежность ее к разбиению, соответствующему функции $p_i(t)$, но нужно помнить, что каждой функции $p_i(t)$ соответствует свое разбиение оси.

Докажем, что совокупность длин полученных таким образом отрезков не может быть ограниченной. Допустим противное, т. е., что существует константа T такая, что для всех i и k $h_{k+1} - h_k \leq T$ (в этом случае при любом фиксированном i не может получиться конечного числа точек разбиения). Для любой функции $p_i(t)$ из указанной последовательности при $t > \tau$ имеем в таком случае:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^t p_i(\xi) d\xi &= \int_{\tau}^{h_{\mu}} p_i(\xi) d\xi + \sum_{k=\mu}^{h_{\nu}-1} \int_{h_k}^{h_{k+1}} p_i(\xi) d\xi + \int_{h_{\nu}}^t p_i(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \bar{p}(h_{\mu} - \tau) + (\Lambda + \alpha)(h_{\nu} - h_{\mu}) + \bar{p}(t - h_{\nu}) = (\Lambda + \alpha)(t - \tau) - \\ &- (\Lambda + \alpha)(t - h_{\nu}) + (\Lambda + \alpha)(\tau - h_{\mu}) + \bar{p}(h_{\mu} - \tau) + \bar{p}(t - h_{\nu}) \leq \\ &\leq (\Lambda + \alpha)(t - \tau) + 2(|\Lambda| + |\alpha| + \bar{p})T \end{aligned}$$

(здесь h_{μ} и h_{ν} — соответственно самая левая и самая правая точки разбиения, лежащие на отрезке $[\tau, t]$). Полагая $2(|\Lambda| + |\alpha| + \bar{p})T = B$, запишем предыдущую оценку следующим образом:

$$\int_{\tau}^t p_i(\xi) d\xi \leq (\Lambda + \alpha)(t - \tau) + B = \left(\Lambda + \alpha + \frac{B}{t - \tau} \right) (t - \tau).$$

Так как $\alpha < \alpha_1$, то можно указать такое $T_1 > 0$, что при $t - \tau \geq T_1$ будет выполняться неравенство

$$\alpha + \frac{B}{t - \tau} \leq \alpha_1.$$

Следовательно, для всех $p_i(t)$ из рассматриваемой последовательности при $t - \tau \geq T_1$ получим оценку:

$$\int_{\tau}^t p_i(\xi) d\xi \leq (\Lambda + \alpha_1)(t - \tau),$$

которая противоречит (1.8), так как при достаточно большом i будет выполняться неравенство $t_i - \tau_i > T_1$.

Итак, совокупность длин отрезков разбиений для всевозможных i не может быть ограниченной.

Результат предыдущих рассмотрений сформулируем в виде леммы, которая будет иметь существенное значение в дальнейшем.

Лемма. Для всякого $\alpha < \alpha_0$ существуют последовательность функций $\{p_i(t)\} \in P$ и последовательность отрезков $[h_i, h_i + H_i]$ для которых

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi) d\xi > (\Lambda + \alpha)(t - h_i) \quad (1.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots)$$

при всех t из сегмента

$$h_i + 1 \leq t \leq h_i + H_i,$$

причем $H_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. (Заметим, что «скорость» роста H_i — длины отрезков — может предполагаться как угодно большой, так как любая подпоследовательность этих отрезков обладает тем же свойством.)

§ 2. Формулировка и доказательство теорем

Теорема 1. Для того чтобы наибольший характеристический показатель Λ системы (1.2) был устойчив сверху по отношению к возмущающим функциям рассматриваемого типа, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_0 = 0$, т. е. чтобы для любого $\alpha > 0$ существовала константа $B(\alpha)$, не зависящая от τ и такая, что

$$\|X(t, \tau)\| \leq B(\alpha) e^{(\Lambda + \alpha)(t - \tau)}.$$

Достаточность этого условия была отмечена в п. 8. Докажем его необходимость.

Итак, пусть $\alpha_0 \neq 0$. Тогда $\frac{\alpha_0}{2}$ принадлежит к числам второго класса (ср. п. 7) и, как это следует из леммы п. 9, существуют последовательность функций $\{p_i(t)\} \in P$ и последовательность отрезков $[h_i, h_i + H_i]$, для которых

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi) d\xi > \left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)(t - h_i) \quad (2.1)$$

при всех t из сегмента

$$h_i + 1 \leq t \leq h_i + H_i. \quad (2.2)$$

Последовательности функций $\{p_i(t)\}$ соответствует последовательность решений $\{x^{(i)}(t, h_i)\}$ системы (1.2), таких, что

$$x^{(i)}(t, h_i) \in S(h_i) \text{ и } \|x^{(i)}(t, h_i)\| = e^{\int_{h_i}^t p_i(\xi) d\xi} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Для указанной последовательности решений имеем из (2.1) и предыдущего соотношения оценку

$$\|x^{(i)}(t, h_i)\| > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)(t-h_i)} \quad (2.3)$$

для всех t из сегмента (2.2).

Очевидно, что при любом i вектор $\bar{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t + h_i, h_i)$ является решением системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t + h_i)x, \quad (2.4)$$

причем $\|\bar{x}^{(i)}(0)\| = \|x^{(i)}(h_i, h_i)\| = 1$ и, как это вытекает из (2.3),

$$\|\bar{x}^{(i)}(t)\| = \|x^{(i)}(t + h_i, h_i)\| > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)t} \quad (2.5)$$

для всех t из сегмента $1 \leq t \leq H_i$.

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность индексов $i = 1, 2, \dots$ такова, что

1) Последовательность матриц $\{A(t + h_i)\}$ сходится равномерно [3] на всей оси к некоторой почти-периодической матрице $\bar{A}(t)$.

2) Последовательность векторов $\bar{x}^{(i)}(0)$, определяющих начальные данные решений $\bar{x}^{(i)}(t)$, сходится к вектору $\bar{x}(0)$.

В противном случае можно использовать известный прием выбора подпоследовательности, обладающей требуемыми свойствами, с последующим изменением нумерации.

Рассмотрим «предельную» систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}(t)x. \quad (2.6)$$

Через $\bar{x}(t)$ обозначим решение этой системы, определенное вектором начальных данных $\bar{x}(0)$. Из определения системы (2.6) и выбора начальных данных вытекает, что на всяком конечном отрезке $[0, T]$ ($T \geq 1$) равномерно по t выполняется предельное соотношение

$$\bar{x}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{x}^{(i)}(t).$$

Так как при всех достаточно больших i $H_i > T$, то из (2.5) следует, что

$$\|\bar{x}(t)\| > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)t} \quad (2.7)$$

при $1 \leq t \leq T$. В силу произвольности T отсюда, в свою очередь, вытекает, что (2.7) выполняется при любых $t \geq 1$. Поэтому характеристический показатель решения $x(t)$ не менее $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$, и, следовательно, наибольший характеристический показатель системы (2.6) не менее величины $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$.

Рассмотрим теперь последовательность систем

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}(t - h_i)x \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (2.8)$$

полученных из (2.6) сдвигом времени на величину $-h_i$. Этот сдвиг, очевидно, не может изменить величины характеристических показателей, так что каждая из систем (2.8) имеет наибольший характеристический показатель, не меньший, чем $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$.

Запишем каждую из систем последовательности (2.8) в таком виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F^{(i)}(t, x), \quad (2.9)$$

где

$$F^{(i)}(t, x) = [\bar{A}(t - h_i) - A(t)]x.$$

Так как равномерно по t имело место соотношение

$$\|\bar{A}(t) - A(t + h_i)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

то и $\|\bar{A}(t - h_i) - A(t)\| \rightarrow 0$ равномерно на всей оси при $i \rightarrow \infty$. Поэтому векторы $F^{(i)}(t, x)$ удовлетворяют условиям (0.2), в которых константа δ при достаточно больших i может предполагаться как угодно малой. Тем не менее, как уже было отмечено выше, наибольший характеристический показатель каждой из систем (2.9) не менее, чем $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$. Это свидетельствует о том, что наибольший характеристический показатель системы (1.2) в случае $\alpha_0 \neq 0$ не будет устойчивым сверху, что и доказывает необходимость условий теоремы 1.

Теорема 2. Если матрица $A(t)$ системы (1.2) такова, что для некоторого $\gamma > 0$ существует последовательность чисел $\{L_i\} \rightarrow \infty$ таких, что в каждом стрезке длины L_i находится по крайней мере одно значение τ_i , для которого

$$\|A(t + \tau_i) - A(t)\| \leq \varepsilon_i, \quad \text{где } \varepsilon_i = e^{-\gamma L_i}, \quad (2.10)$$

то наибольший характеристический показатель Λ системы (1.2) устойчив сверху.

В силу замечания, сделанного в конце п. 8, достаточно показать, что при выполнении условий теоремы будем иметь $\alpha_0 = 0$.

Допустим противное, т. е., что $\alpha_0 \neq 0$. Выберем такое N , чтобы выполнялось неравенство

$$2\alpha_0 - \frac{\gamma(N-2)}{8} < 0. \quad (2.11)$$

Так как число $\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{N}$ принадлежит первому классу, то при $t - \tau \gg \gg T\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{N}\right)$ для любой функции $p(t) \in P$ имеем в силу п. 7:

$$\int_{\tau}^t p(\xi) d\xi \leq (\Lambda + \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{N})(t - \tau). \quad (2.12)$$

По условию $\{L_i\} \rightarrow \infty$, поэтому для достаточно больших i

$$L_i > T\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_0}{N}\right) \text{ и } L_i > 1. \quad (2.13)$$

Очевидно, не нарушая общности, можно считать неравенства (2.13) выполняющимися для всех $i = 1, 2, \dots$

Число $\alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N}$ принадлежит второму классу, поэтому, в силу леммы п. 9, можно для любого i указать такую функцию $p_i(t) \in P$ и такой отрезок $[h_i, h_i + H_i]$, что

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi) d\xi > (\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N})(t - h_i) \quad (2.14)$$

для всех t , удовлетворяющих неравенству

$$h_i + 1 \leq t \leq h_i + H_i, \quad (2.15)$$

причем $H_i \geq \frac{8L_i}{N-2} + 2L_i$.

Пусть τ_i — значение, при котором выполнено (2.10), и

$$L_i \leq \tau_i - h_i \leq 2L_i. \quad (2.16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{h_i}^t p_i(\xi) d\xi &= \int_{h_i}^{\tau_i} p_i(\xi) d\xi + \int_{\tau_i}^t p_i(\xi) d\xi \geq \\ &\geq (\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N})(t - h_i) \end{aligned} \quad (2.17)$$

для всех t из сегмента (2.15). Используя (2.17) и (2.12) вместе с (2.13) и (2.16), получим для тех же значений t :

$$\begin{aligned} \int_{\tau_i}^t p_i(\xi) d\xi &> (\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N})(t - h_i) - \int_{h_i}^{\tau_i} p_i(\xi) d\xi \geq \\ &\geq (\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N})(t - \tau_i) + (\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N})(\tau_i - h_i) - \\ &- (\Lambda + \alpha_0 + \frac{\alpha_0}{N})(\tau_i - h_i) = (\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N})(t - \tau_i) - \\ &- \frac{2\alpha_0}{N}(\tau_i - h_i) = \left[\Lambda + \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{N} - \frac{2\alpha_0(\tau_i - h_i)}{N(t - \tau_i)} \right] (t - \tau_i). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Положим

$$t_i = \frac{8L_i}{N-2} \text{ и } t_i^* = \tau_i + t_i. \quad (2.19)$$

Так как $h_i + L_i \leq \tau_i \leq h_i + 2L_i$ и $L_i \geq 1$, то

$$h_i + 1 \leq t_i^* \leq h_i + \frac{8L_i}{N-2} + 2L_i \leq h_i + H_i.$$

Следовательно, t_i^* принадлежит отрезку (2.15). Вместе с тем, при $t = t_i^*$ имеем из (2.16) и (2.19):

$$\frac{\alpha_0}{N} + \frac{2\alpha_0(\tau_i - h_i)}{N(t_i^* - \tau_i)} \leq \frac{\alpha_0}{N} + \frac{2\alpha_0}{N} \cdot \frac{2L_i(N-2)}{8L_i} = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Поэтому неравенства (2.18) при $t = t_i^*$ можно записать в таком виде:

$$\int_{\tau_i}^{t_i^*} p_i(\xi) d\xi > \left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)(t_i^* - \tau_i) = \left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)t_i. \quad (2.20)$$

Пусть теперь $\{x^{(i)}(t, \tau_i)\}$ — последовательность решений системы (1.2), таких, что

$$x^{(i)}(t, \tau_i) \in S(\tau_i) \text{ и } \|x^{(i)}(t, \tau_i)\| = e^{\int_{\tau_i}^t p_i(\xi) d\xi}. \quad (2.21)$$

Очевидно, что каждый из векторов последовательности $\{\bar{x}^{(i)}(t)\}$, определенных равенствами $\bar{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t + \tau_i, \tau_i)$, является решением системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t + \tau_i)x \quad (2.22)$$

при соответствующем значении индекса i . При этом

$$\|\bar{x}^{(i)}(0)\| = \|x^{(i)}(\tau_i, \tau_i)\| = 1$$

и, в силу неравенства (1.6),

$$\|\bar{x}^{(i)}(t)\| = \|x^{(i)}(t + \tau_i, \tau_i)\| \leq B_1(2\alpha_0)e^{(\Lambda + 2\alpha_0)t}. \quad (2.23)$$

В то же время при $t = t_i = \frac{8L_i}{N-2}$, используя (2.19) и (2.20), получим:

$$\|\bar{x}^{(i)}(t_i)\| = \|x^{(i)}(t_i + \tau_i, \tau_i)\| = e^{\int_{\tau_i}^{t_i^*} p_i(\xi) d\xi} > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)t_i}. \quad (2.24)$$

Каждую из систем (2.22) представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + [A(t + \tau_i) - A(t)]x \quad (2.25)$$

$$(i = 1, 2, \dots).$$

Пусть $\{x^{(i)}(t)\}$ — последовательность решений системы (1.2), для каждого из которых $x^{(i)}(0) = \bar{x}^{(i)}(0)$. Тогда при любом i вектор $\bar{x}^{(i)}(t)$ удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению

$$\bar{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t) = \int_0^t X(t, \tau) [A(\tau + \tau_i) - A(\tau)] \bar{x}^{(i)}(\tau) d\tau.$$

Используя (2.10), (2.23) и (1.7), получим:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)\| &\leq B_1(2\alpha_0) B_2(2\alpha_0) \int_0^t e^{(\Lambda + 2\alpha_0)(t-\tau)} e^{(\Lambda + 2\alpha_0)\tau} d\tau = \\ &= C t e^{(\Lambda + 2\alpha_0)t} e^{-\gamma L_i} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(здесь положено $C = B_1(2\alpha_0) \cdot B_2(2\alpha_0)$). Поставим теперь в (2.26) $t = t_i = \frac{8L_i}{N-2}$; тогда

$$\|\bar{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\| \leq C t_i e^{\left[\Lambda + 2\alpha_0 - \frac{\gamma(N-2)}{8}\right] t_i}.$$

Так как, в силу выбора N , $2\alpha_0 - \frac{\gamma(N-2)}{8} < 0$, то из предыдущей оценки следует, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\bar{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\| e^{-\Lambda t_i} = 0. \quad (2.27)$$

С другой стороны, используя (2.24) и п. 5, выводим:

$$\begin{aligned} \|\bar{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\| e^{-\Lambda t_i} &\geq \{ \|\bar{x}^{(i)}(t_i)\| - \|x^{(i)}(t_i)\| \} e^{-\Lambda t_i} > \\ &> \left\{ e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right) t_i} - B\left(\frac{\alpha_0}{4}\right) e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{4}\right) t_i} \right\} e^{-\Lambda t_i} = \\ &= e^{\frac{\alpha_0}{2} t_i} \left(1 - B\left(\frac{\alpha_0}{4}\right) e^{-\frac{\alpha_0}{4} t_i} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\bar{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\| e^{-\Lambda t_i} = \infty. \quad (2.28)$$

Сравнивая (2.27) и (2.28), получаем противоречие, которое получено в результате предположения о том, что $\alpha_0 \neq 0$. Следовательно, $\alpha_0 = 0$. Если учесть сделанное в конце п. 8 замечание, то доказательство теоремы этим завершается.

(Поступило в редакцию 2/IX 1957 г.)

Литература

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
 2. Б. Ф. Былов, Устойчивость характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений, Диссертация, Москва, МГУ, 1954.
 3. S. B o c h n e r, Beitrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, Math. Ann., **96** (1927), 119—147; 383—409.
-