О строении связных локально бикомпактных групп

В. М. Глушков (Киев)

Введение

За последние годы усилиями целого ряда алгебраистов и топологов вопрос о локальном строении локально бикомпактных групп был продвинут достаточно далеко. В настоящее время известно ([3], теорема А), что всякая локально бикомпактная группа локально распадается в прямое произведение бикомпактной группы и локальной группы Ли. Отсюда непосредственно следует, что любая связная локально бикомпактная группа изоморфна фактор-группе прямого произведения бикомпактной группы и связной группы Ли по центральной дискретной подгруппе. К сожалению, однако, локально бикомпактные группы обладают, вообще говоря, многими неизоморфными разложениями указанного выше вида (бикомпактно-лиевыми разложениями), что до известной степени обесценивает значение этих разложений (особенно для классификационных целей).

В настоящей работе указан способ построения таких бикомпактно-лиевых разложений локально бикомпактных групп, компоненты которых определяются соответствующими группами однозначно с точностью до локального изоморфизма.

Исследуются некоторые представления произвольных связных локально бикомпактных групп в виде фактор-групп прямых произведений групп, имеющих более простое строение.

На произвольные связные локально бикомпактные группы переносится часть результатоз о группах Ли с изоморфными алгебрами Ли. Строятся, в частности, аналоги универсальных накрывающих групп. Особенно близкими к группам Ли оказываются, как это естественно ожидать, связные локально связные локально бикомпактные группы. Они исчерпываются топологическими прямыми произведениями связных (конечномерных) групп Ли и фактор-группами таких произведений по центральным вполне несвязным подгруппам. Установлена любопытная связь между локальной связностью и линейной связностью: связная локально бикомпактная группа тогда и только тогда локально связна, когда она линейно связна.

Доказательства большинства приведенных фактов существенно опираются на результаты более ранних работ автора [3] и [4]. Широко используется введенное в [4] понятие алгебры Ли для произвольной локально бикомпактной группы; элементами этой алгебры являются все однопараметрические подгруппы соответствующей группы, рассматриваемые вместе с той или иной параметризацией.

§ 1. Бикомпактно-лиевы разложения

1.1. Как известно ([3], теорема А), любая локально бикомпактная группа G локально разлагается в прямое произведение $B\times L$, где B — бикомпактная группа, а L — локальная группа Ли. Всякое разложение указанного вида мы будем называть бикомпактно-лиевым (локальным) разложением группы G, группу B — бикомпактной компонентой, а локальную группу Ли L — лиевой компонентой этого разложения (случай тривиальных компонент не исключается).

Подгруппа M, порожденная элементами множества L, не является, вообще говоря, группой Ли, но, очевидно, существует одна и, с точностью до изоморфизма, только одна связная группа Ли H, допускающая непрерывный взаимно однозначный гомоморфизм на подгруппу M. Условимся называть определенную таким образом группу H группой Ли, соответствующей данному бикомпактно-лиевому разложению исходной группы G.

1.2. Пусть H — связаная группа Ли, R — ее дискретная центральная подгруппа, B — бикомпактная группа, φ — взаимно однозначный гомоморфизм группы R в центр группы B, D — подгруппа прямого произведения $G=B\times H$, состоящая из всех элементов вида $(\varphi(r), r)$, где $r\in R$. Ясно, что D — дискретная центральная подгруппа в G, изоморфная подгруппе R. Фактор-группу G/D условимся называть правильно склеенным произведением групп B и H, подгруппы R и $\varphi(R)$ — компонентами склеивания (в подгруппах H и B соответственно), взаимно однозначный гомоморфизм φ — склеивающим гомоморфизмом, а дискретную подгруппу D — ядром склеивания.

Лемма 1. *Подгруппы D, R и $\varphi(R)$ являются абелевыми группами с конечным числом образующих.*

Доказательство. Подгруппа R дискретна и содержится в центре связной группы Ли H. Тогда, ввиду известного результата Мальцева о том, что всякая связная группа Ли имеет связные абелевы подгруппы, содержащие почти весь центр ([7], теорема 9), группа R является конечным расширением дискретной подгруппы связной коммутативной группы Ли и имеет поэтому конечное число образующих. Но тогда конечнсе число образующих имеют также изоморфные ей группы D и $\varphi(R)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — локально бикомпактная группа, $B\times L$ — любое ее бикомпактно-лиево разложение, H — группа Ли, соответствующая этому разложению; тогда открытая подгруппа, порожденная элементами множеств B и L, изоморфна правильно склеенному произведению групп B и H.*

Доказательство. Обозначим через φ взаимно однозначный непрерывный гомоморфизм группы H на группу M, порожденную элементами множества L (см. п. 1.1). Легко видеть, что отображение $(b, h)\to b\varphi(h)$ осуществляет непрерывны гомоморфизм прямого произведения $G_0=B\times H$ на открытую подгруппу BM группы G. Поскольку этот гомоморфизм индуцирует локальный изоморфизм групп G_0 и G, его ядро D дискретно, а $BM\cong G_0/D$. Если $d=(b, h)$ — любой элемент из D, то $b^{-1}=\varphi(h)$. Содержась, таким образом, в пересечении $B\cap M$, элементы b и $\varphi(h)$ центральны в B и M соответственно. Но тогда, очевидно, элемент d централен в G_0.

Далее, легко видеть, что множество $(B, \varphi^{-1}(L))$ пересекается с D лишь по единице. Поэтому компонента R подгруппы D в прямом множителе H дискретна. Отображение ψ: $r \to (\varphi(r))^{-1}$ осуществляет, очевидно, взаимно однозначный гомоморфизм группы R в группу B, а подгруппа D состоит из элементов вида $(\psi(r), r)$ с $r \in R$. Таким образом, G_0/D — правильно склеенное произведение групп B и H, что и требовалось доказать.

Справедливо также предложение, обратное лемме 2:

Лемма 3. *Любое правильно склеенное произведение бикомпактной группы B и связной группы Ли H является локально бикомпактной группой, допускающей бикомпактно-лиево разложение, бикомпактная компонента которого изоморфна B, а соответствующая этому разложению группа Ли изоморфна H.*

Доказательство. Пусть $G = B \times H$, а G/D — данное правильно склеенное произведение. Из определения правильно склеенного произведения вытекает существование такой окрестности единицы L в группе H, что локальная группа BL пересекается с D лишь по единице. Не нарушая общности, можно считать, что $L = L^{-1}$. В таком случае, как легко видеть, $(BD/D) \times (LD/D)$ представляет собою бикомпактно-лиево разложение группы G/D. Так как пересечение $D \cap B$ состоит лишь из единицы, то $BD/D \cong B$. Лиева компонента разложения порождает подгруппу HD/D, являющуюся взаимно однозначным непрерывным гомоморфным образом группы $H/(H \cap D) = H$. Тем самым лемма доказана.

1.3. Одна и та же локально бикомпактная группа обладает, вообще говоря, многими неизоморфными бикомпактно-лиевыми разложениями. Действительно, одномерный соленоид, например, обладает двумя неизоморфными бикомпактно-лиевыми разложениями. В первом из них бикомпактная компонента совпадает с самой группой, а лиева компонента тривиальна, во втором же разложении бикомпактная компонента вполне несвязна, а лиева компонента одномерна.

Для уменьшения произвола в выборе бикомпактно-лиевых разложений введем понятие минимального бикомпактно-лиевого разложения.

Определение. Бикомпактно-лиево разложение $B \times L$ группы G называется минимальным, если не существует такого бикомпактно-лиевого разложения $D \times M$ этой группы, что $B \subset D$, а M — собственная локальная подгруппа локальной группы L.

1.4. Связные топологические группы, все абелевы нормальные делители которых вполне несвязны, условимся называть полупростыми.

Как показал Ивасава ([6], теорема 14), любая локально бикомпактная группа G содержит единственный максимальный связный бикомпактный нормальный делитель B. Группа B, как и всякая связная бикомпактная группа, представима в виде произведения двух связных бикомпактных подгрупп A и P, первая из которых абелева, а вторая полупроста ([1], стр. 103). Очевидно, что подгруппа P содержит любой полупростой бикомпактный нормальный делитель группы G. Таким образом, всякая локально бикомпактная группа G обладает единственным максимальным полупростым бикомпактным нормальным делителем P. Ясно, что фактор-группа G/P уже не содержит нетривиальных полупростых бикомпактных нормальных делителей.

Лемма 4. *Максимальный полупростой бикомпактный нормальный делитель P локально бикомпактной группы G содержится в бикомпактной компоненте любого минимального бикомпактно-лиевого разложения этой группы.*

Доказательство. Пусть $B \times L$ — данное минимальное бикомпактно-лиево разложение группы G. Если бы нормальный делитель P не содержался в B, то фактор-группа G/B, локально изоморфная L, содержала бы нетривиальный связный полупростой бикомпактный нормальный делитель. Но в группе Ли любой полупростой связный бикомпактный нормальный делитель отщепляется в виде локального прямого множителя. Вследствие минимальности разложения $B \times L$ все такие множители должны быть тривиальными, откуда $P \subset B$, что и требовалось доказать.

1.5. Значение минимальных бикомпактно-лиевых разложений определяется следующим предложением:

Теорема 1. *У любых двух минимальных бикомпактно-лиевых разложений одной и той же локально бикомпактной группы G как бикомпактные, так и лиевы компоненты локально изоморфны.*

Доказательство. Пусть $B_1 \times L_1$ и $B_2 \times L_2$ — два минимальных бикомпактно-лиевых разложения группы G. Обозначим через H пересечение подгрупп, порожденных элементами множеств $B_1 L_1$ и $B_2 L_2$. Подгруппы $D_1 = B_1 \cap H$ и $D_2 = B_2 \cap H$ инвариантны в H и локально изоморфны группам B_1 и B_2 соответственно. Кроме того, поскольку подгруппа H открыта в G, она локально бикомпактна и допускает, как нетрудно видеть, бикомпактно-лиевы разложения $D_1 \times M_1$ и $D_2 \times M_2$, где $M_1 = H \cap L_1$ и $M_2 = H \cap L_2$. Локальные подгруппы L_1 и M_1 локально изоморфны и порождают, очевидно, одну и ту же подгруппу группы G. То же самое имеет место и в отношении локальных подгрупп L_2 и M_2. Поэтому бикомпактно-лиевы разложения $D_1 \times M_1$ и $D_2 \times M_2$ минимальны, и для доказательства теоремы достаточно доказать локальную изоморфность групп D_1 и D_2, а также локальных групп M_1 и M_2.

Ясно, что подгруппы D_1 и D_2 инвариантны в H и определяют в ней лиевы фактор-группы. Но тогда фактор-группа H/C по пересечению C подгрупп D_1 и D_2 также является группой Ли ([3], лемма 3). Из леммы 4 легко следует, что все связные бикомпактные нормальные делители группы H/C коммутативны и, значит, содержатся в центре связной компоненты единицы этой группы ([8], лемма 2).

Рассмотрим алгебру Ли $A(D_1)$ группы D_1 в том смысле, как она введена в работе автора [4]. Как показано в [4], алгебра $A(D_1)$ распадается в топологическую прямую сумму одномерных и компактных конечномерных подалгебр. Алгебра $A(C)$ группы C составляет идеал в алгебре $A(D_1)$, а определяемая ею алгебра вычетов $A(D_1)/A(C)$ изоморфна алгебре Ли фактор-группы D_1/C ([4], теорема 1). В нашем случае это будет, очевидно, конечномерная коммутативная алгебра. Теперь уже нетрудно видеть, что алгебра $A(D_1)$ распадается в прямую сумму алгебры $A(C)$ и конечномерной коммутативной алгебры S.

В силу теоремы 1 из [4], естественный гомоморфизм группы D_1 на фактор-группу D_1/C индуцирует изоморфизм алгебры S на алгебру Ли группы D_1/C. Поэтому найдется такая окрестность V нуля алгебры S, которая при каноническом отображении ψ алгебры $A(D_1)$ в группу D_1 переходит в множество $\psi(V)$, пересекающееся с C лишь по единице и дающее в произведении с C некоторую окрестность единицы в D_1. Так как $\psi(V)$ есть, очевидно, локальная группа Ли, то, в силу леммы 5 из [3], группа D_1 распадается в локальное прямое произведение группы C и коммутативной локальной группы Ли $\psi(V)$, локально изоморфной группе D_1/C. Поскольку то же самое имеет место и для группы D_2, локальная изоморфность групп D_1 и D_2 будет установлена, если доказать локальную изоморфность групп D_1/C и D_2/C или, что то же самое, изоморфность алгебр Ли этих групп. Легко видеть также, что $(D_1/C)\times(M_1C/C)$ и $(D_2/C)\times(M_2C/C)$ представляют собою два минимальных бикомпактно-лиевых разложения группы Ли H/C. Так как лиевы компоненты этих разложений локально изоморфны соответственно локальным группам M_1 и M_2, то для окончания доказательства теоремы достаточно доказать локальную изоморфность одноименных компонент любых двух минимальных бикомпактно-лиевых разложений группы Ли $H/C = H'$.

Пусть $D'\times M'$ — минимальное бикомпактно-лиево разложение группы H'. Ему соответствует разложение алгебры Ли K этой группы в прямую сумму двух подалгебр: $K = P + R$, где P — коммутативная подалгебра, содержащаяся в центральной подалгебре A, соответствующей максимальному связному бикомпактному нормальному делителю группы H' (который, как отмечено выше, содержится в центре связной компоненты единицы группы H'). Покажем, что алгебра R не имеет одномерных прямых слагаемых, содержащихся в A. Действительно, если от R отщепляется одномерное прямое слагаемое $Z \subset A$: $R = Z + T$, то, заменяя в случае необходимости образующий элемент z подалгебры Z линейной комбинацией $z + \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_k t_k$, где $t_1, \ldots, t_k$ — некоторый базис алгебры $A \cap T$, нетрудно добиться, чтобы подгруппа $F' \subset H'$, соответствующая подалгебре $P + Z$, была замкнутой в H'. Но тогда, как нетрудно видеть, существует бикомпактно-лиево разложение группы H', у которого бикомпактной компонентой служит F', а лиева компонента является собственной подгруппой локальной группы M'. Так как, не нарушая общности, можно считать подгруппы F' и D' связными, то $F' \subset D'$, и мы приходим к противоречию с минимальностью разложения $D'\times M'$.

Теперь ясно, что для установления справедливости теоремы достаточно доказать изоморфизм любой пары таких разложений алгебры K в прямую сумму двух подалгебр: $K = A_1 + R_1$, $K = A_2 + R_2$, у которых первые прямые слагаемые содержатся в фиксированной центральной подалгебре A, а от вторых нельзя отщепить ни одного одномерного прямого слагаемого, содержащегося в A. Для решения же этого последнего вопроса достаточно, в свою очередь, доказать равенство размерностей коммутативных подалгебр A_1 и A_2, ибо изоморфизм алгебр R_1 и R_2 будет в таком случае вытекать из изоморфизма всех разложений алгебры K в прямые суммы неразложимых слагаемых (аналог теоремы Ремака — Шмидта для алгебр Ли). Действительно, разложения алгебр R_1 и R_2 в прямые суммы неразложимых слагаемых могли бы отличаться разве лишь числом одномерных прямых слагаемых, что однако, ввиду равенства размерностей, исключено.

Из очевидных прямых разложений $A = A_1 + (A \cap R_1)$, $A = A_2 + (A \cap R_2)$ непосредственно вытекает, что равенство размерностей алгебр A_1 и A_2 эквивалентно равенству размерностей пересечений $A \cap R_1$ и $A \cap R_2$. Докажем, что каждое из этих пересечений совпадает с пересечением $A \cap N$, где N — коммутант алгебры K (этого, ввиду сказанного выше, достаточно для доказательства теоремы). Ясно, что $A \cap N$ содержится как в $A \cap R_1$, так и в $A \cap R_2$. С другой стороны, оба пересечения $A \cap R_1$ и $A \cap R_2$ содержатся в N, ибо в противном случае от алгебр R_1 и R_2 отщеплялись бы одномерные прямые слагаемые, содержащиеся в A, что противоречит указанным выше свойствам разложений $A_1 + R_1$ и $A_2 + R_2$. Следовательно, $A \cap R_1 = A \cap R_2 = A \cap N$ и теорема доказана.

1.6. Все предыдущие рассмотрения относились к произвольным локально бикомпактным группам. Начиная с настоящего пункта, мы ограничимся лишь связным случаем. Так как связная группа не может иметь собственных открытых подгрупп, то, как вытекает непосредственно из леммы 2, любому бикомпактно-лиевому разложению $B \times L$ связной локально бикомпактной группы G отвечает представление этой группы в виде правильно склеенного произведения бикомпактной группы B и связной группы Ли, соответствующей данному разложению. Этот общий результат нуждается в связном случае в дальнейших уточнениях. Первое из этих уточнений относится к конструкции самого правильно склеенного произведения. Дело в том, что, как нетрудно показать на примерах, бикомпактные компоненты бикомпактно-лиевых разложений связных локально бикомпактных групп, вообще говоря, несвязны. Возникает вопрос, при каких условиях правильно склеенное произведение несвязной бикомпактной группы и связной группы Ли является связной группой? Ответ на этот вопрос дает следующая

Лемма 5. *Фактор-группа G/C прямого произведения $G = A \times B$ локально бикомпактной группы A на связную группу B тогда и только тогда связна, когда произведение компоненты D подгруппы C в прямом множителе A на связную компоненту единицы K этого множителя всюду плотно в A.*

Доказательство. Если подгруппа DK всюду плотна в A, то подгруппа KBC/C всюду плотна в G/C. Поскольку эта последняя подгруппа, очевидно, связна, связно и ее замыкание G/C.

Предположим теперь, что замыкание F подгруппы DK отлично от A. Ясно, что F — инвариантная подгруппа в A и, ввиду локальной бикомпактности группы A, A/F — неединичная вполне несвязная группа. Так как $A/F \cong G/FB$, а подгруппа FB содержит C, то G/C не может в этом случае быть связной группой, ибо она обладает нетривиальной вполне несвязной фактор-группой. Лемма доказана.

1.7. Исследуем теперь строение бикомпактных нормальных делителей в связных группах.

Лемма 6. *Любой бикомпактный нормальный делитель B связной группы G распадается в произведение своего центра Z и связной полупростой инвариантной в G бикомпактной подгруппы P.*

Доказательство. Обозначим через P максимальный полупростой бикомпактный нормальный делитель группы B. Будучи характеристической в B, подгруппа P инвариантна в G. Но тогда, ввиду теоремы 1 из [3], произведение подгруппы P на ее централизатор C в группе B совпадает с B. Подгруппа C, очевидно, бикомпактна и инвариантна в G. Связная компонента K ее единицы не содержит нетривиальных полупростых подгрупп и потому, в силу известного результата о строении связных бикомпактных групп ([1], стр. 103), коммутативна. Как показал Мальцев ([3], лемма 4), любой коммутативный бикомпактный нормальный делитель связной группы содержится в ее центре. Таким образом, подгруппа K центральна в G. Будучи вполне несвязным нормальным делителем связной группы G/K, бикомпактная группа C/K центральна в G/K. Если R/K — замыкание любой циклической подгруппы из C/K, то R — абелев бикомпактный нормальный делитель группы G. По уже упоминавшейся лемме Мальцева, он входит в центр группы G. Но тогда, очевидно, центральными в G являются все элементы подгруппы C. Теперь ясно, что C совпадает с центром группы B. Поскольку же, как отмечалось выше, $PC = B$, лемма доказана.

1.8. В произвольной связной группе Ли G имеется связная подгруппа, содержащая почти весь центр, то есть такая, что ее пересечение с центром группы G имеет в нем конечный индекс ([7], теорема 9). Отсюда непосредственно вытекает, что минимальные числа образующих всех дискретных центральных подгрупп группы G имеют конечную верхнюю грань $k = k(G)$, которую мы будем называть дискретным рангом центра группы G. Легко видеть, что если связная группа Ли H изоморфна фактор-группе группы G по центральной дискретной подгруппе, то дискретный ранг ее центра не превосходит дискретного ранга центра группы G. В частности, изо всех локально изоморфных связных групп Ли наибольший дискретный ранг центра имеет односвязная группа.

Лемма 7. *Для любого бикомпактно-лиевого разложения $B \times L$ связной локально бикомпактной группы G фактор-группа B/D по связной компоненте единицы D бикомпактной группы B коммутативна и имеет всюду плотную подгруппу с конечным числом образующих, не превосходящим дискретного ранга центра связной односвязной группы Ли, локально изоморфной локальной группе L.*

Доказательство. Связная локально бикомпактная группа $G' = G/D$ допускает, очевидно, бикомпактно-лиево разложение $B' \times L'$, где $B' = B/D$, а L' — часть локальной группы LD/L, локально изоморфная L. Так как, группа G' не содержит собственных открытых подгрупп, то, в силу леммы 2, она изоморфна правильно склеенному произведению группы B' и некоторой связной группы Ли H', локально изоморфной L'. Применяя леммы 1 и 5, получим, что в группе B' имеется всюду плотная абелева группа с конечным числом образующих, абстрактно изоморфная дискретной центральной подгруппе из H'. Отсюда вытекает коммутативность группы B'. Учитывая сделанные в начале настоящего пункта замечания, приходим к выводу о справедливости утверждений леммы.

1.9. Бикомпактную группу B, разлагающуюся в произведение (не обязательно прямое) своего центра и связной бикомпактной полупростой инвариантной подгруппы, условимся называть связно вкладываемой, если в фактор-группе, определяемой связной компонентой ее единицы, всюду плотна подгруппа с конечным числом образующих (ясно, что эта фактор-группа коммутативна).

Легко видеть, что в центре всякой связно вкладываемой бикомпактной группы B найдется абелева подгруппа с конечным числом образующих, дающая в произведении со связной компонентой единицы этой группы подгруппу, всюду плотную в B. Всякую подгруппу A с такими свойствами будем называть правильной подгруппой группы B.

Из лемм 2, 3, 5, 6, 7 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Пусть B — произвольная связно вкладываемая бикомпактная группа, A — некоторая ее правильная подгруппа, H — любая связная группа Ли, в центре которой имеется подгруппа C, абстрактно изоморфная A, φ — какой-нибудь абстрактный изоморфизм группы C на группу A. Тогда правильно склеенное произведение групп B и H со склеивающим гомоморфизмом φ представляет собою связную локально бикомпактную группу, допускающую бикомпактно-лиево разложение, бикомпактная компонента которого изоморфна B, а лиева компонента локально изоморфна H. При этом с помощью указанной конструкции может быть получена любая связная локально бикомпактная группа.*

1.10. Лемма 8. *Любая связная локально бикомпактная группа G распадается в произведение своего максимального полупростого бикомпактного (связного) нормального делителя P и связной компоненты единицы K его централизатора N. Все бикомпактные нормальные делители группы K содержатся в центре этой группы.*

Доказательство. В силу теоремы 1 из [3], $PN = G$. Будучи замкнутой подгруппой связной локально бикомпактной группы, подгруппа N представима в виде теоретико-множественной суммы счетного числа своих бикомпактных подмножеств. Поэтому непрерывный гомоморфизм φ группы N на локально бикомпактную группу $PKN/PK = G/PK$, индуцируемый естественным гомоморфизмом $G \to G/PK$, открыт ([12], теорема 8), и, следовательно, $N/(N \cap PK) \cong G/PK$. Так как группа $N/(N \cap PK)$ вполне несвязна, а группа G/PK связна, то последний изоморфизм возможен лишь тогда, когда обе эти группы — единичные. Таким образом, $G = PK$, чем доказано первое утверждение леммы. Второе же утверждение является непосредственным следствием леммы 6 и максимальности полупростого бикомпактного нормального делителя P.

Имея в виду, что непрерывный гомоморфизм связной локально бикомпактной группы на связную локально бикомпактную группу всегда открыт, в качестве непосредственного следствия леммы 8 получаем следующее предложение:

Теорема 3. *Любая связная локально бикомпактная группа изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения связной полупростой бикомпактной группы и связной локально бикомпактной группы, все бикомпактные нормальные делители которой содержатся в ее центре.*

Замечание. Из упомянутой в доказательстве леммы 1 теоремы Мальцева вытекает, что всякая связная группа Ли обладает максимальным центральным бикомпактным нормальным делителем (вообще говоря, несвязным). Поскольку связные локально бикомпактные группы являются проективными пределами связных групп Ли ([10], теорема 5), отсюда и из теоремы 3 вытекает *наличие максимального бикомпактного нормального делителя во всякой связной локально бикомпактной группе.* Ясно, что такой нормальный делитель единственен.

§ 2. Связные локально бикомпактные группы с изоморфными алгебрами Ли

2.1. В работе автора [4] алгебра Ли произвольной локально бикомпактной группы определена как некоторым естественным образом топологизированное множество всех ее вещественных однопараметрических подгрупп $x(t)$, $y(t), \ldots$, на котором введены операции умножения на вещественное число: $\alpha x(t) = x(\alpha t)$, сложения: $x(t) + y(t) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(x\left(\frac{t}{n}\right) y\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n$, и коммутирования: $[x(t), y(t)] = \lim\limits_{n \to \infty} \left[x\left(-\frac{t}{n}\right) y\left(-\frac{t}{n}\right) x\left(\frac{t}{n}\right) y\left(\frac{t}{n}\right) \right]^{n^2}$. Там же было показано, что алгебра Ли A произвольной локально бикомпактной группы распадается в прямую сумму трех подалгебр A_1, A_2, A_3. Первая из них, в свою очередь, распадается в топологическую прямую сумму конечномерных компактных некоммутативных простых алгебр Ли, вторая — в топологическую прямую сумму одномерных алгебр, а третья является конечномерной алгеброй Ли, не имеющей нетривиальных одномерных или компактных прямых слагаемых. Алгебру A_1 мы будем называть *компактной полупростой частью алгебры* A, алгебру A_2 — *коммутативной частью*, а алгебру A_3 — *некомпактной частью*. Все эти три части определяются алгеброй A однозначно с точностью до топологического изоморфизма.

2.2. Пусть A — произвольная вещественная топологическая алгебра Ли имеющая строение, указанное в предыдущем пункте. Существует единственная бикомпактная группа P, разлагающаяся в топологическое прямое произведение связных односвязных простых некоммутативных компактных групп Ли, алгебра Ли которой изоморфна компактной полупростой части алгебры A. Мы будем называть эту группу *канонической группой, соответствующей компактной полупростой части алгебры* A. Существует далее единственная связная коммутативная группа K, разлагающаяся в топологическое прямое произведение одномерных векторных групп, алгебра Ли которой изоморфна коммутативной части алгебры A. Мы будем называть эту группу K *канонической группой, соответствующей коммутативной части алгебры* A. Наконец, связную односвязную группу Ли N, алгебра Ли которой изоморфна некомпактной части алгебры A, будем называть *канонической группой, соответствующей некомпактной части алгебры* A.

Обозначим через α мощность множества одномерных прямых слагаемых, в топологическую прямую сумму которых разлагается коммутативная часть алгебры A, а через k — дискретный ранг центра группы Ли N (см. п. 1.8) и построим вполне несвязную бикомпактную абелеву группу W, разлагающуюся в топологическое прямое произведение $\alpha + k$ экземпляров групп, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел, по каждому из всех простых чисел $p = 2, 3, 5, \ldots$.

Определение. Топологическое прямое произведение построенных выше групп P, K, N и W будем называть *канонической группой, соответствующей алгебре Ли* A.

Легко видеть, что алгебра Ли определенной таким образом канонической группы изоморфна исходной алгебре A.

2.3. Лемма 9. *Если $B \times L$ — минимальное бикомпактно-лиево разложение связной локально бикомпактной группы G и если алгебра Ли группы L имеет нетривиальные коммутативные прямые слагаемые, то в группе G найдется векторная группа R и локальная группа Ли K такие, что $B \times R \times K$ представляет собою локальное прямое разложение группы G, а алгебра Ли группы K не имеет нетривиальных коммутативных прямых слагаемых.*

Доказательство. Локальную группу Ли L можно, очевидно, разложить в прямое произведение некоторой коммутативной локальной группы Ли M и локальной группы Ли N, алгебра Ли которой не имеет нетривиальных коммутативных прямых слагаемых. Обозначим через R коммутативную подгруппу, порожденную элементами множества M. Каждый элемент $x \in R$ содержится, очевидно, в некоторой однопараметрической подгруппе $x(t)$. Как известно ([1], стр. 110), имеет место альтернатива: либо $x(t)$ — одномерная векторная группа, либо ее замыкание есть связная бикомпактная абелева группа. Второй случай исключается, ибо в противном случае с помощью рассуждений, уже применявшихся в доказательстве теоремы 1, можно было бы прийти в противоречие с минимальностью разложения $B \times L$. Таким образом, $x(t)$ — одномерная векторная группа. Отсюда следует, в частности, что пересечение $B \cap R$ содержит лишь единицу, и, значит, ввиду бикомпактности B, $RB/B \cong R$. Являясь связной коммутативной подгруппой группы Ли G/B и имея лишь векторные однопараметрические подгруппы, группа RB/B, а следовательно, и группа R сами являются векторными группами.

Ясно, что естественный гомоморфизм $G \to G/BK$ индуцирует локальный изоморфизм некоторой части K локальной группы N на окрестность единицы в группе G/BK. Таким образом, $B \times R \times K$ есть локальное прямое разложение группы G. Поскольку алгебры Ли локальных групп K и N совпадают, лемма доказана.

Теорема 4. *Любая связная локально бикомпактная группа G с алгеброй Ли A изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе канонической группы Y, соответствующей алгебре A.*

Доказательство. Пусть B — максимальный бикомпактный полупростой нормальный делитель группы G, а C — связная компонента единицы его централизатора. Группа G изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения $B \times C$ (непосредственное следствие леммы 7), вследствие чего алгебры Ли групп G и $B \times C$ изоморфны ([4], теорема 1). Легко видеть также, что все вполне несвязные нормальные делители канонической группы Y содержатся в ее центре. Поэтому достаточно доказать, что группа $B \times C$ изоморфна фактор-группе группы Y по вполне несвязной центральной подгруппе, иначе говоря, не нарушая общности, можно предполагать, что $G = B \times C$.

Пусть $D \times L$ — минимальное бикомпактно-лиево разложение группы C. По лемме 9, существуют векторная группа R и локальная группа Ли K такие, что группа C разлагается в локальное прямое произведение $D \times R \times K$, а алгебра Ли $A(K)$ группы K не имеет нетривиальных коммутативных прямых слагаемых. Ясно также, что алгебра $A(K)$ не имеет нетривиальных компактных прямых слагаемых. Поэтому, как нетрудно видеть, она изоморфна некомпактной части алгебры A. Обозначим через H соответствующую ей связную односвязную группу Ли, а через k — дискретный ранг центра группы H. Группа G изоморфна, очевидно, фактор-группе по дискретной центральной подгруппе прямого произведения $B \times D \times R \times H$, причем алгебра Ли этого прямого произведения изоморфна A. Поэтому, не нарушая общности, можно доказывать теорему в предположении, что $G = B \times D \times R \times H$.

Далее, связная локально бикомпактная группа C/R имеет, как нетрудно видеть, бикомпактно-лиево разложение $D' \times K'$, где $D' \cong D$, а $K' \cong K$. Группа Ли, соответствующая этому разложению, локально изоморфна H, и потому, ввиду леммы 7, в фактор-группе группы D по связной компоненте D_0 ее единицы всюду плотна абелева подгруппа с конечным числом образующих (не превосходящим дискретного ранга k центра группы H).

Из леммы 8 вытекает, что бикомпактный нормальный делитель D группы C коммутативен. Если D^* — его группа характеров, то из только что полученного результата о строении фактор-группы D/D_0 с помощью перехода к двойственному гомоморфизму заключаем, что периодическая часть группы D^* допускает изоморфное вложение в прямое произведение X групп типа p^∞, взятых по k экземпляров для каждого простого числа p, и некоторого множества групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел. Можно предполагать при этом, что фактор-группа X/D^* — периодическая. Двойственным такому вложению будет, очевидно, представление группы D в виде фактор-группы по вполне несвязной подгруппе прямого произведения $F \times M$, где F — топологическое прямое произведение одномерных соленоидов, а M — вполне несвязная бикомпактная абелева группа, разлагающаяся в топологическое прямое произведение групп, изоморфных аддитивной группе целых p-адических чисел, по k экземпляров для каждого простого числа p.

Снова, как и выше, получим, что группа G изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе прямого произведения $B \times F \times M \times R \times H$, что эти две группы имеют изоморфные алгебры Ли и что, не нарушая общности, можно положить $G = B \times F \times M \times R \times H$. Таким же способом можно привести наши рассмотрения к случаю, когда группа B распадается в топологическое прямое произведение связных односвязных некоммутативных компактных простых групп Ли. Легко видеть теперь, что B — каноническая группа, соответствующая компактной полупростой части алгебры A, а H — каноническая группа, соответствующая некомпактной части этой алгебры.

Далее, нетрудно показать, что одномерный соленоид изоморфен фактор-группе прямого произведения одномерной векторной группы и счетного множества аддитивных групп целых p-адических чисел, взятых по одному экземпляру для каждого простого числа p, причем фактор-группа берется по некоторой дискретной подгруппе указанного прямого произведения. Действительно, группа характеров одномерного соленоида S изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, которая обладает тем очевидным свойством, что фактор-группа по любой ее циклической подгруппе разлагается в прямое произведение квазициклических p-групп, по одной для каждого простого числа p. Поэтому любая вполне несвязная подгруппа одномерного соленоида, фактор-группа по которой — (связная) одномерная группа Ли, разлагается в топологическое прямое произведение аддитивных групп целых p-адических чисел, по одному экземпляру для каждого простого числа p. Такое строение будет иметь, в частности, бикомпактная компонента любого бикомпактно-лиевого разложения группы S, имеющего одномерную лиеву компоненту. Существование требуемого представления одномерного соленоида в виде фактор-группы теперь очевидно.

Используя последний результат и замечая, что алгебра Ли группы $F \times R$ изоморфна коммутативной части алгебры A, приходим к выводу, что топологическое прямое произведение T аддитивных групп целых p-адических чисел, взятых по α экземпляров для каждого простого числа p, и множества мощности α одномерных векторных групп имеет вполне несвязную подгруппу, фактор-группа по которой изоморфна группе $F \times R$. Но тогда группа G изоморфна фактор-группе по вполне несвязной подгруппе прямого произведения $B \times T \times M \times H$. Поскольку же все вполне несвязные инвариантные подгруппы этого прямого произведения содержатся в его центре, теорема доказана.

2.4. В процессе доказательства теоремы 4 нами было доказано также следующее предложение:

Теорема 5. *Любая связная локально бикомпактная группа изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе Z прямого произведения некоторого множества связных некоммутативных простых компактных групп Ли, некоторого множества одномерных соленоидов, некоторой связной односвязной группы Ли и, наконец, аддитивных групп целых p-адических чисел, взятых в некотором конечном числе экземпляров для каждого простого числа p.*

Разумеется, компонента подгруппы Z в произведении всех вполне несвязных прямых множителей всюду плотна в этом произведении. Обратно, в силу леммы 5, конструкция, указанная в условии теоремы 5, всегда приводит к связной локально бикомпактной группе.

2.5. Доказанная выше теорема 4 представляет собою аналог известного результата о связных группах Ли с изоморфными алгебрами Ли: если M — множество всех связных групп Ли, алгебры Ли которых изоморфны фиксированной алгебре A, то существует такая группа (универсальная накрывающая групп множества M), что любая группа из множества M изоморфна фактор-группе группы G по дискретной центральной подгруппе. Аналогичный результат устанавливается теоремой 4 о множестве N всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых топологически изоморфны некоторой фиксированной топологической алгебре Ли A: существует такая группа G, что любая группа из множества N изоморфна фактор-группе группы G по центральной вполне несвязной подгруппе.

Естественно, что во втором более общем случае потребовалась факторизация не по дискретным, а по вполне несвязным центральным подгруппам: примеры не локально изоморфных связных локально бикомпактных групп с изоморфными алгебрами Ли дают хотя бы одномерный соленоид и одномерная векторная группа. Однако между этими случаями имеется и другое, более существенное различие. В то время, как в первом случае упомянутая выше группа G, которую мы будем называть **универсальной**, всегда принадлежит к исходному множеству групп, во втором случае это не имеет места: построенная нами (в теореме 4) универсальная группа оказывается, вообще говоря, несвязной и не локально бикомпактной. Нетрудно убедиться, что причина здесь не в недостаточности наших рассмотрений, а в самом существе дела·

Пусть N — множество всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых одномерны. Как следует из результатов работы [4], это множество состоит из всех связных коммутативных локально бикомпактных групп размерности 1 и содержит, в частности, одномерную векторную группу R и одномерный соленоид S. Покажем, что множество N не может иметь в качестве универсальной группы (в смысле настоящего пункта) связной локально бикомпактной группы. Действительно, если бы связная локально бикомпактная группа G была универсальной для множества N, то она должна быть непременно одномерной ([4], теорема 2), а следовательно, и коммутативной (как проективный предел одномерных связных групп Ли). Таким образом, G — либо одномерная векторная, либо одномерная бикомпактная группа. В первом случае, однако, она не может иметь фактор-групп, изоморфных S, а во втором — изоморфных R.

В только что рассмотренном примере универсальной группой служит, очевидно, прямое произведение одномерной векторной группы и аддитивных групп целых p-адических чисел, взятых по одной для каждого простого числа p. Эта группа несвязна, но локально бикомпактна. Нетрудно, впрочем, подобрать пример такого множества связных локально бикомпактных групп с изоморфными алгебрами Ли, у которых универсальная группа не может быть локально бикомпактной.

Действительно, легко видеть, что никакая локально бикомпактная группа не может иметь фактор-групп, изоморфных векторным группам сколь угодно высокой размерности. Поэтому, например, множество всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых разлагаются в топологические прямые суммы счетного (бесконечного) числа одномерных подалгебр, не может иметь локально бикомпактных универсальных групп.

Нетрудно доказать, что множество всех связных локально бикомпактных групп, алгебры Ли которых изоморфны данной фиксированной алгебре Ли A, имеет локально бикомпактную универсальную группу в том и только в том случае, когда коммутативная часть алгебры A конечномерна.

§ 3. Локально связные группы

3.1 Если ограничиться рассмотрением лишь локально связных связных локально бикомпактных групп, то результаты предыдущих параграфов допускают дальнейшие уточнения. Легко понять, в частности, что в любом бикомпактно-лиевом разложении $B \times L$ связной локально связной локально бикомпактной группы G фактор-группа бикомпактной компоненты B по связной компоненте D ее единицы дискретна. В таком случае $D \times L$, очевидно, также будет бикомпактно-лиевым разложением группы G. Ясно также, что группа D должна быть локально связной. Используя лемму 2, приходим к следующему результату:

Теорема 6. *Всякая связная локально связная локально бикомпактная группа изоморфна правильно склеенному произведению связной локально связной бикомпактной группы и связной группы Ли.*

Заметим, что предложение, обратное теореме 6, также, очевидно, верно.

3.2. Теорема 7. *Всякая связная локально связная локально бикомпактная группа G изоморфна фактор-группе по центральной вполне несвязной подгруппе группы H, разлагающейся в топологическое прямое* *произведение связной односвязной группы Ли, некоторого множества связных односвязных компактных некоммутативных простых групп Ли и некоторого множества одномерных векторных групп. При этом группа H определяется заданием не самой группы G, а лишь ее алгебры Ли.*

Доказательство. Ввиду теоремы 4, существует такой непрерывный и открытый гомоморфизм ψ прямого произведения связной группы H, определяемой по алгебре Ли группы G, и некоторой вполне несвязной бикомпактной абелевой группы на группу G, ядром которого служит вполне несвязная центральная подгруппа. Этот гомоморфизм индуцирует непрерывный гомоморфизм φ группы H в группу G. Ядро гомоморфизма φ, очевидно, вполне несвязно и содержится в центре группы H, остается доказать лишь, что гомоморфизм φ открыт и отображает H *на* группу G.

Всякому бикомпактно-лиевому разложению $B_\alpha \times L_\alpha$ группы G соответствует разложение группы H в топологическсе прямое произведение $K_\alpha \times H_\alpha$, где H_α — конечномерная группа Ли, $\varphi(K_\alpha) \subset B_\alpha$, а $\varphi(H_\alpha)$ совпадает с подгруппой, порожденной элементами множества L_α. Как уже было отмечено в предыдущем пункте, можно ограничиться рассмотрением только таких бикомпактно-лиевых разложений группы G, бикомпактные компоненты которых связны.

Если $B_\alpha \times L_\alpha$ и $B_\beta \times L_\beta$ — два бикомпактно-лиевых разложения группы G, то будем говорить, что второе разложение больше первого, и обозначать это с помощью неравенства $\beta > \alpha$ тогда и только тогда, когда $B_\beta \subset B_\alpha$, а локальная группа L_β разлагается в прямсе произведение локальной группы L_α и некоторой локальной группы Ли L'_α. Наименьшими в этом смысле будут минимальные бикомпактно-лиевы разложения в смысле § 1, следующими за ними — разложения, полученные с помощью минимальных бикомпактно-лиевых разложений их бикомпактных компонент и т. д.

Пусть g — произвольный элемент из G. Для каждого бикомпактно-лиевого Разложения $B_\alpha \times L_\alpha$ группы G, имеющего связную бикомпактную компоненту B_α, выделим такой элемент $h_\alpha \in H_\alpha$, что:

$$1) \qquad \varphi(h_\alpha) g^{-1} \in B_\alpha,$$

$$2) \qquad h_\beta h_\alpha^{-1} \in K_\gamma \text{ при } \beta > \gamma,\ \alpha > \gamma.$$

Возможность такого выделения можно установить с помощью индукции по частично упорядоченному множеству индексов α. Действительно, если $B_0 \times L_0$ — минимальнсе разложение группы G, то, ввиду очевидного равенства $B_0 \cdot \varphi(H_0) = G$, можно выбрать элемент $h_0 \in H_0$ со свойством: $\varphi(h_0) g^{-1} \in B_0$. Если элемент h_α уже выбран, то пусть $B_\beta \times L'_\beta$ — минимальное бикомпактно-лиево разложение (связной) группы B_α. Ясно, что $B_\beta \times L'_\beta \times L_\alpha = B_\beta \times L_\beta$ — бикомпактно-лиево разложение группы G, а $\beta > \alpha$. Если H'_β — подгруппа группы H, которая отображается на подгруппу, порожденную элементами множества L'_β, с помощью отображения φ, то, как легко видеть, $H_\beta = H'_\beta \times H_\alpha$ и $B_\alpha = B_\beta \cdot \varphi(H'_\beta)$. Поэтому можно выбрать элемент $h'_\beta \in H'_\beta$ такой, что $\varphi(h'_\beta h_\alpha) g^{-1} \in B_\beta$. Элемент $h'_\beta h_\alpha$ примем за h_β. Продолжая таким сбразом, получим набор элементов $\{h_\alpha\}$, обладающий отмеченными выше свойствами 1) и 2).

Поскольку для любой окрестности единицы U в группе H найдется такой индекс γ, что $K_\gamma \subset U$, свойство 2) означает правофундаментальность направленного множества $\{h_\alpha\}$ (оно будет, впрочем, также и левофундаментальным). Будучи топологическим прямым произведением полных в смысле Вейля (даже локально бикомпактных!) подгрупп, группа H также полна в смысле Вейля ([2], теорема 5). Поэтому направленное множество элементов $\{h_\alpha\}$ сходится к некоторому элементу $h \in H$.

Пусть теперь W — произвольная окрестность единицы в G, а V — такая ее окрестность, что $V^2 \subset W$. Существует такой индекс α, для которого $B_\alpha \subset V$ ([3], теорема А). Ввиду непрерывности гомоморфизма φ, индекс α можно выбрать так, чтобы одновременно имело место включение $\varphi(hh_\alpha^{-1}) \in V$. Так как, на основании свойства 1), элемент $\varphi(h_\alpha)g^{-1}$ также принадлежит V, то элемент $\varphi(hh_\alpha^{-1})\cdot\varphi(h_\alpha)g^{-1} = \varphi(h)g^{-1}$ содержится в $V^2 \subset W$. Ввиду произвольности W, это означает, что $\varphi(h) = g$, а поскольку g — произвольный элемент из G, нами доказано, что гомоморфизм φ отображает H на всю группу G.

Фактически нами доказано также, что при любом α имеет место равенство

$$\text{3)} \qquad \varphi(K_\alpha) = B_\alpha.$$

Выбирая полную систему окрестностей единицы $\{H_{\alpha,\delta}\}$ в каждой из групп H_α, легко заметить, что $\{K_\alpha \cdot H_{\alpha,\delta}\}$ представляет собою полную систему окрестностей единицы в группе H. Вместе с тем из соотношения 3) непосредственно вытекает, что гомоморфизм φ переводит любую из этих окрестностей в окрестность единицы группы G. Следовательно, отображение φ открыто, и теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы 7 мы использовали фактически лишь то обстоятельство, что группа G обладает бикомпактно-лиевыми разложениями со сколь угодно малыми связными бикомпактными компонентами. Очевидно, что *всякая связная, но не локально связная локально бикомпактная группа допускает хотя бы одно бикомпактно-лиево разложение, в бикомпактной компоненте которого связная компонента единицы определяет недискретную фактор-группу.*

3.3. Следующее предложение переносит на произвольные локально связные локально бикомпактные группы одно известное свойство групп Ли:

Теорема 8. *В любой локально связной локально бикомпактной группе G имеется окрестность единицы U, каждый элемент которой содержится в вещественной однопараметрической подгруппе.*

Доказательство. Так как непрерывный гомоморфизм переводит однопараметрические подгруппы в однопараметрические, то достаточно установить наличие окрестности единицы с требуемыми свойствами в группе H из условия предыдущей теоремы. Группа H представляет собою топологическое прямое произведение некоторой связной односвязной группы Ли L, некоторого множества связных некоммутативных компактных простых групп Ли P_α и некоторого множества одномерных векторных групп R_β. В группе L найдется окрестность единицы V, каждый элемент которой содержится в однопараметрической подгруппе этой группы. Но тогда окрестность единицы

U группы H, являющаяся произведением множеств P_α, R_β и V, обладает тем же свойством. Действительно, все элементы подгрупп P_α содержатся в однопараметрических подгруппах ([5], следствие 2 из теоремы 1.2), для групп R_β такое свойство тривиально. Но тогда оно имеет место и для произведения K всех групп P_α и R_β, а значит, и для множества $K \cdot V = U$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Любая связная локально связная локально бикомпактная группа порождается множеством своих элементов, содержащихся в однопараметрических подгруппах.*

Следствие 2. *Любая связная локально связная локально бикомпактная группа линейно связна.*

3.4. Теорема 9. *Любая линейно связная локально бикомпактная группа G локально связна.*

Доказательство. Ввиду теоремы A из [3], в группе G существует полная система окрестностей единицы вида $B \times L$, где B — бикомпактная группа, а L — локальная группа Ли. Предположим, что группа G не локально связна. На основании замечания, сделанного в конце предыдущего пункта, найдется фактор-группа H группы G, допускающая бикомпактно-лиево разложение $D \times K$ с вполне несвязной недискретной бикомпактной компонентой D. Вместе с тем группа H, очевидно, линейно связна. Покажем, что существование группы с такими свойствами ведет к противоречию.

Действительно, обозначим через N подгруппу, порожденную элементами множества K. Являясь непрерывным гомоморфным образом связной группы Ли, группа N не может совпадать с H, ибо иначе соответствующий гомоморфизм был бы непременно открытым ([9], теорема 12) и, следовательно, группа H сама была бы группой Ли, что противоречит наличию у нее вполне несвязной недискретной замкнутой подгруппы D.

Таким образом, $N \neq H$, и в H найдется элемент h, не содержащийся в N. Пусть $h(t)$ — непрерывный путь, соединяющий этот элемент с единицей: $h(0) = e$, $h(1) = h$. Так как $V = DK$ — окрестность единицы в H, то найдется такое число $\alpha > 0$, что $h(t) \in V$ при $0 \leqslant t \leqslant \alpha$. Ввиду полной несвязности подгруппы D, это возможно лишь тогда, когда

$$4) \qquad h(t) \in N \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant \alpha.$$

Обозначим через δ верхнюю грань чисел α, для которых имеет место соотношение 4). Ясно, что $0 < \delta \leqslant 1$. Найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $h(t) \in W \cdot h(\delta)$ при $\delta - \varepsilon \leqslant t \leqslant \delta$, где W — окрестность единицы в H с $W^2 \subset V$ и $W^{-1} = W$. Тогда, как легко проверить, $h(t) \in V \cdot h(\delta - \varepsilon)$ при $\delta - \varepsilon \leqslant t \leqslant \delta$. Так как множество $V \cdot h(\delta - \varepsilon)$ представляет собою окрестность элемента $h(\delta)$, то, ввиду определения числа δ, найдется такое число $\varepsilon_1 \geqslant 0$, что $h(\delta + \varepsilon_1) \bar{\in} N$, а при $\delta - \varepsilon \leqslant t \leqslant \delta + \varepsilon_1$ $h(t) \in V \cdot h(\delta - \varepsilon)$.

Множество $V \cdot h(\delta - \varepsilon)$ разлагается в топологическое произведение множества $K \cdot h(\delta - \varepsilon)$ и вполне несвязного множества D. Пусть $h(t)$ $(\delta - \varepsilon \leqslant t \leqslant \delta + \varepsilon_1)$ проходит внутри этого множества, а его проекция в D соединяет точку e с точкой $d \neq e$. Ввиду полной несвязности множества D, это невозможно. Таким образом, предположение о том, что группа G не локально связна, привело нас к противоречию, и, следовательно, теорема доказана.

Из только что доказанной теоремы и следствия 2 предыдущей теоремы вытекает

Следствие. *Связная локально бикомпактная группа тогда и только тогда линейно связна, когда она локально связна.*

3.5. Теорема 10. *В центре любой связной локально бикомпактной группы G имеется хотя бы одна вполне несвязная бикомпактная подгруппа, фактор-группа по которой локально связна.*

Доказательство. Согласно теореме 4, $G \cong (H \times D)/C$, где H — связная локально связная группа, а D — бикомпактная вполне несвязная центральная в $H \times D$ подгруппа. Так как подгруппа DC/C группы $(H \times D)/C$ также центральна, бикомпактна и вполне несвязна, то, ввиду теоремы о гомоморфизме, достаточно доказать локальную связность группы $(H \times D)/DC$. Поскольку же последняя группа изоморфна фактор-группе локально связной группы $(H \times D)/D \cong H$, теорема доказана.

Следствие. *Связная локально бикомпактная группа без центра или с дискретным центром локально связна.*

(Поступило в редакцию 2/IX 1957 г.)

Литература

1. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, Москва, ИИЛ, 1950.
2. Н. Я. Виленкин, К теории слабо сепарабельных групп, Матем. сб., **22(64)** (1948), 135—177.
3. В. М. Глушков, Строение локально бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта, Успехи матем. наук, т. **XII**, вып. **2(74)** (1957), 3—41.
4. В. М. Глушков, Алгебры Ли локально бикомпактных групп, Успехи матем. наук, т. **XII**, вып. **2(74)** (1957), 137—142.
5. Е. Б. Дынкин и А. Л. Онищик, Компактные группы Ли в целом, Успехи матем. наук, т. **X**, вып. **4(66)** (1956), 3—74.
6. K. Iwasawa, On some types of topological groups, Ann. of Math., **50**, N **3** (1949), 507—558.
7. А. И. Мальцев, On the theory of Lie groups in the large, Матем. сб., **16(58)** (1945), 163—190.
8. А. И. Мальцев, Топологические разрешимые группы, Матем. сб., **19(61)** (1946), 165—174.
9. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, Гостехиздат, 1954.
10. H. Yamabe, A generalization of a theorem of Gleason, Ann. of Math., 58, N **2** (1953), 351—365.

Письмо в редакцию

В статье «Локально нильпотентные группы без кручения, полные над простыми топологическими полями» (Матем. сб., **37(79)** (1955), 477—506) по моей вине пропущено условие p-адической полноты в формулировке теоремы 4.7. Теорема должна формулироваться следующим образом:

Нильпотентные группы Ли конечного ранга над полем p-адических чисел и только они являются p-адически полными, локально бикомпактными, локально нильпотентными группами без кручения, удовлетворяющими второй аксиоме счетности.

В доказательстве теоремы исправлений делать не нужно, так как пропущенное в формулировке условие в нем используется.

В. М. Глушков