

## **Werk**

**Verlag:** Izd. Akademii Nauk SSSR; Академия наук СССР. Московское математическое общество

**Ort:** Moskva

**Kollektion:** RusDML; Mathematica

**Werk Id:** PPN477674380\_0090

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN477674380\\_0090](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN477674380_0090) | LOG\_0008

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# О представлении непрерывных функций трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных

В. И. Арнольд (Москва)

## Оглавление

Введение	3
Часть I. Доказательство теоремы 2	6
§ 1. Основная лемма	7
§ 2. Доказательство теоремы 2	17
Часть II. Доказательство теоремы 3	26
§ 3. Основные определения. Индуктивные свойства 1—4	27
§ 4. Индуктивное сохранение свойства 1	31
§ 5. Леммы о выводящих схемах	34
§ 6. Индуктивное сохранение выводящих схем	38
§ 7. Индуктивное сохранение разложения функций	41
§ 8. Арифметические леммы	45
§ 9. Индуктивное сохранение свойства 4	49
§ 10. Доказательство теоремы 3	58
Приложение. Пространство компонент множеств уровня непрерывной функции	59
А) Построение метрического пространства $T_f$	59
Б) Два отображения, связанные с непрерывной функцией	61
В) Односвязные множества	63
Г) Деревья	64
Д) Строение деревьев	66
Е) Реализации деревьев	69
Употребляемые без пояснений понятия и теоремы теоретико-множественной топологии	72
Литература	73

## Введение

Настоящая работа посвящена доказательству следующей теоремы, сформулированной в заметке [1]:

*Теорема 1. Любая заданная на единичном кубе  $E^3$  действительная непрерывная функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  трех переменных может быть представлена в виде*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2, x_3)],$$

где функции двух переменных  $h_{ij}$  и  $\varphi_{ij}$  действительны и непрерывны.

Для доказательства этой теоремы в заметке [1] используются две теоремы, полного доказательства которых там не приводится. Вот эти теоремы:

**Теорема 2.** Любая непрерывная заданная на  $E^3$  функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  может быть представлена в виде

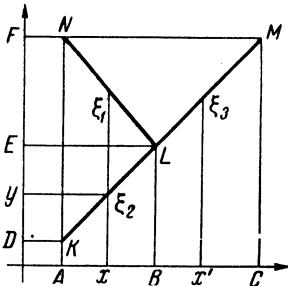
$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i[\varphi_i(x_1, x_2), x_3],$$

где  $h_i$  и  $\varphi_i$  — непрерывные функции, причем функции  $h_i$  действительны и определены на произведении  $\Xi \times E^1$  дерева (см. [3], гл. X)  $\Xi$  на отрезок  $E^1$ , а  $\varphi_i(x_1, x_2)$  определены на квадрате и имеют в качестве значений точки  $\Xi$ . При этом  $\Xi$  — дерево, индекс ветвления точек которого не больше трех.

**Теорема 3.** Каково бы ни было семейство  $F$  действительных равномерно непрерывных функций  $f(\xi)$ , заданных на дереве  $\Xi$ , все точки которого имеют индекс ветвления  $\leq 3$ , можно так реализовать дерево в виде гомеоморфного ему подмножества  $X$  трехмерного куба  $E^3$ , что любая функция  $f$  семейства  $F$  может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$  есть образ  $\xi \in \Xi$  в дереве  $X$ ,  $f(x) = f(\xi)$ , а  $f_k(x_k)$  — непрерывные действительные функции одного переменного, причем  $f_k$  непрерывно зависят от  $f$  в смысле равномерной сходимости.



Фиг. 1. Как представить в виде  $\varphi(x) + \psi(y)$  функцию, заданную на  $Y$ -образном дереве

Теорема 2 (за исключением последней фразы) содержится в работе А. Н. Колмогорова [2]. Там намечено и ее доказательство, но доказательства используемых при этом лемм не опубликованы. В части I настоящей работы излагаются доказательства этих лемм, причем так, чтобы индекс ветвления точек получающегося дерева не превосходил 3, а затем из них выводится теорема 2 в указанной выше формулировке.

Для наглядности рассматривается случай  $n=2$  лемм заметки [2]. Доказательства (да и формулировки) лемм несколько отличны от тех, какие дал А. Н. Колмогоров. Это связано с введением пунктов 6) и 7) в основную лемму и с желанием получить теорему 2 в формулировке, приведенной выше.

Теорема 3 доказывается во второй части работы. Замысел этой теоремы чрезвычайно прост.

Пусть на  $Y$ -образном дереве  $\Delta$  (фиг. 1) дана непрерывная функция  $f(\xi)$ ,  $\xi \in \Delta$ . Тогда существуют такие непрерывные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$ , что  $f_1(x) + f_2(y) = f(\xi)$ , коль скоро  $x$  и  $y$  — координаты точки  $\xi \in \Delta$ .

Доказательство проводится, например, так:

Пусть функция  $f_1(x)$  на  $AB$  равна  $f(\xi_1)$  для точки  $\xi_1 \in LN$ , абсцисса которой  $x$ . Чтобы на  $KL$  было  $f = f_1 + f_2$ , приходится определить  $f_2(y)$  на  $DE$  как  $f_2(y) = f(\xi_2) - f_1(x)$ , где  $\xi_2 \in KL$  — точка с координатами  $x, y$ . При этом в точке  $E$   $f_2 = 0$ . На  $EF$  тоже пусть  $f_2(y) = 0$ . Наконец, чтобы на  $LM$  было  $f = f_1 + f_2$ , остается положить  $f_1(x') = f(\xi_3)$ , где  $\xi_3 \in LM$  — точка  $LM$  с абсциссой  $x'$ . Легко видеть, что так построенные функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  — искомые.

Легко построить аналогичную конструкцию для функций, заданных на более сложном дереве (фиг. 11). Вообще имеет место такая теорема:

*Любое конечное дерево\* с точками ветвления индекса не более чем 3 может быть гомеоморфно отображено на плоский отрезочный комплекс  $K$ , такой, что каждая непрерывная функция  $f(\xi)$  представима на  $K$  в виде  $f(\xi) = f_1(x) + f_2(y)$ , где  $x$  и  $y$  — координаты точки  $\xi \in K$ \*\*.*

Теорема 3 утверждает, что аналогичное явление имеет место в трехмерном пространстве уже для любого дерева, индекс ветвления точек которого не больше трех, а не только для конечного. Доказательство кажется очень громоздким, но по существу сводится к приведенным выше соображениям и предельному переходу от конечных деревьев к бесконечному дереву.

Теорема 1 непосредственно вытекает из теоремы 2 и теоремы 3. Рискуя запутать читателя, которому легче доказать это самому, проведем, однако, такое простое рассуждение:

Из теоремы 2 следует, что функцию  $f(x_1, x_2, x_3)$  можно представить в виде суммы трех функций  $h_i(\xi_i, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), заданных на произведении дерева  $(\xi_i \in \Xi)$ , все точки которого имеют индекс ветвления не больше чем 3, на отрезок  $(x \in E^1) : (\xi_i, x_3) \in \Xi \times E^1$ . Теорема 3 утверждает, что функция  $h(\xi)$  на таком дереве представляется в виде суммы трех непрерывных функций  $h_j(x_j)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) от координат  $x_j$  некоторой реализации  $x_j(\xi)$  дерева  $\Xi$  в трехмерном пространстве. Эти функции  $h_j(x_j)$  непрерывно зависят от разлагаемой функции  $h(\xi)$  (в смысле равномерной сходимости), если функция  $h$  принадлежит тому семейству  $F$  равностепенно непрерывных функций на дереве  $\Xi$ , для которого строится реализация. Функции  $h_i(\xi_i, x_3)$ , получающиеся из теоремы 2, можно рассматривать как такое семейство функций  $h_i(\xi)$  на дереве  $\Xi$ , зависящих непрерывно от параметра  $x_3 \in E^1$ , и потому равностепенно непрерывных. Применяя теорему 3, найдем реализацию  $\Xi$  в виде  $X \subset E^3$ .

В разложении  $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i(\xi_i, x_3)$   $\xi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$  есть точка дерева  $\Xi$  и непрерывно зависит от  $x_1$  и  $x_2$  (теорема 2). Поэтому после реализации  $\Xi$  в виде  $X$  каждая координата точки  $x \in X$  становится функцией  $x_1$  и  $x_2$ , действительной и непрерывной. Если  $\xi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$ , а  $j$ -ая координата точки  $x$ , реализующей  $\xi_i$ , есть  $\varphi_{ij}(x_1, x_2)$ , то, в силу теоремы 3, разложение  $h_i(\xi_i, x_3)$ , как функции  $h_{i, x_3}(\xi_i)$ , на сумму  $\sum_{j=1}^3 h_{ij, x_3}(x_j(\xi_i))$  запишется в виде:

$$h_i[\xi_i(x_1, x_2), x_3] = \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3].$$

Следовательно,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_{ij}[\varphi_{ij}(x_1, x_2), x_3];$$

это и есть утверждение теоремы 1.

\* Дерево с конечным числом точек ветвления.

\*\* Читатель легко может восстановить доказательство этой теоремы после прочтения §§ 3—7. Возможно ли расположить аналогичным образом по плоскости бесконечное дерево, — неизвестно.

Через два месяца после окончания нашей работы [1] А. Н. Колмогоров [2] усилил теорему 1, показав, что каждая непрерывная функция на трехмерном кубе представима в виде

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^7 h_i [\varphi_{i1}(x_1) + \varphi_{i2}(x_2) + \varphi_{i3}(x_3)],$$

где функции  $h_i$  и  $\varphi$  непрерывны, функции же  $\varphi_{ik}$  выбраны раз навсегда (независимо от  $f$ ). Из этого результата А. Н. Колмогорова вытекает, что трехмерный куб можно расположить в *семимерном* пространстве так, что любая непрерывная на кубе функция будет представима как сумма непрерывных функций от (семимерных) координат. Аналогичное представление для квадрата согласно работе [2] осуществляется уже в пятимерном пространстве. Отсюда непосредственно следует, что в пятимерном пространстве можно *раз навсегда* поместить наше дерево  $\Xi$  так, что любая непрерывная на нем функция будет представима как сумма непрерывных функций от координат (в то время как в нашей теореме 3 представление в трехмерном пространстве зависит от семейства  $F$ ). Однако, видоизменяя методы заметки [2], можно получить представление дерева  $\Xi$ , годное для всех непрерывных функций  $f$  и в трехмерном пространстве.

В построениях первой и второй части настоящей работы используется введенное А. С. Кронродом дерево компонент множеств уровня. Основные сведения об этом дереве помещены в приложении. Приложение и каждая из двух частей работы независимы.

Пользуюсь случаем поблагодарить моих учителей А. Г. Витушкина и А. Н. Колмогорова за постоянное внимание, советы и помощь. В частности, А. Н. Колмогорову я обязан окончательным оформлением основной «индуктивной леммы» второй части.

## Часть I

### Доказательство теоремы 2

Здесь будет доказана теорема 2. Основная лемма работы [2] и лемма 2 доказываются в такой формулировке, что дерево  $\Xi$ , о котором идет речь в теореме, состоит из точек с индексом ветвления, не превосходящим трех.

Далее всюду приняты следующие обозначения:

$R^2$  — плоскость точек  $(x, y)$ ;  $E^2$  — единичный замкнутый квадрат на ней, т. е. множество точек  $(x, y)$  с  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

Метрика на плоскости определяется расстоянием

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|).$$

$U_d(A)$  обозначает  $d$ -окрестность множества  $A$ , т. е. совокупность всех точек плоскости, расстояние которых до  $A$  меньше  $d > 0$ .

$\bar{A}$  — замыкание  $A$ .

Многоугольником называется замкнутая самонепересекающаяся ломаная. Открытым многоугольником  $Q$  называется расположенная

внутри многоугольника часть плоскости, а замкнутым многоугольником  $\bar{Q}$  — замыкание открытого.

Открытой многоугольной полоской называется часть плоскости, ограниченная двумя непересекающимися многоугольниками, один из которых лежит внутри другого (отделяется другим от бесконечности). Замкнутая многоугольная полоска есть замыкание открытой. Множеством уровня  $c$  функции  $u(x, y)$  называется множество точек  $(x, y)$  таких, что  $u(x, y) = c$ .

Список основных топологических терминов, употребляемых в настоящей работе, см. в конце приложения.

### § 1. Основная лемма

Представим себе на плоскости конечное число попарно не пересекающихся областей  $g_m$  и над каждой областью пусть имеется холм  $u_m$ . Все холмы образуют «горную страну»  $G$ . Представим себе (фиг. 2), что дана не одна страна  $G$ , а бесконечная последовательность  $\Gamma$  таких горных стран,

$$G_1, G_2, \dots, G_k, \dots,$$

причем «страна ранга  $k$ »  $G_k$  состоит из некоторого конечного числа  $m_k$  холмов ранга  $k$   $u_{km}^r$  ( $m = 1, \dots, m_k$ ) над областями  $g_{km}^r$ ; две области одной горной страны по-прежнему не пересекаются (фиг. 2). При больших  $k$  страна  $G_k$  имеет больше холмов, но их основания — области  $g_{km}^r$  — меньше.

Представим себе, наконец (и этого на фиг. 2 уже нет), три таких последовательности стран  $\Gamma^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) — три системы  $\Gamma^r$ . Каждая состоит из горных стран  $G_k^r$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а каждая горная страна  $G_k^r$  — из холмов  $u_{km}^r$  ( $m = 1, \dots, m_k$ ).

В основной лемме строятся три такие системы холмов  $u_{km}^r$ , удовлетворяющих целому ряду требований. Например, каждый холм  $u_{km}^r$  строится так, чтобы над каждой областью  $g_{k'm'}^r$  ( $k' > k$ ) он имел горизонтальную площадку (требование 5)).

**Основная лемма.** На плоскости  $R^2$  можно определить систему непрерывных действительных функций  $u_{km}^r(x, y)$  с индексами, меняющимися в пределах

$$1 \leq r \leq 3, \quad 1 \leq k < \infty, \quad 1 \leq m \leq m_k,$$

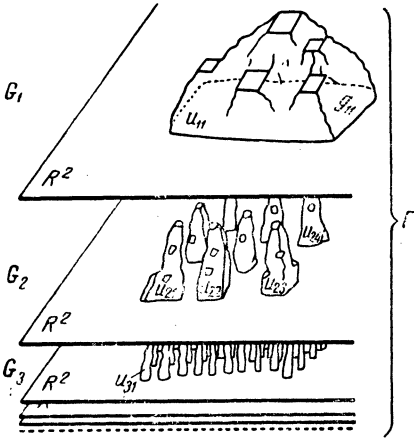
которая обладает следующими свойствами:

- 1)  $0 \leq u_{km}^r \leq 1$ .
- 2)  $u_{km}^r \neq 0$  лишь на области  $g_{km}^r$ , диаметр которой меньше  $d_k > 0$ ;  $d_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ;  $u_{km}^r = 1$  лишь на множестве  $\overline{g_{k+1}^{m^*}}$ .
- 3) Два множества  $g_{km}^r$  и  $g_{k'm'}^r$  с общими индексами  $r$  и  $k$  при  $m \neq m'$  не пересекаются.

4) При любом  $k$  в каждой точке квадрата  $E^2$

$$0 < c \leq \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r \leq C,$$

где  $c$  и  $C$  — константы, не зависящие от  $k$ .



Фиг. 2. Система горных стран. Все горизонтальные плоскости  $R^2$  — это одна и та же плоскость

5) Функция  $u_{km}^r$  постоянна на каждом множестве  $g_{k'm'}$ , с тем же индексом  $r$  при  $k' > k$  и произвольных  $m$  и  $m'$ .

6) Граница каждого множества уровня каждой функции  $u_{km}^r$  связна и делит плоскость  $R^2$  не более чем на три части.

7) При любом  $r$   $g_{11}^r \supset E^2$ .

Функции  $u_{km}^r$  и множества  $g_{km}^r$  с одним и тем же индексом  $r = r_0$  в дальнейшем называются соответственно функциями и множествами одной системы  $r_0$ , а с одним и тем же индексом  $k$  (и любыми  $r$  и  $m$ ) — соответственно функциями и множествами одного ранга.

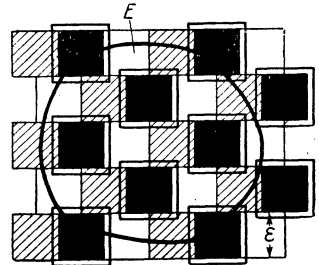
Индекс  $m$  будет называться номером. Очевидно, при любом  $N$  число функций (множеств) ранга не выше  $N$  в каждой системе конечно.

Как известно, при любом  $\varepsilon > 0$  ограниченную область  $E \supset E^2$  плоскости  $R^2$  можно замостить (покрыть) замкнутыми квадратами  $P_{\varepsilon m}$  ( $m = 1, \dots, m_\varepsilon$ ) со сторонами длины  $\varepsilon$ , параллельными осям координат, так, что все квадраты можно будет разбить на 3 системы  $P_{\varepsilon m}^r$ ,  $1 \leq r \leq 3$ , причем расстояния между двумя квадратами одной системы будет не меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$  (замощение Лебега, фиг. 3).

Эти квадраты — зародыши областей  $g_{km}^r$ .

Все дальнейшие построения для каждого  $r$  производятся независимо. До конца построения функций  $u_{km}^r$  можно считать  $r$  фиксированным.

Множества  $g_{km}^r$  ( $m = 1, \dots, m_k$ ) получаются из квадратов  $P_{\varepsilon_k m}^r$ , где  $\varepsilon_k > 0$  — число, выбор которого описан в дальнейшем. Области  $g_{km}^r$  будут получаться при «раздувании»  $P_{\varepsilon_k m}^r$ , так что  $P_{\varepsilon_k m}^r \subset g_{km}^r \subseteq Q_{\varepsilon_k m}^r$ , где  $Q_{\varepsilon_k m}^r$  — замыкание квадрата, образующего  $\frac{\varepsilon_k}{6}$ -окрестность  $P_{\varepsilon_k m}^r$ :  $U_{\frac{\varepsilon_k}{6}}(P_{\varepsilon_k m}^r) = Q_{\varepsilon_k m}^r$  (см. фиг. 3).



Фиг. 3. Замощение Лебега. Квадраты одной системы заштрихованы, квадраты другой системы — черные, квадраты третьей системы — белые. Для черных квадратов  $P_{\varepsilon_k m}^r$  построены  $Q_{\varepsilon_k m}^r$

Очевидно, при  $m_1 \neq m_2$   $\rho(Q_{\varepsilon_k m_1}^r, Q_{\varepsilon_k m_2}^r) \geq \frac{\varepsilon_k}{6}$ , поэтому  $\rho(\overline{g_{km_1}^r}, \overline{g_{km_2}^r}) \geq \frac{\varepsilon_k}{6}$ .

Таким образом, при этом построении удовлетворяется требование 3) основной леммы.

Чтобы удовлетворить требованию 2), очевидно, необходимо, чтобы  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ; это, как легко видеть, выполняется при описанном ниже построении.

Это построение разбивается на этапы. Все, что будет построено на  $n$ -ом этапе, получает индекс  $n$  наверху, рядом с номером системы  $r$ .

Вообще все обозначения построены так, что  $A_{\varepsilon_k m}^{rn}$  следует читать: «объект  $A$ , построенный для функции  $u$  (множества  $g$ ) системы  $r$  ранга  $k$  номера  $m$ , т. е.  $u_{km}^r$  ( $g_{km}^r$ ), на  $n$ -ом этапе». При этом буквы означают:

$P$  — квадрат-зародыш;

$Q$  — приближение к  $g$  изнутри;

$\hat{Q}$  — приближение к  $g$  снаружи;

$^x O$  — приближение к множеству уровня  $u = x$  ( $0 < x < 1$ ) и к границе множества уровня  $u = x$  при  $x = 0$  и  $x = 1$ ;

$^x \Theta$  — приближение к границе множества уровня  $u = x$  ( $0 < x < 1$ ).

Например,  $^x i \Theta_{\varepsilon_k m}^{rn}$  обозначает приближение к границе множества уровня  $u_{km}^r = x_i$ , построенное на  $n$ -ом этапе.

Множество  $g_{km}^r$  начинаем строить на  $k$ -ом этапе, а на  $n$ -ом этапе ( $n \geq k$ ) строим  $n - k + 1$ -ое приближение к  $g_{km}^r$  изнутри и снаружи:  $Q_{\varepsilon_k m}^{rn} \subseteq g_{km}^r \subseteq \hat{Q}_{\varepsilon_k m}^{rn}$ . При этом  $Q_{\varepsilon_k m}^{rn+1} \supseteq Q_{\varepsilon_k m}^{rn}$  и  $g_{km}^r$  определяется как  $\bigcup_{n=k}^{\infty} Q_{\varepsilon_k m}^{rn}$ , т. е. как сумма раздувающихся приближений изнутри.

Функции  $u_{km}^r$  строятся с помощью их множеств уровня. Построение начинается на  $k$ -ом этапе, где строится первое приближение  $^0 O_{\varepsilon_k m}^{rk} = \hat{Q}_{\varepsilon_k m}^{rk} \setminus Q_{\varepsilon_k m}^{rk}$  к множеству нулевого уровня. На следующем этапе строятся первые приближения к множествам уровня  $\frac{1}{2}$  и 1 и некоторым другим и вторые приближения к множеству нулевого уровня. На каждом этапе посвящаются первые приближения к новым уровням и делаются следующие приближения к взятым раньше уровням.

Каждое приближение есть замкнутая многоугольная плоскость, вложенная в предыдущее приближение, а само множество уровня — пересечение всех приближений к нему. Значения функций  $u$  на каждом таком множестве уровня подбираются так, чтобы  $u_{km}^r$  была непрерывной функцией, положительной на  $g_{km}^r$ , большей  $\frac{1}{2}$  на  $P_{\varepsilon_k m}^r$ , но всюду не превосходящей 1. Тогда выполняются требования 1) и 4) леммы.

Мы будем пользоваться элементарной геометрической леммой, доказательство которой опускается; достаточно посмотреть на фиг. 4, чтобы убедиться в справедливости этой леммы.

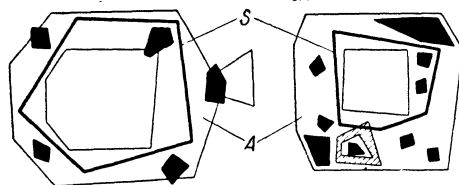
*Геометрическая лемма. Пусть  $A$  — замкнутая многоугольная полоска, ширина которой (т. е. наименьшее расстояние между граничными многоугольниками) больше  $d > 0$ . Пусть  $Q_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) — замкнутые попарно не пересекающиеся многоугольники.*

1) Если диаметр каждого из многоугольников  $Q_m$  не превосходит  $d$ , то можно построить многоугольник  $S$  строго внутри полоски  $A$  так,



чтобы он разделял ее границы и не пересекался с многоугольниками  $Q_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ).

2) Если строго внутри полосы  $A$  расположена другая замкнутая многоугольная полоска  $B$  и многоугольники  $Q_m$  не пересекаются с границами



Случай 1)

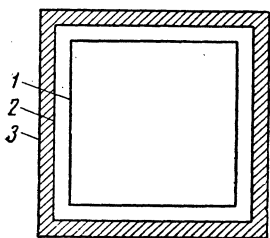
Случай 2)

Фиг. 4. Многоугольники  $Q_m$  — черные. Полоска  $B$  заштрихована

$A$  и с  $B$ , то многоугольник  $S$ , разделяющий границы  $A$  и не пересекающийся с  $Q_m$ , можно провести строго внутри полосы  $A$  так, чтобы он пересекался с полоской  $B$  по отрезку.

Теперь начнем первый этап.

Чтобы удовлетворить требованию 7) доказываемой основной леммы, положим  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $m_1 = 1$ ,  $P'_{11} = E^2$ . Построим квадраты (фиг. 5)



Фиг. 5. 1 — граница  $P'_{11}$ , 2 — граница  $Q'^1_{11}$ , 3 — граница  ${}^0O'^1_{11}$ . Полоска  ${}^0O'^1_{11}$  — первое приближение к границе области  $g^r_{11}$  — заштрихована

$$Q'_{11} = \hat{Q}'_{11} = \overline{U_{\frac{1}{6}}(P'_{11})} \text{ и } Q^r_{11} = U_{\frac{1}{12}}(P'_{11});$$

это — первое приближение к  $g^r_{11}$ , ибо, как мы увидим,  $Q'^1_{11} \subseteq g^r_{11} \subseteq \hat{Q}'_{11}$ .  $\hat{Q}'_{11} \setminus Q^r_{11} = {}^0O'^1_{11}$  называется первым приближением к границе  $g^r_{11}$ . Это — замкнутая многоугольная полоска, ширина которой  $\frac{1}{12}$ .

Если  $\varepsilon_2 < \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4}$ , то квадраты  $Q^r_{\varepsilon_2 m}$  ( $m = 1, \dots, m_2$ ) можно принять за  $Q_m$  в геометрической лемме, а первое приближение к границе  $g^r_{11}$  — за полоску  $A$ .

Таким выбором  $\varepsilon_2$  начинается второй этап (фиг. 6). Строим по  $\varepsilon_2$  квадраты  $P^r_{\varepsilon_2 m}, Q^r_{\varepsilon_2 m} = \hat{Q}^r_{\varepsilon_2 m} = \overline{U_{\frac{\varepsilon_2}{6}}(P^r_{\varepsilon_2 m})}; Q^r_{\varepsilon_2 m} = U_{\frac{\varepsilon_2}{12}}(P^r_{\varepsilon_2 m})$  ( $m = 1, \dots, m_2$ ).  $Q^r_{\varepsilon_2 m}$  — первые приближения к областям  $g^r_{2m}$ , а  ${}^0O^r_{\varepsilon_2 m} = \hat{Q}^r_{\varepsilon_2 m} \setminus Q^r_{\varepsilon_2 m}$  — первые приближения к их границам.

Нам будет удобно вести построение так, чтобы границы областей  $g^r_{km}$  и  $g^r_{k'm'}$  получились не пересекающимися. Это в первом приближении может не выполняться: полоска  ${}^0O^r_{11}$  может пересекаться с квадратами  $Q^r_{\varepsilon_2 m}$ . Однако на основании геометрической леммы можно в этой полоске провести многоугольник, отде-

\* Построение их описано после формулировки основной леммы (см. фиг. 3). За фигурирующую там область  $E$  следует принять  $Q^r_{11}$ .

ляющий  $Q_{11}^{r_1}$  от бесконечности и извивающийся между квадратами  $Q_{\varepsilon_2 m}^r$ , не задевая их. Этот многоугольник, естественно, можно включить в обладающую тем же свойством замкнутую многоугольную полосу  ${}^0O_{11}^{r_2}$ , которая будет вторым приближением к границе  $g_{11}^r$  или к границе множества уровня  $u_{11}^r=0$ , чем и объясняется значок 0 слева вверх. Полоска  ${}^0O_{11}^{r_2}$  определяет второе приближение  $Q_{11}^{r_2}$  к  $g_{11}^r$  и может быть представлена в виде  $\hat{Q}_{11}^{r_2} \setminus Q_{11}^{r_2}$ .

Кроме того, на втором этапе строятся первые приближения к некоторым другим множествам уровня функции  $u_{11}^r$ . Легко видеть, что, поскольку  $\varepsilon_2 < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12}$ , найдется квадрат  $Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$ , лежащий целиком внутри  $P_{11}^r$ . Он объявляется первым приближением к множеству уровня 1 функции  $u_{11}^r$ , а плоска  ${}^1O_{11}^{r_2} = \hat{Q}_{\varepsilon_2 m^*}^{r_2} \setminus Q_{\varepsilon_2 m^*}^{r_2}$  — первым приближением к границе этого множества.

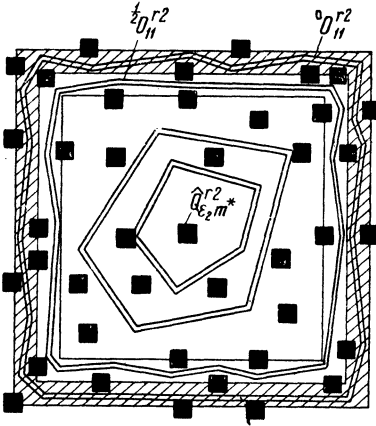
Далее, чтобы удовлетворить требованию 4), особо строим множество уровня  $\frac{1}{2}$ . Именно, границы  $P_{11}^r$  и  $Q_{11}^{r_1}$  отстоят на  $\frac{1}{12}$ , а  $\varepsilon_2 < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12}$ ; поэтому, применяя к заключенной между границами  $P_{11}^r$  и  $Q_{11}^{r_1}$  полоске геометрическую лемму, строим многоугольник и затем замкнутую полосу  $\frac{1}{2}O_{11}^{r_2}$ , которая извивается между квадратами  $\hat{Q}_{\varepsilon_2 m}^{r_2}$  ( $m = 1, \dots, m_2$ ), не задевая их, лежит внутри  $Q_{11}^{r_1}$  и отделяет  $P_{11}^r$  от бесконечности. Полоска  $\frac{1}{2}O_{11}^{r_2}$  объявляется первым приближением к множеству уровня  $\frac{1}{2}$  функции  $u_{11}^r$ . Следующие приближения  $\frac{1}{2}O_{11}^{r_n}$  ( $n > 2$ ) будут строиться вложенными в эту полосу.

Наконец, на втором этапе строятся первые приближения к множествам уровней функции  $u_{11}^r$ , содержащим  $g_{2m}^r$ , и определяются значения  $u_{11}^r$  на этих множествах.

Прежде всего выкинем навсегда те квадраты  $Q_{\varepsilon_2 m}^r$ , которые оказались вне  $Q_{11}^{r_2}$  (и, значит,  $\hat{Q}_{11}^{r_2}$ ). Остальные квадраты  $Q_{\varepsilon_2 m}^r$  ( $m \in M_{11}^{r_2}$ ) (исключая  $Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$ ) лежат в кольцеобразных областях, на которые готовые полоски  ${}^0O_{11}^{r_2}$ ,  $\frac{1}{2}O_{11}^{r_2}$  и  ${}^1O_{11}^{r_2}$  делят  $Q_{11}^{r_2}$ . Каждая кольцеобразная область есть открытая многоугольная полоска, отделяющая  $Q_{\varepsilon_2 m^*}^r$  и вообще все, что в ней лежит, от бесконечности.

Рассмотрим какой-нибудь квадрат  $Q_{\varepsilon_2 m_0}^r$  ( $m_0 \in M_{11}^{r_2}$ ,  $m_0 \neq m^*$ ). Примем замыкание открытой многоугольной полоски, где он лежит, за  $A$  в геометрической лемме, остальные квадраты  $Q_{\varepsilon_2 m}^r$  ( $m \neq m_0$ ) — за  $Q_m$ , а полосу  ${}^0O_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2} = \hat{Q}_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2} \setminus Q_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2}$  — за  $B$ . Проведем в соответствии с этой леммой многоугольник  $S$ , пересекающий  ${}^0O_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2}$  по отрезку, отделяющий  $\overline{Q_{\varepsilon_2 m_0}^{r_2}}$  от бесконечности, лежащий внутри открытой многоугольной полоски между двумя готовыми полосками и не задевающий квадратов  $\overline{Q_{\varepsilon_2 m}^r}$  ( $m \neq m_0$ ). Этот многоугольник  $S$  можно включить в обладающую теми же свойствами замкнутую многоугольную полосу  $d$ , так, чтобы  $d \cup Q_{\varepsilon_2 m_0}^r$  тоже было замкнутой много-

угольной полоской (фиг. 6). Последняя и будет  ${}^x O_{11}^{r_2}$  — первым приближением к множеству уровня функции  $u'_{11}$ , содержащему  $g'_{2m_0}$ . Значение  $x_0$  функции  $u'_{11}$  на этом множестве уровня определено ниже.



Фиг. 6. Тонкие линии — построения первого этапа. Черные квадратики —  $Q_{\epsilon_2 m}^r$ . Их должно быть гораздо больше, но тогда на чертеже ничего не было бы видно. Черный квадратик в центре —  $Q_{\epsilon_2 m^*}^r$ . Полоски, содержащие квадратик, показаны лишь некоторые: второй этап не закончен

Присоединив полоску  ${}^x O_{11}^{r_2}$  к готовым, выберем из  $M_{11}^{r_2}$  новое  $m \neq m_0$ ,  $m \neq m^*$  и построим тем же способом  ${}^x O_{11}^{r_2}$  и так далее, пока не исчерпается множество  $M_{11}^{r_2}$  и каждый квадрат  $Q_{\epsilon_2 m}^r$  ( $m \in M_{11}^{r_2}$ ) не будет включен в первое приближение к некоторому множеству уровня функции  $u'_{11}$ . Эти приближения являются многоугольными замкнутыми попарно не пересекающимися полосками. Множества  ${}^x \Theta_{11}^{r_2} = {}^x O_{11}^{r_2} \setminus Q_{\epsilon_2 m_i}^{r_2}$  называются  $\Theta$ -образными замкнутыми полосками. Каждая из них делит плоскость на три части:  $Q_{\epsilon_2 m_i}^{r_2}$ , часть, содержащую  ${}^1 O_{11}^{r_2}$ , и часть, содержащую  ${}^0 O_{11}^{r_2}$  (фиг. 6). Они являются первыми приближениями к границам множеств уровня  $u'_{11}$ , содержащих  $g'_{2m_i}$  ( $m_i \in M_{11}^{r_2}$ ,  $m_i \neq m^*$ ). Определим, наконец, значения  $x_i$ .

Между границей множества  $g'_{11}$  и  $\frac{1}{2} O_{11}^{r_2}$  функция  $u'_{11}$  будет расти от 0 до  $\frac{1}{2}$ , а между  $\frac{1}{2} O_{11}^{r_2}$  и  ${}^1 O_{11}^{r_2}$  от  $\frac{1}{2}$  до 1. Полоски  ${}^x O_{11}^{r_2}$  делятся  $\frac{1}{2} O_{11}^{r_2}$  на два класса:  $p_1$  внешних, лежащих вне  $\frac{1}{2} O_{11}^{r_2}$ , и  $p_2$  внутренних. Перенумеруем их индексом  $j = j(i)$  в порядке, определяемом отделимостью от бесконечности: внешние — от  $j = 1$  до  $p_1$ , внутренние — от  $p_1 + 1$  до  $p_1 + p_2$ . Распределим возрастание  $u$  от 0 до  $\frac{1}{2}$  равномерно между внешними полосками, объявив

$j$ -ую полоску приближением к множеству уровня  $u'_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{j}{p_1 + 1}$ . Для внутренних полосок возрастание — равномерное от  $\frac{1}{2}$  до 1:  $j$ -ая полоска объявляется приближением к множеству уровня  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{j - p_1}{p_2 + 1}$ .

Таким образом, на втором этапе построены:

- 1) Первые приближения  $Q_{\epsilon_2 m}^{r_2}$  и  ${}^0 O_{\epsilon_2 m}^{r_2}$  к множествам  $g'_{2m}$  и их границам соответственно.
- 2) Вторые приближения  $Q_{11}^{r_2}$  и  ${}^0 O_{11}^{r_2}$  к множеству  $g'_{11}$  и его границе.
- 3) Первые приближения к множеству уровня 1 функции  $u'_{11}$  и к его границе, к множеству уровня  $\frac{1}{2}$  и к множествам уровней  $u'_{11}$ , на которых ле-

жат  $g_{2m_i}^r (m_i \neq m^*; m_i \in M_{11}^{r2})$ , а также к границам этих множеств, соответственно  $\hat{Q}_{\varepsilon_2 m^*}^{r2}, {}^1O_{11}^{r2}, \frac{1}{2}O_{11}^{r2}, x_i O_{11}^{r2}, x_i \Theta_{11}^{r2}$ .

4) Значения  $x_i$  функции  $u_{11}^r$  на  $g_{2m_i}^r$  и на содержащих их множествах уровня (пока не построенных).

Приближения к открытым множествам суть открытые многоугольники, содержащие предыдущие приближения, а к замкнутым — замкнутые многоугольники, многоугольные полоски и  $\Theta$ -образные полоски, вложенные в предыдущие приближения.

Заметим, что сделанное нами на втором этапе для построения функций и множеств ранга 2 есть в точности то же (если отвлечься от масштаба  $\varepsilon_2$ ), что на первом этапе делалось для построения функций и множеств ранга 1.

Вообще после  $n$ -го этапа будут налицо:

1) 1-ый этап построения функций и множеств  $n$ -го ранга, 2-й этап построения функций и множеств  $n - 1$ -го ранга и т. д., до  $n - 1$ -го этапа построения  $u_{2m}^r$  и  $g_{2m}^r$ . \*

2)  $n$ -ые приближения  $Q_{11}^{rn}$  и  ${}^0O_{11}^{rn}$  к множеству  $g_{11}^r$  и его границе соответственно.

3)  $n - 1$ -ые приближения к множествам уровней функции  $u_{11}^r$ , которые мы начали строить на втором этапе и  $n - 2$ -ые к тем, которые начали строить на третьем этапе, и т. д., до первых приближений  $x_i O_{11}^{rn}$  и  $x_i \Theta_{11}^{rn}$  к множествам уровней функции  $u_{11}^r$ , содержащим  $g_{nm_i}^r$ , и к границам этих множеств уровней. Здесь  $m_i \in M_{11}^{rn}$ , т. е.  $m_i$  пробегает те значения между 1 и  $m_n$ , при которых соответствующие квадраты  $Q_{\varepsilon_n m_i}^{rn}$  не лежат внутри  $Q_{\varepsilon_k m'}^{rn}$  ( $1 < k < n$ ;  $m' \leq m_k$ ), но лежат внутри  $Q_{11}^{rn}$ .

4) Значения  $x_i$  функции  $u_{11}^r$  на  $g_{nm}^r$  ( $m \in M_{11}^{rn}$ ).

При этом:

1°. Приближения к открытым множествам суть открытые многоугольники, границы которых не пересекаются попарно (и, в частности, с мелкими квадратами  $Q_{\varepsilon_n m}^r = \hat{Q}_{\varepsilon_n m}^{rn}$ ). Эти приближения содержат предыдущие.

2°. Приближения к замкнутым множествам суть замкнутые многоугольники, многоугольные замкнутые и многоугольные  $\Theta$ -образные замкнутые полоски, вложенные в предыдущие приближения. Многоугольники — границы этих приближений — не пересекаются с другими многоугольниками, построенными на  $n$ -ом этапе (и, в частности, с границами мелких квадратиков  $Q_{\varepsilon_n m}^r$ ).

3°. Каждая из полосок  $x_i O_{11}^{rn}$  и содержащаяся в ней  $x_i \Theta_{11}^{rn}$  ( $m_i \in M_{11}^{rn}$ ) отделяет  $\hat{Q}_{\varepsilon_n m}^{rn}$  от бесконечности, а  $x_i \Theta_{11}^{rn}$ , кроме того, отделяет от всего остального  $Q_{\varepsilon_n m_i}^{rn} \subset x_i O_{11}^{rn}$  — первое приближение к множеству  $g_{nm_i}^r$ , которое будет лежать на множестве уровня  $u_{11}^r = x_i$ .

\* Заметим, что в обозначениях всюду отражен номер этапа, на котором построен объект, а не номер приближения. Например,  $Q_{\varepsilon_n m}^{rn}$  — первое приближение к  $g_{\varepsilon_n m}^r$ .

4°. Значения  $u'_{11}$  на  $g'_{nm}$  ( $m \in M'_{11}$ ) распределены равномерно.

Последняя фраза по определению имеет следующий смысл:

Пусть полоски  $A$  и  $B$  построены на  $n$ -ом этапе приближения к множествам урвней  $a$  и  $b$  функции  $u'_{11}$ , причем  $a$  и  $b$  определены (и приближения начали строить) до  $n$ -го этапа. Пусть между  $A$  и  $B$  на  $n-1$ -ом этапе не было еще ни одной полоски — приближения к множеству урвня  $u'_{11}$ , а на  $n$ -ом этапе построены такие полоски  $C_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) (нумерация — от  $A$  к  $B$ ). Если значение  $x_i$  функции  $u'_{11}$  на множестве урвня, для которого  $C_i$  есть первое приближение, равно  $i \frac{b-a}{p+1}$ , то между  $A$  и  $B$  значения  $u'_{11}$  на  $g'_{nm}$

распределены *равномерно*. Условие 4° состоит в том, что так построены значения  $u'_{11}$  на  $g'_{nm}$  между любыми двумя полосками  $A$  и  $B$  указанного рода.

$n+1$ -й этап начинается с выбора  $\varepsilon_{n+1}$ . Так как все многоугольники, ограничивающие построенные на  $n$ -ом этапе приближения ко всем множествам урвней всех функций  $u'_{km}$  ( $k \leq n$ ) и к их границам, не пересекаются попарно (если только не совпадают), то существует  $d > 0$  такое, что расстояние между любыми двумя различными такими многоугольниками больше  $d$ . Выберем  $\varepsilon_{n+1} < \frac{3d}{4}$ . Это  $\varepsilon_{n+1}$  позволяет провести первый этап построения

множеств  $g'_{n+1m}$  и функций  $u'_{n+1m}$ , второй этап построения  $g'_{nm}$  и  $u'_{nm}$  и т. д., до  $n$ -го этапа построения  $g'_{2m}$  и  $u'_{2m}$ .

Так как этапы ранга, меньшего  $n+1$ , считаем уже пройденными для  $g'_{11}$  и  $u'_{11}$ , а для остальных  $g'_{km}$  и  $u'_{km}$  ( $k \leq n$ ) они совершенно аналогичны, рассмотрим только для примера первый этап построения множеств  $g'_{n+1m}$  и функций  $u'_{n+1m}$ .

По  $\varepsilon_{n+1}$  строим лебегово покрытие из квадратов  $P_{\varepsilon_{n+1}m}$   $n$ -го приближения  $\hat{Q}'_{11}$  к  $g'_{11}$  снаружи, разбиваем покрытие на три системы  $P'_{\varepsilon_{n+1}m}$  и строим по ним первые приближения изнутри и снаружи к  $g'_{nm}$

$$Q^r_{\varepsilon_{n+1}m} = U_{\frac{\varepsilon_{n+1}}{12}}(P'_{\varepsilon_{n+1}m}), \quad Q^r_{\varepsilon_{n+1}m} = \hat{Q}^r_{\varepsilon_{n+1}m} = \overline{U_{\frac{\varepsilon_{n+1}}{6}}(P'_{\varepsilon_{n+1}m})}$$

$$(m = 1, \dots, m_{n+1})$$

и первые приближения к границам  $g'_{nm}$

$${}^0O^r_{\varepsilon_{n+1}m} = \hat{Q}^r_{\varepsilon_{n+1}m} \setminus Q^r_{\varepsilon_{n+1}m} \quad (m = 1, \dots, m_{n+1}).$$

(Квадраты  $Q^r_{\varepsilon_{n+1}m}$  в дальнейшем именуются мелкими квадратиками.)

Так как  $\varepsilon_{n+1} < \frac{3}{4}d$ , можно после этого провести второй этап построения  $g'_{nm}$  и  $u'_{nm}$ , и т. д.,  $n$ -ый этап построения  $g'_{2m}$  и  $u'_{2m}$ .

Пусть все это проделано. Тогда нужно провести  $n+1$ -ый этап построения  $g'_{11}$  и  $u'_{11}$ .

Рассмотрим какую-нибудь замкнутую полосу  ${}^x O_{11}^{rn}$  — приближение к множеству уровня  $x$  функции  $u_{11}^r$ . Если  $x = 0$  или  $x = \frac{1}{2}$ , то  ${}^x O_{11}^{rn}$  не пересекается с множествами  $\hat{Q}_{km}^{rn}$  ( $k \leq n$ ). Она может пересекаться с квадратами  $Q_{\varepsilon_{n+1}m}^r = \hat{Q}_{\varepsilon_{n+1}m}^{r, n+1}$ , но их диаметр меньше  $d \leq$  ширины полосы. Поэтому, применяя геометрическую лемму и расширяя многоугольник  $S$  до замкнутой многоугольной полосы, извивающейся внутри полосы,  ${}^x O_{11}^{rn}$  не задевая мелких квадратиков, получаем удовлетворяющие всем требованиям 1° — 4° полосы  ${}^0 O_{11}^{r, n+1}$  и  $\frac{1}{2} O_{11}^{r, n+1}$ .

Если  $x = 1$ , то  ${}^1 O_{11}^{r, n+1}$  будет  ${}^0 O_{\varepsilon_2 m^*}^{r, n+1}$  — полоска, уже построенная, так как  $n$ -ый этап построения функции  $u_{\varepsilon_2 m^*}^r$  считаем сейчас уже сделанным.

Если  $x \neq 0, \frac{1}{2}$  и 1, то полоска  ${}^{x_i} O_{11}^{rn}$  содержит приближение к  $g_{km_i}^r$  ( $k \leq n$ ), построенное на  $n$ -ом этапе, —  $\hat{Q}_{\varepsilon_k m_i}^{rn}$ , а поэтому и построенную при уже сделанных построениях  $n + 1$ -го этапа полосу  ${}^0 O_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$ . Так как эта полоска, охватывающая  $Q_{\varepsilon_k m_i}^{rn}$ , и помещающаяся в  $\hat{Q}_{\varepsilon_k m_i}^{rn}$ , не пересекается с мелкими квадратами, можно принять ее за  $B$  в геометрической лемме, а за  $A$  принять  ${}^{x_i} O_{11}^{rn}$ . В результате применения леммы получается многоугольник  $S$ , 1) пересекающий полосу  ${}^0 O_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$  по отрезку, 2) отделяющий  ${}^1 O_{11}^{r, n+1}$  от  ${}^0 O_{11}^{r, n+1}$ , 3) лежащий внутри  ${}^{x_i} O_{11}^{rn}$  и 4) извивающийся между мелкими квадратами, не задевая их. Раздвигая  $S$  до замкнутой многоугольной полосы  $d$ , обладающей свойствами 2), 3) и 4) и такой, что  ${}^{x_i} O_{11}^{r, n+1} = d \cup \hat{Q}_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$  — тоже замкнутая многоугольная полоска (возможность чего очевидна), получаем следующее приближение  ${}^{x_i} O_{11}^{r, n+1}$  к множеству уровня  $u_{11}^r = x_i$ .

${}^{x_i} \Theta_{11}^{r, n+1} = {}^{x_i} O_{11}^{r, n+1} \setminus Q_{\varepsilon_k m_i}^{r, n+1}$  — следующее приближение к границе этого множества.

Проделав указанную операцию со всеми полосками  ${}^{x_i} O_{11}^{rn}$ , будем иметь совокупность замкнутых многоугольных непересекающихся полосок  ${}^x O_{11}^{r, n+1}$ , отделяющих  ${}^1 O_{11}^{r, n+1}$  от бесконечности. Эти полоски будут называться готовыми.

Начнем строить первые приближения к множествам уровня функции  $u_{11}^r$ , содержащим множества  $g_{n+1}^r$  ранга  $n + 1$ .

Границы готовых полосок  ${}^{x_i} O_{11}^{r, n+1}$  не пересекаются с мелкими квадратами. Рассмотрим номера  $m$ , отвечающие тем мелким квадратам, которые лежат в  $Q_{11}^{r, n+1}$  и не попали ни в одну из готовых полосок. Совокупность всех таких  $m$  обозначим через  $M_{11}^{r, n+1}$ . Квадратики  $\hat{Q}_{\varepsilon_{n+1}m}^{r, n+1}$  ( $m \in M_{11}^{r, n+1}$ ) должны быть включены в первые приближения к множествам уровней. Готовые полосы разделяют  $Q_{11}^{r, n+1}$  на открытые многоугольные полосы, в которых лежат мелкие квадратики. В каждой из них поступаем в точности так, как это уже описано при проведении второго этапа. Разница лишь в большем числе готовых полосок. В результате получаем полосы  ${}^{x_i} O_{11}^{r, n+1}$  и  $\Theta$ -образные полосы

$x_i \Theta_{11}^{r, n+1}$ , которые и будут приближениями к множествам уровней и их границам. Значения  $x_i$  в каждой открытой полоске между двумя готовыми распределяются равномерно.

Таким образом, можно вести построение, строя на каждом этапе объекты со свойствами 1°, 2°, 3°, 4°.

Пусть проделаны все этапы.

Определяем  $g_{km}^r$  как  $\bigcup_{i=k}^{\infty} Q_{km}^i$ .

Множества уровня функции  $u_{km}^r$ , на которых лежат множества  $g_{k'm'}^r$  ( $k' > k$ ), определяются как пересечения соответствующих многоугольных полосок — приближений. Значения функции на этих уровнях определены на  $k'$ -ом этапе.

На все области  $g_{km}^r$  функции  $u_{km}^r$  продолжаются по непрерывности. Ниже доказывается, что это можно делать и что полученные функции будут удовлетворять всем требованиям основной леммы.

Очевидно, что  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Вспоминая построение квадратов  $P$ , видим, что  $\bigcup_{i,j} P_{k_i m_j}^r$  — всюду плотное на  $g_{km}^r$  множество. В силу  $P_{k_i m_j}^r \subset g_{km}^r (k_i > k)$

этого сумма  $\Sigma_{km}^r$  всех множеств уровней, на которых мы на каком-нибудь этапе определили  $u_{km}^r$ , всюду плотна в  $g_{km}^r$ . Покажем, что на множестве  $\Sigma_{km}^r$  функция  $u_{km}^r$  равномерно непрерывна.

Не ограничивая общности рассуждений, положим  $k = m = 1$  и будем вести доказательство только для  $u_{11}^r = u$ .

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . На каждом  $n + 1$ -м этапе между любыми двумя полосками  ${}^x O_{11}^{r, n+1}$ ,  ${}^y O_{11}^{r, n+1}$  будет находиться по крайней мере один квадрат  $\hat{Q}_{\varepsilon_{n+1} m}^r$ , если уровни  $u = x$  и  $u = y$  начали строить до  $n + 1$ -го этапа. В самом деле, ширина открытой полоски  $O^n$  между  ${}^x O_{11}^{r, n}$  и  ${}^y O_{11}^{r, n}$  больше  $d$ , а квадраты  $P_{\varepsilon_{n+1} m}^r$  имеют диаметр меньше  $d$  и входят в лебегово покрытие, так что хоть один из них  $P_{\varepsilon_{n+1} m}^r$  имеет точки в  $O^n$ . Тогда он и вместе с ним  $\hat{Q}_{\varepsilon_{n+1} m}^{r, n+1}$ , очевидно, попадает в открытую полоску  $O^{n+1}$  между  ${}^x O_{11}^{r, n+1}$  и  ${}^y O_{11}^{r, n+1}$ . Но на  $n + 1$ -ом этапе ( $n > 1$ ) значения между вновь построенными полосками распределялись равномерно. Поэтому наибольший промежуток между значениями  $u$  на двух множествах уровня, приближения к которым — соседние полоски среди полосок, полученных после  $n$ -го этапа, на каждом этапе уменьшается по крайней мере вдвое. Поэтому существует номер этапа  $k$ , такой, что если  ${}^x O_{11}^{r, k}$  и  ${}^y O_{11}^{r, k}$  — соседние полоски, то  $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Выберем  $\delta = \varepsilon_{k+1}$ . Пусть  $\rho(a, b) < \delta$ . Тогда точки  $a$  и  $b$  могут разделяться только одной полоской  ${}^z O_{11}^{r, k}$ , так как расстояние между ограничивающими полоски многоугольниками больше  $\varepsilon_{k+1} = \delta$ . Поэтому существует полоска  ${}^z O_{11}^{r, k}$ , от которой другие полоски ни  $a$ , ни  $b$  не отделяют. Но, очевидно, в таких точках функция  $u$  отличается от  $z$  меньше, чем на  $\frac{\varepsilon}{2}$  (так выбран ранг  $k$ ).

Поэтому  $|u(a) - u(b)| < \varepsilon$ . Итак, функция  $u$  равномерно непрерывна на всюду плотном подмножестве компакта  $g$ .

Эта функция может быть (и притом единственным образом) продолжена на  $\bar{g}$ .

Положим вне  $g$   $u = 0$ . Такие продолжения функции  $u_{km}^r$  удовлетворяют требованиям 1) — 7) основной леммы.

В самом деле, требования 1), 2), 3) и 7) выполнены очевидным образом.

Условие 4) выполнено с константами  $c = \frac{1}{2}$  и  $C = 3$ , так как при любом  $k$  каждая точка  $E^2$  покрыта не менее, чем одним, и не более, чем тремя, квадратами  $P_{\varepsilon_k m}^r$  с какими-нибудь  $m$  и  $r$ , а на этих квадратах  $\frac{1}{2} \leq u_{km}^r \leq 1$ : для этого и устраивались специально уровни  $u_{km}^r = \frac{1}{2}$ .

Условие 5) выполнено, если  $g_{k'm'}^r \subset g_{km}^r$ , потому что

$$g_{k'm'}^r = \bigcup_{i=k'}^{\infty} Q_{\varepsilon_{k'm'}}^{ri} \subseteq \bigcap_{i=k'+1}^{\infty} \hat{Q}_{\varepsilon_{k'm'}}^{ri} \subseteq \bigcap_{i=k'+1}^{\infty} x_{m'}^{ri} O_{km}^r,$$

т. е.  $g_{k'm'}^r$  целиком входит в множество уровня функции  $u_{km}^r$ . Если  $g_{k'm'}^r \subset R^2 \setminus g_{km}^r$ , то на  $g_{k'm'}^r$   $u_{km}^r = 0$ . Границы  $g_{km}^r$  и  $g_{k'm'}^r$  по построению не пересекаются. Каждое из этих множеств есть область, и поэтому больше никаких случаев быть не может.

Условие 6) тоже выполнено. Для множеств уровней 0 и 1 это очевидно. (Легко видеть, что каждое из остальных множеств уровня функции  $u_{km}^r$  получается как пересечение последовательности замкнутых многоугольных полосок, а поэтому оно связно и делит плоскость на две части (одна содержит множество  $u_{km}^r = 0$ , другая — множество  $u_{km}^r = 1$ ). Границы множеств уровней функции  $u_{km}^r$ , содержащих  $g_{k'm'}^r$ , делят плоскость не более, чем на 3 части, так как они получаются как пересечения последовательностей замкнутых многоугольных  $\Theta$ -образных полосок. Границы остальных множеств уровня  $u_{km}^r$  исключая множество уровня 0, для которого 6) тривиально) совпадают с самими этими множествами, ибо каждое такое множество уровня не содержит точек всюду плотного на  $g_{km}^r$  открытого множества

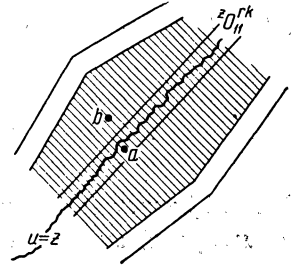
$$\bigcup_{i,i} g_{k_i m_j}^r, \\ g_{k_i m_j}^r \subset g_{km}^r$$

состоящего из всех входящих в  $g_{km}^r$  точек множеств той же системы следующих рангов.

Доказательство основной леммы закончено.

### § 2. Доказательство теоремы 2

Пусть  $u_{km}^r$  — функции, удовлетворяющие условиям основной леммы,  $g_{km}^r$  — множества, где они положительны,  $d_k$  и  $0 < c \leq C$  — определенные в условии



Фиг. 7. Полоски построены на  $k$ -ом этапе. В заштрихованной полосе  $u$  отличается от значения на уровне  $u = z$  (приближение к которому — средняя полоска  $z O_{11}^{rk}$ ) меньше, чем на  $\frac{\varepsilon}{2}$



этой леммы постоянные. Имея в виду построить представление функции трех переменных в виде, указанном в теореме 2, мы сначала разложим функцию двух переменных в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям  $u_{km}^r$ .

**Лемма 1.** Пусть на квадрате  $E^2$  задано семейство  $F$  непрерывных функций, образующее компакт в равномерной метрике (т. е. состоящее из равномерно ограниченных и равномерно непрерывных функций и замкнутое относительно равномерной сходимости семейства). Тогда любая функция  $f \in F$  может быть представлена в виде:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(f) u_{km}^r(x), \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{km}^r$  не зависят от  $x$ , непрерывно (в смысле равномерной метрики) зависят от  $f \in F$  и таковы, что

$$|a_{km}^r(f)| \leq a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty,$$

причем  $a_k$  зависят лишь от семейства  $F$ .

Для доказательства этой леммы нам потребуется следующее утверждение:

**Лемма об аппроксимации** линейной комбинацией функций ранга  $k$ . Пусть  $f(x)$  — непрерывная действительная функция на  $E^2$  и

$$\max_{x \in E^2} |f(x)| \leq M.$$

Пусть  $k$  — натуральное число и

$$\max_{\rho(x, y) \leq d_k} |f(x) - f(y)| \leq \delta_k.$$

Тогда можно определить не зависящие от  $x$  коэффициенты  $b_m^r$  так, что

$$f(x) = S(x) + R(x), \quad (2)$$

где

$$S(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} b_m^r u_{km}^r(x), \quad (3)$$

$$|R(x)| \leq \left(1 - \frac{c}{C}\right) M + \delta_k. \quad (4)$$

При этом  $b_m^r$  можно выбрать непрерывно (в смысле равномерной метрики) зависящими от  $f(x)$  и так, чтобы  $|b_m^r| \leq \frac{M}{C}$ .

**Доказательство.** Выберем в каждом множестве  $g_{km}^r$  точку  $x_{km}^r$  и положим  $b_m^r = \frac{1}{C} f(x_{km}^r)$ . Очевидно,  $b_m^r$  непрерывно зависят от  $f$  и  $|b_m^r| \leq \frac{M}{C}$ .

Покажем, что в каждой точке  $x \in E^2$  имеет место неравенство (4), где  $R(x)$  определено из (2) и (3) при указанном выборе  $b_m^r$ . Зафиксируем точку  $x \in E^2$  (любую). Из свойств 2) и 3) функций  $u_{km}^r$  (см. основную лемму) следует, что в каждой точке  $x$  от нуля отличны не более, чем три функции  $u_{km}^r$  с заданным  $k$ , а именно отвечающие разным  $r$ . Пусть для данной точки  $x$  это будут  $u_{km_r}^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ). Тогда в точке  $x$

$$S(x) = \sum_{r=1}^3 b_{m_r}^r u_{km_r}^r(x) = \frac{1}{C} \sum_{r=1}^3 f(x_{km_r}^r) u_{km_r}^r(x).$$

Предположим сначала, что  $x_{km_r}^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) и  $x$  были выбраны столь удачно, что оказались совпадающими:  $x_{km_r}^r = x$  ( $r = 1, 2, 3$ ). Тогда  $S(x)$  есть

$$S'(x) = \frac{1}{C} \sum_{r=1}^3 f(x) u_{km_r}^r(x) = \frac{f(x)}{C} \sum_{r=1}^3 u_{km_r}^r(x) \quad (5)$$

и, соответственно,  $R(x)$  равно

$$R'(x) = f(x) - S'(x). \quad (6)$$

Но из требования 4) основной леммы вытекает:

$$0 < c \leq \sum_{r=1}^3 u_{km_r}^r(x) \leq C.$$

Поэтому для  $|R(x)|$  имеем оценку:

$$|R'(x)| = |f(x) - S'(x)| = |f(x)| \left(1 - \frac{c}{C}\right) \leq M \left(1 - \frac{c}{C}\right). \quad (7)$$

Эта же оценка для  $R'(x)$ , определенного равенствами (5) и (6), имеет место, очевидно, и без предположения  $x_{km_r}^r = x$  ( $r = 1, 2, 3$ ). Чтобы оценить  $R(x)$  в общем случае, рассмотрим

$$\begin{aligned} |R(x) - R'(x)| &= |S(x) - S'(x)| = \\ &= \frac{1}{C} \left| \sum_{r=1}^3 [f(x_{km_r}^r) - f(x)] u_{km_r}^r(x) \right| \leq \frac{1}{C} \sum_{r=1}^3 |f(x_{km_r}^r) - f(x)| u_{km_r}^r(x). \end{aligned}$$

Так как (см. условие 2) основной леммы) диаметр области  $g_{km}^r$  меньше  $d_k$ , то

$$|R(x) - R'(x)| < \frac{1}{C} \delta_k \sum_{r=1}^3 u_{km_r}^r(x)$$

или, на основании условия 4) основной леммы,

$$|R(x) - R'(x)| < \delta_k.$$

Сопоставляя с (7), видим, что наша лемма доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть  $f \in F$  — непрерывная на  $E^2$  действительная функция и

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |f(x)| \leq M = M_0, \quad \sup_{\substack{x \in E^2, y \in E^2, f \in F \\ \rho(x, y) < d_k}} |f(x) - f(y)| = \delta_k.$$

При  $k \rightarrow \infty$   $\delta_k \rightarrow 0$ , поэтому можно выбрать столь большое  $k_1 = k_1(F)$ , что  $\delta_{k_1} < \frac{c}{2C} M_0$ . Применяя при  $k = k_1$  лемму об аппроксимации и полагая  $a_{k_1, m}^r = b_m^r$ , мы получаем:

$$(8) \quad f(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_1}} a_{k_1, m}^r(f) u_{k_1, m}^r(x) + R_1(x),$$

причем

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |R_1(x)| \leq M_0 \left(1 - \frac{c}{C}\right) + \delta_{k_1} < M_0 \left(1 - \frac{c}{2C}\right),$$

где  $a_{k_1, m}^r$  непрерывно зависят от  $f \in F$  и

$$|a_{k_1, m}^r| < \frac{M_0}{C} = \frac{M}{C}.$$

Полагая  $1 - \frac{c}{2C} = \theta$  и  $\theta M_0 = M_1$ , имеем:

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |R_1(x)| < M_1.$$

Очевидно,  $R_1(x)$ , отвечающие всевозможным  $f \in F = F_0$ , образуют компакт  $F_1$ , как непрерывный образ компакта, в частности, эти  $R_1(x)$  равномерно ограничены и равномерно непрерывны, причем каждая функция  $R \in F_1$  от соответствующей ей  $f \in F_0$  зависит непрерывно. Введем обозначение:

$$\sup_{\substack{x \in E^2, y \in E^2, R \in F_1 \\ \rho(x, y) < d_k}} |R_1(x) - R_1(y)| = \delta'_k.$$

Мы можем повторить предыдущее рассуждение, и в результате найдем такое  $k_2 = k_2(F)$ , что

$$R_1(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_2}} a_{k_2, m}^r(R_1) u_{k_2, m}^r(x) + R_2(x),$$

причем

$$\sup_{x \in E^2, f \in F} |R_2(x)| < \theta M_1 = \theta^2 M$$

и  $a_{k,m}^r$  непрерывно зависят от  $R_1 \in F_1$  и, стало быть, от  $f \in F_0$ , и

$$|a_{k_2 m}^r| < \frac{M_1}{C} = \frac{M}{C} \theta.$$

Продолжая таким же образом дальше, мы получим последовательность

$$R_n(x) = \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_{n+1}}} a_{k_{n+1} m}^r(R_n) u_{k_{n+1} m}^r(x) + R_{n+1}(x),$$

причем

$$\sup_{x \in E^3, f \in F} |R_{n+1}(x)| < \theta M_n = \theta^{n+1} M, \quad (8)$$

где  $a_{k,m}^r$  непрерывно зависят от  $f \in F$  и

$$|a_{k_{n+1} m}^r| < \frac{M_n}{C} = \frac{M}{C} \theta^n \quad (9)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ , если обозначить  $R_0(x) = f(x)$ ).

Введем обозначение:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (R_i(x) - R_{i+1}(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_{k_{i+1}}} a_{k_{i+1} m}^r u_{k_{i+1} m}^r(x). \quad (10)$$

Тогда, очевидно,

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Из неравенств (8) и (9) видно, что последовательность  $S_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сходится к  $f(x)$  абсолютно и равномерно, причем  $|a_{k_i m}^r| < a_{k_i} = \frac{M}{C} \theta^{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Лемма 1 доказана, так как можно положить  $a_{k m}^r = 0$  при  $k \neq k_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), и тогда из (10) получим (1).

При доказательстве теоремы 2 используется также следующая

**Лемма 2.** *Пространство компонент множеств уровня функции*

$$F_r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(x, y)$$

*есть дерево, индекс ветвления точек которого не более трех.*

*Любая функция*

$$f_r(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r u_{km}^r \quad (*)$$

*постоянна на каждой компоненте множества уровня функции  $F_r$ , если  $a_{km}^r$  — такие константы, что ряд (\*) сходится равномерно и абсолютно.*

Доказательство леммы 2. Зафиксируем  $r$ . Докажем сначала, что все компоненты множеств уровня функции  $F_r(x, y)$  суть: 1) компоненты множеств уровня функций  $u_{km}^r$  ( $k = 1, 2, \dots; m = 1, \dots, m_k$ ), 2) границы таких компонент, 3) отдельные точки, являющиеся пересечениями последовательностей множеств  $g_{km}^r$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Возьмем точку  $a$  на плоскости. Либо  $a$  входит в бесконечное число множеств  $g_{km}^r$ , либо существует «последний ранг»  $k_0 \geq 0$ , после [которого точка  $a$  уже не входит ни в одно  $g_{km}^r$  ( $k > k_0$ ).

Рассмотрим первый случай. Докажем, что такая точка есть компонента множества уровня функции  $F_r$ . Пусть точка  $a$  входит в бесконечную последовательность  $\{g_{k_i m_i}^r\}$ . Из условия 3) основной леммы следует, что  $k_i$  все различны. Будем считать, что всегда  $k_{i+1} > k_i$ . Легко вывести из основной леммы (требования 2) и 5)), что если множества  $g_{km}^r$  и  $g_{k'm'}^r$  пересекаются и  $k' > k$ , то  $g_{k'm'}^r \subset g_{km}^r$ . В приведенном выше доказательстве основной леммы это получается автоматически (см. доказательство того, что выполнено требование 5)). Поэтому имеем последовательность вложенных множеств  $g_{k_i m_i}^r \supset g_{k_{i+1} m_{i+1}}^r \supset \dots \ni a$ . При этом  $\bigcap_{i=1}^{\infty} g_{k_i m_i}^r = a$ , так как диаметры множеств  $g_{k_i m_i}^r$  стремятся к нулю при  $i \rightarrow \infty$  (требование 2) основной леммы).

На границе  $M_i$  каждого множества  $g_{k_i m_i}^r$  значение функции  $F_r$  меньше, чем в точке  $a$ . Действительно, на  $M_i$  все функции  $u_{km}^r$  ( $k \geq k_i$ ) равны нулю (это сразу следует из требований 2) и 5) основной леммы), а все функции  $u_{km}^r$  ( $k < k_i$ ) принимают те же значения, что в точке  $a$  (требование 5)). В точке же  $a$  все функции  $u_{k_j m_j}^r$  ( $j \geq i$ ) положительны, и поэтому  $F_r(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(a)$  больше, чем  $F_r$  на  $M_i$ .

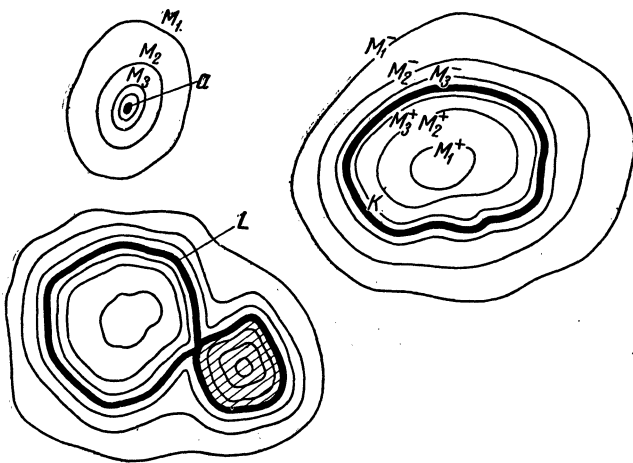
Но каждый континуум, содержащий  $a$ , пересекается с каким-нибудь из множеств  $M_i$ , ибо  $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$  отделяет  $a$  от всех вообще точек  $R^2 \setminus a$  (фиг. 8). Значит, на каждом континууме, содержащем  $a$ , найдется точка  $b$ , где  $F_r(b) \neq F_r(a)$ , а это как раз и означает, что  $a$  есть компонента множества уровня функции  $F_r$ .

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть точка  $a \in g_{k_0 m_0}^r$  не входит ни в одно  $g_{km}^r$  ( $k > k_0$ ). Точка  $a$  принадлежит некоторому континууму  $K$  — множеству ненулевого уровня  $z$  функции  $u_{k_0 m_0}^r$ .

Предположим сначала, что  $K$  не содержит областей  $g_{km}^r$  ( $k > k_0$ ). Тогда  $0 < z < 1$ . Докажем, что  $K$  есть компонента множества уровня функции  $F_r$ .

Выберем две последовательности  $z_i^+$  и  $z_i^-$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), сходящиеся к  $z$  сверху и снизу и такие, что множества  $M_i^-$  и  $M_i^+$  уровней  $z_i^-$  и  $z_i^+$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) функции  $u_{k_0 m_0}^r$  не содержат областей  $g_{km}^r$  и  $0 < z_i^- < z < z_i^+ < 1$ . Это можно сделать потому, что  $0 < z < 1$  и областей  $g_{km}^r$  — счетное множество. Континуумы  $M_i^+$  и  $M_i^-$ , очевидно, отделяют  $K$  от точек, где  $u_{k_0 m_0}^r$  больше  $z_i^+$  и

меньше  $z_i^-$ , а все вместе, т. е.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i^+ \cup M_i^-)$ , отделяют  $K$  вообще от всех точек  $R^2 \setminus K$ , так как в каждой точке  $R^2 \setminus K$   $u_{k_0 m_0}^r$  больше какого-ни-



Фиг. 8. Изображены все три типа компонент. В третьем случае  $z \neq 1$ . Заштриховано  $g_{k'm'}^r$ . Случай  $z = 1$  представляется читателю]

Будь  $z_i^+$  или меньше какого-нибудь  $z_i^-$ . На  $K$ , равно как и на каждом множестве  $M_i^+$  и  $M_i^-$ , функция  $F_r$  не меняется, так как все слагаемые с  $u_{km}^r$  ( $k > k_0$ ) равны там нулю, в силу предположения об отсутствии на  $K$ ,  $M_i^+$  и  $M_i^-$  множеств  $g_{km}^r$ . Но значения  $F_r$  на  $K$ , на  $M_i^+$  и на  $M_i^-$  различны, так как все слагаемые  $u_{km}^r$  с  $k < k_0$  [на этих континуумах одинаковы (требование 5)], все слагаемые  $u_{km}^r$  с  $k > k_0$  равны нулю, а функция  $u_{k_0 m_0}^r$  равна  $z$  на  $K$ ,  $z_i^+$  на  $M_i^+$  и  $z_i^-$  на  $M_i^-$ .

Каждый континуум  $M \neq K$ , содержащий  $K$ , пересекает  $\bigcup_{i=1}^{\infty} (M_i^+ \cup M_i^-)$  (фиг. 8). Поэтому он имеет точки, где  $F_r$  отлично от значения  $F_r$  в точках  $K$ . Это и значит, что  $K$  — компонента множества уровня функции  $F_r$ .

В оставшемся случае доказательство аналогично проведенному, и мы его только наметим. Если множество  $K \ni a$  уровня  $u_{k_0 m_0}^r = z$  содержит  $g_{k'm'}^r$ , то компонентой множества уровня функции  $F_r$ , содержащей  $a$ , будет  $L$  — граница  $K$  (фиг. 8). Действительно, точка  $a$  не входит в  $g_{k'm'}^r$  (так как  $k_0$  — «последний ранг»). Граница  $K$  делит плоскость не более, чем на три части (требование 6)). Сначала пусть  $z \neq 1$ . Тогда в двух из этих частей  $u_{k_0 m_0}^r$  принимает значения, большие и меньшие  $z$ , а в третьей —  $g_{k'm'}^r$ ,  $u_{k'm'}^r$  положительно. Точка  $a$  не может лежать ни в одной из этих частей и лежит на границе  $K$ . На континууме  $L$  функция  $F_r$  постоянна, так как постоянны все функции  $u_{km}^r$  (требования 5) и 6)). Чтобы доказать, что  $L$  — компонента множества уровня функции  $F_r$ , остается отделить ее континуумами с другими значениями  $F_r$  от всех точек  $R^2 \setminus L$ . Для этого приходится использовать

множества уровней, близких к нулю, функции  $u_{k'm'}^r$  и множества уровней, близких к  $z$ , функции  $u_{k_0m_0}^r$  (фиг. 8).

Оставленный случай  $z=1$  еще проще, так как граница множества  $u_{k_0m_0}^r=1$  делит плоскость лишь на две части (это непосредственно следует из построения функций  $u_{km}^r$ , но может быть выведено и из требований 2) и б) основной леммы).

Итак, строение компонент множеств уровня функции  $F$ , выяснено. Ни одна из них не делит плоскость более, чем на три части. Отсюда следует (приложение, теорема 3<sup>a</sup>), что дерево функции  $F$ , не имеет точек, индекс ветвления которых превосходит 3.

Чтобы покончить с доказательством леммы 2, отметим еще, что на каждой компоненте множества уровня  $F$ , все функции  $u_{km}^r$  постоянны. Отсюда сразу следует второе утверждение леммы.

**Теорема 2.** *Любая непрерывная на  $E^3$  действительная функция  $f(x_1, x_2, x_3)$  может быть представлена в виде*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 h_i[\varphi_i(x_1, x_2), x_3],$$

где  $h_i$  и  $\varphi_i$  — непрерывные функции, причем функции  $h_i$  действительны и определены на произведении  $\Xi \times E^1$  дерева на отрезок  $E^1$ , а  $\varphi_i(x_1, x_2)$  определены на квадрате  $E^2$  и имеют в качестве значений точки  $\Xi$ . При этом  $\Xi$  — дерево, индекс ветвления точек которого не больше трех.

**Доказательство.** Функцию трех переменных  $f(x_1, x_2, x_3)$  можно рассматривать как семейство функций двух переменных, зависящее от третьего переменного, как от параметра:  $f_{x_3}(x_1, x_2)$ ; где функция  $f_{x_3}(x_1, x_2)$  при каждом  $x_3$  определена на одном и том же квадрате  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  и в точке  $(a, b)$  равна  $f(a, b, x_3)$ . Очевидно, каждая из функций  $f_{x_3}(x_1, x_2)$  непрерывна и (в смысле равномерной метрики) непрерывно зависит от параметра  $x_3$ ,  $0 \leq x_3 \leq 1$ , а потому семейство функций  $f_{x_3}(x_1, x_2)$  образует компакт. Мы можем поэтому применить лемму 1 и тогда будем иметь:

$$f_{x_3}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^3 \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(x_3) u_{km}^r(x_1, x_2).$$

Так как  $|a_{km}^r(x_3)| \leq a_k$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$ , то каждый из трех рядов

$$f_{x_3}^r(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(x_3) u_{km}^r(x_1, x_2) \quad (r = 1, 2, 3)$$

сходится абсолютно и равномерно (по основной лемме из всех функций  $u_{km}^r$  ( $m = 1, \dots, m_k$ ) в каждой точке отлична от нуля только одна). Покажем что  $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$  от  $x_3$  зависит непрерывно (все в том же смысле).

В самом деле, пусть дано  $\epsilon > 0$ . Выберем  $N$  столь большое, чтобы

$\sum_{k=N}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{4}$ . Поскольку  $a_{km}^r(x_3) u_{km}^r(x_1, x_2)$  непрерывно зависят от  $x_3$ , то же относится и к конечной сумме, поэтому найдется столь малое  $\delta > 0$ , что при  $|y - z| < \delta$  будет

$$\sup_{x_1, x_2 \in E^2} \left| \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(y) u_{km}^r(x_1, x_2) - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(z) u_{km}^r(x_1, x_2) \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

( $r=1, 2, 3$ ).

А так как

$$\sup_{x_1, x_2 \in E^2} \left| \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(y) u_{km}^r(x_1, x_2) - \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{m=1}^{m_k} a_{km}^r(z) u_{km}^r(x_1, x_2) \right| \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} a_k < \frac{\varepsilon}{2},$$

получается, что при  $|y - z| < \delta$  всегда

$$\sup_{x_1, x_2 \in E^2} |f_y^r(x_1, x_2) - f_z^r(x_1, x_2)| < \varepsilon \quad (r = 1, 2, 3).$$

Теперь мы применим лемму 2 и увидим, что каждая функция  $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$  при любом  $x_3 \in [0, 1]$  постоянна на каждой [компоненте множества уровня одной и той же построенной заранее и от  $f(x_1, x_2, x_3)$  вовсе не зависящей функции  $F_r(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{m_k} u_{km}^r(x_1, x_2)$ .

Рассмотрим (см. приложение) дерево компонент множеств уровня непрерывной функции  $F_r(x_1, x_2)$ . Отображение  $t(a) = \varphi_r(x_1, x_2)$  сопоставляет каждой точке  $x$  квадрата  $E^2 = A$  точку  $\varphi_r$  дерева  $T^r$ , изображающую компоненту  $t$  множества уровня  $F_r(x_1, x_2)$ , которой принадлежит  $(x_1, x_2)$ . Мы можем рассматривать это отображение как функцию  $\varphi_r(x_1, x_2)$ , определенную на квадрате, со значениями из дерева. Если угодно, можно реализовать дерево на плоскости; тогда это отображение можно записать с помощью двух действительных функций, заданных на квадрате. Отображение  $t(a)$  непрерывно. Функции  $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$  порождают на  $T^r$  функции  $f_{\varphi_r}^r$ , равные значениям  $f_{x_3}^r(x_1, x_2)$  в любой точке компоненты  $t$ -прообраза  $\varphi_r$  на  $E^2$ ; в силу леммы 2, во всех точках одной компоненты это значение одно и то же. Очевидно, получающиеся функции  $f_{\varphi_r}^r$  непрерывны на  $T^r$  и непрерывно зависят от  $x_3$ . Поэтому семейство  $f_{\varphi_r}^r(x_3)$  ( $x_3 \in [0, 1]$ ) можно рассматривать как непрерывную действительную функцию  $f^r(x_3, \varphi_r)$  на произведении дерева на отрезок изменения  $x_3$ :

$$f_{x_3}^r(x_1, x_2) = f^r(x_3, \varphi_r(x_1, x_2)).$$

Из трех деревьев  $T^r$  ( $r = 1, 2, 3$ ) мы можем составить одно дерево  $\Xi$ . По лемме 2 каждое из трех деревьев имеет лишь точки с индексом ветвления 1, 2, 3. Дерево  $\Xi$  можно, конечно, построить с тем же свойством. Каждая



из функций  $f^r(x_3, \varphi_r)$  ( $r = 1, 2, 3$ ) может быть непрерывно продолжена на произведение всего дерева  $\Xi$  на отрезок (все равно как). Обозначим это продолжение через  $h_r(\varphi_r, x_3)$  ( $r = 1, 2, 3$ ). Из соотношения (1) леммы 1 получаем во введенных обозначениях:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{r=1}^3 h_r[\varphi_r(x_1, x_2), x_3].$$

Теорема 1 доказана.

## Часть II

### Доказательство теоремы 3

Далее будет строиться упоминающееся в формулировке теоремы 3 дерево  $X \subset E^3$ , гомеоморфное универсальному дереву  $\Xi$ , не имеющему точек с индексом ветвления, большим трех. Последнее дерево, как известно (см. приложение, теорема 5), может быть получено приклеиванием веточек. Точнее,  $\Xi$  может быть представлено в виде

$$\Xi = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n}, \quad \Delta_n \subset \Delta_{n+1},$$

где  $\Delta_n$  — конечные деревья (кривые комплексы),  $\Delta_1$  — простая дуга и  $\Delta_{n+1}$  получается из  $\Delta_n$  приклеиванием в точке  $\rho_n$ , не являющейся точкой ветвления, простой дуги  $\sigma_n$  (фиг. 9). Заметим, что множество точек  $\rho_n$ , ветвления дерева  $\Xi$  — не более, чем счетное. В дальнейшем все, что относится к абстрактному дереву  $\Xi$ , обозначается греческими буквами, а соответствующие образы его реализации  $X$  — соответствующими латинскими буквами. Реализация  $X$  будет построена в виде

$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}, \quad D_n \subset D_{n+1},$$

где  $D_n$  — отрезочные комплексы в трехмерном пространстве; гомеоморфизм  $\Xi$  и  $X$  будет построен как продолжение гомеоморфизмов  $\Delta_n$  и  $D_n$ .

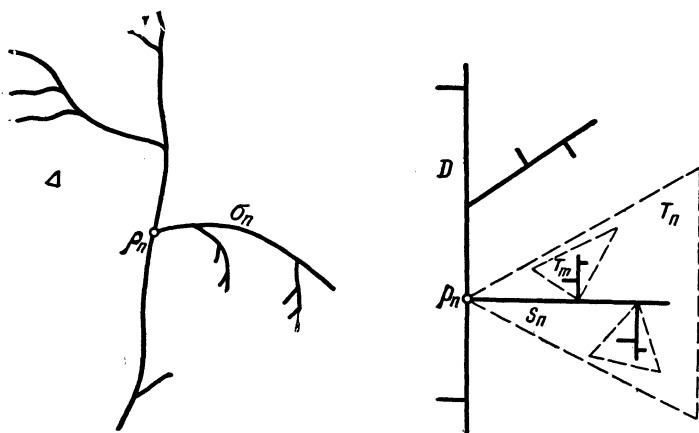
Известно, что, для того чтобы  $X$  было реализацией  $\Xi$  (и, значит, деревом), достаточно выполнения следующих условий (см. приложение, леммы 10 и 11):

α) Каждая вновь пристраиваемая ветка  $s_n$ , кроме основания, всеми своими точками и точками всех своих суков должна находиться внутри открытого пока пустого симплекса  $T_n$ . При этом для всех суков  $s_m$ , приклеиваемых к  $s_n$  ( $p_m \in s_n$ ) позднее ( $m > n$ )  $\overline{T_m} \subset T_n$  (фиг. 9).

На фиг. 9 и у Менгера ([3], гл. X), располагавшего дерево  $X$  на плоскости, симплексы  $T$  суть треугольники. В нашем случае они будут тетраэдрами. Это не меняет существа дела.

β) Симплексы  $T_n$  должны быть достаточно малыми: диаметры  $T_n$  стремятся к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ .

γ) Точки  $p_n$ , в которых пристраиваются новые ветви, не должны быть уже до этого точками ветвления или концевыми точками для  $D_n$ .



Фиг. 9. Конечные деревья: «абстрактное» кривое  $\Delta$  и реализующий комплекс  $D$

В дальнейшем (§§ 3—7) при построении  $D_n$  и  $X$  мы всегда будем иметь возможность выбирать точки  $p_n$  и направления отрезков  $s_n$  достаточно свободно: каждый раз запрещенные для выбора точки или направления будут иметь всюду плотное дополнение. Что касается длин  $s_n$ , то мы будем их выбирать достаточно малыми. Условия  $\alpha$ ),  $\beta$ ) и  $\gamma$ ) можно поэтому считать выполненными на каждом шагу. Чтобы не затемнять последующее изложение, не будем больше оговаривать это. Мы считаем, что, пристраивая каждую ветку  $s_n$ , мы строим соответствующий тетраэдр  $T_n$  и заботимся о выполнении условий  $\alpha$ ),  $\beta$ ) и  $\gamma$ ).

Чтобы получаемое дерево  $X$  удовлетворяло условиям теоремы 3, т. е. чтобы каждая непрерывная функция данного семейства представлялась на нем в виде суммы функций координат, при построении придется выбирать  $p_n$  и  $s_n$  с некоторыми ограничениями. Для точной формулировки этих ограничений, которой и посвящен следующий параграф, требуется целый ряд понятий.

### § 3. Основные определения. Индуктивные свойства 1—4

Пусть  $K$  — расположенная в трехмерном \* пространстве конечная совокупность отрезков или прямых, отрезки (прямые) которой не параллельны координатным плоскостям.

Определение 1 (фиг. 10). Молнией называется система принадлежащих  $K$  точек  $a_0 \neq a_1 \neq \dots \neq a_{n-1} \neq a_n$ , если отрезки  $a_{i-1}a_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) перпендикулярны координатным осям  $x_{\alpha_i}$  и  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \dots \neq \alpha_n$ . Отрезки  $a_{i-1}a_i$  называются звеньями молнии. Если  $a_0 = a_n$ , то молния называется замкнутой.

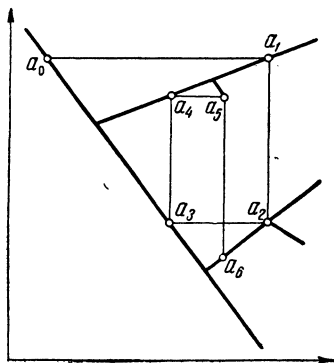
Наглядно молнию нужно представлять себе так. Начало  $a_0$  есть точка из  $K$ . Выбираем первое направление  $\alpha_1$ . Плоскость, проходящая через

\* В §§ 3—7 число измерений могло бы быть произвольным  $\geq 2$ . Чертежи соответствуют двумерному случаю.

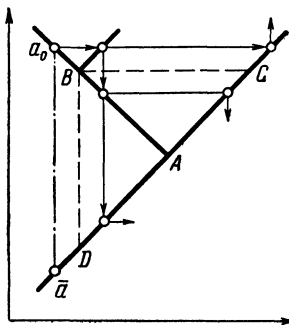
$a_0$  и перпендикулярная оси  $x_{\alpha_1}$  (мы будем говорить «плоскость координатного направления  $\alpha_1$ ») пересекается с  $K$  в точке  $a_1$ . Мы будем говорить, что она *уводит* из  $a_0$  в  $a_1$ . Точно так же звено  $a_1a_2$  лежит в плоскости направления  $\alpha_2$  ( $\neq \alpha_1$ ), так что в  $a_1$ , вообще говоря, — излом. В точке  $a_2$  направление снова меняется на  $\alpha_3$  ( $\neq \alpha_2$ ), и мы приходим в точку  $a_3$ , и т. д. до  $a_n$  — конца молнии.

Несколько видоизменив описанный процесс, мы придем к выводящей схеме. В заметке [1] дано ее формальное определение. Более наглядно

Определение 2 (фиг. 11). Начало выводящей схемы — точка  $a_0 \in K$ .



Фиг. 10. Молния  $a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_6$



Фиг. 11. Выводящая схема из точки  $a_0$ . Если добавить точку  $\bar{a}$ , то полученная двойная выводящая схема будет классом точки  $a_0$ .

Начало называется также концом ранга 0. Выберем координатное направление  $\alpha_0$  и проведем через точку  $a_0$  плоскость этого направления. Она будет, вообще говоря, иметь несколько точек пересечения с  $K$ , кроме точки  $a_0$ . Назовем эту плоскость плоскостью ранга 1 и эти точки — концами ранга 1. Плоскость ранга 1 *приводит* из  $a_0$  в каждый из концов ранга 1.

Далее продолжается тот же процесс. В каждом конце  $a$  ранга  $n$  выбирается свое координатное направление  $\alpha$ , отличное от того, по которому мы в этот конец пришли.\* Проведем через  $a$  плоскость этого направления. Если (кроме  $a$ ) такая плоскость не встречает точек  $K$ , с точкой  $a$  больше ничего не делаем; она называется свободным концом. Если же  $a$  не является свободным концом, то получаем точки пересечения плоскости с  $K$ , которые все называются концами ранга  $n+1$ . Таким образом, *построенная плоскость ранга  $n+1$  уводит* из несвободного конца ранга  $n$  и *приводит* к концам ранга  $n+1$ .

Если этот процесс закончится, т. е. все концы некоторого ранга  $N$  будут свободными, и если все концы всех рангов попарно различны\*\*, то вся

\* Т. е. от направления плоскости ранга  $n$ , в пересечении которой с  $K$  лежит точка  $a$ .

\*\* Т. е. при построении мы не приходим в одну точку два раза.

конструкция называется схемой, выводящей из точки  $a_0$  по направлению  $\alpha_0$ .  $N$  называется рангом схемы.

Таким образом, выводящая схема состоит из начала  $a_0$ , «несущих» плоскостей различных рангов и концов различных рангов.

Нам понадобится некоторое обобщение выводящей схемы — двойная выводящая схема. Она отличается от простой, определенной выше, только тем, что из некоторых ее точек (концов) выводят две плоскости, а не одна. Таким образом, все три плоскости координатного направления, проходящие через такую точку, могут быть несущими в двойной схеме, если одна из них приводит и две уводят. Двойные схемы можно получать, например, соединяя простые, у которых общие — только начала, или присоединяя к некоторому несвободному концу  $a$  простой схемы  $A$  выводящую схему  $B$ , для которой  $a$  является началом и которая, кроме  $a$ , с  $A$  общих точек не имеет.

Каждый свободный конец  $a$  двойной (и простой) выводящей схемы может быть соединен с началом  $a_0$  единственной молнией, все точки которой являются концами схемы, а все звенья лежат в несущих плоскостях схемы. Если бы таких молний было несколько, концы схемы не могли бы быть попарно различны. Указанные молнии называются молниями схемы. Они, конечно, не замкнуты и не содержат замкнутых частей.

Определения устойчивости. Мы скажем, что две молнии (выводящие схемы) на  $K$  — одного типа, если их точки можно взаимно однозначно сопоставить так, чтобы соответствующие точки лежали на тех же отрезках (прямых)  $K^*$ , а соответствующие звенья были перпендикулярны одним и тем же координатным осям.

Мы скажем, что молния  $a_0 \dots a_n$  не длиннее молнии  $b_0 \dots b_m$  ( $m \geq n$ ), если она одного типа с частью  $b_0 \dots b_n$  второй молнии.

Выводящая схема  $A$  не длиннее выводящей схемы  $B$ , если можно установить соответствие между их молниями, при котором все молнии  $A$  не длиннее соответствующих молний  $B$ . Типы выводящих схем, которые не длиннее данной, образуют конечное множество.

Мы скажем, что  $A$  — схема выводящая из  $a_0$  — устойчива, если точка  $a_0$  имеет такую окрестность, что выводящие схемы точек  $K$ , лежащих в этой окрестности, не длиннее  $A$ . Например, комплекс  $K$  фиг. 11 допускает схему выводящую из любой точки, с любым первым направлением. При этом для любой точки, кроме точек ветвления  $A, B$  и концов  $C, D$  исходящих из  $B$  молний, схема устойчива.

Молнии одного типа осуществляют отображение множества своих начал в множество своих концов. Это отображение — линейное и невырожденное (так как отрезки  $K$  не перпендикулярны координатным осям). В дальнейшем мы часто будем пользоваться этим обстоятельством.

Совокупность всех точек  $K$ , которые являются вершинами молний, выходящих из точки  $a_0$ , называется классом достижимых из  $a_0$  точек или просто классом точки  $a_0$  на  $K$ . Аналогично определяется класс множества точек. Заметим, что класс точки и, следовательно, класс не более чем счетного множества есть не более чем счетное множество. Все

\* Внутри отрезка отрезочного комплекса  $K$  не лежат точки ветвления. Комплекс фиг. 11 состоит из 5 отрезков. Это замечание не относится к совокупностям прямых  $K$ .

выводящие схемы точки  $a_0$  и точек одного с ней класса лежат в том же классе.

Теперь мы можем сформулировать индуктивную лемму, доказываемую в §§ 4—9.

Вернемся к функциям  $f$  на дереве  $\Xi$ .

Пусть  $\omega_n$  — верхняя грань колебаний функций  $f \in F$  на компонентах разности  $\Xi \setminus \Delta_n$ . При  $n \rightarrow \infty$   $\omega_n \rightarrow 0$ .

В самом деле, если  $\Xi'$  — реализация  $\Xi$ , построенная (см. приложение, теорема 5) на плоскости, то  $F$  породит семейство  $F'$  равностепенно непрерывных функций на плоском континууме  $\Xi'$ . Так как (см. условие  $\beta$ ) и фиг. 9) диаметры треугольников  $T_n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, а каждая компонента  $\Xi' \setminus \Delta'_n$  лежит в треугольнике  $T_m$  ( $m > n$ ), то при достаточно большом  $n$  диаметр компонент  $\Xi' \setminus \Delta'_n$  будет столь мал, что колебание любой функции  $f' \in F'$  на каждой компоненте будет сколь угодно мало. Поэтому можно выбрать такую последовательность

$$n_1 < n_2 < \dots < n_r < \dots,$$

что  $\omega_n \leq \frac{1}{r^2}$  при  $n \geq n_r$ .

Индуктивными свойствами называются следующие четыре свойства реализующего  $\Delta_n$  дерева  $D_n$  — лежащего в трехмерном кубе отрезочного комплекса, отрезки которого не перпендикулярны осям координат, — гомеоморфизма  $\Delta_n$  на  $D_n$  и функций  $f_k^n(x_k)$  ( $m \leq n$ ;  $k = 1, 2, 3$ ):

1. Пусть  $A_n$  — множество точек  $D_n$ , являющихся образами лежащих на  $\Delta_n$  точек ветвления  $\Xi$  \*. Пусть  $K_n$  — совокупность прямых, отрезки которых составляют  $D_n$ . Пусть  $C_n$  — класс множества вершин замкнутых молний на  $K_n$ .

Тогда:

- $C_n$  — не более чем счетное множество,
- $C_n$  не пересекается с  $A_n$  (и, значит, с классом  $A_n$  на  $K_n$ ),
- никакие две точки  $A_n$  не принадлежат одному классу на  $K_n$ .

2. На  $D_n$  выделено конечное число таких типов простых выводящих схем, что из любой точки  $a_0 \in D_n$  по любому направлению выводит схема одного из этих «канонических» типов.

3. Любая функция  $f \in F$  представляется на  $D_n$  в виде  $f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k)$ , где  $x_k$  — координаты точки  $x \in D_n$ ,  $f_k^n(x_k)$  — непрерывные функции, непрерывно зависящие от  $f(x)$ .

4. Если  $n_r < n \leq n_{r+1}$ , то

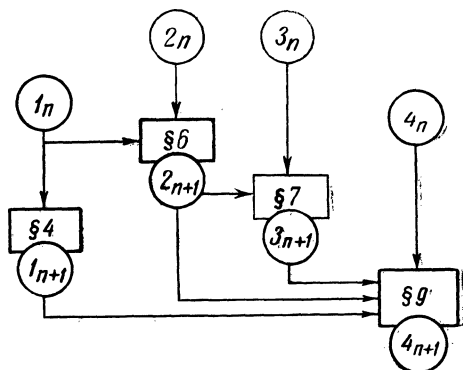
$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < \left(3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}\right) \frac{1}{r^2}.$$

Индуктивная лемма. Если дерево  $D_n$ , гомеоморфизм  $\Delta_n$  на  $D_n$  и функции  $f_k^n(x_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $m \leq n$ ) обладают свойствами 1—4, то

\* Точнее, следовало бы сказать «точек  $\rho_m$ », так как в приложении не доказана теорема 4. Далее всюду под точками ветвления можно понимать точки  $\rho_m$  и  $\rho_m$ .

можно построить обладающее теми же свойствами дерево  $D_{n+1}$ , отображение  $\Delta_{n+1}$  на  $D_{n+1}$  и функции  $f_k^{n+1}(x_k)$ , приклеив в точке  $p_n$  ветку-отрезок  $s_n$ , не перпендикулярный координатным осям.

Схема доказательства:



$i_n$  обозначает свойство  $i$  дерева  $D_n$ , гомеоморфизма  $\Delta_n$  на  $D_n$  и функций  $f_k^n(x_k)$ . В параграфе, обозначенном в рамке, свойство  $i_{n+1}$  выводится из свойств, соединенных с этим параграфом стрелками.

#### § 4. Индуктивное сохранение свойства 1

Мы будем предполагать, что  $D_n$  обладает свойством 1, и покажем, какие надо наложить требования на  $s_n$ , чтобы это свойство сохранилось на  $D_{n+1}$ . Требования получаются не очень стеснительные: направление может выбираться из всюду плотного множества второй категории \*, длина может быть сколь угодно малой.

Итак, пусть на  $K_n$ , т. е.  $D_n$ , к которому добавлены лучи, продолжающие отрезки  $D_n$ ,

- а) класс  $C_n$  точек замкнутых молний не более, чем счетен;
- б) точки замкнутых молний  $K_n$  не достижимы на  $K^n$  из точек  $A_n$  — образов на  $D_n$  точек ветвления  $E$ ;
- в) никакие две точки  $A_n$  не достижимы одна из другой на  $K_n$ .

Сначала ограничим выбор направления  $s_n$  так, чтобы гарантировать на  $D_{n+1}$  выполнение условия а). Типов молний — не более, чем счетное множество при любом выборе  $s_n$ , так как тип задается начальной и последующими прямыми  $K_n$  и направлениями перехода, т. е. конечной последовательностью элементов конечного множества. В каждом типе или замкнутая молния отсутствует, или имеется одна, или все молнии типа замкнуты. Это следует из линейности соответствующего типу отображения начальной прямой на конечную. В случае, когда все молнии типа замкнуты, мы назовем замкнутую молнию устойчивой. Очевидно, достаточно отсутствия на  $K_{n+1}$  устойчивых замкнутых молний: тогда условие а) на  $D_{n+1}$  будет выполнено.

Пусть  $D_{n+1}$  построено и отрезок  $s_n$  не перпендикулярен осям. Устойчивые замкнутые молнии могут появиться только среди молний, имеющих общие точки с прямой  $l$ , несущей  $s_n$ .

\* Т. е. из дополнения к сумме счетного числа нигде не плотных множеств.

Пусть  $M$  — такая точка. Ее можно принять за начало замкнутой молнии. Пусть уравнения прямой  $l$  в системе координат, у которой  $O$  перенесен в  $p_n$ , а оси параллельны прежним, таковы:

$$x_2 = bx_1, \quad x_3 = cx_1;$$

$b$  и  $c$  не равны нулю, так как отрезок  $s_n$  не параллелен координатным плоскостям. Пусть, для определенности, замкнутая молния выходит из точки  $M(x_0, bx_0, cx_0)$  по направлению  $x_1$  и впервые снова попадает на  $l$  опять в  $M$ , куда приходит по направлению  $x_2$ . Пусть прямая, куда молния приводит на  $i$ -ом шагу, имеет уравнения  $x_2 = b_i x_1 + \beta_i$ ,  $x_3 = c_i x_1 + \gamma_i$ . Коэффициенты  $b_i$  и  $c_i$  опять, конечно, оба не равны нулю. Вторая точка молнии имеет тогда координаты  $x_0, b_1 x_0 + \beta_1, c_1 x_0 + \gamma_1$ . Если второе направление есть, например,  $x_2$ , то координаты третьей точки

$$\frac{b_1 x_0 + \beta_1 - \beta_2}{b_2}, \quad b_1 x_0 + \beta_1, \quad c_2 \frac{b_1 x_0 + \beta_1 - \beta_2}{b_2} + \gamma_2.$$

Вообще координаты каждой точки линейно зависят от  $x_0$ , коэффициенты определяются промежуточными прямыми. Мы предположим, что молния до замыкания не проходит через  $l$ . Тогда для последней точки имеем координаты

$$l_1 x_0 + \lambda_1, \quad l_2 x_0 + \lambda_2, \quad l_3 x_0 + \lambda_3;$$

так как направление  $x_2$  приводит к точке  $x_0, bx_0, cx_0$ , получается  $bx_0 = l_2 x_0 + \lambda_2$ . Для устойчивой замкнутости необходимо, чтобы равенство выполнялось при всех  $x_0$ , т. е.  $b = l_2$  и  $\lambda_2 = 0$ . Таким образом, такая замкнутая молния устойчива, лишь когда  $l$  лежит в плоскости  $x_2 = l_2 x_1$ . Соответствующие направления  $l$  назовем запрещенными.

Если молния замыкается, побывав несколько раз на  $l$ , необходимым условием устойчивости будет, как легко видеть,  $b^i c^j = l_0$ , где  $l_0$  — некоторая константа, зависящая от  $K_n$  и типа молнии. Здесь  $i$  — разность между числом приходов молнии на  $l$  по направлению  $x_2$  и числом уходов с  $l$  по этому направлению,  $j$  — аналогичное число для направления  $x_3$ . Если направление  $l$  — не запрещенное (т. е.  $b^i c^j \neq l_0$ ), то устойчивых замкнутых молний рассматриваемого типа быть не может. Пусть  $(l_0 - 1)^2 + i^2 + j^2 \neq 0$ . Тогда направления  $l$ , при которых  $b^i c^j = l_0$ , образуют нигде не плотное множество (кривую) в пространстве направлений. Поэтому все вообще направления, запрещаемые каким-нибудь типом молний, для которых  $(l_0 - 1)^2 + i^2 + j^2 \neq 0$ , лежат на счетном множестве гладких кривых и оставляют всюду плотное множество второй категории не запрещенных направлений.

Если же  $i = 0, j = 0$  и  $l_0 = 1$ , то замкнутая молния будет устойчивой при любых  $b$  и  $c$  и, в частности, если направить  $l$  по прямой  $q$ , на отрезке  $q_n \in D_n$  которой лежит точка  $p_n$ , где приклеивается ветка  $s_n$ . Правда при этом некоторые, но заведомо не все, точки молнии (именно, лежащие на  $l$  и на  $q$ ) сольются. Однако легко видеть, что на  $K_n$  определится устойчивая замкнутая молния, и точки  $q$  будут входить в ее класс. Но на  $q$  есть точки  $A_n$ , так что получается противоречие с условием в), которому  $D_n$  удовлетворяет.

Окончательный результат таков: можно выбрать направление  $l$  из всюду плотного множества второй категории так, что  $D_{n+1}$  будет удовлетворять условию а).

Переходим к условию в). Рассмотрим две точки ветвления  $\Xi$ , образы которых лежат на  $D_n$  (в  $A_n$ ).  $s_n$  надо выбрать так, чтобы эти точки из  $A_n$  на  $D_{n+1}$  нельзя было соединить молнией. Для молний, не содержащих точек  $s_n$ , это уже выполнено, так как на  $D_n$  выполнено условие в). Пар точек  $A_n$  — счетное множество. Типов молний тоже. Рассмотрим один из таких типов и одну из пар. Условие, что молния этого типа соединяет эти точки, приводит к запрещенным направлениям  $l$ , при которых такое соединение может произойти, и, точно так же, как в предыдущем доказательстве, все запрещенные направления лежат на счетном множестве гладких кривых  $K$  такого же рода требованию приводит и сохранение условия б) для точек  $A_n$  и замкнутых молний  $K_{n+1}$ .

Нужно теперь позаботиться о выполнении условия б) для точек  $A_{n+1} \setminus A_n$  (лежащих на  $s_n$ ) и условия в) для таких пар точек  $A_{n+1}$ , из которых хотя бы одна точка лежит на  $s_n$ . Поэтому, выбрав в соответствии со сказанным выше направление  $l$  из всюду плотного множества второй категории (из дополнения к запрещенным направлениям), отображим  $\sigma_n$  на  $s_n$ .

Итак,  $K_{n+1}$  построено. Нанесем на  $l$  точки класса  $A_n$ . Это счетное множество не должно пересекаться с образами точек ветвления  $\Xi$  на  $s_n$ . Такому же запрету подвержено множество точек замкнутых молний на  $K_{n+1}$  и классы (на  $K_{n+1}$ ) этих точек. Множество запрещенных точек или, как мы будем говорить, запрет — не более чем счетное множество, благодаря выбору  $l$ .

Требования а) и б) будут выполнены на  $D_{n+1}$ , а требование в) — на  $D_n$ , если мы не будем отображать точки ветвления  $\Xi$  в запретные точки  $s_n$ . Такое отображение  $\sigma_n$  на  $l$ , при котором будет обеспечено также и выполнение условия в) на  $D_{n+1}$ , сейчас будет описано. При этом отрезок  $s_n$  может быть произвольно малым. Последнее будет использовано в дальнейшем.

Итак, пусть выбрано направление  $s_n$  и его размер. На  $s_n$  есть запрет — множество точек, не более чем счетное, куда не должны попадать образы  $a$  точек  $\alpha$  ветвления  $\Xi$ , лежащих на  $\sigma_n$ . Отображение должно быть гомеоморфным, и мы должны следить, чтобы точки  $a$  не были достижимы на  $K_{n+1}$  одна из другой.

Занумеруем точки ветвления  $\Xi$  на  $\sigma_n$  в последовательность  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  ( $\rho_n$  не включается в эту последовательность). Это счетное множество всюду плотно на  $\sigma_n^*$ . Поэтому подобное\*\* отображение этого множества на всюду плотное подмножество  $s_n$  может быть продолжено до гомеоморфизма  $\sigma_n$  на  $s_n$ . Остается отобразить точки  $\alpha$  на  $s_n$ . Так как среди точек  $\alpha_i$  нет концов  $\sigma_n$ , их образы  $a_i$  располагаются на интервале  $s'_n$ , замыкание которого есть  $s_n$ .

Рассмотрим на  $s_n$  счетную систему интервалов  $\delta_i^k$ ,  $1 \leq k < \infty$ ,  $1 \leq i \leq i_k$ , такую, что:

- 1) при любом  $k \quad \bigcup_{i=1}^{i_k} \delta_i^k = s'_n$ ,
- 2) все интервалы  $\delta_1^k, \dots, \delta_{i_k}^k$  меньше  $\varepsilon_k$ ;  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

\* Если это не так, добавим к точкам  $\alpha$  еще некоторые точки  $\sigma_n$ .

\*\* Г. е. сохраняющее порядок.



Если в каждый интервал  $\delta_i^k$  попадет образ  $a_j$  какой-нибудь точки  $\alpha_j$ , то точки  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) образуют всюду плотное подмножество  $s_n$ . Зануем все интервалы в одну последовательность  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Будем считать, что на  $\sigma_n$  и  $s_n$  выбрано направление так, что  $\rho_n$  и  $r_n$  — левые концы.

Первый шаг. Выберем в интервале  $\delta_1$  незапрещенную точку  $a_1$ . Это будет образ точки  $\alpha_1$ . Точки класса  $a_1$  образуют на  $s_n$  не более чем счетное множество. Добавим их к запрету.

Второй шаг. Точка  $\alpha_1$  делит  $\sigma_n$  на левую и правую части. Пусть  $\alpha_{i_n}$  — точка  $\alpha$  с наименьшим номером в левой части, а  $\alpha_{i_n}$  — в прав части. Точка  $a_1$  делит интервалы  $\delta$  на лежащие левее  $a_1$ , правее  $a_1$  и содержащие  $a_1$ . Среди интервалов, которые не лежат правее  $a_1$ , с номером, большим 1, найдем тот, у которого номер наименьший. В нем выберем незапрещенную точку левее  $a_1$ . Это будет  $\alpha_{i_n}$  — образ  $\alpha_{i_n}$ . Включим в запрет точки одного с ней класса. Возьмем из невыбранных интервалов  $\delta$ , лежащих не левее  $a_1$ , тот, номер которого наименьший. В этом интервале найдем незапрещенную точку  $a_{i_n}$  правее  $a_1$ . Добавим к запрету точки ее класса.

Вообще после  $n$ -го шага  $\sigma_n$  будет разделено на  $2^n$  интервалов  $2^n - 1$  точками  $\alpha_1, \alpha_{i_n}, \alpha_{i_{n-1}}, \alpha_{i_{n-2}}, \dots, \alpha_{i_{\underbrace{1 \dots 1}_n}}$ .

$n + 1$ -й шаг. Выберем в каждом из  $2^n$  интервалов точку  $\alpha$  с наименьшим индексом и обозначим этот индекс в самом левом интервале через  $i_{\underbrace{1 \dots 1}_n}$ , потом через  $i_{\underbrace{1 \dots 1}_{n-1}}$ , в самом правом — через  $i_{\underbrace{1 \dots 1}_n}$ .

Отображение этих  $2^n$  точек  $\alpha_{i_{1 \dots 1}}, \dots, \alpha_{i_{1 \dots 1}}$  на  $s_n$  происходит совершенно так же, как в подробно описанном втором шаге. Каждый раз образ  $\alpha$  — точка  $a$  — выбирается в интервале  $\delta$ , не более левом, чем образ  $\alpha_i$  — левого конца интервала  $(\alpha_i, \alpha_j)$ , из которого взята точка  $\alpha$ , и не более правом, чем  $a_j$ ; при этом берется интервал с наименьшим номером из всех невыбранных интервалов  $\delta$ , обладающих этим свойством. В самом интервале  $\delta$  точка  $a$  выбирается между  $a_i$  и  $a_j$  из незапрещенных точек. Затем к запрету присоединяется класс точки  $a$  и строится образ следующей точки  $\alpha$ , пока не кончится  $n + 1$ -ый шаг.

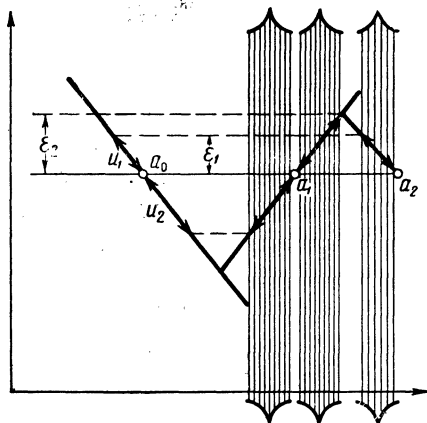
Доказательство того, что отображение точек  $\alpha$  в  $a$  определено после проведения всех шагов для всех  $\alpha$ , что это — подобное отображение и что при порождаемом им гомеоморфизме  $\sigma_n$  на  $s_n$  сохраняются свойства а), б) и в), может быть проведено без затруднений.

### § 5. Леммы о выводящих схемах

Прежде чем переходить к доказательству возможности сохранения индуктивных свойств 2, 3, 4, изучим несколько подробнее выводящие схемы *отрезочного комплекса*  $K$ . Безразлично, будут ли эти схемы простые или двойные.

Если отбросить в выводящей схеме начало, то оставшееся можно рассматривать как совокупность непересекающихся выводящих схем из концов первого ранга (укороченных схем).

Лемма 1 (фиг. 12). Если все укороченные схемы  $A_i$  данной схемы  $A$  устойчивы, а начальная точка  $a_0$  не есть точка ветвления  $K$ , то схема  $A$  устойчива.



Фиг. 12. Выводящая схема  $a_0 a_1 a_2$  имеет ранг 1. Заштрихованы слои выводющих схем полуокрестностей

Доказательство. Пусть  $\epsilon_1 > 0$  — такое число, что  $\epsilon_1$ -сдвиг\* начальных точек  $a_i$  укороченных схем не удлиняет этих схем (см. определение устойчивости в § 3). Кроме того, из устойчивости  $A_i$  следует, что  $a_i$  не являются точками ветвления  $K$ . Так как комплекс  $K$  — замкнутое множество, существует такое  $\epsilon_2 > 0$ , что плоскость, параллельная первой плоскости схемы  $A$  и отстоящая от нее менее, чем на  $\epsilon_2$ , пересекает только те отрезки  $K$ , где лежат  $a_0$  и точки  $a_i$ .

Выбрав  $\epsilon < \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , получим  $\epsilon$ -окрестность точки  $a_0$ , существование которой доказывает устойчивость схемы  $A$ .

Лемма 2. Если ни одна из вершин выводющей схемы не является точкой ветвления, то такая выводящая схема устойчива.

Доказательство. Доказательство этой леммы — индуктивное. Если ранг схемы — 0 и точка  $a_0$  — свободный конец и не точка ветвления  $K$ , то, очевидно, существует в  $K$  окрестность точки  $a_0$ , составленная из точек с таким же свойством (см. на фиг. 12 точки  $a_1$  и  $a_2$  с указанными окрестностями устойчивости). Если для схем ранга  $n$  утверждение леммы 2 доказано, то для схем следующего ранга оно следует из леммы 1.

Лемма 3. Пусть выводящая из точки  $a$  схема  $A$  устойчива. Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что любая несущая плоскость соответствующей схеме  $A$  выводящей из точки  $b$  схемы  $B$  отстоит меньше, чем на  $\epsilon$ , от соответствующей ей плоскости схемы  $A$ , если только начальная точка  $b$  отстоит от  $a$  меньше, чем на  $\delta$ .

Доказательство. Выводящая схема  $A$  имеет конечное количество несущих плоскостей  $\Pi'_i(a)$  каждого направления  $r = 1, 2, 3$ .

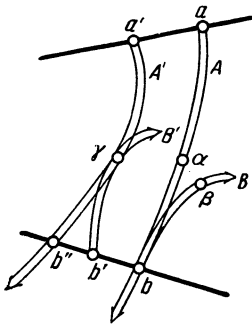
\* Напоминаю, что расстояние между точками  $(x_1, x_2, x_3)$  и  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  есть  $\max_{1 \leq i \leq 3} (|x_i - x'_i|)$

Для схемы  $B$ , выводящей из точки  $b$  в интервале устойчивости схемы  $A$ , определены соответствующие плоскостям, точкам, молниям схемы  $A$  плоскости, точки, молнии схемы  $B$  (обратное, вообще говоря, неверно, так как молнии схемы  $B$  могут обрываться раньше).

Рассмотрим плоскости  $\Pi'_i(b)$  (так обозначается плоскость, которой в схеме  $A$  отвечает  $\Pi'_i(a)$ ).

Координата  $x_r$  для всех точек  $\Pi'_i(b)$  — одна и та же; она линейно зависит от любой координаты начальной точки  $b$ . Отсюда следует, ввиду конечности числа несущих плоскостей схемы  $A$ , что для любой точки  $b$  в некоторой достаточно малой окрестности точки  $a$  все плоскости схемы  $B$  менее, чем на  $\varepsilon$ , отстоят от соответствующих плоскостей схемы  $A$ .

Заметим, что отрезки комплекса всегда предполагаются не перпендикулярными осям координат; из конечности числа отрезков следует, что наклон их к координатным плоскостям ограничен снизу. Поэтому из леммы 3 следует,



Фиг. 13. К лемме 4. Толстые стрелки изображают выводящие схемы

что при достаточно малом изменении начала схемы сколь угодно мало сдвигаются ее вершины, которые не исчезают. Эти свойства мы будем называть непрерывной зависимостью устойчивой выводящей схемы от ее начала. Конечное число устойчивых выводящих схем  $A_i$  равномерно непрерывно зависит от начала в том смысле, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $\delta > 0$ , общее для всех этих схем.

**Лемма 4 (фиг. 13).** Пусть класс точки  $b$  не содержит точек замкнутых молний. Пусть  $A$  — устойчивая выводящая из  $a$  схема, а  $B$  — выводящая из  $b$  устойчивая схема, первое направление которой — то же, что и направление, по которому приводит в  $b$  схема  $A$ . Тогда точки  $a$  и  $b$  имеют такие окрестности  $u_a$  и  $u_b$ , что если схема  $A'$  (схема, соответствующая  $A$ , выводящая из  $a' \in u_a$ ) проходит через точку  $b'' \in u_b$ , то схема  $B'$  (соответствующая  $B$ , выводящая из  $b' \in u_b$ ) не имеет с  $A'$  общих точек, если только  $b' \neq b''$ .

**Доказательство.** Рассмотрим совокупность всех точек схем  $A$  и  $B$ . Пусть наименьшее расстояние между двумя не совпадающими точками  $\eta > 0$ . Выберем у точек  $a$  и  $b$  такие окрестности  $u_a$  и  $u_b$ , чтобы при  $a' \in u_a$ ,  $b' \in u_b$  точки схем  $A'$  и  $B'$  отстояли от соответствующих им точек схем  $A$  и  $B$  меньше, чем на  $\frac{\eta}{3}$ . Такие окрестности можно выбрать в силу замечания к лемме 3. Эти окрестности — искомые.

В самом деле, пусть  $a'$ ,  $b'$  и  $b''$  — точки, о которых идет речь в условии леммы. Предположим, что точка  $\gamma$  лежит на  $A'$  и на  $B'$  сразу (фиг. 13). Как точке схемы  $A'$ , ей соответствует точка  $\alpha \in A$ . Как точке схемы  $B'$ , ей соответствует точка  $\beta \in B$ . Докажем, что точки  $\alpha$  и  $\beta$  совпадают. В самом деле, в противном случае они удалены не менее, чем на  $\eta$ , в силу определения  $\eta$ . Однако точка  $\gamma$  удалена от  $\beta$ , как соответствующая ей, меньше, чем на  $\frac{\eta}{3}$ , и от  $\alpha$  тоже меньше, чем на  $\frac{\eta}{3}$ , по той же самой причине. Полученное противоречие убеждает нас, что  $\alpha = \beta$ . Но отсюда следует, что молния,

соединяющая  $b$  с  $\beta$  в  $B$ , целиком лежит в  $A$ : в противном случае  $b$  с  $\beta = \alpha$  можно было бы соединить молнией через  $A$  другим путем, а ведь класс точки  $b$  по условию леммы не содержит замкнутых молний. Схема  $A'$  не длиннее  $A$ . Она содержит точку  $\gamma$ , соответствующую  $\alpha$ , и  $b''$ , соответствующую  $b$ . Отсюда следует, что  $A'$  содержит соединяющую точки  $b$  и  $\gamma$  молнию того же типа, что молния  $(b\alpha) \in A$ . В силу таких же соображений, молнии  $(b\beta) = (b\alpha)$  и  $(b'\gamma)$  — одного типа. Следовательно, одного типа и молнии  $b'\gamma$  и  $b''\gamma$ . Но это противоречит невырожденности соответствующего типу линейного преобразования, ибо точки  $b'$  и  $b''$  предполагались различными. Противоречие доказывает лемму 4.

В § 8 мы будем пользоваться еще одним свойством устойчивых схем. Назовем его свойством  $N$ . Схема  $A$ , выводящая из точки  $a_0 \in K$ , обладает свойством  $N$ , если точка  $a_0$  лежит на отрезке  $\Delta \subset K$ , где имеет такие односторонние окрестности\*  $u_1$  и  $u_2$  (а в случае, когда  $a_0$  — концевая точка  $K$ , одну такую одностороннюю окрестность), что для всех точек  $a'_0 \in u_1$  имеются выводящие схемы  $A'$  ( $a'_0$ ) одного типа и не длиннее схемы  $A$ , а для всех точек  $a''_0 \in u_2$  имеются выводящие схемы  $A''$  ( $a''_0$ ) одного типа не длиннее схемы  $A$ .

Рассматривая фиг. 12, можно понять, что эти типы не обязательно совпадают, а могут все три (тип  $A$ , тип  $A'$  и тип  $A''$ ) быть различными.

Имеет место

*Лемма 5. Устойчивая выводящая схема обязательно обладает своим свойством  $N$ .*

Лемма 5 выводится из леммы 6 так же, как лемма 2 из леммы 1.

*Лемма 6. Пусть  $A$  — схема, выводящая из точки  $a_0$  на  $K$ . Если каждая из укороченных схем  $A_i$  схемы  $A$  обладает свойством  $N$ , а точка  $a_0$  не есть точка ветвления  $K$ , то схема  $A$  обладает свойством  $N$ .*

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 1.

Введем теперь понятие выводящей схемы интервала.

Для этого рассмотрим выводящие схемы точек интервала  $u$  комплекса  $K$ . Пусть они все одного типа (как, например, для схем  $A'$  точек интервала  $u_a$  в определении свойства  $N$ ). Совокупности соответствующих друг другу точек этих схем образуют интервалы, куда молнии одного типа отображают интервал  $u$ . Соответствующие друг другу плоскости этих схем образуют слои. Если параллельные слои попарно не пересекаются, то имеем выводящую схему интервала  $u$ . Она состоит из интервалов схемы, аналогичных концам, которые лежат в пересечении  $K$  со слоями схемы, аналогичными плоскостям. Интервал схемы ранга 0 — это  $u$ ; совокупность плоскостей первого направления схем точек  $u$  — слой ранга 1. Он уводит с  $u$  и приводит на интервалы схемы ранга 1. И так далее. С комбинаторной точки зрения выводящая схема интервала устроена так же, как выводящая схема точки. Вместо свободных концов тут свободные интервалы.

Следующее понятие для схем точек не вводилось. Интервалом слоя назовем пересечение слоя с перпендикулярной ему осью координат. Выводящие схемы точек  $u$  сопоставляют каждой точке  $u$  точку в каждом интервале схемы и плоскость в каждом слое. Тем самым определяется линейное отображение  $u$  на каждый интервал слоя.

\* Т. е. интервалы лежащие на  $\Delta$  и имеющие точку  $a_0$  предельной.

Применяя леммы 2, 3 и 5 к дереву  $D_n$ , которое обладает индуктивными свойствами 1 и 2, убедимся, что  $D_n$  имеет выводящую из точки  $p_n$  и из каждой точки класса  $p_n$  схему, которая устойчива, обладает свойством  $N$  и непрерывно зависит от начала. В самом деле, схема существует, так как  $D_n$  обладает индуктивным свойством 2, а класс точки  $p_n$  не содержит точек ветвления, в силу свойства 1, так что к этой схеме применимы леммы.

### § 6. Индуктивное сохранение выводящих схем

В § 4 было показано, как пристроить к  $D_n$  веточку  $s_n$ , сколь угодно малую, так, чтобы  $D_{n+1}$  обладало свойством 1. Чтобы  $D_{n+1}$  обладало индуктивными свойствами 2, 3 и 4, нужно, чтобы  $s_n$  было достаточно малым. Выбрав направление прямой  $l$  в соответствии с § 4, а затем  $\varepsilon > 0$  достаточно малым, в соответствии с требованиями настоящего и следующих параграфов, а потом построив  $s_n$  в  $\varepsilon$ -окрестности  $p_n$ , как это сделано в § 4, мы получим, что на построенном дереве  $D_{n+1}$  все четыре индуктивных свойства имеют место.

В настоящем параграфе доказывается, что если  $D_n$  обладает свойствами 1 и 2 и направление  $l$  выбрано правильно, то существует такое  $\varepsilon > 0$ , что если  $s_n$  уместается в  $\varepsilon$ -окрестности  $p_n$ , то  $D_{n+1}$  обладает индуктивным свойством 2.

Согласно свойству 2 дерево  $D_n$  имеет конечное множество типов канонических выводящих схем. Мы несколько преобразуем эти типы. Мы добиваемся получения конечного числа выводящих схем  $A_i$ , проходящих через  $p_n$  и таких, что для любого  $\delta > 0$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что плоскости канонических схем точек, лежащих вне  $\delta$ -окрестностей начал  $a_i$  схем  $A_i$ , не пересекают  $\varepsilon$ -окрестность  $p_n$ .

Пусть существующие канонические типы этим свойством не обладают. Так как типов конечное число, какой-нибудь из них не регулярен. Под этим понимается наличие в типе выводящих канонических схем, имеющих сколь угодно близкие к  $p_n$  плоскости при отсутствии схемы, проходящей через  $p_n$ . Выберем из последовательности начальных точек указанных схем сходящуюся к точке  $a$  подпоследовательность и рассмотрим совокупность предельных точек множества точек всех этих схем. Эта совокупность может не быть выводящей схемой. Но она содержит  $p_n$ , и, добавив к некоторым ее точкам (а их, очевидно, конечное число) их выводящие схемы, получим выводящую схему точки  $a$ . Добавляемые точки все различны и не повторяют бывших ранее, так как в классе  $p_n$  нет точек замкнутых молний.

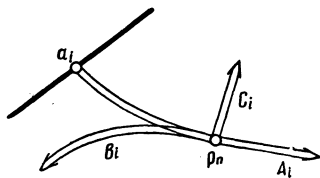
В силу леммы 2, полученная схема устойчива. Поэтому в некоторой окрестности точки  $a$  выводящими схемами будут схемы, соответствующие ей в силу устойчивости. Заменим в этой окрестности точки  $a$  нерегулярный тип выводящих схем этими схемами. Полученные новые типы будем считать каноническими. Ясно, что остаток канонического нерегулярного типа регулярен. Это легко доказать, используя линейность соответствующих отображений.

Проделав такую операцию со всеми старыми нерегулярными типами, мы получим новые канонические типы; теперь мы их будем называть просто каноническими. Конечное число точек  $a_i$  имеют канонические схемы, проходящие через  $p_n$ . Все нерегулярные типы находятся теперь в интервалах ус-

тойчивости этих схем  $A_i$ . Из линейности отображения окрестности  $a_i$  в окрестность  $p_n$  при помощи соответствующих молний канонических схем вытекает следующее утверждение:

Для любого  $\delta > 0$  существует такое  $\varepsilon > 0$ , что с  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $p_n$  могут пересекаться плоскости только тех новых канонических схем, начала которых лежат в  $\delta$ -окрестностях точек  $a_i$  и которые соответствуют  $A_i$  в смысле устойчивости.

Пусть  $A_i$  — каноническая выводящая из  $a_i$  схема, проходящая через  $p_n$ . Рассмотрим следующие канонические выводящие схемы (фиг. 14):



Фиг. 14. Толстые стрелки изображают выводящие схемы

$B_i$  — схема, выводящая из  $p_n$  по тому направлению, по которому  $A_i$  в  $p_n$  приходит.

$C_i$  — выводящая из  $p_n$  схема, первое направление которой отлично от направлений, по которому  $A_i$  из  $p_n$  уходит и в  $p_n$  приходит, и от первого направления  $B_i$ . (В случае, когда  $p_n = a_i$ , схема  $B_i$  не определена, и мы ее не рассматриваем.)

Все эти схемы проходят через  $p_n$  и потому устойчивы.

Согласно индуктивному условию 1, построенные выводящие схемы не имеют общих точек, кроме  $p_n$ , а  $B_i$  и  $A_i$  удовлетворяют условию леммы 4.

Рассмотрим совокупность всех точек всех трех схем. Пусть  $\eta > 0$  — наименьшее расстояние между двумя точками этой совокупности. Применяя к  $A_i$  и  $B_i$  лемму 4, найдем  $\delta_1$ -окрестность точки  $a_i$  и  $\varepsilon_1$ -окрестность точки  $p_n$  такие, что  $A'_i$  и  $B'_i$  не пересекаются, если их начала лежат в указанных окрестностях (определение  $A'_i$  и  $B'_i$  см. в лемме 4). Применяя к устойчивым схемам  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  лемму 3, найдем такие  $\delta_2 > 0$  и  $\varepsilon_2 > 0$ , что все точки схем  $A'_i$ ,  $B'_i$ ,  $C'_i$  отстоят менее, чем на  $\frac{\eta}{3}$ , от соответствующих им точек  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , если только начало  $A'_i$  лежит в  $\delta_2$ -окрестности  $a_i$ , а начала остальных схем — в  $\varepsilon_2$ -окрестности  $p_n$ ; здесь  $C'_i$  — схема того же типа, что  $C_i$ , или более короткая.

Выберем  $\delta > 0$  меньшим  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Найдем по нему  $\varepsilon_3 > 0$  такое, что с  $\varepsilon_3$ -окрестностью  $p_n$  пересекаются плоскости только тех канонических выводящих схем, начала которых лежат в  $\delta$ -окрестностях точек  $a_i$  и первое направление которых — то же, что у  $A_i$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  меньшим  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , и  $\varepsilon_3$ . Из конечности числа типов  $A_i$  следует, что все числа  $\varepsilon$  и  $\delta$  можно выбирать равномерно по  $i$ , так что в результате получаем систему  $\delta$ -окрестностей точек  $a_i$  и  $\varepsilon$ -окрестность  $p_n$  такие, что:

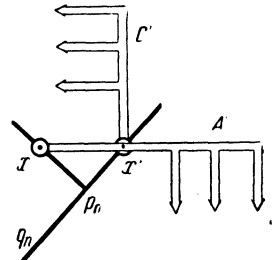
А) С  $\varepsilon$ -окрестностью  $p_n$  пересекаются плоскости тех лишь канонических схем, начала которых лежат в  $\delta$ -окрестностях точек  $a_i$  и которые соответствуют  $A_i$ .

Б) Схемы  $A'_i$  и  $B'_i$  не пересекаются, если их начала лежат в указанных  $\delta$ - и  $\varepsilon$ -окрестностях.

В) При переходе от  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  к  $A'_i$ ,  $B'_i$ ,  $C'_i$  точки этих схем сдвигаются меньше, чем на  $\frac{\eta}{3}$ , если только начала остаются в указанных окрестностях



кость пересекает  $D_{n+1}$  (кроме точки  $x$ ) еще в точке  $x''$  и точках первого ранга схемы  $C_i$ . Из точек первого ранга выйдем по направлениям, по которым из них выходим в  $C_i$ . Из точки  $x''$  выводим на  $D_n$  схема  $B_i$ . Так как эти схемы не пересекаются, кроме как в точке  $x''$ , и не имеют общих точек с  $A_i$ , а плоскости схем  $A_i, B_i, C_i$  не пересекаются с  $P$  (кроме тех четырех плоскостей, которые рассмотрены тут и проходят через  $x, x', x''$ ), получается выводящая из  $a$  на  $D_{n+1}$  схема. В случае  $a_i = p_n, a \in 2s_n$  точку  $x''$  строить не надо; схема  $C_i$  строится у точки  $x'$  (фиг. 17). Доказательство аналогично предыдущему.



Фиг. 17. Выводящая схема точки  $x$  на  $D_{n+1}$

Доказательство индуктивного выполнения свойства 2 на  $D_{n+1}$  при условии выполнения свойств 1 и 2 на  $D_n$  будет закончено, если мы укажем конечное число типов выводящих схем. Но мы фактически это и сделали при построении выводящей схемы из точки  $a$ . В самом деле, легко видеть, что множество типов схем, которые тут используются (схем  $A_i, B_i$  и  $C_i$ ) конечно, так как они не длиннее схем  $A, B, C$ , которые суть схемы канонических типов на  $D_n$ .

§ 7. Индуктивное сохранение разложения функций

Этот параграф содержит построение представления функции, заданной на конечном дереве  $D_n$ , в виде суммы функций координат.

Лемма 7. Пусть  $A$  — схема, выводящая из точки  $a_0$  комплекса  $K$ , и  $f(x)$  — функция, заданная на  $K$  и отличная от нуля только в точке  $a_0$ . Тогда существуют такие функции  $f_k(x_k)$  координат  $x_k$  точки  $x$ , что для любой точки  $x \in K$

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k), \tag{*}$$

причем функции  $f_k(x_k)$  отличны от нуля только в тех точках  $k$ -ой оси, где ее пересекают плоскости схемы  $A$ .

Доказательство. Положим  $f_k^0(x_k) \equiv 0$ . Если подставить  $f_k^0$  в правую часть (\*), то это равенство не будет выполняться только в точке ранга 0 схемы  $A$ . Функции  $f_k^0(x_k)$  назовем нулевым приближением к  $f_k(x_k)$ . Функции  $n$ -го приближения  $f_k^n(x_k)$  будут построены так, чтобы:

- 1) Равенство (\*) при подстановке  $f_k^n(x_k)$  вместо  $f_k(x_k)$  нарушалось только в точках ранга  $n$  схемы  $A$ .
- 2)  $f_k^n(x_k) = f_k^{n-1}(x_k)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), если точка  $x_k$   $k$ -ой оси не лежит на плоскости ранга  $n$  схемы  $A$ .

Функции нулевого приближения обладают свойством 1), и если ранг схемы  $A$  равен  $N$ , то  $f_k^{N+1}(x_k)$  удовлетворяют, очевидно, всем требованиям леммы 7. Если  $f_k^{n-1}(x_k)$  построены с выполнением условий 1) и 2), то положим

$$f^{n-1}(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^{n-1}(x_k).$$



$f(x) - f^{n-1}(x) = \Delta^n(x)$  —  $n$ -ая невязка — отлична от нуля в точках ранга  $n - 1$  схемы  $A$ . Пусть  $a$  — такая точка, и пусть выводящая из нее плоскость  $\pi$  пересекает  $k$ -ую ось в точке  $x_k(a)$ . Из определения выводящей схемы следует, что все  $x_k(a)$ , отвечающие разным  $a$  и  $n$ , различны. Введя в точках  $x_k(a)$  поправки  $\Delta_k^n(x_k) = \Delta^n(a)$  к  $f_k^{n-1}(x_k)$ , положим  $f_k^n(x_k) = f_k^{n-1}(x_k) + \Delta_k^n(x_k)$ . Очевидно,  $f_k^n(x_k)$  обладают свойствами 1), 2), так что все  $f_k^{N+1}(x_k)$  можно построить. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть  $A$  — схема, выводящая из интервала  $s$  комплекса  $K$ , и  $f(x)$  — непрерывная функция, заданная на  $K$  и отличная от нуля лишь на  $s$ . Тогда существуют такие непрерывные функции  $f_k(x_k)$  координат  $x_k$  точки  $x$ , что для любой точки  $x \in K$

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

причем функции  $f_k(x_k)$  отличны от нуля только в интервалах слоев схемы  $A$ .

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 7. Все точки и плоскости заменяются интервалами и слоями, а функции, отличающиеся от нуля разве в отдельных точках, — непрерывными функциями, отличающимися от нуля только в отдельных непересекающихся интервалах, на концах которых они обращаются в нуль. В частности, такими будут все невязки и поправки.

Лемма 9. Утверждения лемм 7 и 8 верны для двойных схем.

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится опять с помощью распределения поправок. В точках (интервалах), из которых выводят две плоскости (два слоя), можно одну из них игнорировать, получить простую схему и воспользоваться леммой 7 (8). Но тогда поправки и невязки всех рангов будут одинаково велики. Можно уменьшить величину поправок, если использовать обе выводящие плоскости (оба слоя) для «распределения поправки по двум направлениям».

Пусть, например, из точки  $a_0$  выводят две плоскости  $\pi_1$  и  $\pi_2$  направлений  $x_1$  и  $x_2$ . Для выполнения в точке  $a_0$  равенства (\*) можно положить

$$\Delta_1^1(x_1) = \gamma_1 \Delta^1(x), \quad f_1^1(x_1) = f_1^0(x_1) + \Delta_1^1(x_1),$$

$$\Delta_2^1(x_2) = \gamma_2 \Delta^1(x), \quad f_2^1(x_2) = f_2^0(x_2) + \Delta_2^1(x_2),$$

где, как и раньше,  $f_k^0(x_k) \equiv 0$ ,  $\Delta^1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^3 f_k^0(x_k)$  и где  $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ ,

$\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ . Тогда равенство (\*) не будет выполнено во всех концах ранга 1, и поправку придется вводить в большем числе точек, чем если, полагая  $\gamma_2 = 0$ , игнорировать  $\pi_2$ ; но зато величина невязки и следующих поправок будет меньше.

При окончательном построении функций  $f_k(x_k)$  в § 9 используется распределение поправок по двум направлениям.

Лемма 10. Пусть на отрезочном комплексе  $K$  даны две непрерывные функции: «старая»

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^3 \bar{f}_k(x_k),$$

где  $\bar{f}_k(x_k)$  — непрерывные функции координат  $x_k$  точки  $x \in K$ , и «новая»  $f(x)$ , отличная от старой лишь на интервале  $s$ , имеющем на  $K$  выводящую схему (простую или двойную)  $A$ . Тогда можно найти «поправки к  $\bar{f}_k$ » — непрерывные функции  $g_k(x_k)$ , отличные от нуля лишь на интервалах левых схем  $A$  и такие, что, если обозначить  $f_k(x_k) = \bar{f}_k(x_k) + g_k(x_k)$ , то на всем  $K$

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k).$$

Лемма 10 непосредственно следует из лемм 8 и 9, если ввести функцию  $g(x) = f(x) - \bar{f}(x)$ . Процесс распределения поправок по двум направлениям, приводящий к построению  $g_k(x_k)$  ( $\sum_{k=1}^3 g_k(x_k) = g(x)$ ), определяет невязки  $\Delta^n(x)$ , поправки  $\Delta_k^n(x_k) = \gamma_k(x) \Delta^n(x)$  и приближения  $g_k^n(x_k) = g_k^{n-1}(x_k) + \Delta_k^n(x_k)$ . Ясно, что функции  $f_k^n(x_k) = \bar{f}_k(x_k) + g_k^n(x_k)$  можно рассматривать, как приближения к  $f_k(x_k)$ ; невязки  $f(x) - \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k)$  и поправки  $f_i^n(x_i) - f_i^{n-1}(x_i)$  будут при этом те же самые. Построение  $f_k^n(x_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ ), описанное выше, также называется далее распределением поправок.

Лемма 11. Для сохранения на  $D_{n+1}$  индуктивного свойства 3 достаточно, чтобы интервал  $2s_n$  имел на  $D_n \cup 2s_n$  выводящую схему. Построение разложения  $f(x)$  в сумму функций координат  $f_k^{n+1}$  может быть проведено путем введения поправок к  $f_k^n$  с помощью распределения поправок по двум направлениям, определяемым (вообще говоря, двойной) выводящей схемой  $2s_n$ .

Доказательство. Пусть на  $D_n \cup 2s_n$   $2s_n$  имеет выводящую схему  $A$ , на  $D_n$  каждая непрерывная функция представляется в виде суммы функций координат (индуктивное требование 3<sub>n</sub>). Примем за старую функцию  $f^n(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k)$ , а за новую  $f(x)$  на  $D_{n+1}$ . Для  $D_n \cup 2s_n$  доопределим ее так, чтобы разность со старой была на  $2s_n$  четной относительно середины  $2s_n$ . Тогда мы будем находиться в условиях леммы 10, из которой следует возможность представления  $f(x)$  на  $D_{n+1}$  в виде суммы функций координат способом распределения поправок по двум направлениям. Если каждая поправка непрерывно зависит от разлагаемой функции (а это может быть, очевидно, достигнуто в условиях лемм 7—11), то разложение  $f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^{n+1}(x_k)$  непрерывно зависит от  $f$ . В § 7 каждая поправка непрерывно зависит от разлагаемой функции.

Если веточка  $s_n$  построена так, как это указано в §§ 3—5, то на  $D_{n+1}$  выполнены требования  $1_{n+1}$  и  $2_{n+1}$ . Последнее требование состоит в том, что на  $D_{n+1}$  имеется конечное число канонических выводящих схем интервалов. Для этого необходимо только, чтобы (§ 5) направление  $s_n$  было выбрано правильно и чтобы веточка  $s_n$  лежала в достаточно малой окрестности  $P$  точки  $p_n$ .

*Лемма 12.* Пусть на  $D_n$  выполнены условия  $1_n$  и  $2_n$ . Если  $s_n$  лежит в достаточно малой окрестности  $P' \subset P$  точки  $p_n$ , то  $2s_n$  имеет на  $D_n \cup 2s_n$  выводящую схему.

*Доказательство.* Рассмотрим построенные выше канонические для  $D_{n+1}$  выводящие схемы точек  $2s'_n$  на  $D_{n+1}$  с данным первым направлением (фиг. 17). Когда  $x$  изменяется на  $2s'_n$ ,  $x'$  пробегает одностороннюю окрестность  $u$  точки  $p_n$  на  $q_n$ . В силу устойчивости схем  $A$  и  $C$ , существует полуокрестность  $\tilde{u}$  с той же стороны от  $p_n$ , для точек которой все схемы  $A'$  и все схемы  $C'$  будут одного типа (лемма 5).

Точки и параллельные плоскости  $A$  и  $C$  попарно не совпадают (исключая точку  $p_n$ ). Из непрерывной зависимости  $A'$  и  $C'$  от начальной точки  $x'$  следует, что если  $x'$  меняется в достаточно малой окрестности точки  $p_n$ , то точки и плоскости схем  $A'$  и  $C'$  сколько угодно близки к соответствующим элементам схем  $A$  и  $C$ . Пусть  $\eta > 0$  — наименьшее из расстояний между любой плоскостью  $\pi$  одной из схем  $A, C$  и не лежащей на  $\pi$  точкой одной из этих схем. Пусть  $\varepsilon > 0$  — радиус такой окрестности точки  $p_n$ , что плоскости и точки схем  $A$  и  $C$  сдвигаются меньше, чем на  $\frac{\eta}{3}$ , когда  $x'$  меняется в  $\varepsilon$ -окрестности  $p_n$ . Тогда пересечение  $\tilde{u}$  с  $\varepsilon$ -окрестностью  $p_n$  дает полуокрестность точки  $p_n$ , которая есть интервал  $\hat{u}$ , имеющий на  $D_{n+1}$  непересекающиеся выводящие схемы (см. § 5)  $A^*$  и  $C^*$ .

Это следует из того, что все схемы  $A'$  и  $C'$  — одного типа; любые два параллельных слоя этих схем, очевидно, отстоят не менее, чем на  $\frac{\eta}{3}$ . Теперь, если отрезок  $2s_n$  поместить в достаточно малую окрестность  $P_1$  точки  $p_n$  (именно такую, чтобы  $x'$  попадало в  $\hat{u}$ ), то интервал  $2s'_n$  будет на  $D_{n+1}$  иметь выводящую схему с первым направлением, совпадающим с первым направлением  $A$ .

Из лемм 11 и 12 вытекает, что для сохранения на  $D_{n+1}$  индуктивного свойства 3 достаточно, чтобы отрезок  $s_n$  был мал и имел правильно выбранное (§§ 3—5) направление. Эти требования не противостоят выдвинутому раньше.

В § 7 используется некоторое обобщение леммы 12.

Назовем  $N$ -характеристикой  $\chi_N$  выводящей схемы  $A_u$  интервала  $u$  на  $K$  совокупность направлений выводящих слоев интервалов, ранг которых меньше  $N$ , отнесенных к этим интервалам.  $N$ -характеристика  $\chi_N$ ,  $u$  и  $K$  определяют однозначно элементы схемы  $A_u$ , ранг которых не превосходит  $N^*$ .

\* В  $N$ -характеристике могут быть указаны направления слоев, выводящих из интервалов, которых в схеме  $A_u$  нет, так как эта схема может раньше оборваться свободным концом.

**Лемма 13.** Пусть на  $D_n$  выполнены условия  $1_n$  и  $2_n$ . Каково бы ни было  $N > 0$ , существует окрестность  $P(N)$  точки  $p_n$  и такие выводящие схемы  $A_u$  интервалов  $u \subset P(N)$ , что:

1) Среди них существуют схемы  $A_u^{\chi N}$  с любой  $N$ -характеристикой.

2) Интервалы схем  $A_u^{\chi_1 N}$  и  $A_u^{\chi_2 N}$ , отличные от  $u$ , не пересекаются, если первые направления этих схем — разные.

3) Если интервалы  $u_1 \in P(N)$ ,  $u_2 \subseteq P(N)$  не пересекаются, то никакие интервалы схем  $A_{u_1}^{\chi N}$  и  $A_{u_2}^{\chi N}$  не пересекаются.

Доказательство леммы 13 аналогично доказательству леммы 12 и представляется читателю.

До сих пор наши построения не зависели от того, входит ли функция  $f$  в класс  $F$ , о котором говорится в индуктивной лемме. В § 9 построенное тут разложение будет, уже в зависимости от  $F$ , специализировано, что не нарушит возможности разложить любую функцию на  $D_n$  в сумму функций координат. Мы можем, очевидно, не нарушая общности, считать, что  $F$  — компакт. Легко видеть, что в пределах  $F$  непрерывная зависимость  $f_k^n$  от  $f$  равномерна.

### § 8. Арифметические леммы

В этом параграфе доказываются две арифметические леммы, с помощью которых в следующем параграфе распределяются по двум направлениям поправки.

**Лемма 14.** Пусть

$$a + b + c = d, \tag{1}$$

где

$$|a|, |b|, |c| < 3 + \theta, \tag{2}$$

$$|d| \leq 1. \tag{3}$$

Пусть

$$a' = a + \Delta a, \tag{4}$$

где

$$|\Delta a| < 1 + \varepsilon, \tag{5}$$

$$0 < \varepsilon < \theta < 1. \tag{6}$$

Тогда можно определить числа  $\Delta b(a, b, c, \Delta a)$  и  $\Delta c(a, b, c, \Delta a)$  так, чтобы при

$$b' = b + \Delta b, \quad c' = c + \Delta c \tag{7}$$

было

$$|b'|, |c'| < 3 + \theta + \varepsilon, \tag{8}$$

$$a' + b' + c' = d \tag{9}$$

$$|\Delta b|, |\Delta c| \leq \max \left( \left| |\Delta a| - \frac{\varepsilon^2}{30} \right|, \varepsilon \right) \tag{10}$$

и чтобы

зависимость  $\Delta b$  и  $\Delta c$  от  $a, b, c, \Delta a$ , меняющихся в указанных ((1) — (6)) пределах, была непрерывна, а при  $\Delta a \rightarrow 0$   $\Delta b$  и  $\Delta c$  стремились к нулю. } \tag{11}

Доказательство. Докажем прежде всего, что в условиях леммы

$$|b + c| < 4 + \theta. \quad (12)$$

В самом деле, из (1) вытекает:  $b + c = d - a$ . Поэтому  $|b + c| \leq |d| + |a|$ . Но так как, согласно (2) и (3),  $|a| < 3 + \theta$ ,  $|d| \leq 1$ , то  $|b + c| < 4 + \theta$ . Из (12) и (2) получаем:

$$2(3 + \theta) \pm (b + c) > 2 + \theta. \quad (13)$$

Мы определим, чтобы удовлетворить требованиям леммы,  $\Delta b$  и  $\Delta c$  так:

$$\begin{aligned} \Delta b &= -\gamma_b \Delta a, & 0 < \gamma_b < 1, \\ \Delta c &= -\gamma_c \Delta a, & 0 < \gamma_c < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Если при этом  $\gamma_b + \gamma_c = 1$ , то (9) будет выполнено.

Если при этом  $\gamma_b$  и  $\gamma_c$  от  $a, b, c, \Delta a \neq 0$  зависят непрерывно, то верно (11). Чтобы подобрать  $\gamma_b$  и  $\gamma_c$ , не нарушая оценки (8), введем

$$\begin{aligned} \lambda_b^- &= 3 + \theta - b + \frac{\varepsilon}{2}, & \lambda_c^- &= 3 + \theta - c + \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lambda_b^+ &= 3 + \theta + b + \frac{\varepsilon}{2}, & \lambda_c^+ &= 3 + \theta + c + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти (положительные в силу (2)) числа характеризуют запас, имеющийся для введения поправок  $\Delta b$  и  $\Delta c$ ; так,  $\lambda_b^-$  показывает, сколько можно прибавить к  $b$ , чтобы сумма  $b'$  не превысила  $3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2}$  (см. (8)).

Неравенство (13) показывает, что не превосходящую по модулю 2 поправку  $\Delta a$  можно распределить, подобрав  $\gamma_b$  и  $\gamma_c$  в (14), между 0 и 1 так, чтобы выполнялось (8). Именно, положим при  $\Delta a > 0$

$$\gamma_b = \frac{\lambda_b^+}{\lambda_b^+ + \lambda_c^+}, \quad \gamma_c = \frac{\lambda_c^+}{\lambda_b^+ + \lambda_c^+}, \quad (16a)$$

и при  $\Delta a < 0$

$$\gamma_b = \frac{\lambda_b^-}{\lambda_b^- + \lambda_c^-}, \quad \gamma_c = \frac{\lambda_c^-}{\lambda_b^- + \lambda_c^-}. \quad (16b)$$

Докажем, что из (1) — (7), (14), (15), (16a) и (16b) следуют (8), (9), (10), (11). Действительно, (9) выполнено вследствие очевидного равенства  $\gamma_b + \gamma_c = 1$ . Из (12), (13) и (15) получаем:

$$2 < \lambda_b^\pm + \lambda_c^\pm = 2\left(3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2}\right) \pm (b + c) < 15, \quad (17)$$

и поэтому  $\gamma_b$  и  $\gamma_c$  зависят от  $a, b, c, \Delta a$  непрерывно при  $\Delta a \neq 0$ ; так как  $0 < \gamma_b, \gamma_c < 1$ , (11) выполнено. Из (5), (6) и (17) вытекает, что

$$\frac{|\Delta a|}{\lambda_b^\pm + \lambda_c^\pm} < \frac{1 + \varepsilon}{2} < 1.$$

Поэтому  $|\Delta b| < \lambda_b^\pm$ ,  $|\Delta c| < \lambda_c^\pm$ . Но из (15) следует:

$$|b \mp \lambda_b^\pm| < 3 + \theta + \varepsilon, \quad |c \mp \lambda_c^\pm| < 3 + \theta + \varepsilon,$$

тем более, в силу (7), (14) и (16a), (16b),  $|b'| < 3 + \theta + \varepsilon$ ,  $|c'| < 3 + \theta + \varepsilon$ , т. е. выполнено (8). Остается доказать (10). В случае  $|\Delta a| \leq \varepsilon$

(10) есть очевидное следствие соотношений  $0 < \gamma_b < 1$ ,  $0 < \gamma_c < 1$ . Из (15) и (2) вытекает, что  $\lambda_{b,c}^{\pm} > \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому и в силу (17)  $\gamma_{b,c} > \frac{\varepsilon}{30}$ . Отсюда, согласно (14),  $|\Delta b|$ ,  $|\Delta c| > |\Delta a| \frac{\varepsilon}{30}$ . Поэтому в случае  $|\Delta a| \geq \varepsilon$   $|\Delta b| > \frac{\varepsilon^2}{30}$ ,  $|\Delta c| > \frac{\varepsilon^2}{30}$ . Но так как (см. (14) и (16))  $|\Delta b| + |\Delta c| = |\Delta a|$ , то отсюда вытекает:  $|\Delta b| < |\Delta a| - \frac{\varepsilon^2}{30}$ ,  $|\Delta c| < |\Delta a| - \frac{\varepsilon^2}{30}$ , т. е. (10), и лемма 14 доказана.

Лемма 15. Пусть

$$a + b + c = d \tag{1}$$

$$|a|, |b|, |c| < 3 + \theta, \tag{2}$$

$$|d| < 1 + \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть

$$d' = d + \Delta d, \tag{4}$$

где

$$|\Delta d| < 1 + \varepsilon, \tag{5}$$

$$0 < \theta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{6}$$

Тогда можно определить числа  $\Delta a(a, b, c, \Delta d)$ ,  $\Delta b(a, b, c, \Delta d)$  так, чтобы при

$$a' = a + \Delta a, \quad b' = b + \Delta b \tag{7}$$

было

$$a' + b' + c = d', \tag{8}$$

$$|a'| < 3 + \theta + \varepsilon, \quad |b'| < 3 + \theta + \varepsilon, \tag{9}$$

$$|a - \Delta b| < 3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

и чтобы

зависимость  $\Delta a$  и  $\Delta b$  от  $a, b, c$  и  $\Delta d$ , меняющихся в указанных (см. (1)–(6)) пределах, была непрерывна, а при  $\Delta d \rightarrow 0$   $\Delta a$  и  $\Delta b$  стремились к нулю. (11)

Доказательство. Для выполнения неравенств (9) достаточно, чтобы

$$0 \leq \Delta a < \lambda_a^+ \text{ или } -\lambda_a^- < \Delta a \leq 0, \tag{12}$$

$$0 \leq \Delta b < \lambda_{b1}^+ \text{ или } -\lambda_{b1}^- < \Delta b \leq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_a^+ &= 3 + \theta + \varepsilon - a, & \lambda_a^- &= 3 + \theta + \varepsilon + a, \\ \lambda_{b1}^+ &= 3 + \theta + \varepsilon - b, & \lambda_{b1}^- &= 3 + \theta + \varepsilon + b, \end{aligned} \tag{13}$$

так как  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению (2).

Чтобы выполнялось (10), достаточно, чтобы

$$0 \leq \Delta b < \lambda_{b2}^+ \text{ или } -\lambda_{b2}^- < \Delta b \leq 0, \tag{14}$$

где

$$\lambda_{b2}^+ = 3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2} + a, \quad \lambda_{b2}^- = 3 + \theta + \frac{\varepsilon}{2} - a, \tag{15}$$

опять в силу (2).

Полагая теперь

$$\lambda_b^+ = \min(\lambda_{b_1}^+, \lambda_{b_2}^+), \quad \lambda_b^- = \min(\lambda_{b_1}^-, \lambda_{b_2}^-), \quad (16)$$

найдем, что

$$\lambda_b^+ + \lambda_a^+ > 2, \quad \lambda_b^- + \lambda_a^- > 2. \quad (17)$$

В самом деле, из (1) имеем:  $a + d = d - c$ . Поэтому  $|a + b| \leq |d| + |c|$  и, в силу (2) и (3),

$$|a + b| < 4 + \theta + \varepsilon. \quad (18)$$

Но, вследствие (13),  $\lambda_a^+ + \lambda_{b_1}^+ = 6 + 2\theta + 2\varepsilon - (a + b)$ . Поэтому из (18) следует:  $\lambda_a^+ + \lambda_{b_1}^+ > 2$ . В то же время, в силу (13) и (15),  $\lambda_a^+ + \lambda_{b_2}^+ = 6 + 2\theta + 2\varepsilon > 2$ . Согласно (16), первое из неравенств (17) доказано; доказательство второго аналогично.

Теперь положим

$$\Delta a = \gamma_a \Delta d, \quad \Delta b = \gamma_b \Delta d, \quad (19)$$

где при  $\Delta d > 0$

$$\gamma_a = \frac{\lambda_a^+}{\lambda_a^+ + \lambda_b^+}, \quad \gamma_b = \frac{\lambda_b^+}{\lambda_a^+ + \lambda_b^+} \quad (20a)$$

и при  $\Delta d < 0$

$$\gamma_a = \frac{\lambda_a^-}{\lambda_a^- + \lambda_b^-}, \quad \gamma_b = \frac{\lambda_b^-}{\lambda_a^- + \lambda_b^-}. \quad (20б)$$

Докажем, что из (1)–(7), (13), (15), (16), (19), (20a) и (20б) следуют (8), (9), (10), (11).

В самом деле, из (20), очевидно, получаем:  $\gamma_a + \gamma_b = 1$ , откуда, в силу (19), (1), (4) и (7), вытекает (8). Из (2), (13), (15) и (16) следует, что все  $\lambda$  положительны, и поэтому  $0 < \gamma_a < 1$ ,  $0 < \gamma_b < 1$ . Так как при  $\Delta d \neq 0$   $\gamma_a$  и  $\gamma_b$  зависят от  $a, b, c$  и  $\Delta d$  непрерывно (см. (20a) и (20б)), то отсюда, согласно (19), вытекает (11).

Наконец, из (17), (3) и (16) получается:

$$\frac{\Delta d}{\lambda_a^+ + \lambda_b^+} < \frac{1 + \varepsilon}{2} < 1, \quad \frac{-\Delta d}{\lambda_a^- + \lambda_b^-} < \frac{1 + \varepsilon}{2} < 1. \quad (21)$$

Принимая во внимание положительность  $\lambda$ , из (20a) и (20б), (19) и (21), находим:

$$0 \leq \Delta a < \lambda_a^+ \quad \text{или} \quad -\lambda_a^- < \Delta a \leq 0,$$

$$0 \leq \Delta b < \lambda_b^+ \quad \text{или} \quad -\lambda_b^- < \Delta b \leq 0,$$

откуда, в силу (16), следуют соотношения (12) и (14). Но из (12) вытекает (9), а из (14) — неравенство (10). Лемма 15 доказана.

## § 9. Индуктивное сохранение свойства 4

В этом параграфе будет показано, как надо распределять поправки в методе § 7, чтобы выполнялось индуктивное требование  $4_{n+1}$ .

Были введены (§ 3) числа  $n_r$ . Колебание любой функции  $f$  рассматриваемого класса  $F$  на любой компоненте дополнения к  $\Delta_n$  в  $\Xi$  не превосходит  $\frac{1}{r^2}$ , если только  $n \geq n_r$ . В частности, это имеет место на каждой веточке  $\sigma_n$  при  $n \geq n_r$ .

Мы будем обозначать через  $f^n(\xi)$  определенную на  $\Delta_n$  функцию, совпадающую там с  $f \in F$ , а также ее непрерывное продолжение на любое  $\Delta_m$  ( $m > n$ ) и на все  $\Xi$ , постоянное на каждой компоненте дополнения к  $\Delta_n$  в  $\Xi$ . Что такое продолжение возможно и единственно, непосредственно вытекает из того, что пересечение  $\Delta_n$  с замыканием каждой компоненты  $\Xi \setminus \Delta_n$  состоит из одной точки. Соответствующую  $f^n(\xi)$  функцию на  $D_m$  и на  $X$  мы будем обозначать через  $f^n(x)$ . Введем функцию ( $n_r < m \leq n_{r+1}$ )

$$g^m(x) = f^m(x) - f^{n_r}(x). \quad (1)$$

На  $D_{n_r}$  она равна 0, от  $f \in F$  зависит непрерывно и всюду не превосходит  $\frac{1}{r^2}$ , в силу определения  $r$  и  $f^m(x)$ .

Пусть  $n_r \leq n < n_{r+1}$ . Пусть  $D_n$  и  $f_k^n(x_k)$  определены так, что выполнены требования  $1_n, 2_n, 3_n, 4_n$ . Тогда (при  $n = n_r$  это тривиально)

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < \left(3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}\right) \frac{1}{r^2}. \quad (2)$$

Наша задача состоит в том, чтобы выбрать  $s_n$  и  $f_k^{n+1}(x_k)$  так, чтобы выполнялись требования  $3_{n+1}$  и  $4_{n+1}$ .

Начиная с этого места и до конца настоящего параграфа,  $r$  не меняется. Для сокращения формул во всех оценках множитель  $\frac{1}{r^2}$  опускается. Так, неравенство (2) записывается теперь в виде

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < 3 + \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}. \quad (2')$$

Это можно воспринимать как временное изменение масштаба оси  $f$  или можно считать, что мы ограничиваемся случаем  $r = 1, \frac{1}{r^2} = 1$ , так как остальные случаи рассматриваются аналогично.

Итак, пусть на  $D_n$  выполнены требования  $1_n, 2_n, 3_n, 4_n$ . Тогда там

$$g^n(x) = \sum_{k=1}^3 g_k^n(x_k), \quad (3)$$

где  $g_k^n(x_k) = f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)$  при  $n > n_r$ , а при  $n = n_r$   $g_k^n(x_k) = 0, g^n(x) = 0$ . Как обычно,  $x_k$  суть координаты точки  $x$ ; в (3)  $x \in D_n$ . Выполнение на  $D_n$  требования  $4_{n+1}$  означает, что

$$|g_k^n(x_k)| < 3 + \theta_n, \quad (4)$$



где введено обозначение

$$\theta_n = \frac{n - n_r}{n_{r+1} - n_r}. \quad (5)$$

Мы построим  $D_{n+1}$  в согласии с § 7 и выберем непрерывно зависящие от  $f \in F$  функции  $g_k^{n+1}(x_k)$  так, чтобы при  $x \in D_{n+1}$

$$\sum_{k=1}^3 g_k^{n+1}(x_k) = g^{n+1}(x), \quad (6)$$

$$|g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}. \quad (7)$$

При этом  $n_r < n + 1 \leq n_{r+1}$  и остается положить

$$f_k^{n+1}(x_k) = f_k^{n_r}(x_k) + g_k^{n+1}(x_k), \quad (8)$$

чтобы доказать  $3_{n+1}$  и  $4_{n+1}$ .

Когда  $n$  растет от  $n_r$  до  $n_{r+1}$ , то  $\theta_n$  растет от 0 до 1, и при возрастании  $n$  на 1  $\theta_n$  каждый раз увеличивается на  $\frac{1}{n_{r+1} - n_r}$ . Выберем  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{1}{n_{r+1} - n_r}$ . Тогда  $\theta_n + \varepsilon < \theta_{n+1}$ . Это  $\varepsilon$  не меняется на протяжении настоящего параграфа.

Построение  $2s_n$ . На  $D_n$  есть точка  $p_n$ , куда предстоит приклеивать  $s_n$ .

Рассмотрим (фиг. 18) лучи  $l'$  и  $l''$ , на которые точка  $p_n$  делит прямую, где лежит  $q_n$ . Когда направление  $s_n$  выбрано, то проходящие через точки  $2s_n$  три координатные плоскости пересекают эти лучи. Выберем теперь направление  $2s_n$  так, чтобы один из лучей  $l'$  — он получает название главного — пересекался плоскостями одного направления, это направление называется далее главным направлением; плоскости остальных двух направлений пересекают луч  $l''$  — он называется отныне подсобным, — и из них произвольно выбирается одно, именуемое подсобным. Конечно, всю эту операцию можно проделать, не выбирая направления  $s_n$  из запрещенных в § 4, что и предполагается. Итак, направление  $s_n$  выбрано.

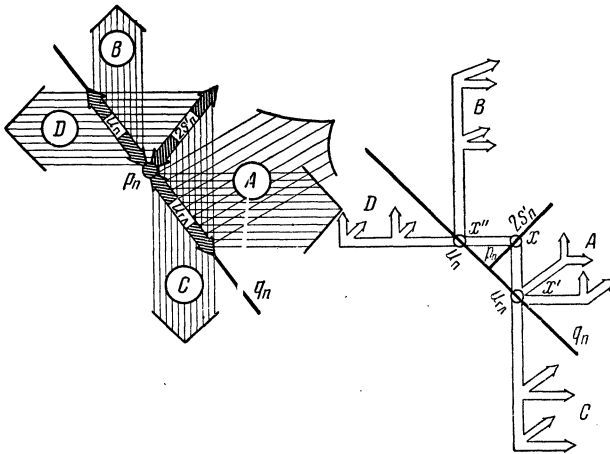
Справедливы утверждения:

А. Изо всякой достаточно малой полуокрестности  $u_{г.л}$  точки  $p_n$  на главном луче можно выпустить на  $D_n$  двойную схему  $A$  интервала  $u_{г.л}$  так, чтобы по два слоя выводило изо всех интервалов рангов  $0, 1, 2, \dots, N$ , где  $N$  выбрано равным  $\left[ \frac{30}{\varepsilon^2} \right] + 1$  (чтобы  $N \frac{\varepsilon^2}{30} > 1$ ), и так чтобы среди направлений слоев ранга 1 не было главного.

Изю всякой достаточно малой полуокрестности  $u_n$  точки  $p_n$  на подсобном луче можно выпустить на  $D_n$  двойную схему  $B$  интервала  $u_n$  так, чтобы по два слоя выводило из интервалов рангов  $1, 2, \dots, N$ , а первое направление было главным;  $N$  — то же, что в предыдущем абзаце. Схему  $C$  с такой же  $N$ -характеристикой можно выпустить и из полуокрестности  $u_{г.л}$ , если она достаточно мала. Наконец, если интервал  $u_n$  достаточно мал, то на  $D_n$  можно из него выпустить двойную выводящую схему  $D$ , первое направление которой — подсобное и у которой раздвоение происходит в интервалах ранга  $1, 2, \dots, N$ .

Б. Если упомянутые полуокрестности  $u_{г,л}$  и  $u_n$  достаточно малы, то у построенных в А схем интервалы попарно не пересекаются, кроме тех, которые совпадают по построению (на  $l'$  и  $l''$ ).

Эти утверждения следуют из леммы 13 § 7.



Фиг. 18. Двойная выводящая схема интервала  $2s'_n$  на  $D_{n+1} \cup 2s_n$ . Слева заштрихованы первые слои; правое изображение схематичней

Отрезок  $2s_n$  выбранного выше направления будет приклеен к  $p_n$  в окрестности  $P$  точки  $p_n$ , которая выбирается теперь так, чтобы выполнялись следующие три требования:

- 1) Колебание каждой функции  $g_k^n(x_k)$ , отвечающей  $f \in F$ , в  $P$  должно быть меньше  $\frac{\epsilon}{4}$ .
- 2) Окрестность  $P$  должна быть столь малой, чтобы при условии  $s_n \subset P$  можно было отобразить  $s_n$  на  $s_n$  (см. § 4) и удовлетворить требованиям  $1_{n+1}, 2_{n+1}$  (§§ 4, 6).
- 3) Проекция  $2s_n$  на  $l'$  и  $l''$  по главному и подсобному направлениям должны попадать в построенные выше (см. утверждения А и Б) полуокрестности  $u_{г,л}$  и  $u_n$  точки  $p_n$  на  $q_n$  при  $2s_n \subset P$ .

Достаточно малая окрестность  $P$  точки  $p_n$  удовлетворяет требованию 1) ввиду равномерной непрерывности функций  $f \in F$ , непрерывной зависимости  $g_k^n(x_k)$  от  $f \in F$  и возможности применить лемму Арцеля — Асколи к измененным лишь на постоянные функциям  $g_k^n(x_k)$  и  $f \in F$ . Ранее (§§ 4, 6) установлено, что при достаточно малой  $P$  выполнено требование 2). Наконец, возможность удовлетворить требованию 3) при достаточно малой окрестности  $P$  есть следствие утверждений А и Б.

Теперь выберем удовлетворяющую требованиям 1), 2), 3) окрестность  $P$ . В  $P$  возьмем  $2s_n$  выбранного выше направления. Построим отображение  $\sigma_n$  на  $s_n$  как в § 4. На  $D_{n+1} = D_n \cup s_n$ , в силу 2), выполнены условия  $1_{n+1}$  и  $2_{n+1}$ .

Построим на  $D_n \cup 2s_n$  (фиг. 18) двойную выводящую схему интервала  $2s_n$  следующей структуры:

1. Начальный интервал  $2s_n$  имеет два выводящих слоя, направления которых — главное и подсобное.

2. Из интервала первого ранга, лежащего на главном направлении, выводит схема  $A$  (см. утверждение А). Из остальных интервалов первого ранга куда приводит слой главного направления, выводит схема  $C$  (см. утверждение А).

3. Из интервалов первого ранга, куда приводит слой подсобного направления, таким же образом выводит схемы  $B$  (из  $u_n$ ) и  $D$  (из остальных).

Эта конструкция действительно является выводящей схемой (двойной). В самом деле, схемы  $A, B, C, D$  на  $D_n$  не пересекаются (кроме общих интервалов на  $u_{г.л}$  и  $u_n$ ). Так как (исключая начальные интервалы) эти схемы не имеют интервалов на  $u_{г.л}$  и  $u_n$ , то их слои ранга больше 1 не пересекают  $u_{г.л}$  и  $u_n$ , а стало быть, и  $2s_n$ . Слои же первого ранга не пересекают  $2s_n$  ввиду определения главного и подсобного направлений.

Назовем полученную схему большой схемой.

Каждая молния большой схемы, выводящая из  $2s_n$ , либо проходит через по крайней мере  $N$  отличных от  $2s_n$  интервалов, где большая схема двойится, либо обрывается свободным концом меньшего ранга. Во всяком случае из всех интервалов ранга  $1, 2, \dots, N$  в большой схеме, которые входят в схемы  $A$  и  $C$ , и из интервалов рангов  $2, 3, \dots, N+1$  в большой схеме, которые входят в схемы  $B$  и  $D$ , выводят два слоя. Это следует из утверждений А и Б.

Построение функций  $g_k^{n+1}(x_k)$ . Мы видели (см. (3)), что на  $D_n$

$$g^n(x) = \sum_{k=1}^3 g_k^n(x_k).$$

Эта же формула может рассматриваться как определение функции  $g(\cdot)$  в координатном параллелепипеде, натянутом на  $D_n$ , — в произведении слагаемых определения функций  $g_k^n(x_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ). На  $D_{n+1}$  определена функция  $g^{n+1}(x) = f^{n+1}(x) - f^{n_r}(x)$ . Функции  $g_k^{n+1}(x_k)$  требуется найти так, чтобы на  $D_{n+1}$  было

$$g^{n+1}(x) = \sum_{k=1}^3 g_k^{n+1}(x_k). \quad (*)$$

Таким образом, при  $x \in D_n$  и, в частности, в точке  $p_n$

$$\sum_{k=1}^3 g_k^{n+1}(x_k) = g^n(x).$$

Доопределим  $g^{n+1}(x)$  на  $2s_n$  так, чтобы функция

$$g^{n+1}(x) - g^n(x) = \Delta_0(x), \quad (9)$$

рассматриваемая на  $2s_n$ , была четной относительно середины этого интервала. Очевидно, функция  $\Delta_0(x)$  определена и непрерывна на  $D_n \cup \overline{2s_n}$  и отлична от нуля только на  $2s_n$ .

Определим функции  $g_k^{n+1}(x_k)$  так, чтобы равенство (\*) выполнялось на  $D_n \cup \overline{2s_n}$  всюду, с помощью распределения поправок по двум направлениям, соответствующим большой схеме.

В качестве нулевого приближения к  $g_k^{n+1}(x_k)$  возьмем  ${}^0g_k^{n+1}(x_k) = g_k^n(x_k)$ . При подстановке нулевого приближения в равенство (\*) вместо  $g_k^{n+1}(x_k)$  равенство будет нарушаться только на  $2s_n$ . Первое приближение получим из нулевого исправлением на интервалах слоев ранга 1 большой схемы. Если  $x \in 2s_n$  и, например,  $x_1$  и  $x_2$  — соответствующие  $x$  точки этих интервалов слоев, то мы положим

$$\Delta_1^1(x) = \gamma_1 \Delta_0(x),$$

$$\Delta_2^1(x) = \gamma_2 \Delta_0(x),$$

и тогда при  $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$ , если

$${}^1g_1^{n+1}(x_1) = {}^0g_1^{n+1}(x_1) + \Delta_1^1(x_1),$$

$${}^1g_2^{n+1}(x_2) = {}^0g_2^{n+1}(x_2) + \Delta_2^1(x_2),$$

$${}^1g_3^{n+1}(x_3) = {}^0g_3^{n+1}(x_3),$$

равенство (\*) будет нарушено лишь на интервалах первого ранга. Вообще в  $i-1$ -ом приближении равенство (\*) нарушается на  $D_n \cup 2s_n$  только на интервалах большой схемы ранга  $i-1$ . Тогда  $i$ -е приближение получается из  $i-1$ -го исправлением на интервалах слоев ранга  $i$  большой схемы. Если  $x$  принадлежит слою  $u$  ранга  $i-1$  большой схемы и, например,  $u_2$  и  $u_3$  — интервалы слоев, выводящих из  $u$ , причем  $x$  соответствуют  $x_2(x) \in u_2$  и  $x_3(x) \in u_3$ , и  $i-1$ -я невязка в точке  $x$  есть

$$\Delta_{i-1}(x) = g^{n+1}(x) - \sum_{k=1}^3 {}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k), \quad (10)$$

то полагаем

$$\begin{aligned} \Delta_2^i(x_2(x)) &= \gamma_2 \Delta_{i-1}(x), \\ \Delta_3^i(x_3(x)) &= \gamma_3 \Delta_{i-1}(x), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\gamma_2 + \gamma_3 = 1$ . (Мы не предполагаем, что  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  — постоянные числа: это функции  $x$ , и они будут определены ниже.) Теперь положим

$${}^i g_2^{n+1}(x_2) = {}^{i-1} g_2^{n+1}(x_2) + \Delta_2^i(x_2) \text{ и т. д.} \quad (12)$$

и  $i$ -ое приближение построено, так как равенство (\*) нарушается разве лишь на интервалах ранга  $i$  большой схемы. Описанный процесс в § 7 назван распределением поправок. Благодаря устройству большой схемы он идет с двумя направлениями при  $1 \leq i \leq N$  или  $2 \leq i \leq N+1$ , а после заканчивается, как в случае простой выводящей схемы, когда все интервалы некоторого ранга станут свободными.

Остается распорядиться  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  при каждом распределении поправок так, чтобы (см. (7)) было

$$|{}^i g_k^{n+1}| < 3 + \theta_{n+1}$$

и чтобы все поправки  $\Delta_k^i(x_k)$  были непрерывны, обращались в нуль на концах интервалов слоев большой схемы и непрерывно зависели от  $x$  и  $f \in F$ . Тогда равенство (\*), т. е. (6), будет выполнено из-за результатов лемм § 7, и, в силу (5), (6), (7) и (8), выполнение условий  $3_{n+1}$  и  $4_{n+1}$  будет доказано.

**Лемма 16.** Пусть на интервал и ранга  $i \geq 1$  большой схемы приводит слой направления  $x_1$  и уведят слои направлений  $x_2$  и  $x_3$ . Пусть  $x \in I_i$ . Тогда

$$|{}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_n \quad (k = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$\left| \sum_{k=1}^3 {}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k) \right| \leq 1. \quad (14)$$

**Доказательство.** Так как  $u$  — интервал ранга  $i$ , то при распределении поправок его раньше не трогали:  ${}^{i-1}g_k^n(x_k) = g_k^n(x_k)$ . Поэтому (13) следует из (4), а (14) — из оценки  $g^n(x)$  (см. определение  $g^n(x)$ ).

**Лемма 17.** Пусть в предположениях леммы 16  $\Delta_{i-1}(x)$  — непрерывная на  $\bar{u}$ , обращающаяся в нуль на концах и невязка (см. (10)), непрерывно зависящая от  $f \in F$ , причем

$$|\Delta_{i-1}(x)| \leq 1 + \varepsilon.$$

Тогда можно подобрать поправки  $\Delta_2^i(x)$ ,  $\Delta_3^i(x)$  так, чтобы:

$$1) \quad |\Delta_2^i(x)|, \quad |\Delta_3^i(x)| < \max \left( \left| |\Delta_{i-1}(x)| - \frac{\varepsilon^2}{30} \right|, \varepsilon \right),$$

$$2) \quad |{}^i g_2^{n+1}(x_2)|, \quad |{}^i g_3^{n+1}(x_3)| < 3 + \theta_{n+1},$$

$$3) \quad \Delta_2^i(x) + \Delta_3^i(x) = -\Delta_{i-1}(x),$$

$$4) \quad \Delta_2^i(x) \text{ и } \Delta_3^i(x) \text{ зависели от } x \text{ и от } f \in F \text{ непрерывно и при } \Delta_{i-1}(x) \rightarrow 0 \\ \Delta_2^i(x) \rightarrow 0, \quad \Delta_3^i(x) \rightarrow 0$$

(здесь положено в соответствии с (12),  ${}^i g_k^{n+1}(x_k) = {}^{i-1}g_k^{n+1}(x_k) + \Delta_k^i(x_k(x))$ )

**Доказательство.** Числа  $a = {}^{i-1}g_1^{n+1}(x_1)$ ,  $b = {}^{i-1}g_2^{n+1}(x_2)$ ,  $c = {}^{i-1}g_3^{n+1}(x_3)$ ,  $d = g^n(x)$  (по лемме 16) и  $s = \Delta_{i-1}(x)$ ,  $\theta = \theta_n$  и  $\varepsilon$  удовлетворяют условиям арифметической леммы 14, с заключением которой совпадает в этих обозначениях заключение настоящей леммы, если положить

$$\Delta_2^i(x) = \Delta b, \quad \Delta_3^i(x) = \Delta c.$$

**Замечание.** Очевидно, леммы 16 и 17 останутся верными, если произвести перестановку  $x_1, x_2, x_3$  в их условиях и заключениях.

**Лемма 18.** Если первые невязки  $\Delta_0(x)$ ,  $\Delta_1(x)$ ,  $\Delta_2(x)$  не превосходят  $1 + \varepsilon$ :

$$|\Delta_0(x)| \leq 1 + \varepsilon, \quad |\Delta_1(x)| \leq 1 + \varepsilon, \quad |\Delta_2(x)| \leq 1 + \varepsilon,$$

и функции первого и второго приближений  ${}^1g_k^{n+1}(x_k)$ ,  ${}^2g_k^{n+1}(x_k)$  меньше  $3 + \theta_{n+1}$ :

$$|{}^1g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}, \quad |{}^2g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1},$$

то можно выбрать  $g_k^{n+1}(x_k)$ ,

$$|g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1},$$

так, чтобы выполнялось равенство (\*). Если  $\Delta_0(x)$  и  $\Delta_1(x)$ ,  ${}^1g_k^{n+1}$  и  ${}^2g_k^{n+1}$  непрерывно зависят от  $x$  и  $f \in F$ , то  $g_k^{n+1}(x_k)$  можно выбрать также непрерывно зависящими от  $x$  и  $f \in F$ ,

Доказательство. Действительно, в этом случае лемма 17 применима для всех интервалов большой схемы, ранг которых больше 0 и из которых выводятся два слоя, так как при применении леммы 17 к распределению поправок  $\Delta_i$  только уменьшается, когда  $i$  растет. Применяя заключение 1) леммы 17, видим, что если от начала большой схемы до данного ее интервала было  $N$  интервалов, из которых выводило по два слоя, то при таком распределении поправок  $\Delta_i$  меньше  $\max\left(\left|1 + \varepsilon - N \frac{\varepsilon^2}{30}\right|, \varepsilon\right)$ . Но в большой схеме каждая молния со свободным концом либо имеет по крайней мере  $N$  первых интервалов, из которых выводятся два слоя, не считая начала, либо все интервалы молнии до свободного включительно имеют по два выводящих слоя. Принимая во внимание, что  $N \frac{\varepsilon^2}{30} > 1$ , видим, что в обоих случаях все поправки  $\Delta_{N+1}$  по модулю меньше  $\varepsilon$ . При дальнейшем распределении поправок с помощью простых выводящих схем интервалов ранга  $N + 1$ , как в лемме 8 § 7, функции  $g_k^n(x_k)$  будут получать на все новых и новых интервалах поправки, по модулю меньшие  $\varepsilon$ . Но тогда на этих интервалах

$$|g_k^{n+1}(x_k)| < |g_k^n(x_k)| + \varepsilon < 3 + \theta_n + \varepsilon < 3 + \theta_{n+1},$$

и так как на интервалах меньшего ранга это неравенство следует из леммы 17 (ранг  $> 1$ ) и условия леммы 18 (ранг 0 и 1), то последняя доказана

Если определить теперь  $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, {}^1g_k^{n+1}, {}^2g_k^{n+1}$  так, чтобы они удовлетворяли условиям леммы 18, то, очевидно, построение функции  $g_k^{n+1}$  с выполнением требований  $3_{n+1}$  и  $4_{n+1}$  будет закончено. Рассмотрим сначала распределение и поправки с интервала нулевого ранга  $2s_n$ . Там  $\Delta_0(x) = g^{n+1}(x) - g^n(x)$ ,  ${}^0g_k^{n+1}(x_k) = g_k^n(x_k)$ , причем  $\Delta_0(x)$  — непрерывно зависящая от  $x, f$ , обращающаяся в нуль на концах  $2s_n$  невязка. Пусть, для определенности, координаты главного и подсобного направлений точки  $x \in 2s_n$  суть  $x_1$  и  $x_2, u_1$  и  $u_2$  — интервалы первого ранга большой схемы, соответственно главный и подсобный, и пусть  $x' \in u_1, x'' \in u_2$  — точки, отвечающие там  $x$  (фиг. 18). Мы будем писать также  $x_1(x), x_2(x), x(x_1), x(x_2), x(x'), x_2(x'_1)$  и т. п. для выражения этого соответствия.

Лемма 19. Если точка  $x$  лежит в определенной выше окрестности  $P$  точки  $p_n$ , то

$$\left| \sum_{k=1}^3 g_k^n(x_k) \right| < 1 + \varepsilon;$$

если  $x \in 2s_n$ , то

$$|\Delta_0(x)| = |g^{n+1}(x) - g^n(x)| < 1 + \varepsilon.$$

Доказательство. В точке  $p_n = (p_{n_1}, p_{n_2}, p_{n_3}) \in D_n$

$$\sum_{k=1}^3 g_k^n(p_{n_k}) = g^n(p_n)$$

(см. определение  $g^n(x)$ ),

$$|g^n(p_n)| \leq 1.$$

В силу первого требования к окрестности  $P$ , там

$$|g_k^n(x_k) - g_k^n(p_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сравнивая с предыдущим, получаем первое из заключений леммы.

Функция  $|g^{n+1}(x) - g^n(x)|$  четна (см. определение  $g^n(x)$ ) на  $2s_n$  и на концах этого отрезка обращается в нуль. Поэтому второе заключение леммы достаточно проверить на  $s_n$ .

Имеем, по определению  $g^n$ :

$$g^{n+1}(p_n) - g^n(p_n) = 0$$

и

$$|g^{n+1}(x) - g^{n+1}(p_n)| < 1.$$

Первое требование к  $P$  обеспечивает выполнение неравенства

$$|g^n(x) - g^n(p_n)| < \frac{3}{4}\varepsilon,$$

которое вместе с предыдущим неравенством доказывает лемму 19.

Лемма 20. Для  $x \in 2s_n$  можно подобрать  $\Delta_1^1(x)$  и  $\Delta_2^1(x)$  [мы будем также писать  $\Delta_1^1(x_1)$  и  $\Delta_2^1(x_2)$ , понимая под этим  $\Delta_1^1(x(x_1))$  и  $\Delta_2^1(x(x_2))$ ] так, чтобы:

- 1)  $\Delta_1^1(x) + \Delta_2^1(x) = \Delta_0(x)$ ,
- 2)  $|{}^1g_k^{n+1}(x_k)| = |{}^0g_k^{n+1}(x_k) + \Delta_k^1(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}$ ,
- 3)  $|{}^0g_1^{n+1}(x_1) - \Delta_2^1(x(x_1))| < 3 + \theta_n + \frac{\varepsilon}{2}$ ,
- 4)  $\Delta_1^1(x)$  и  $\Delta_2^1(x)$  зависят от  $x$  и  $\Delta_0(x)$  непрерывно и при  $\Delta_0(x) \rightarrow 0$   $\Delta_k^1(x) \rightarrow 0$ .

Доказательство. Числа

$$a = {}^0g_1^{n+1}(x_1), \quad b = {}^0g_2^{n+1}(x_2), \quad c = {}^0g_3^{n+1}(x_3),$$

$$s = g^{n+1}(x), \quad \theta = \theta_n \text{ и } \varepsilon$$

удовлетворяют, в силу выполнения условия  $4_n$ , определения  $\theta_n$  и  $\varepsilon$  и леммы 19, всем требованиям арифметической леммы 15. Применяя ее, получим заключение леммы 20, если положим

$$\Delta_1^1(x) = \Delta a, \quad \Delta_2^1(x) = \Delta b.$$

В частности, при таком определении  $\Delta_k^1$  и  ${}^1g_k^{n+1}$  будет:

$$|\Delta_1(x)| < 1 + \varepsilon \text{ и } |{}^1g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}.$$

Чтобы условие леммы 18 выполнялось, нужно определить еще  $\Delta_k^2$  и  ${}^2g_k^{n+1}$  так, чтобы было  $|\Delta_3(x)| \leq 1 + \varepsilon$  и  $|{}^2g_k^{n+1}(x_k)| < 3 + \theta_{n+1}$ . Для тех интервалов большой схемы, где она ветвится, т. е. для всех, кроме  $u_2 \subseteq u_n$ , это можно сделать с помощью леммы 17.

Мы ввели точку  $x''(x)$  с координатами  $x_k''$ , причем точка  $x''$  и ее координаты суть функции (линейные) точки  $x$  или любой из ее координат, и наоборот. Имеем:

$${}^1g_2^{n+1}(x_2'') = {}^0g_2^{n+1}(x_2'') + \Delta_2^1(x_2'') \quad (x_2'' = x_2).$$

Остальные функции первого приближения совпадают с функциями нулевого приближения. Положим, в соответствии с распределением поправок по направлениям большой схемы,

$${}^2g_1^{n+1}(x_1'') = {}^0g_1^{n+1}(x_1'') + \Delta_1^2(x_1''), \text{ где } \Delta_1^2(x_1'') = -\Delta_2^1(x(x_1'')).$$

В силу выбора  $\Delta_2^1(x)$  (см. лемму 20),

$$|\Delta_1^2(x_1'')| \leq 1 + \varepsilon.$$

Лемма 21. При введенных выше обозначениях

$$|{}^2g_1^{n+1}(x_1'')| < 3 + \theta_{n+1}.$$

Доказательство. Согласно заключению 3) леммы 20

$$|{}^0g_1^{n+1}(x_1) - \Delta_2^1(x(x_1))| < 3 + \theta_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

где  $x_1$  — координата любой точки  $x \in 2s_n$ , в частности  $x(x'')$ . В силу первого требования к  $P$  (а  $u''$  лежит, конечно, в  $P$ ),

$$|{}^0g_1^{n+1}(x_1) - {}^0g_1^{n+1}(x_1'')| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда

$$|{}^0g_1^{n+1}(x_1'') - \Delta_2^1(x(x_1))| < 3 + \theta_n + \frac{3}{4}\varepsilon < 3 + \theta_{n+1},$$

что и требовалось доказать, так как  $\Delta_1^2(x_1'') = -\Delta_2^1(x(x_1))$ .

Так как каждая следующая поправка не превосходит в описанном выше процессе предыдущей невязки, из отмеченного уже факта, что  $|\Delta_1^2(x_1'')| \leq 1 + \varepsilon$ , получаем:  $|\Delta_3(x)| \leq 1 + \varepsilon$ . Принимая во внимание лемму 21, убедимся, что наш выбор  $\Delta_k^2(x_k)$  действительно удовлетворяет условиям леммы 18. Эта лемма доказана, и мы получаем в итоге функции  $g_k^{n+1}(x_k)$ , удовлетворяющие всем сформулированным в начале параграфа требованиям и неравенствам (6) и (7). Полагая (см. (8))

$$f_k^{n+1}(x_k) = f_k^n(x_k) + g_k^{n+1}(x_k),$$

получаем разложение, обладающее свойствами  $3_{n+1}$ ,  $4_{n+1}$ .

Тем самым закончено доказательство индуктивной леммы, так как при  $n = 1$  она тривиальна.



Таким образом, дерево  $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$ , гомеоморфизм  $X$  на  $\Xi$  и разложения функций из  $F$  в сумму функций координат на  $D_n$  построены с выполнением всех требований индуктивной леммы.

### § 10. Доказательство теоремы 3

В результате применения процессов, описанных в предыдущем параграфе, получатся деревья  $D_n$ , реализующие  $\Delta_n$ , причем  $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n}$  реализует  $\Xi$  в виде подмножества трехмерного пространства.

На каждом дереве  $D_n$  каждая функция  $f \in F$  представляется в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^3 f_k^n(x_k),$$

где непрерывные функции  $f_k^n$  координат  $x_k$  точки  $x \in D_n$  зависят непрерывно от  $F$ . Последовательность  $f_k^n(x_k)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходится. Это вытекает из того, что  $|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)|$  не больше  $\frac{4}{r^2}$  при  $n_r < n \leq n_{r+1}$  и, следовательно,

$$|f_k^n(x_k) - f_k^{n_r}(x_k)| < \sum_{l=r}^{\infty} \frac{4}{l^2} \quad (n > n_r).$$

Обозначим через  $f_k(x_k)$  пределы этих последовательностей. Сумма этих трех функций является непрерывной функцией  $f(x_1, x_2, x_3)$ . Для точек  $(x_1, x_2, x_3) \in D_n$

$$\sum_{k=1}^3 f_k^m(x_k) = f(x) \quad \text{при всех } m \geq n.$$

Поэтому и в пределе

$$\sum_{k=1}^3 f_k(x_k) = f(x) \quad \text{в каждой точке } x \in D_n \text{ при любом } n.$$

Но  $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  — всюду плотное подмножество своего замыкания  $X$ . Непрерывные функции  $f(x)$  и  $\sum_{k=1}^3 f_k(x_k)$  совпадают в силу этого на всем  $X$ .

Доказательство будет закончено, если мы убедимся в непрерывной зависимости  $f_k(x_k)$  от  $f$ .

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим столь большое  $N$ , что  $|f_k^n(x_k) - f_k(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$  для всех  $n \geq N$  и  $f_k^n, f_k$ , отвечающих любой функции  $f \in F$ .

В силу требования  $\mathcal{Z}_n$ , функции  $f_k^n(x_k)$  при фиксированном  $n = N$  зависят от  $f \in F$  непрерывно. Поэтому  $f$  имеет такую окрестность радиуса  $\delta$ , что для

$f' \in F$  и  $|f' - f| < \delta$  будет  $|f'_k(x_k) - f_k(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$  при всех  $x_k$ . Отсюда следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $|f' - f| < \delta$ , то  $|f'_k(x_k) - f_k(x_k)| < \varepsilon$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, каково бы ни было семейство  $F$  действительных равномерно непрерывных функций  $f(\xi)$ , заданных на дереве  $\Xi$ , все точки которого имеют индекс ветвления  $\leq 3$ , можно так реализовать дерево в виде подмножества  $X$  трехмерного куба  $E^3$ , что любая функция семейства  $F$  может быть представлена в виде

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^3 f_k(x_k),$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)$  есть образ  $\xi \in \Xi$  в дереве  $X$ ,  $f_k(x_k)$  — непрерывные действительные функции одного переменного, причем  $f_k$  непрерывно зависят от  $f$  в смысле размерной сходимости.

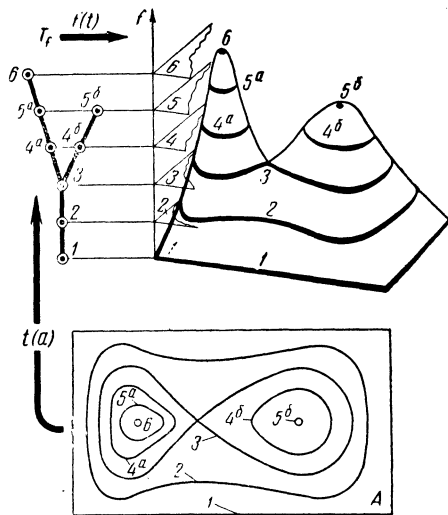
Это и есть теорема 3.

Как было показано во введении, отсюда следует теорема 1.

### Приложение

#### Пространство компонент множеств уровня непрерывной функции

Что совокупность компонент множества уровня непрерывной функции на квадрате есть дерево, ясно из фиг. 19. Здесь мы придадим точный смысл этим словам, следуя А. С. Кронроду [4], который ввел понятие пространства компонент множеств уровня, и К. Менгеру [3], изучившему деревья. Доказываемые ниже теоремы являются главным орудием в обеих частях работы. В конце приложения помещен (для неспециалистов) перечень предполагающихся известными начальными сведениями из теоретико-множественной топологии.

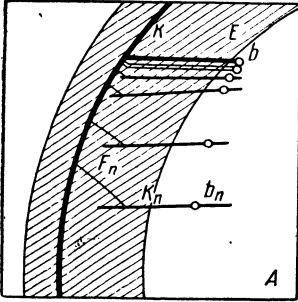


#### А) Построение метрического пространства $T_f$

Пусть на континууме  $A$  задана непрерывная действительная функция  $f(a)$  (фиг. 19). Множеством уровня этой функции называется множество всех тех точек  $a$ , где  $f(a)$  принимает одно значение  $f$ . Таким образом, множества уровня замкнуты, попарно не пересекаются и вместе составляют все  $A$ . В свою очередь, каждое множество уровня естественным образом разбивается на компоненты — попарно не пересекающиеся континуумы.

Фиг. 19. Множества уровня, пространство компонент и график функции. Некоторые компоненты обозначены цифрами. Индекс ветвления точек  $1, 5^b, 6 \in T_f$  равен 1, точек  $2, 4^a, 4^b, 5^a$  равен 2, точки 3 равен 3. Соответствующие компоненты соответственно не делят  $A$ , делят на 2 и 3 части

Рассмотрим совокупность  $T_f$  всех компонент всех множеств уровня непрерывной функции  $f(a)$ .  $T_f$  называется пространством компонент множеств уровня  $f(a)$ . Сейчас мы определим там метрику, так что под  $T_f$  далее понимается метрическое пространство. Компоненты множеств уровня  $f(a)$  являются подмножествами  $A$  и точками  $T_f$ . Одну и ту же компоненту мы будем обозначать в первом случае большой буквой, а во втором — соответствующей маленькой буквой.



Фиг. 20. К лемме 1. Если компоненты  $K_n$  со сколь угодно малым  $\rho(k, k_n)$  имеют точки  $b_n$  вне  $E$ , то и  $K$  имеет точку  $b$  вне  $E$ . Жирная линия —  $\bar{\cap} F_n$

Как известно, колебанием функции на множестве называется разность между верхней и нижней гранями функции на этом множестве. Колебание непрерывной функции на компакте конечно и неотрицательно.

Пусть  $K_1$  и  $K_2$  — компоненты множеств уровня непрерывной на континууме  $A$  функции  $f(a)$ .  $P(K_1, K_2)$  обозначает нижнюю грань колебаний  $f(a)$  на всех континуумах  $F \subseteq A$ , содержащих  $K_1$  и  $K_2$ :

$$P(K_1, K_2) = \inf_{K_1 \cup K_2 \subset F \subset A} [\max_{a \in F} f(a) - \min_{a \in F} f(a)].$$

Если определить теперь расстояние между точками  $k_1$  и  $k_2$  пространства компонент как  $\rho(k_1, k_2) = P(K_1, K_2)$ , то  $T_f$  станет метрическим пространством. Действительно, очевидно,

$$0 \leq \rho(k_1, k_2) = \rho(k_2, k_1) \leq \rho(k_1, k_3) + \rho(k_3, k_2).$$

Чтобы доказать, что из  $\rho(k_1, k_2) = 0$  следует  $k_1 = k_2$ , мы воспользуемся более общим фактом:

*Лемма 1. Для любого открытого множества  $E \subseteq A$ , содержащего компоненту  $K$  множества уровня непрерывной на континууме  $A$  функции  $f(a)$ , найдется  $\delta > 0$  такое, что если  $\rho(k, k_1) < \delta$ , то компонента  $K_1$  входит в  $E$ .*

*Доказательство.* В противном случае (фиг. 20) существует последовательность компонент  $K_n$  таких, что  $\rho(k, k_n) < \frac{1}{n}$ , хотя при каждом  $n$   $K_n$  содержит точку  $b_n$ , не входящую в  $E$ . По определению  $\rho(k, k_n)$  существуют при  $n = 1, 2, \dots$  континуумы  $F_n \subseteq A$ , каждый из которых содержит  $K$  и  $K_n$  с тем же  $n$ , такие, что на  $F_n$  колебание  $f(a)$  меньше  $\frac{2}{n}$ , а потому значения  $f$  на  $F_n$  отличаются от значения  $f(a)$  в точках  $K$  меньше, чем на  $\frac{2}{n}$ . Последовательность не лежащих в  $E$  точек  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет ввиду компактности  $A \setminus E$  предельную точку  $b \in A \setminus E$ . Нижний топологический предел  $\bar{\cap} F_n$  связанных подмножеств  $F_n$  компакта  $A$  не пуст, ибо он содержит  $K$ . Следовательно, верхний топологический предел  $\bar{\cap} F_n$  связан. В точках верхнего предела  $f(a)$  принимает то же значение, что и на  $K$ , так как в любой окрестности такой точки есть точки  $F_n$  со сколь угодно большим  $n$ , а в них  $f(a)$

отличается от  $f(a)$  ( $a \in K$ ) меньше, чем на  $\frac{2}{n}$ . Верхний предел, очевидно, содержит и  $K \subset E$  и  $b \in A \setminus E$ . Это противоречит тому, что  $K$  — компонента, лежащая внутри  $E$ , так как верхний предел — связное множество, где  $f(a)$  постоянная, — целиком входит в одну компоненту. Лемма доказана.

На основании леммы 1 из  $\rho(k_1, k_2) = 0$  вытекает, что  $K_1$  и  $K_2$  вместе входят в любое открытое множество, если в это множество входит или  $K_1$  или  $K_2$ , что возможно, лишь когда  $K_1 = K_2$ , так как иначе расстояние между  $K_1$  и  $K_2$  в  $A$  положительно.

Таким образом, метрика в  $T_f$  определена. Определяемая этой метрикой топология в  $T_f$  совпадает с введенной в работе [4], если  $A$  локально связно. А. С. Кронрод вводит топологию в  $T_f$  с помощью окрестностей, которые определяются как множества  $K$ , пересекающиеся с некоторыми открытыми множествами  $E \subseteq A$ . При этом сразу видно, что топология в  $T_f$  зависит только от разбиения  $A$  на компоненты.

### Б) Два отображения, связанные с непрерывной функцией

Рассмотрим (см. фиг. 19) два отображения:

1.  $t(a)$  отображает  $A$  на  $T_f$  и ставит в соответствие каждой точке  $a$  континуума  $A$  точку  $t \in T_f$  — ту компоненту  $T \subseteq A$ , в которой лежит  $a$ .

2.  $f(t)$  отображает  $T_f$  в действительную прямую  $f$  и ставит в соответствие каждой точке  $t \in T_f$  число  $f$  — значение  $f(a)$  в точках компоненты  $T \subseteq A$ , отвечающей  $t \in T_f$ .

Обозначая функции  $f(a)$  и  $f(t)$  одной буквой, мы не перепутаем их, так как у них совсем разные области определения. Мы будем говорить, что заданная на  $A$  функция  $f(a)$  порождает на  $T_f$  функцию  $f(t)$ .

Если  $A$  локально связно, то оба эти отображения непрерывны.

1. Ввиду непрерывности  $f(a)$  для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое, что колебание  $f(a)$  на любом множестве диаметра  $< \delta$  меньше  $\varepsilon$ . Ввиду локальной связности  $A$   $\delta$ -окрестность точки  $a \in A$  имеет связную подокрестность  $u_\delta(a)$ . Очевидно, если  $b$  входит в  $u_\delta(a)$ ,  $K_a$  и  $K_b$  — компоненты множеств уровня, содержащие  $a$  и  $b$ , то  $\rho(k_a, k_b) < \varepsilon$ .

2. Если  $k_1, k_2$  — две точки  $T_f$ , отвечающие  $K_1, K_2$ , и  $\rho(k_1, k_2) < \varepsilon$ ,  $a_1 \in K_1$ ,  $a_2 \in K_2$ , то  $|f(a_1) - f(a_2)| < \varepsilon$ , так как колебание функции не меньше ее приращения. Тогда и  $|f(k_1) - f(k_2)| < \varepsilon$ .

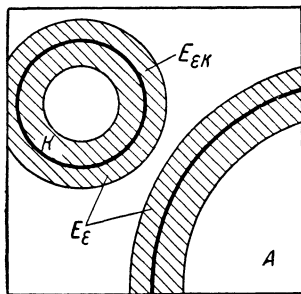
Непрерывность  $t(a)$  и  $f(t)$  доказана.

Если на  $A$  дана непрерывная функция  $g(a)$ , постоянная на каждой компоненте каждого множества уровня функции  $f(a)$ , то  $g(a)$  также порождает непрерывную функцию  $g(t)$  на  $T_f$  (именно, равную значению  $g(a)$  в каждой точке соответствующей компоненты) и при этом  $g(t(a)) = g(a)$ . Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , такое, что колебание  $g(a)$  на множестве диаметра меньше  $\delta$  меньше  $\varepsilon$ . Пусть  $E_\delta(T)$  —  $\delta$ -окрестность компоненты  $T \subseteq A$ , т. е. множество всех точек  $A$ , имеющих точки  $T$  ближе чем на расстоянии  $\delta$ . По лемме 1  $t(T)$  имеет в  $T_f$  окрестность, все компоненты которой лежат внутри  $E_\delta(T)$ . Итак, мы по  $\varepsilon > 0$  нашли окрестность точки  $t \in T_f$ , в которой  $|g(t) - g(t_1)| < \varepsilon$ . Непрерывность функции  $g(t)$  доказана.

Рассмотрим прообразы точек при отображениях  $t(a)$  и  $f(t)$ . Прообраз  $t \in T_f$  есть компонента  $T \subseteq A$ , т. е. связное множество.

Определение [7]. Непрерывное отображение называется монотонным, если прообраз каждой точки связан.

Монотонным отображением можно преобразовать квадрат с границей в сферу, а в тор, как мы увидим дальше, нельзя. Монотонные отображения — это, так сказать, стягивания без склеивания. При монотонных отображениях сохраняются некоторые топологические свойства множеств. Поэтому монотонность  $t(a)$  даст некоторые сведения о пространстве  $T_f$ .



Фиг. 21. К лемме 2. Построение окрестности  $E_{\epsilon T}$  компоненты  $T$

При отображении  $f(t)$  прообраз точки — это совокупность тех точек  $T_f$ , где  $f(t)$  принимает одно и то же значение, т. е. совокупность всех компонент одного множества уровня  $f(a)$ .

Далее всюду  $A$  предполагается локально связным, так что функции  $t(a)$  и  $f(t)$  непрерывны.

Лемма 2. Каждая точка  $t \in T_f$  имеет сколь угодно малую окрестность  $u(t)$  (т. е. для любого открытого подмножества  $E \subset T_f$ , содержащего  $t$ , найдется открытое множество  $u(t)$ ,

$t \in u(t) \subset E$ ) такую, что ее граница состоит из некоторых точек двух множеств уровня  $f(t)$ .

Доказательство. Пусть  $T$  — соответствующая  $t$  компонента и  $\alpha$  — значение  $f(a)$  в точках  $T$ . Рассмотрим (см. фиг. 21) открытое множество  $E_\epsilon$  всех точек  $a \in A$ , где  $|f(a) - \alpha| < \epsilon$ .  $E_\epsilon$  содержит  $T$ , и пусть  $E_{\epsilon T}$  обозначает компоненту  $E_\epsilon$ , содержащую  $T$  ( $E_{\epsilon T}$  — область, так как  $A$  локально связно). Если точка входит в  $E_{\epsilon T}$ , то и вся содержащая эту точку компонента множества уровня  $f(a)$ , очевидно, входит в  $E_{\epsilon T}$ . Ясно, что на границе  $E_{\epsilon T}$   $f(a) = \alpha \pm \epsilon$ . Покажем, что образ  $u_\epsilon(t)$  области  $E_{\epsilon T}$  при отображении  $t(a)$  удовлетворяет требованиям леммы 2 при достаточно малом  $\epsilon > 0$ .

1.  $u_\epsilon(t)$  есть открытое множество в  $T_f$ , содержащее  $t \in T_f$ .

Это утверждение устанавливается применением леммы 1 к  $E_{\epsilon T}$  и содержащимся в этой области компонентам.

2. Пусть  $K$  — компонента, которая при отображении  $t(a)$  переходит в одну из граничных точек  $u_\epsilon(t)$ ; тогда  $K$  входит в границу  $E_{\epsilon T}$ .

Это утверждение доказывается путем применения леммы 1 к областям, содержащим  $K$ .

3. При достаточно малом  $\epsilon > 0$  колебание функции  $f(a)$  на  $E_\epsilon$  и, тем более, на континууме  $\overline{E_{\epsilon T}}$  сколь угодно мало, откуда видно, что при достаточно малом  $\epsilon > 0$   $u_\epsilon(t)$  — сколь угодно малая окрестность  $t$ .

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 вытекает, что множество уровня функции  $f(t)$  — нульмерное подмножество  $T_f$ , так как любая его точка имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой с этим множеством уровня не пересекается.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Действительная непрерывная функция  $f(a)$ , заданная на локально связном континууме  $A$ , есть произведение двух непрерывных отображений: монотонного отображения  $t(a)$  континуума  $A$  на простран-

ство  $T_f$  компонент множеств уровня функции  $f(a)$  и отображения  $f(t)$  пространства  $T_f$  на действительную прямую, при котором прообраз каждой точки  $f$  нульмерен. Непрерывная на  $A$  и постоянная на каждой компоненте множества уровня  $f(a)$  функция  $g(a)$  порождает непрерывную на  $T_f$  функцию  $g(t)$ , так что  $g(a) = g(t(a))$ .

**В) Односвязные множества**

**Определение.** Локально связный континуум  $M$  называется односвязным [7], если его нельзя представить в виде суммы двух континуумов, пересечение которых несвязно.

Например, окружность и тор не односвязны.

**Замечание.** Это определение эквивалентно следующим:

Локально связный континуум односвязен, если любое разделяющее его компактное подмножество имеет компоненту, уже разделяющую.

Локально связный континуум односвязен, если любое его непрерывное отображение на окружность гомотопно отображению в точку.

Из односвязности еще не следует возможность непрерывно стянуть простую замкнутую кривую на  $M$  в точку.

**Лемма 3 [7].** *Монотонный образ  $F_2$  односвязного локально связного континуума  $F_1$  есть односвязный локально связный континуум.*

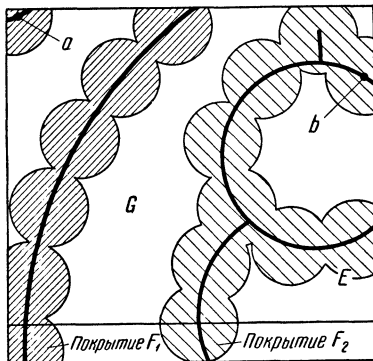
**Лемма 4 [7].** *При монотонном отображении компакта полный прообраз континуума есть континуум.*

**Доказательство леммы 4.** В противном случае этот полный прообраз может быть разбит на два непересекающихся замкнутых множества  $A$  и  $B$ , образы которых  $A'$  и  $B'$  пересекаются. Если  $C'$  — точка пересечения образов, то ее прообраз пересекается и с  $A$ , и с  $B$ , причем он лежит в  $A \cup B$ , а потому не связан. Следовательно, отображение — не монотонное.

**Доказательство леммы 3.** Действительно,  $F_2$ , как непрерывный образ локально связного континуума, есть локально связный континуум. Пусть  $A_2$  и  $B_2$  — континуумы из  $F_2$ ,  $A_2 \cup B_2 = F_2$ . В силу леммы 4, прообразы  $A_2$  и  $B_2$  — множества  $A_1$  и  $B_1$  — суть континуумы. Очевидно,  $A_1 \cup B_1 = F_1$ , поэтому  $A_1 \cap B_1$  связно ввиду односвязности  $F_1$ . Но  $A_2 \cap B_2$  есть образ  $A_1 \cap B_1$  и, следовательно, связное множество. Лемма 3 доказана.

**Лемма 5 [7].** *Эвклидовы кубы любой размерности и сферы размерности два и выше односвязны.*

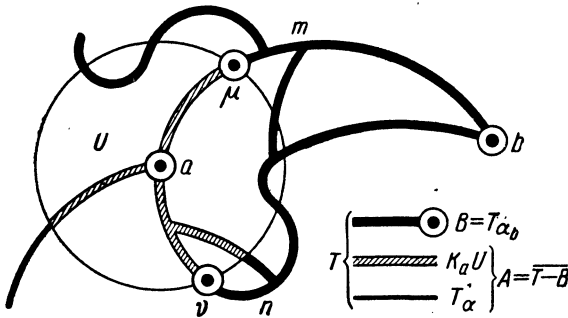
**Доказательство.** Предположим противное, и пусть, для определенности, квадрат  $E = A \cup B$ , где  $A$  и  $B$  — континуумы, пересечение  $A \cap B$  которых распадается на два непересекающихся компакта:  $A \cap B = F_1 \cup F_2$ . Пусть расстояние между  $F_1$  и  $F_2$  больше  $h > 0$ . Рассмотрим сферические окрестности



Фиг. 22. К лемме 5. Если бы было  $A \cup B = E$ ,  $A \cap B = F_1 \cup F_2$ , то отделяющая точку  $a \in F_1$  от точки  $b \in F_2$  область  $G$  пересекалась бы с соединяющими  $a$  и  $b$  множествами  $A, B$ , что противоречит связности  $G$ , так как  $A \cap B = F_1 \cup F_2$  лежит вне  $G$

всех точек  $F_1$  и  $F_2$  радиуса  $\frac{h}{3}$ . Они покрывают  $F_1 \cup F_2$ . Из них можно выбрать конечное число, причем ясно, что получающиеся конечные покрытия  $F_1$  и  $F_2$  не пересекаются (фиг. 22). Очевидно, квадрат разбит конечным числом кривых, каждая из которых состоит из конечного числа дуг окружностей, на части трех сортов: входящие в покрытие  $F_1$ , входящие в покрытие  $F_2$  и прочие. Покрытия  $F_1$  и  $F_2$  удалены далее, чем на  $\frac{h}{3}$ . Поэтому прочие области разделяют их. Пусть точки  $a \in F_1$  и  $b \in F_2$ . Каждая ломаная\*, пересекающаяся с  $a$  и с  $b$ , пересекает одну из областей прочих точек. Мы будем считать очевидным для  $E$  (кубов и сфер) элементарный комбинаторный факт, что среди рассматриваемых областей есть одна —  $G$ , уже разделяющая  $a$  и  $b$ . Заметим только, что в случае тора и других неодносвязных множеств этот факт не имеет места. Континуумы  $A$  и  $B$  оба содержат  $a$  и  $b$ , поэтому в  $G$  есть точки как  $A$  (они уже не могут входить в  $B$ ), так и  $B$  (они не лежат в  $A$ , ибо  $A \cap B = F_1 \cup F_2$ ). Оба множества  $A \cap \bar{G}$ ,  $B \cap \bar{G}$  замкнуты и не пересекаются, а в сумме дают  $\bar{G}$ , так как  $A \cup B = E$ . Это противоречит связности  $\bar{G}$ . Противоречие показывает ошибочность предположения о неверности леммы 5.

Сопоставляя теорему 1 и леммы 3 и 5, получаем следующее важное свойство пространства  $T_f$ .



Фиг. 23. К лемме 6. Содержащий цикл  $atbna$  локально связный одномерный континуум  $T$  можно разбить на две связные части ( $B$  — жирная кривая,  $A = \overline{T \setminus B}$ ) с несвязным пересечением

**Теорема 2.** *Пространство компонент множеств уровня непрерывной функции, заданной на односвязном локально связном континууме, есть односвязный локально связный континуум. В частности, таким является пространство компонент множеств уровня функции, непрерывной на кубе любой размерности и на сфере размерности, большей единицы.*

### Г) Деревья

**Определение.** Деревом называется локально связный континуум, не содержащий гомеоморфных образов окружности [3].

\* А значит, и каждый континуум.

Любые две точки дерева можно, так как оно — локально связный континуум, соединить простой дугой и, так как дерево не содержит гомеоморфов окружности, только одной.

**Лемма 6 [7].** *Одномерный односвязный локально связный континуум есть дерево.*

**Доказательство.** Предположим, что (фиг. 23) такой континуум  $T$  имеет две точки  $a$  и  $b$ , которые могут быть соединены непересекающимися дугами  $amb$  и  $anb$ . Ввиду одномерности  $T$  точка  $a$  имеет не содержащую  $b$  в своем замыкании окрестность  $U$ , граница которой нульмерна. Пусть  $K_a U$  — компонента точки  $a$  в этой окрестности. Ввиду локальной связности  $T$   $K_a U$  — открытое множество в  $T$ . Рассмотрим  $T \setminus K_a U$ . Это замкнутое множество состоит из компонент-континуумов  $T_\alpha$ , так что  $T = (K_a U) \cup (\cup_{\alpha} T_\alpha)$ . В частности, среди них имеется компонента  $T_{\alpha_b} \ni b$ . Положим  $B = T_{\alpha_b}$  и  $A = \overline{T \setminus B}$ . Очевидно,  $A \cup B = T$ ,  $B$  — континуум и  $A$  — компакт. Покажем, что и  $A$  связно. В самом деле, из того, что  $T = (K_a U) \cup (\cup_{\alpha} T_\alpha)$  вытекает:  $T \setminus B = (K_a U) \cup (\cup_{\alpha \neq \alpha_b} T_\alpha) = \cup_{\alpha \neq \alpha_b} ((K_a U) \cup T_\alpha)$ . Легко видеть, что каждое множество  $(K_a U) \cup T_\alpha$  связно, откуда получается, что  $T \setminus B$  и, следовательно,  $A$  связны.

Покажем еще, что  $A \cap B$  содержится в границе  $U$ . Действительно,  $A \cap B = \overline{B} \cap \overline{T \setminus B}$ , т. е.  $A \cap B$  есть граница  $B = T_{\alpha_b}$  и, следовательно, входит в границу  $K_a U$ , которая входит в границу  $U$ . Каждая из дуг  $amb$ ,  $anb$  пересекается с границей  $U$ , так как  $a$  лежит внутри, а  $b$  — вне  $U$ . Пусть  $\mu$  и  $\nu$  — первые точки пересечения этих дуг с границей  $U$ , считая от  $a$ .  $A \cap B$  содержит  $\mu$  и  $\nu$ , так как, очевидно, обе эти точки не входят в  $K_a U$ , но входят в  $B$ , а именно в границу  $B$ . Из нульмерности границы  $U$  следует, что  $A \cap B$  несвязно,] так как нульмерное связное множество не может иметь двух разных точек. Таким образом, мы получили разложение  $T$  в сумму двух континуумов  $A$  и  $B$ , пересечение которых несвязно. Значит,  $T$  — не односвязный локально связный континуум. Противоречие с условием леммы доказывает, что  $T$  не может содержать гомеоморфов окружности; следовательно,  $T$  — дерево, что и требовалось доказать.

**Лемма 7.** *Пространство компонент множества уровня действительной непрерывной на компакте функции не более чем одномерно.*

**Доказательство.** Из леммы 2 следует, что каждая точка  $t \in T_f$  имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой входит в сумму двух множеств уровня  $f(t)$  и потому пуста или нульмерна. Следовательно, пространство  $T_f$  не более, чем одномерно.

Очевидно, пространство  $T_f$  может быть нульмерным только в том случае, если функция  $f$  — константа. Оставляя в стороне этот случай, когда  $T_f$  сводится к одной точке, мы можем сделать из теоремы 2 и лемм 6 и 7 такой вывод:

**Теорема 3 [4].** *Пространство компонент множества уровня непрерывной действительной функции, заданной на [локально связном односвязном континууме, есть дерево.*

*Пространство компонент множества уровня непрерывной действительной функции, заданной на  $n$ -мерном кубе или на сфере размерности  $n \geq 2$ , есть дерево.*



Назовем индексом ветвления точки дерева количество \* частей (компонент), на которые распадается дерево после удаления этой точки.

Если дерево  $T$  — пространство компонент множеств уровня непрерывной функции, то индекс ветвления точки дерева связан со структурой соответствующей этой точке компоненты.

*Теорема 3<sup>a</sup> [4]. Число частей, на которые компонента множества уровня непрерывной функции разбивает область определения этой функции, равно индексу ветвления соответствующей точки пространства компонент.*

*Доказательство.* В самом деле, отображение  $f(a)$  осуществляет однозначное соответствие между частями области определения функции  $f$  и пространства компонент (фиг. 19).

#### Д) Строение деревьев

Мы видели, что любые две точки дерева можно соединить простой дугой и притом ровно одной. С помощью этого свойства мы получим, следуя Менгеру [3], удобное представление деревьев и изучим их структуру, сведя дело к конечным деревьям, т. е. деревьям с конечным числом точек ветвления. Мы ограничимся рассмотрением деревьев, не имеющих точек с индексом ветвления, большим трех, так как только такие используются в ч. I и ч. II настоящей работы.

Пусть  $\Xi$  — дерево, не имеющее точек с индексом ветвления, превосходящим 3. Выберем в компакте  $\Xi$  счетное всюду плотное множество  $A: a_1, a_2, \dots$ . Пара точек  $a_1, a_2$  определяет в  $\Xi$  единственную простую дугу  $a_1 a_2$  — обозначим ее через  $\sigma_0$ . Выберем из оставшихся точек  $a_3, a_4, \dots$  первую по порядку, не входящую в  $\sigma_0$ , и обозначим ее через  $\bar{a}_3$ . В  $\Xi$  имеется единственная простая дуга  $a_1 \bar{a}_3$ . Обозначим через  $\rho_1$  первую от  $\bar{a}_3$  точку  $\sigma_0$  на этой дуге. (Этой точкой может быть и  $a_1$  или  $a_2$ .) Обозначая через  $\sigma_1$  простую дугу  $\bar{a}_3 \rho_1$  и полагая  $\sigma_0 = \Delta_1$ ,  $\Delta_1 \cup \sigma_1 = \Delta_2$ , видим, что при  $i = 1$  простая дуга  $\sigma_i$ , точка  $\rho_i$  и конечные деревья  $\Delta_i$ ,  $\Delta_{i+1}$  обладают следующими свойствами:

$$1_i) \Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \sigma_i,$$

$$2_i) \sigma_i \cap \Delta_i = \rho_i,$$

$$3_i) \Delta_i \text{ содержит все точки } a_k (k \leq i + 1).$$

Если конечные деревья  $\Delta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) построены и все  $\Delta_{i+1}, \Delta_i, \sigma_i, \rho_i$  ( $i = 1, \dots, n - 1$ ) удовлетворяют условиям 1<sub>i</sub>), 2<sub>i</sub>), 3<sub>i</sub>), то легко построить  $\Delta_{n+1}$ . Для этого выберем из не попавших в  $\Delta_n$  точек  $A$  точку с наименьшим номером, и пусть это будет  $\bar{a}_{n+2}$ . В силу 3<sub>n-1</sub>), номер этой точки больше  $n$ , так что, включая ее в  $\Delta_{n+1}$ , мы обеспечим выполнение условия 3<sub>n</sub>). Простая дуга  $a_1 \bar{a}_{n+2} \subset \Xi$ , соединяющая эти точки, определена однозначно. Пусть  $\rho_n$  — первая от  $\bar{a}_{n+2}$  точка  $a_1 \bar{a}_{n+2}$ . Обозначим  $\bar{a}_{n+2} \rho_n$  через  $\sigma_n$ . Тогда условия 1<sub>n</sub>) и 2<sub>n</sub>) выполнены. Таким образом, мы можем определить  $\Delta_n, \sigma_n, \rho_n$  при всех  $n \geq 1$ , и условия 1<sub>n</sub>), 2<sub>n</sub>), 3<sub>n</sub>) будут все выполнены.

Каждое конечное дерево  $\Delta_n$  не имеет точек ветвления с индексом ветвления, превосходящим 3. Действительно в противном случае в некоторой точке  $a \in \Delta_n$  сходятся 4 непересекающихся, кроме как в точке  $a$ , простых дуги

\* Или мощность множества частей, если это множество — бесконечное.

$ad_r (r = 1, \dots, 4)$ . Обозначим через  $B_r$  множество точек дерева, которые соединяются с  $a$  при помощи дуг, пересекающихся с дугой  $ad_r$  (конечно, исключая точку  $a$ ). Такие множества при разных  $r$  не пересекаются, так как простая дуга, соединяющая две точки  $\Delta_n$ , единственна. Компоненты открытого в локально связном континууме  $\Xi$  множества  $\Xi \setminus a$  открыты, поэтому любые две точки такой компоненты можно соединить простой дугой. Отсюда видно, что каждое множество  $B_r$  составляет целую компоненту  $\Xi \setminus a$ . Следовательно, этих компонент по крайней мере 4, чего не может быть, так как индекс ветвления каждой точки дерева  $\Delta_n$  меньше 4.

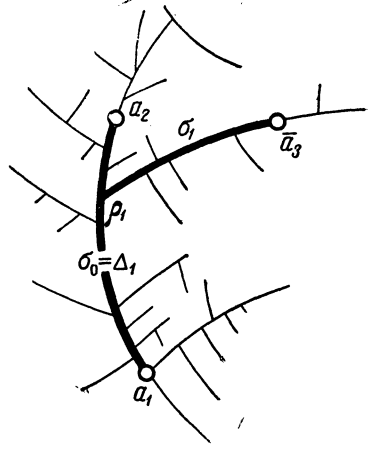
Вследствие условия  $3_i$ ) и того, что  $A$  всюду плотно,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n} = \Xi.$$

Подмножества  $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  не делят  $\Xi$ , так

как  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  связна, а при добавлении к связному множеству некоторых  $\bar{a}$  его предельных точек связность не нарушается. В частности, точки множества  $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  не делят  $\Xi$ . Точки дерева, которые его не делят, называются концами дерева.

Прежде, чем подвести итог изучению структуры дерева, изменим конструкцию  $\Delta_n$  так, чтобы точки  $\rho_n$  не были для  $\Delta_n$  концами. Пусть, например,  $\sigma_0$  имеет одним из своих концов  $a_2$  точку  $\rho_{n_1}$ . Присоединим  $\sigma_{n_1}$  к  $\sigma_0$  и полученную простую дугу обозначим через  $\sigma_0^1$ . Если один из концов  $\sigma_0^1$  есть  $\rho_{n_2}$ , то  $\sigma_{n_2}$  мы тоже присоединим к  $\sigma_0^1$  и получим простую дугу  $\sigma_0^2 = \sigma_0^1 \cup \sigma_{n_2}$ , и так далее, либо до тех пор, пока конец  $\sigma_0^N$  не будет такой точкой, которая не есть  $\rho_m$  ни при каком  $m$ , либо до бесконечности. В первом случае мы положим  $\sigma_0^N = \sigma_0^{\text{новая}}$ . Во втором пусть  $l$  — предельная точка концов  $\sigma_0^N$ ; она не делит  $\Xi$ , так как иначе  $l$  отделяла бы от  $a_1$  некоторые точки  $a_n \in A^*$ , и тогда  $l$  входила бы в одно из множеств  $\Delta_n$ , и, по построению  $\sigma_n$ ,  $l$  не могла бы быть предельной для концов  $\Delta_n$ . Стало быть,  $l \neq \rho_m$  ни при каком  $m$ , и во втором случае мы положим  $\sigma_0^{\text{новая}} = a_1 l$ . После того, как такой обработке подвергнутся оба конца  $\sigma_0$ , мы возьмем из не содержащихся в  $\sigma_0^{\text{новая}}$  целиком дуг  $\sigma_n$  первую и повторим с ее концом те же операции. При этом мы не тронем готовой дуги и, продолжая этот процесс, придем к новой системе  $\Delta_n^{\text{новое}}$ ,  $\rho_n^{\text{новое}}$ ,  $\sigma_n^{\text{новое}}$ , элементы которой будем обозначать просто через  $\Delta_n$ ,  $\rho_n$ ,  $\sigma_n$ , причем, кроме свойств 1), 2), 3), эта система обладает еще свойством



Фиг. 24. Жирная линия —  $\Delta_2$ ,  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  не удовлетворяют требованию 4) леммы 8

\* Ибо компоненты  $\Xi \setminus l$  суть области.

4)  $\rho_m \neq \rho_n$  при  $m \neq n^*$ .

Таким образом, доказана

Лемма 8. Каждое дерево  $\Xi$ , точки которого имеют индекс ветвления, не превосходящий трех, может быть представлено в виде

$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n,$$

где  $\Delta_n$  — конечные деревья, составленные из дуг  $\sigma_n$  приклеиванием их в точках  $\rho_n$  так, что:

1)  $\Delta_1 = \sigma_0$ ,

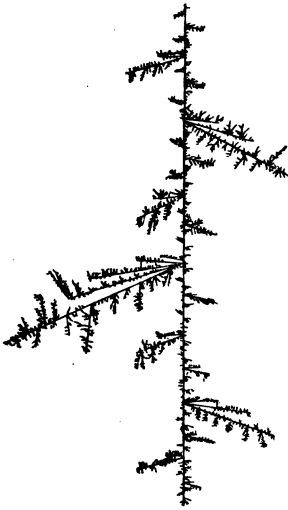
2)  $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \sigma_n$ ,

3)  $\sigma_n \cap \Delta_n = \rho_n$ ,

4)  $\rho_m \neq \rho_n$  при  $m \neq n$  и точки  $\rho_n$  не являются концевыми для  $\Delta_n$ .

Можно показать, что только точки  $\rho_n$  имеют индекс ветвления, больший двух, и что лемма 8 без условия 4) справедлива для всякого дерева. Отсюда получается

Теорема 4 [3]. Каждое дерево  $\Xi$  состоит из всюду плотного в  $\Xi$  множества, составленного из точек не более чем счетного количества простых дуг, попарно пересекающихся не более чем в одной точке, и множества, состоящего из концов  $\Xi$  (которое может быть всюду плотным в  $\Xi$  и иметь континуальную мощность). Индекс ветвления точек  $\Xi$  — не более чем счетный и больше двух только в счетном множестве точек (именно, в точках пересечения простых дуг, указанных выше).



Фиг. 25. К теоремам 4, 6, 7

Конечно, представление дерева в таком виде, как и в лемме 8, неоднозначно. Доказательство теоремы 4 здесь не приводится, так как эта теорема не используется в настоящей работе.

Рассмотрим еще строение компонент остатка  $\Xi \setminus \Delta_N$ . Это множество открыто в  $\Xi$ , его компоненты — области, и в каждой из них любые две точки можно соединить, не выходя за пределы компоненты, простой дугой.

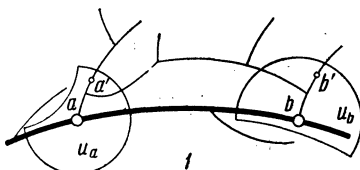
Лемма 9. Пусть  $\Xi$ ,  $\sigma_n$ ,  $\rho_n$ ,  $\Delta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — объекты, определенные в лемме 8. Тогда:

1. Граница каждой компоненты  $K$  множества  $\Xi \setminus \Delta_N$  состоит из одной точки, а именно из точки  $\rho_m$  ( $m = m(N, K) \geq N$ ).

2. Любые две точки  $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  при достаточно большом  $N$  лежат в разных компонентах  $\Xi \setminus \Delta_N$ .

\* Старые  $\rho$  могли совпадать (фиг. 24), когда к  $\rho$  — концу  $\Delta$  — последовательно приклеивали две веточки. В новой конструкции это исключено, и поэтому из того, что  $\Delta$  не имеют точек с индексом ветвления, превосходящим 3, вытекает свойство 4).

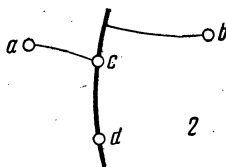
**Доказательство.** 1. Предположим, что эта граница имеет две разные точки  $a, b \in \Delta_N \cap \bar{K}$  (фиг. 26, 1). Точки  $a, b$  имеют непересекающиеся связные окрестности, так как  $\Xi$  локально связно. Пусть  $a' \in u_a \cap K$  — точка первой из них  $u_a$ , а  $b' \in u_b \cap K$  — точка второй. Точки  $a'$  и  $b'$  можно соединить простой дугой, целиком лежащей в  $K$ , а точки  $a$  и  $b$  принадлежат  $\Delta_N$ , как точки границы  $K$ , и потому соединимы простой дугой  $ab$  в  $\Delta_N$ . Дуги  $ab$  и  $a'b'$  не пересекаются, и из возможности соединить простой дугой  $a$  с  $a'$  в  $u_a$ , а  $b$  с  $b'$  в  $u_b$  получаем, что в  $\Xi$  имеется кривая  $aa'b'ta$ , содержащая, очевидно, гомеоморф окружности. Итак, [граница  $K$  есть] одна точка.



Фиг. 26. К лемме 9. Жирная линия—дерево  $\Delta_N$ . 1— Если бы граница компоненты дополнения к  $\Delta_N$  имела две разные точки  $a$  и  $b$ , то  $\Xi$  содержало бы гомеоморф окружности.

2— При достаточно большом  $N$   $\Delta_N$  разделяет

любые две точки  $a, b \in \Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$



Так как  $\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma_n$  всюду плотно в  $\Xi$  (по лемме 8), то существует пересекающаяся с областью  $K$  дуга  $\sigma_m$ . Среди таких дуг пусть  $\sigma_m$  имеет наименьший номер. Очевидно,  $m \geq N$ . Так как  $\Delta_{m+1}$  содержит эту дугу (условие 2) леммы 8), а  $\Delta_m$  не пересекается с  $K$ , то  $\sigma_m$  пересекает границу  $K$ . Но эта граница — точка, принадлежащая  $\Delta_N$  и, тем более,  $\Delta_m$ , поэтому (условие 3) леммы 8) первое утверждение доказано.

2. Пусть  $a$  и  $b$  — две точки  $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ ,  $acd$  и  $bcd$  — простые дуги, соединяющие  $a$  и  $b$  с точкой  $d \in \Delta_1$ ,  $c$  — последняя от  $d$  общая точка этих двух дуг (фиг. 26, 2). Она может совпадать лишь с одной из точек  $a, b, d$ , и мы можем поэтому считать  $a \neq c$ . Тогда  $c$  отделяет  $a$  от  $d$ , ибо, если бы  $a$  и  $d$  попали в одну компоненту открытого множества  $\Xi \setminus c$ , их можно было бы соединить простой дугой, минуя  $c$ , и в  $\Xi$  был бы гомеоморф окружности, так как эта дуга не совпадает с простой дугой  $acb$ . Следовательно,  $c \in \Delta_N$  при некотором  $N$ , так как из леммы 8 видно, что точки  $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  не делят  $\Xi$ . Это  $\Delta_N$  отделяет  $a$  от  $b$ , ибо точки  $a$  и  $b$  можно соединить простой дугой  $acb$  и, стало быть, нельзя соединить никакой другой. Лемма 9 доказана.

### Е) Реализации деревьев

Все деревья можно уложить на плоскость гомеоморфно. Мы построим гомеоморфное данному дереву  $\Xi$ , индекс ветвления точек которого не превосходит трех, плоское множество, следуя в основном Менгеру [3].

Пусть  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  — представление леммы 8. Выберем на плоскости отрезки

зок  $s_0$  и открытый треугольник  $T_0$ , содержащий  $s_0$  внутри. Отобразим  $\sigma_0$  на  $s_0$  гомеоморфно с помощью гомеоморфизма  $f_1$ . Тогда на  $s_0$  появится точка  $p_1$  — образ  $\rho_1$ . Мы можем построить открытый треугольник  $T_1$  диаметра меньше  $d_1$  (это положительное число будет определено позже) с вершиной в  $p_1$ , не пересекающий  $D_1 = s_0$ , кроме как в точке  $p_1$ , и помещающийся внутри  $T_0$  вместе с замыканием.

Выберем внутри  $T_1$  точку и соединим ее с  $p_1$ . Получим отрезок  $s_1$ . Отобразим гомеоморфно  $\sigma_1$  на  $s_1$ . Построен гомеоморфизм  $f_2$   $\Delta_2$  на  $D_2 = s_0 \cup s_1$ .

Пусть на плоскости  $R^2$  уже построены отрезочные комплексы  $D_i$  из отрезков  $s_i$  при помощи треугольников  $T_i$  и точек  $p_i$ , а также  $f_{i+1}$  — гомеоморфизмы  $\Delta_{i+1}$  на  $D_{i+1}$ , причем  $i, j = 1, 2, \dots, n-1$  и (см. фиг. 9)

- 1)  $D_1 = s_0$ ,
- 2)  $D_{i+1} = D_i \cup s_i$ ,
- 3)  $D_i \cap T_i = p_i$ ,
- 4)  $(R^2 \setminus T_i) \cap s_i = p_i$ ,
- 5) при  $i > j$   $\bar{T}_i \cap \bar{T}_j = 0$  или же  $\bar{T}_i \subset T_j$ ,
- 6) диаметр  $T_i$  меньше  $d_i > 0$ ,
- 7)  $f_i$  отображает  $\Delta_{i-1}$  так же, как  $f_{i-1}$  ( $i > 1$ ).

Пусть дано произвольное  $d_n > 0$ . На  $\Delta_n$  имеется, вообще говоря, точка  $p_n \in s_k$  ( $k \leq n$ ) (если ее нет,  $\Delta_n$  — искомое дерево). Гомеоморфизм  $f_n$  определяет на  $D_n$  точку  $p_n \in s_k$  — образ  $\rho_n$ . Легко выбрать в треугольнике  $T_k$  такой маленький открытый треугольник  $T_n$ , чтобы:

- 1) одной из его вершин была точка  $p_n$ ,
- 2)  $\bar{T}_n \subset T_k$ ,
- 3)  $T_n$  не пересекался бы с  $s_k$ ,
- 4)  $\bar{T}_n$  не пересекалось бы с  $\bar{T}_i$  ( $i < n$ ), если  $T_k$  не входит в  $T_i$ ,
- 5) диаметр  $T_n$  был меньше  $d_n$ .

Выбрав в  $T_n$  точку и соединив ее с  $p_n$ , получим отрезок, который обозначим через  $s_n$ . Очевидно, отобразив гомеоморфно  $\sigma_n$  на  $s_n$ , мы определим искомый гомеоморфизм  $f_{n+1}$  на  $\Delta_{n+1}$ , так что будут выполнены условия 1)–7). Мы доказали, что верна

**Лемма 10.** Пусть  $\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  — представление леммы 8,  $d_n$  — положительные числа. На плоскости  $R^2$  можно построить с помощью отрезков  $s_n$ , точек  $p_n$  и треугольников  $T_n$  комплексы  $D_n$  и гомеоморфизмы  $f_n: \Delta_n \rightarrow D_n$ , так, чтобы при любом  $n = 2, 3, \dots$  выполнялись условия 1)–7).

Пусть теперь  $\Xi, \Delta_n, D_n, s_n, p_n, \rho_n, T_n, f_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — такая система объектов и пусть  $d_n > 0, d_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

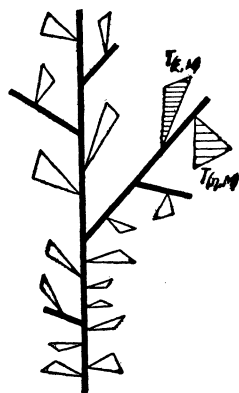
**Лемма 11.** В указанных выше обозначениях  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$  есть дерево, гомеоморфное  $\Xi$ , и гомеоморфизм можно построить так, чтобы на  $\Delta_n$  он совпадал с  $f_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ .

**Доказательство.** Определим последовательность отображений  $f'_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) всего  $\Xi$  в  $X$ , а именно на  $D_n$ , так, чтобы на  $\Delta_n$   $f'_n$  совпадало с  $f_n$ . Мы получим  $f'_n$  на  $\Xi$  как  $f_n(\varphi_n(\xi))$ : произведение непрерывного отображения  $\varphi_n$  всего  $\Xi$  на  $\Delta_n$  и  $f_n$ , которое переводит  $\Delta_n$  в  $D_n$  гомеоморфно. Такое отображение будет совпадать с  $f_n$  на  $\Delta_n$ , если  $\varphi_n$  оставляет каждую точку  $\Delta_n$  на месте. Поэтому на  $\Delta_n$  мы определим отображение  $\varphi_n$  так:

$\varphi_n(\xi) = \xi$  ( $\xi \in \Delta_n$ ). Каждая компонента  $K \subset \Xi \setminus \Delta_n$ , согласно утверждению 1 леммы 9, имеет единственную граничную точку  $\rho_m$  ( $m = m(K, n) \geq n$ ). Положим  $\varphi_n(\xi) = \rho_{m(K,n)}$  ( $\xi \in K$ ). Теперь  $\varphi_n(\xi)$  всюду определено; мы докажем, что это отображение непрерывно. Точка  $\xi \in \Xi \setminus \Delta_n$  имеет целую окрестность  $K$ , преобразующуюся в ту же точку, что и  $\xi$ . Остается доказать непрерывность в точках  $\Delta_n$ . Укажем для такой точки  $\xi$  окрестность, переходящую в любую наперед заданную окрестность  $u_\xi$ . Такой является (существующая в силу локальной связности  $\Xi$ ) связная окрестность  $v \subset u_\xi$  точки  $\xi$ . Точки  $\eta$  этой окрестности  $\xi$  переходят внутрь нее при преобразовании  $\varphi_n$ . Действительно, для точек  $\eta \in \Delta_n$  это очевидно. Пусть  $\eta \in \Xi \setminus \Delta_n$ , тогда  $\eta$  входит в некоторую компоненту  $K$  множества  $\Xi \setminus \Delta_n$ . Пусть  $\rho = \rho(K, n)$  — граница  $K$ . Во-первых,  $\rho \in v$ , так как точки  $\eta$  и  $\xi$  области  $v$  можно соединить лежащей в  $v$  простой дугой, на которой найдется точка границы  $K$ , ибо начало этой дуги  $\eta$  принадлежит  $K$ , а конец  $\xi$  не принадлежит  $K$ ; эта точка —  $\rho$  (лемма 9). Во-вторых, образ  $\rho$  при отображении  $\varphi_n$  есть  $\rho$  по определению  $\varphi_n$ . Непрерывность  $\varphi_n$  доказана, а из нее сразу вытекает непрерывность  $f'_n(\xi) = f_n(\varphi_n(\xi))$ .

Последовательность отображений  $f'_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) равномерно сходится на  $\Xi$ .

Фиг. 27. К лемме 11. Жирное дерево  $D_6$  — гомеоморф  $\Delta_6$ , разделяющего  $\xi$  и  $\eta$ . Нарисованы некоторые из треугольников  $T_m$  ( $m \geq 6$ ), для которых  $\rho_m \in D_6$ . Среди них заштрихованы  $T_{(\xi, M)}$  и  $T_{(\eta, M)}$  ( $M > 6$ ), содержащие образы  $\xi$  и  $\eta$  при всех преобразованиях  $f'_m$  ( $m > M$ )



В самом деле, пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Из  $d_n \rightarrow 0$  следует, что при  $n \geq N(\varepsilon)$  будет  $d_n < \varepsilon$ . Покажем, что в каждой точке  $\xi \in \Xi$  и при любом  $n > N(\varepsilon)$   $\rho(f'_n(\xi), f'_{N(\varepsilon)}(\xi)) < \varepsilon$ . Это следует из того, что образ  $\xi$  при отображении  $f'_n$  лежит в треугольнике  $\bar{T}_m$  ( $m > N(\varepsilon)$ ) при  $\rho_m \in D_{N(\varepsilon)}$  или на  $D_N$ , согласно условиям 1)–7) леммы 10.

Таким образом,  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$  есть непрерывное отображение. Очевидно, оно на  $\Delta_n$  совпадает с  $f_n$ . Докажем, что разным точкам  $\Xi$  отвечают разные образы в  $X$ . Для точек  $\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  это очевидно. Точки  $\xi$  и  $\eta$  из  $\Xi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$  при достаточно большом  $N$  лежат в разных компонентах  $K_1, K_2$  дополнения к  $\Delta_N$  (лемма 9). Отсюда и из определения  $f'_n$  с помощью свойств 3), 4) из формулировки леммы 8 следует, что, начиная с некоторого  $M > N$ , образы  $\xi, \eta$  при  $f'_m$  ( $m \geq M$ ) лежат в разных треугольниках  $T_{(\xi, M)}, T_{(\eta, M)}$ , замыкания которых пересекаются с  $D_N$  (фиг. 27). В силу условия 5) леммы 10, получаем:  $\bar{T}_{(\xi, M)} \cap \bar{T}_{(\eta, M)} = \emptyset$ , откуда видно, что  $f(\xi) \neq f(\eta)$ . Точно так же можно рас-

смотреть и случай  $\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ ,  $\eta \in \mathbb{E} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ . Образ всего  $\mathbb{E}$  при отображении  $f$  содержит все  $D_n$  и потому есть  $X$ . Следовательно,  $f$  — взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта  $\mathbb{E}$  на  $X$ , т. е. гомеоморфизм; откуда вытекает, что  $X$  — дерево. Лемма 11 доказана.

Процесс построения в доказательстве лемм 10 и 11 дерева  $X$  и отображения  $f$  по удовлетворяющим условиям 1)–4) леммы 8  $\mathbb{E}$ ,  $\Delta_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\rho_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) и  $d_n \rightarrow 0$  можно назвать приклеиванием веточек. Тогда наш результат можно сформулировать так:

**Теорема 5 [3].** Пусть дано дерево  $\mathbb{E}$ , индекс ветвления точек которого не превосходит трех. Тогда на плоскости можно построить приклеиванием веточек гомеоморфное  $\mathbb{E}$  дерево  $X$  и  $f$  — гомеоморфизм  $\mathbb{E}$  и  $X$ .

Аналогичным методом может быть доказана более общая

**Теорема 6 [3].** Любое дерево  $\mathbb{E}$  имеет гомеоморфный образ на плоскости.

Множество  $M$  называют универсальным для класса множеств  $A_\alpha$ , если каждое множество  $A_\alpha$  имеет в  $M$  гомеоморфный образ.

**Теорема 7 [3].** Если в представлении теоремы 4 множество точек пересечения простых дуг всюду плотно и индекс ветвления  $\mathbb{E}$  в каждой из них равен  $n$  (соответственно счетен), то такое дерево универсально для класса всех деревьев, индекс ветвления точек которых не превосходит  $n$  (соответственно для всех деревьев). Деревья, описанные выше, действительно существуют.

Теоремы 6, 7 не используются в работе; читатель может доказать их сам или найти в [3]. Заметим без доказательства, что пространство компонент множеств уровня непрерывной функции на квадрате может быть универсальным деревом. Примером (для случая  $n=3$ ) является построенная в части I настоящей работы функция  $F(x, y)$  (§ 2).

**Употребляемые без пояснений понятия и теоремы теоретико-множественной топологии**

1. Понятия ([6], гл. VII и VIII; [7]; [8]; [9]).

Метрическое пространство. Топологическое пространство. Открытые и замкнутые множества, граница. Непрерывное отображение и гомеоморфизм. Всюду плотное множество. Связность.

Компакт — метрическое пространство, в котором из любой бесконечной последовательности точек можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Континуум — связный компакт. Компонента точки множества (или просто компонента множества) — наибольшее связное подмножество множества, содержащее данную точку.

Множество локально связно, если в любой окрестности\* любой его точки лежит связная подокрестность той же точки.

Множество нульмерно, если в любой окрестности любой его точки лежит подокрестность той же точки, граница которой пуста.

Множество одномерно, если в любой окрестности любой его точки лежит подокрестность той же точки, граница которой нульмерна.

\* Здесь и далее окрестность точки — это любое открытое множество, содержащее эту точку.

Область — открытое связное множество. Простая дуга — множество, гомеоморфное отрезку. Множество  $A$  отделяет  $B$  от  $C$ , если всякий континуум, пересекающий  $B$  и  $C$ , пересекает  $A$ . Если  $A$  отделяет  $b \in B \subset M$  от  $c \in C \subset M$ , то говорят, что  $A$  делит  $M$ .

Точка  $x$  входит в верхний топологический предел  $\overline{\text{It}} M_i$  множеств  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), если в любой ее окрестности имеются точки бесконечного количества множеств  $M_i$ . Точка входит в нижний топологический предел  $\underline{\text{It}} M_i$ , если в любой ее окрестности есть точки всех множеств  $M_i$ , кроме, быть может, конечного числа их.

## 2. Теоремы.

Метрическое пространство, являющееся непрерывным образом компакта, — компакт, континуума — континуум, локально связного континуума — локально связный континуум [6].

Взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта есть гомеоморфизм [6]. Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.

Компоненты компакта — континуумы; компоненты открытого множества в локально связном пространстве — области [6].

В области локально связного континуума любые две точки можно соединить простой дугой ([3], [7], [9]).

Пересечение последовательности вложенных континуумов  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$  есть континуум [6].

Если множества  $B \subset M$  и  $C \subset M$  лежат в разных компонентах  $M \setminus A$ , то  $A$  отделяет  $B$  от  $C$ . Если замкнутое подмножество  $A$  локально связного континуума  $M$  отделяет  $B$  от  $C$ , то  $B$  и  $C$  лежат в разных компонентах  $M \setminus A$ .

Множество, состоящее из двух не совпадающих простых дуг с общими концами, содержит простую замкнутую дугу (гомеоморф окружности). Тем же свойством обладает сумма четырех простых дуг  $aa'$ ,  $a'b'$ ,  $b'b$ ,  $ba$ , если  $a'b' \cap ba = 0$  и  $aa' \cap b'b = 0$ .

В компакте верхний топологический предел последовательности связных множеств связан, если только нижний не пуст [6].

Связное нульмерное множество состоит из одной точки [8].

Равномерно непрерывная и заданная на всюду плотном подмножестве компакта функция может быть продолжена до непрерывной на всем компакте. Такое продолжение единственно.

Взаимно однозначное и подобное (сохраняющее порядок) соответствие счетных всюду плотных подмножеств двух отрезков может быть продолжено до гомеоморфизма отрезков. Такое продолжение единственно.

(Поступило в редакцию 25/XII 1958 г.)

## Литература

1. В. И. Арнольд, О функциях трех переменных, ДАН СССР, т. 114, № 4 (1957), 679—681.
2. А. Н. Колмогоров, О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных, ДАН СССР, т. 108, № 2 (1956), 179—182.



3. K. Menger, Kurventheorie, Berlin — Leipzig, 1932.
  4. А. С. Кронрод, О функциях двух переменных, Успехи матем. наук, т. V, вып. 1 (35) (1950), 24—133.
  5. А. Н. Колмогоров, О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения, ДАН СССР, т. 114, № 5 (1957), 953—956.
  6. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, Москва — Ленинград, ОНТИ, 1937.
  7. С. Kuratowski, Topologie, II, Warszawa, 1952.
  8. В. Гуревич, Г. Волман, Теория размерности, Москва, ГИИЛ, 1948.
  9. А. С. Пархоменко, Что такое линия, Москва, Гостехиздат, 1954.
-