Об оценке среднего модуля в классе ограниченных однолистных функций

И. Е. Базилевич (Москва)

Для класса S функций

$$w = f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{1}$$

однолистных и регулярных в круге $|z| < 1$, мною была доказана [1], в частности, следующая теорема:

В классе S образ $D^*(r)$ круга $|z| \leqslant r < 1$, соответствующий функции $f^*(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, покрывает наибольшую часть окружности $|w| = x$, если $x \geqslant e^{\frac{\pi}{e}} r$.

На основании этого предложения были получены далее оценки интегралов $\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi$, $\int\limits_0^{2\pi} |f^2(re^{i\varphi})| \, d\varphi$, $0 \leqslant r < 1$, и коэффициентов c_n.

Целью настоящей статьи является усиление указанной теоремы на случай ограниченных функций из класса S и оценка их среднего модуля.

Рассмотрим класс S_M ограниченных функций $f(z) \in S$, $|f(z)| < M$. Для этих функций справедливы ([1], [2]), следующие теоремы, на которые мы будем опираться в дальнейшем.

А. *Для каждой пары чисел z_1 и z_2, $|z_1| < 1$ и $|z_2| < 1$, справедливы следующие неравенства:*

$$\frac{|f(z_1) f(z_2)| \sqrt{1-|z_1|^2} \sqrt{1-|z_2|^2}}{|z_1 z_2| \sqrt{1-\tau^2 |f(z_1)|^2} \sqrt{1-\tau^2 |f(z_2)|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} \leqslant \frac{|f(z_1) f(z_2)| \sqrt{1-\tau^2 |f(z_1)|^2} \sqrt{1-\tau^2 |f(z_2)|^2}}{|z_1 z_2| \sqrt{1-|z_1|^2} \sqrt{1-|z_2|^2}}, \tag{A}$$

где $\tau = M^{-1}$.

Знак равенства слева имеет место для каждой пары z_1 и z_2, подчиненной дополнительному условию $|z_1| = |z_2| = r < 1$, а справа — только при $z_1 = z_2$, т. е. для $f'(z)$. Экстремальные функции в левом неравенстве конформно отображают круг $|z| < 1$ на области, полученные из круга $|w| \leqslant M$ удалением двух отрезков (с произвольным отношением их длин), лежащих на общем диаметре и примыкающих одним из своих концов к окружности $|w| = M$.

При $\tau = 0$ отсюда вытекают известные неравенства Г. М. Голузина и Лёвнера.

Б. *Для каждой пары чисел* z_1 *и* z_2, $|z_1| < 1$ *и* $|z_2| < 1$, *справедливы следующие неравенства*:

$$\frac{1+\tau|f(z_1)|}{1-\tau|f(z_1)|}\cdot\frac{1-|z_1|}{1+|z_1|}\cdot\frac{1+\tau|f(z_2)|}{1-\tau|f(z_2)|}\cdot\frac{1-|z_2|}{1+|z_2|}\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\sqrt{f(z_1)}+\sqrt{f(z_2)}}{\sqrt{f(z_1)}-\sqrt{f(z_2)}}\cdot\frac{\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}}{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1-\tau|f(z_1)|}{1+\tau|f(z_1)|}\cdot\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\cdot\frac{1-\tau|f(z_2)|}{1+\tau|f(z_2)|}\cdot\frac{1+|z_2|}{1-|z_2|}, \qquad \text{(B)}$$

где $\tau = M^{-1}$.

Экстремальные функции в обеих частях неравенства конформно отображают круг $|z| < 1$ *на области, полученные из круга* $|w| < M$ *удалением одного радиального отрезка, примыкающего одним из своих концов к окружности* $|w| = M$.

Замечание. В этой формулировке последние неравенства легко получаются из неравенства (11_T) работы [1] (стр. 150) при помощи хорошо известного преобразования.

Теорема 1. *Для каждой функции* $f(z) \in S_M$, $M > 4$, *мера* $l(r, x, M)$ *пересечения окружности* $|w| = x$ *с образом* $D(r)$ *круга* $|z| \leqslant r < 1$ *не превосходит меры* $l^*(r, x, M)$ *пересечения той же окружности с образом* $D^*(r)$ *круга* $|z| \leqslant r < 1$, *соответствующим функции*

$$f^*(z;\tau)=\frac{(1+z)^2-2\tau z-(1+z)\sqrt{(1+z)^2-4\tau z}}{2\tau z}, \quad \tau = M^{-1},$$

т. е.

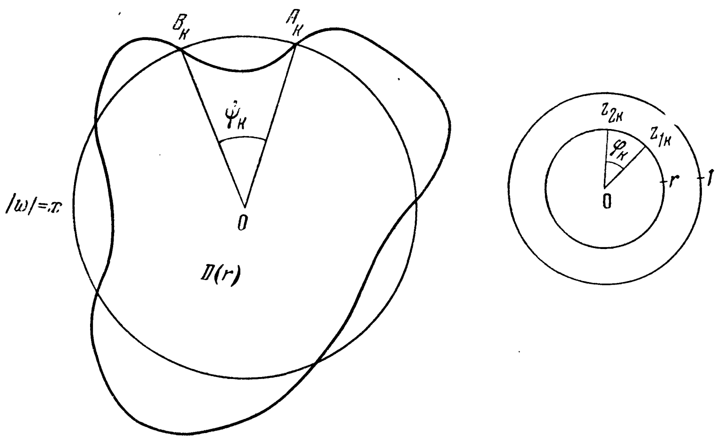
$$l(r,x,M)\leqslant 2x\arccos\frac{(1-r^2)^2x-r\left[(1+r^2)(1+\tau^2x^2)-4\tau r x\right]}{2\left[r(1+\tau^2x^2)-\tau x(1+r^2)\right]}, \qquad \text{(I)}$$

если $0{,}5 \leqslant r < 1$ *и* $x \geqslant 8r$. *Экстремальная функция* $f^*(z;\tau)$ *конформно отображает круг* $|z| < 1$ *на круг* $|w| < M$ *из которого удален радиальный сегмент от точки* $w = M$ *до* $w = \dfrac{2-\tau-2\sqrt{1-\tau}}{\tau}$.

Доказательство. Рассмотрим область $D(r)$ и окружность $|w| = x$. По принципу Линделёфа ([3], стр. 291; [4]) эта окружность при $x > r$ не может содержаться в $D(r)$. Если же она содержит внутри себя область $D(r)$, то теорема, очевидно, справедлива. Поэтому рассмотрим случай пересечения линии уровня L_r (границы области $D(r)$) с окружностью $|w| = x$ (фиг. 1). Пусть одна из дуг $\overset{\frown}{A_kB_k}$ окружности $|w| = x$ имеет свои концы на L_r и лежит вне $D(r)$. Обозначим соответствующий ей центральный угол через $\psi_k = \psi_k(x)$. Пусть прообразами точек A_k и B_k на окружности $|z| = r$ будут соответственно z_{1k} и z_{2k}. Обозначим центральный угол дуги $\underset{\smile}{z_{1k}z_{2k}}$ окружности $|z| = r$ через $\varphi_k = \varphi_k(x)$. В силу аналитичности линии L_r число n_x таких дуг $\overset{\frown}{A_kB}$ конечно. Наша задача состоит в оценке снизу величины $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n_x} \psi_k$.

Для каждого угла ψ_k воспользуемся неравенствами (B), в которых положим $|z_{1k}| = |z_{2k}| = r$ и $|f(z_{1k})| = |f(z_{2k})| = x$. Тогда получим:

$$\frac{1-r}{1+r}\cdot\frac{1+\tau x}{1-\tau x}\cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi_k}{4} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\psi_k}{4} \leqslant \frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1-\tau x}{1+\tau x}\operatorname{tg}\frac{\varphi_k}{4}. \qquad (B')$$



Фиг. 1

Аналогично первое из неравенств (A) в наших условиях дает:

$$x \leqslant \frac{r}{1-r^2}\,\frac{\sin\frac{\psi_k}{2}}{\sin\frac{\varphi_k}{2}}(1-\tau^2x^2), \qquad (A')$$

так как

$$\frac{|z_{1k}-z_{2k}|}{2r} = \sin\frac{\varphi_k}{2}, \qquad \frac{|f(z_{1k})-f(z_{2k})|}{2x} = \sin\frac{\psi_k}{2}.$$

Возможно одно из двух:

1) один из углов $\varphi_k = \varphi^*$ удовлетворяет неравенству $\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\varphi^*}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$,

2) ни один из углов φ_k не удовлетворяет указанному неравенству, т. е. для всех номеров k $0 < \frac{\varphi_k}{4} < \frac{\pi}{4}$.

В первом случае $\sin\frac{\varphi^*}{2}$ убывает при возрастании $\frac{\varphi^*}{4}$ в интервале $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому мы можем лишь увеличить правую часть неравенства (A′), заменив величину $\frac{\varphi^*}{2}$ из левого неравенства (B′) ее верхней гранью. Переписав неравенство (A′) в форме

$$x \leqslant \frac{r}{1-r^2}(1-\tau^2x^2)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi^*}{4} + \operatorname{ctg}\frac{\varphi^*}{4}\right)\frac{\operatorname{tg}\frac{\psi^*}{4}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\psi^*}{4}}$$

и подставив в правую часть $\frac{1+r}{1-r}\cdot\frac{1-\tau x}{1+\tau x}\cdot\operatorname{tg}\frac{\psi^*}{4}$ вместо $\operatorname{tg}\frac{\varphi^*}{4}$, получим:

$$x \leqslant r\left[\frac{(1-\tau x)^2}{(1-r)^2}\cdot\sin^2\frac{\psi^*}{4} + \frac{(1+\tau x)^2}{(1+r)^2}\cos^2\frac{\psi^*}{4}\right]. \qquad (2)$$

Покажем, что при условии $0 < \frac{\psi^*}{4} < \frac{\pi}{2}$ правая часть неравенства (2) монотонно возрастает вместе с ψ^*, а потому это неравенство в рассматриваемом случае 1) дает оценку угла ψ^* снизу. С этой целью преобразуем его так:

$$x \leqslant r\left[\frac{(1+r^2)(1+\tau^2x^2)-4\tau rx}{(1-r^2)^2} - \frac{2r(1+\tau^2x^2)-2\tau x(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\cos\frac{\psi^*}{2}\right]. \qquad (2')$$

В силу леммы Шварца, $\tau x = \tau|f(z)| < r$, если $f(z) \not\equiv z$, $|z| = r$, а потому $r(1+\tau^2x^2) - \tau x(1+r^2) > 0$, что и доказывает утверждение. Так как $\frac{l(r, x, M)}{x} = 2\pi - \psi^*$, то

$$\cos\frac{l(r, x, M)}{2x} = \cos\left(\pi - \frac{\psi^*}{2}\right) = -\cos\frac{\psi^*}{2}.$$

Подставляя в неравенство (2′) величину $\cos\frac{\psi^*}{2}$, получим:

$$x \leqslant r\left[\frac{(1+r^2)(1+\tau^2x^2)-4\tau rx}{(1-r^2)^2} + \frac{2r(1+\tau^2x^2)-2\tau x(1+r^2)}{(1-r^2)^2}\cos\frac{l(r, x, M)}{2x}\right].$$

Отсюда в рассматриваемом случае 1) и следует утверждение теоремы:

$$l(r, x, M) \leqslant 2x \arccos\frac{x(1-r^2)^2 - r[(1+r^2)(1+\tau^2x^2)-4\tau rx]}{2r(1+\tau^2x^2)-2\tau x(1+r^2)}. \qquad (I)$$

Знак равенства здесь имеет место для указанной в теореме функции $f^*(z; \tau)$, так как для этой функции каждое из неравенств, которыми мы пользовались, превращается в равенство. Легко видеть также, что все экстремальные функции рассматриваемой задачи в случае 1) получаются из функции $f^*(z; \tau)$ преобразованием поворота единичного круга.

Рассмотрим теперь другую возможность. Пусть B — наибольшая односвязная область, содержащая $w = \infty$ и внешняя по отношению к кругу $|w| \leqslant x$ и к области $D(r)$ (фиг. 2). Ее граница Γ состоит из дуг $\overset{\frown}{A_kB_k}$ окружности $|w| = x$ и дуг линии уровня L_r, внешних по отношению к кругу $|w| \leqslant x$. Мы оценим снизу $\sum\limits_{k=1}^{n'_x} \psi_k$, где сумма распространяется только на дуги $\overset{\frown}{A_kB_k} \in \Gamma$.

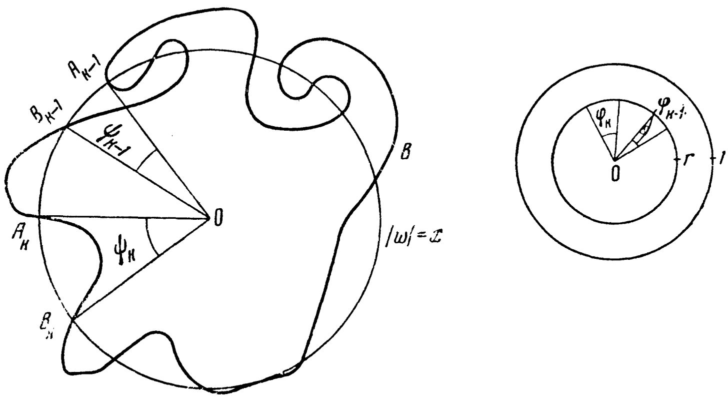
На основании неравенства (A′) имеем:

$$\frac{1-r^2}{r} x \sum_{k=1}^{n'_x} \sin\frac{\varphi_k}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n'_x} (1-\tau^2x^2)\sin\frac{\psi_k}{2};$$

но в силу того, что $0 < \frac{\varphi_k}{4} < \frac{\pi}{4}$, для всех номеров k справедливо неравенство $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\varphi_k}{2} \leqslant \sin\frac{\varphi_k}{2}$ и, кроме того, $\sin\frac{\psi_k}{2} < \frac{\psi_k}{2}$. Поэтому, полагая $\sum\limits_{k=1}^{n'_x} \varphi_k = \varphi$ и $\sum\limits_{k=1}^{n'_x} \psi_k = \psi$, получим:

$$\frac{1-r^2}{r}\cdot x\cdot\frac{\varphi}{\pi} < \frac{\psi}{2}(1-\tau^2x^2). \qquad (3)$$

Отметим на окружности $|z| = r$ прообразы точек A_k и B_k и соответствующий им угол φ_k. Так как смежные по отношению к φ_k дуги окружности $|z| = r$ отображаются в дуги, лежащие вне круга $|w| \leqslant x$, то мера $r\widetilde{\varphi}$ тех дуг окружности $|z| = r$, на которых $|f(z)| < x$, не превосходит $r\varphi = r\sum\limits_{k=1}^{n'_x} \varphi_k$, откуда $\widetilde{\varphi} \leqslant \varphi$. Оценим $\widetilde{\varphi}$ снизу. Полагая $x = kr$, $k > 1$, рассмотрим интеграл



Фиг. 2

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln \frac{|f(re^{i\theta})|}{kr}\, d\theta = \ln\frac{1}{k},$$

который запишем так:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{|f(re^{i\theta})|}{kr}\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{kr}{|f(re^{i\theta})|}\, d\theta = \ln\frac{1}{k}.$$

Отсюда

$$\ln k \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{kr}{|f(re^{i\theta})|}\, d\theta \leqslant \frac{\widetilde{\varphi}}{2\pi} \ln \frac{k\left[(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r)\sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}\right]}{2}, \tag{4}$$

так как $\ln^+ \dfrac{kr}{|f(re^{i\theta})|} > 0$ лишь на множестве меры $\widetilde{\varphi}$ и, на основании известной теоремы искажения ([5], стр. 62; [6], стр. 28) для ограниченных однолистных функций, справедливо неравенство

$$|f(re^{i\theta})| \geqslant \frac{2r}{(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r)\sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}}.$$

Так как последнее выражение есть $\min\limits_{|z|=r} |f^*(z;\tau)| < r$, то

$$A = \frac{(1+r)^2 - 2r\tau + (1+r)\sqrt{(1+r)^2 - 4r\tau}}{2} > 1.$$

Положим $k=A^\alpha$, $\alpha>0$. Тогда неравенство (4) после сокращения на $\ln A>0$ даст оценку $\tilde{\varphi}$ снизу в форме

$$\alpha \leqslant \frac{\tilde{\varphi}}{2\pi}(\alpha+1),$$

откуда

$$\varphi \geqslant \tilde{\varphi} \geqslant \frac{2\pi\alpha}{\alpha+1}, \tag{5}$$

причем

$$x=kr=A^\alpha r.$$

Из неравенств (3) и (5) следует:

$$\frac{1-r^2}{r}\cdot\frac{2\alpha}{\alpha+1}\cdot x \leqslant \frac{\psi}{2}(1-\tau^2x^2). \tag{6}$$

Остается сравнить оценки (2) и (6). Если окажется, что при некоторых значениях $\alpha>0$ и $0<r<1$ нижняя грань для ψ, полученная из неравенства (6), окажется больше, чем нижняя грань для ψ^*, полученная из неравенства (2), то это будет значить, что сумма длин дуг $\overset{\frown}{A_kB_k}$ окружности $|w|=x$, не покрытых областью $D(r)$, не меньше (при втором предположении относительно φ_k), чем для функции $f^*(z;\tau)$, указанной в теореме, так как равенство в (2) реализуется как раз этой функцией для всех значений x, заключенных между $\min\limits_{|z|=r}|f^*(z;\tau)|$ и $\max\limits_{|z|=r}|f^*(z;\tau)|$.

Из неравенств (2) и (6) выводим уравнения, определяющие нижние грани ψ^* и ψ:

$$x=r\left[\frac{(1-\tau x)^2}{(1-r)^2}\sin^2\frac{\psi^*}{4}+\frac{(1+\tau x)^2}{(1+r)^2}\cos^2\frac{\psi^*}{4}\right], \tag{$\underline{2}$}$$

$$x=\frac{1+\alpha}{4\alpha}\cdot\frac{r}{1-r^2}(1-\tau^2x^2)\,\psi, \tag{$\underline{6}$}$$

где

$$x=rA^\alpha=r\left[\frac{(1+r)^2-2r\tau+(1+r)\sqrt{(1+r)^2-4r\tau}}{2}\right]^\alpha.$$

Отбрасывая в равенстве ($\underline{2}$) второе слагаемое и оценивая снизу $\sin\frac{\psi^*}{4}\geqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\psi^*}{4}$, получим:

$$\psi^*<\frac{2\pi(1-r)}{1-\tau x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}, \tag{2'}$$

и из ($\underline{6}$):

$$\psi\geqslant\frac{4\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-r^2}{r}\cdot\frac{x}{1-\tau^2x^2}. \tag{6'}$$

Сравнивая эти неравенства, видим, что из неравенства

$$\frac{2\pi(1-r)}{1-\tau x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}\leqslant\frac{4\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1-r^2}{r}\cdot\frac{x}{1-\tau^2x^2}$$

будет следовать, что $\psi^*\leqslant\psi$. Упрощая последнее неравенство, получаем:

$$\pi\leqslant\frac{2\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1+r}{1+\tau x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}. \tag{7}$$

Это неравенство будет выполнено, если $\pi \leqslant \frac{2\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}$, так как, в силу леммы Шварца, $\tau x < r$ и потому $\frac{1+r}{1+\tau x} > 1$. Но rA^{α} и $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ возрастают вместе с α; поэтому достаточно найти такое $\alpha = \alpha_0$, для которого при $0{,}5 \leqslant r < 1$ и $\tau \leqslant 0{,}25$ выполняется неравенство $\pi \leqslant \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}}$; тогда при $\alpha > \alpha_0$ это неравенство также будет выполнено. Возьмем $\alpha_0 = 3$. Тогда

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}} \geqslant \left[\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{7}}{2}\right]^{\frac{3}{2}} > 2{,}8 \text{ и } \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\pi < \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{r}} \text{ при } \alpha_0 = 3, \quad 0{,}5 \leqslant r < 1 \text{ и } \tau \leqslant 0{,}25.$$

Это и доказывает теорему.

Замечание. В условии теоремы указаны простейшие неравенства для r, x и τ, при выполнении которых эта теорема справедлива. Как можно заметить из доказательства, теорема верна для таких значений r, x и τ, при которых нижняя грань для ψ из неравенства (6) больше, чем нижняя грань для ψ^* из неравенства (2).

Обозначим через $S_M^{(k)}$ подкласс симметричных функций $f_k(z)$, полученных преобразованием $f_k(z) = \sqrt[k]{f(z^k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ из функций $f(z)$ класса S_M. На основании теоремы 1 и геометрического смысла указанного преобразования легко устанавливается

Теорема 1′. *Для каждой функции* $f_k(z) \in S_M^{(k)}$, $M > 4$, *мера* $l_k(r, x, M)$ *пересечения окружности* $|w| = x$ *с образом* $D_k(r)$ *круга* $|z| \leqslant r < 1$ *не превосходит меры* $l_k^*(r, x, M)$ *пересечения той же окружности с образом* $D_k^*(r)$ *круга* $|z| \leqslant r < 1$, *соответствующим функции* $f_k^*(z; \tau) = \sqrt[k]{f^*(z^k; \tau)}$, *если* $0{,}5 \leqslant r^k < 1$ *и* $x^k \geqslant 8r$, т. е.

$$l_k(r, x, M) \leqslant 2x \cdot \arccos \frac{x^k(1-r^k)^2 - r^k[(1+r^{2k})(1+\tau^2 x^{2k}) - 4r^k\tau]}{2r^k(1+\tau^2 x^{2k}) - 2\tau x^k(1+r^{2k})}. \tag{I$_k$}$$

Теорема 2. *Для всякой функции* $f_k(z) \in S_M^{(k)}$ *справедливо неравенство*

$$M_\alpha = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_k(\rho e^{i\theta})|^\alpha \cdot |f_k'^2(\rho e^{i\theta})| \, d\theta \leqslant \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f_k^*(\rho e^{i\theta}; \tau)|^\alpha \cdot |f_k^{*\prime 2}(\rho e^{i\theta}; \tau)| \, d\theta +$$
$$+ c_k(r, \alpha), \tag{II}$$

где $c_k(r, \alpha) \to 0$ *при* $r \to 1$ *и*

$$f_k^{*k}(z; \tau) = \frac{(1+z^k)^2 - 2\tau z^k - (1+z^k)\sqrt{(1+z^k)^2 - 4\tau z^k}}{2\tau z^k}, \quad \tau = M^{-1} \leqslant 0{,}25.$$

Замечание. Величина $c_k(r, \alpha)$ не зависит от M и, во всяком случае, не превосходит $4^{\frac{\alpha}{k}} \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant 0,5} \varepsilon_k^*(r;\tau)$, где $\varepsilon_k^*(r;\tau)$ — площадь той области, заключенной между окружностью $|w| = \sqrt[k]{4}$ и линией уровня L_r функции $f_k^*(z;\tau)$, которая стягивается к граничному отрезку при $r \to 1$, а потому может быть оценена (см., например, [1]). Естественно предполагать, что неравенство теоремы справедливо и при $c_k(r, \alpha) = 0$, однако доказать это не удается.

Для доказательства неравенства (II) достаточно подсчитать M_α интегрированием по области $D_k(r)$:

$$M_\alpha = \iint\limits_{D_k(r)} x^{1+\alpha} d\psi dx = \int\limits_0^{\sqrt[k]{4}} x^\alpha l_k(r, x, M)\, dx + \int\limits_{\sqrt[k]{4}}^{\sqrt[k]{M}} x^\alpha l_k(r, x, M)\, dx.$$

В силу теоремы 1′, второе слагаемое имеет наибольшую величину для функции $f_k^*(z;\tau)$, а первое отличается от $\int\limits_0^{\sqrt[k]{4}} x^\alpha l_k^*(r, x, M)\, dx$ не более, чем на $4^{\frac{\alpha}{k}} \varepsilon_k^*(r;\tau)$, что и доказывает теорему 2.

В частности, при $\alpha = 0$ мы получаем отсюда оценку площади $\sigma_k(r)$ области $D_k(r)$. Далее, хорошо известны следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = 4\pi \int\limits_0^r \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \rho^{2n-1} d\rho = 4 \int\limits_0^r \frac{\sigma_1(\rho)}{\rho}\, d\rho,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} |f_2(\sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}})|^2 d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} |f_2(\sqrt{r} e^{i\varphi})|^2 d\varphi = 4 \int\limits_0^{\sqrt{r}} \frac{\sigma_2(\rho)}{\rho}\, d\rho.$$

Заменяя в них величины $\sigma_1(\rho)$ и $\sigma_2(\rho)$ соответственно через $\sigma_1^*(\rho;\tau) + \varepsilon_1^*(\rho;\tau)$ и $\sigma_2^*(\rho;\tau) + \varepsilon_2^*(\rho;\tau)$ при $\rho^k \geqslant 0,5$ $(k = 1, 2)$ и через $\pi \max\limits_{|z|=\rho} |f_k(z)|^2$ $(k = 1, 2)$ при $0 \leqslant \rho^k < 0,5$, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Для каждой функции $f(z) \in S_M$ имеют место неравенства:*

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi &\leqslant \int\limits_0^{2\pi} |f^*(re^{i\varphi};\tau)|^2 d\varphi + c_1(r), \\ \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi &\leqslant \int\limits_0^{2\pi} |f^*(re^{i\varphi};\tau)|\, d\varphi + c_2(r), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

в которых $c_1(r)$ *и* $c_2(r)$ *не зависят от* M *и не превосходят, во всяком случае, величин:*

$$c_1(r) \leqslant \pi \int_0^{0,5} \frac{\rho d\rho}{(1-\rho)^4} + 4\int_{0,5}^{r} \frac{\overset{*}{\varepsilon}_1(\rho;\tau)}{\rho}\,d\rho \text{ и } c_2(r) \leqslant \pi \int_0^{\sqrt{0,5}} \frac{\rho d\rho}{(1-\rho^2)^2} + 4\int_{\sqrt{0,5}}^{\sqrt{r}} \frac{\overset{*}{\varepsilon}_2(\rho;\tau)}{\rho}\,d\rho.$$

Положим

$$I(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \quad I(1, f) = \lim_{r\to 1} I(r, f)$$

и отметим простую оценку величины $I(1, f)$ в классе функций $f(z) \in S_M$.

Теорема 4. *Для каждой функции* $f(z) \in S_M$ *справедливо неравенство*

$$I(1, f) \leqslant \frac{8}{3\pi}\sqrt{M} + C, \tag{IV}$$

где C — *абсолютная постоянная, которая может быть оценена* (см. замечание). *Главный член при* $M \to +\infty$ *в этой оценке является точным.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, достаточно вычислить интеграл

$$I(1, f^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\varphi};\tau)|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} |\overset{*}{f}_2(e^{i\varphi};\tau)|^2\,d\varphi.$$

Но

$$\overset{*}{f}_2(z;\tau) = \frac{z^2 - 1 + \sqrt{(1-z^2)^2 + 4\tau z^2}}{2\tau z}, \quad \tau = M^{-1} \leqslant 0,25$$

и

$$\overset{*}{f}_2(e^{i\varphi};\tau) = \frac{\sqrt{\tau - \sin^2\varphi} + i\sin\varphi}{\tau}.$$

Поэтому

$$I(1, f^*) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin\sqrt{\tau}} \frac{d\varphi}{\tau} + \frac{2}{\pi}\int_{\arcsin\sqrt{\tau}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - \tau - 2\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - \tau}}{\tau^2}\,d\varphi.$$

В результате вычислений получаем:

$$I(1, f^*) = \frac{4\arcsin\sqrt{\tau}}{\pi\tau} + \frac{2\sqrt{1-\tau}}{\pi\tau\sqrt{\tau}} - \frac{2\arcsin\sqrt{\tau}}{\pi\tau^2}.$$

Далее имеем:

$$(1-\tau)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\tau-\frac{1}{8}\tau^2-\ldots,$$

$$(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\tau+\frac{3}{8}\tau^2+\ldots,$$

$$\arcsin\sqrt{\tau}=\sqrt{\tau}+\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{6}+\frac{3}{40}\tau^{\frac{5}{2}}+\ldots.$$

Наконец,

$$I(1, f^*)=\frac{8\sqrt{M}}{3\pi}+\frac{4}{15\pi\sqrt{M}}+\ldots<\frac{8\sqrt{M}}{3\pi}+\mathrm{const}, \tag{8}$$

что и доказывает утверждение.

Замечание. Абсолютная постоянная C складывается из абсолютной постоянной $c_2(1)$ теоремы 3 (при $r=1$) и верхней грани остаточного члена в разложении (8) по степеням $M\geqslant 4$.

Следствие. *Пусть нечетная функция* $\varphi(z)=z+b_3z^3+\ldots$ *принадлежит классу* S. *Тогда справедливы неравенства*:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|^2 r^{2k-2}\leqslant\frac{8}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|\,r^{k-1}+C \tag{9_1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|^2 r^{2k-1}\leqslant\frac{16}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|\,r^{2k-1}+C, \tag{9_2}$$

де C — абсолютная постоянная теоремы 4.

Доказательство. Положим

$$\psi(z)=\frac{1}{r_0}\varphi(r_0z)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_{2k-1}z^{2k-1},\quad 0<r_0<1.$$

Тогда $\psi(z)\in S_M$, где $M=\frac{1}{r_0}\max\limits_{|z|=r_0}|\varphi(z)|$. На основании теоремы 4 мы можем написать:

$$I(1, \psi^2)=\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_{2k-1}|^2\leqslant\frac{8}{3\pi}M+C\leqslant\frac{8}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_{2k-1}|+C.$$

Но $\beta_{2k-1}=b_{2k-1}r^{2k-2}$ и поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|^2 r_0^{4k-4}\leqslant\frac{8}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r_0^{2k-2}+C.$$

Полагая $r_0^2=r$, мы и получаем неравенство (9_1).

Чтобы получить неравенство (9_2), достаточно воспользоваться одной из лемм Хеймана [7], в силу которой имеем:

$$\frac{1-r_0^2}{r_0}\max_{|z|=r_0}|\varphi(z)|\leqslant\frac{1-r_0^4}{r_0^2}\max_{|z|=r_0}|\varphi(z^2)|\leqslant\frac{1-r_0^4}{r_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r_0^{4k-2}.$$

Отсюда следует:

$$M\leqslant\frac{1+r_0^2}{r_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r_0^{4k-2}\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r_0^{4k-4}$$

и

$$I(1,\psi^2)=\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_{2k-1}|^2\leqslant\frac{16}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r_0^{4k-4}+C,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|^2 r_0^{4k-4}\leqslant\frac{16}{3\pi}\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r_0^{4k-4}+C.$$

Полагая $r_0^2=r$, получаем неравенство (9_2).

Замечание. Для каждой индивидуальной функции $\varphi(z)\in S$ Хейманом [7] установлены предельные равенства вида

$$\lim_{r\to1}(1-r^2)\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|r^{2k-1}=\sqrt{\alpha}$$

и

$$\lim_{r\to1}(1-r^2)\sum_{k=1}^{\infty}|b_{2k-1}|^2 r^{2k-1}=\alpha.$$

Из них следует, что для каждой отдельно взятой функции $\varphi(z)\in S$ коэффициенты $\frac{8}{3\pi}$ и $\frac{16}{3\pi}$ неравенств (9) не являются наилучшими при $r\to1$ и $\alpha>0$. Однако надо иметь в виду, что эти неравенства являются *равностепенными для всего семейства нечетных функций* $\varphi(z)\in S$ *и* $0\leqslant r<1$.

(Поступило в редакцию 19/IX 1957 г.)

Литература

1. И. Е. Базилевич, О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций, Матем. сб., **28**(**70**) (1951), 147—164.
2. И. Е. Базилевич, О теоремах искажения в теории однолистных функций, Матем. сб., **28**(**70**) (1951), 283—292.
3. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М.— Л., Гостехиздат, 1951.
4. А. Ф. Бермант, О некоторых обобшениях принципа Э. Линделёфа и их применениях, Матем. сб., **20**(**62**) (1947), 55—112.
5. R. Nevanlinna, Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises, Övers. av Finska Vet. Soc. Förch. (1919), 62.
6. Н. А. Лебедев, Об областях значений функционалов, заданных на классах аналитических функций, Докторская диссертация, ЛГУ, 1955.
7. W. K. Hayman, The asymptotic behaviour of p-valent functions, Proc. London Math. Soc., **5**, № **19** (1955), 257—284.