Об одном методе начертательной геометрии

В. А. Маневич (Москва)

В настоящей работе рассматривается взаимно однозначное соответствие между точками пространства и парами точек на плоскости, основанное на свойствах линейного комплекса и нулевой системы. Это соответствие легло в основу предлагаемого ниже метода начертательной геометрии.

Рассмотрим два проективных пучка $|O| \overline{\wedge} |O'|$ (см. фиг. 1), которые лежат в разных плоскостях и у которых общий луч сам себе соответствует. На основании известной теоремы прямые, пересекающие соответственные лучи этих пучков, образуют линейный комплекс Σ, относительно которого устанавливается нулевая корреляция. Таким образом, благодаря проективным пучкам $|O|$ и $|O'|$ образуется нулевая система.

Пусть γ — произвольная плоскость, пересекающая плоскости α и β соответственно по прямым γ_α и γ_β,

$$\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta \equiv P \subset OO', \quad a \cap \gamma_\alpha \equiv M,$$

$$b \cap \gamma_\alpha \equiv N, \quad a' \cap \gamma_\beta \equiv M', \quad b' \cap \gamma_\beta \equiv N'.$$

Прямые MM' и NN', является лучами комплекса Σ, лежащими в плоскости γ, и потому они пересекаются в точке $Q \equiv MM' \cap NN'$, которая является нулевой точкой плоскости γ.

Повернем плоскости α и β около OO' до их совпадения; получим эпюр с осью OO'. Пучки $|O|$ и $|O'|$ при этом вращении останутся проективными, но будут лежать в одной плоскости — в плоскости эпюра, а так как общий луч OO' этих пучков сам себе соответствует, то $|O| \overline{\overline{\wedge}} |O'|$.

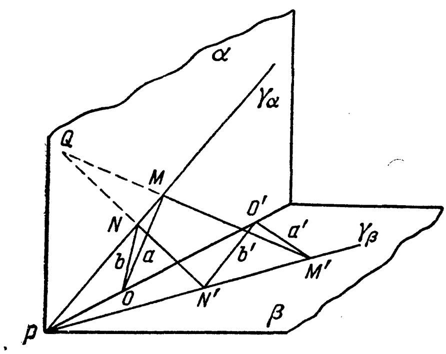
Пусть g — ось перспективы пучков $|O|$ и $|O'|$. Перспективные ряды γ_α и γ_β после вращения остались также перспективными, но центр их перспективы Q занял на эпюре новое положение Q_1. Будем считать точку Q_1 на эпюре соответствующей точке Q в пространстве. Однако, это соответствие не взаимно однозначно. В том случае, когда плоскость γ задается на эпюре своими следами γ_α и γ_β, можно построить единственную точку Q_1, соответствующую нулевой точке Q плоскости γ. Возьмем в плоскости эпюра произвольную точку K (см. фиг. 2) и посмотрим, сколько существует плоскостей в пространстве, нулевые точки которых отображаются в точку K, и какая зависимость существует между следами этих плоскостей на эпюре.

Возьмем произвольную точку $F \in OO'$. Поставим перед собой следующую задачу:

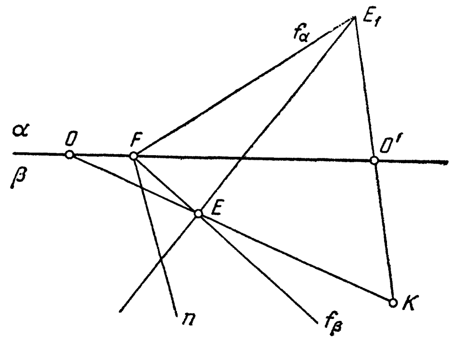
Существуют ли плоскости, проходящие через точку F, нулевые точки которых отображаются в точку K? Если такие плоскости существуют, найти их следы.

Решим эту задачу. Пусть n — произвольная прямая, проходящая через точку F. Посмотрим, может ли n быть следом искомой плоскости.

Для этого рассмотрим перспективные пучки $|O'|$ и $|K|$ с осью перспективы n. Так как $|O'|\,\overline{\overline{\wedge}}\,|O|$ с осью перспективы g, то $|O|\,\bar{\wedge}\,|K|$. Для того чтобы n была следом искомой плоскости, нужно, чтобы пучки $|O|$ и $|K|$ были перспективны. Пучки $|O|$ и $|K|$ будут перспективны в том случае, когда



Фиг. 1



Фиг. 2

общий луч OK сам себе соответствует; последнее возможно только в том случае, когда прямая n проходит через точку $E \equiv OK \cap g$. В этом случае второй след искомой плоскости будет проходить через точку $E_1 \equiv O'K \cap g$.

Таким образом, через произвольную точку F прямой OO' можно провести единственную плоскость f, нулевая точка которой будет отображаться в точку K. Прямая FE будет следом f_β, прямая FE_1 — следом f_α (так как $|O'|$ лежит в плоскости β, а $|O|$ — в плоскости α). Точки F и K вполне определяют на эпюре положение плоскости, нулевая точка которой отображается в точку K. Нетрудно видеть, что существует пучок плоскостей с осью EE_1 (где E и E_1 — следы этой прямой на плоскостях β и α), нулевые точки которых отображаются в точку K. Покажем, что произвольной точке пространства M соответствует на эпюре пара точек, одна из которых лежит на прямой OO'. Действительно, пусть μ — нулевая плоскость точки M, $\mu \cap OO' \equiv M'$. Так как плоскость μ — вполне определенная, можно построить, как было указано выше, единственную точку M_1, соответствующую точке M. Пара точек (M_1, M') — искомая.

Обратное тоже верно, т. е. произвольная пара точек (F, K), из которой $F \in OO'$, определяет единственную точку пространства. Действительно, точки F и K определяют следы единственной плоскости, нулевая точка которой отображается в точку K.

Если рассмотреть произвольную точку X_1 плоскости α, то ее нулевая плоскость будет проходить через точку O' и через прямую $O'X' \subset$ пл. β, соответствующую прямой OX_1. Таким образом, всякой точке X_1 плоскости α соответствует пара точек (X_1, O'). Если рассмотреть произвольную точку Y_1 плоскости β, то ее нулевая плоскость будет проходить через точку O и через прямую $OY' \subset$ пл. α, соответствующую прямой $O'Y_1$. Таким образом, всякой точке Y_1 плоскости β соответствует пара точек (Y_1, O).

Итак, существует взаимно однозначное соответствие между точками X пространства и парами точек (X_1, X') эпюра, где $X' \in OO'$.

Пусть MN — произвольная прямая, где M и N — следы этой прямой соответственно на плоскостях α и β. Посмотрим, как построить прямую, сопряженную прямой MN относительно линейного комплекса Σ.

Прямой OM пучка $|O|$ соответствует прямая m пучка $|O'|$; следовательно, плоскость Mm есть нулевая плоскость для точки M. Прямой $O'N$ пучка $|O'|$ соответствует прямая n пучка $|O|$; следовательно, плоскость Nn есть нулевая плоскость для точки N, $n \cap MO' \equiv M'$, $m \cap ON \equiv N'$. Прямая $M'N'$ является прямой пересечения плоскостей Mm и Nn и потому она сопряжена относительно комплекса Σ прямой MN. Построение точек M', N' на эпюре является очень простым.

Рассмотрим вопрос о представлении на эпюре произвольной прямой пространства. Пусть MN — произвольная прямая пространства, а $M'N'$ — прямая, сопряженная ей относительно линейного комплекса Σ. Тогда точки прямой MN являются нулевыми точками плоскостей, проходящих через прямую $M'N'$. Будем искать геометрическое место точек эпюра, соответствующих нулевым точкам плоскостей пучка $|M'N'|$ (см. фиг. 3).

Возьмем произвольную плоскость ζ пучка $|M'N'|$,

$$\zeta \cap OO' \equiv X, \quad \zeta_\alpha \cap g \equiv P, \quad \zeta_\beta \cap g \equiv K.$$

На основании вышеизложенного выводим, что точка $Y \equiv PO' \cap KO$ соответствует нулевой точке плоскости ζ. Когда плоскость ζ вращается около прямой $M'N'$, точка X пробегает прямую OO'. Имеем:

$$M'(M'X) \overline{\overline{\wedge}} g(P), \quad N'(N'X) \overline{\overline{\wedge}} g(K),$$

$$M'(M'X) \overline{\overline{\wedge}} N'(N'X);$$

следовательно,

$$g(P) \overline{\wedge} g(K),$$

$$O(OK) \overline{\overline{\wedge}} g(K), \quad O'(O'P) \overline{\overline{\wedge}} g(P),$$

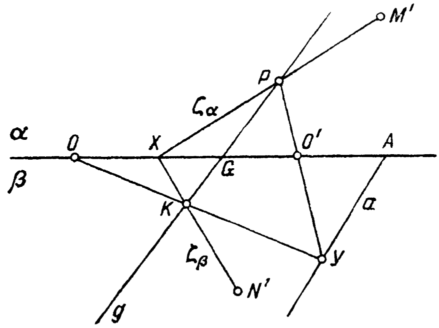
отсюда,

$$O(OK) \overline{\wedge} O'(O'P);$$

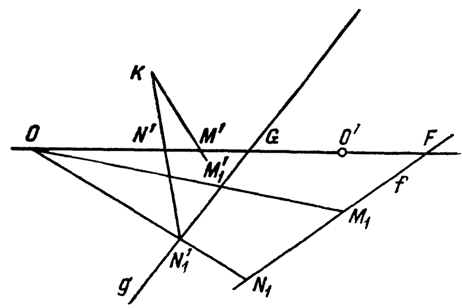
но у этих пучков луч OO' сам себе соответствует и потому $O(OK) \overline{\overline{\wedge}} O'(O'P)$. Пусть a — ось перспективы этих пучков: $a \cap OO' \equiv A$. $OO'(X) \overline{\overline{\wedge}} g(K)$ с центром перспективы в точке N'. $g(K) \overline{\overline{\wedge}} a(Y)$ с центром перспективы в точке O. Следовательно, $OO'(X) \overline{\wedge} a(Y)$, причем точке $G \equiv OO' \cap g$ ряда OO' соответствует точка $A \equiv a \cap OO'$ ряда a. Каждой паре соответственных точек проективных рядов a и OO' соответствует единственная точка прямой MN, и, наоборот, каждой точке прямой MN соответствует пара соответственных точек рядов OO' и a. Так как MN — произвольная прямая пространства, то все вышесказанное относится к любой прямой пространства.

Нетрудно заметить, что прямая a будет проходить через точки M и N, так как эти точки прямой MN отображаются на эпюр соответственно в пары (M, O') и (N, O).

Пусть между прямыми OO' и f, где f — произвольная прямая (см. фиг. 4), установлено проективное соответствие следующим образом: точке $F \equiv f \cap OO'$ ряда f соответствует точка $G \equiv OO' \cap g$ ряда OO', точкам M_1 и N_1 ряда f соответствуют точки M' и N' ряда OO' (M_1, N_1 — произвольные точки прямой f; M', N' — произвольные точки прямой OO'),



Фиг. 3



Фиг. 4

$$OO'(G, M', N', \ldots) \overline{\wedge} f(F, M_1, N_1, \ldots),$$

$$f(F, M_1, N_1, \ldots) \overset{=}{\wedge} g(G, M_1', N_1' \ldots)$$

с центром перспективы в точке O; следовательно,

$$g(G, M_1', N_1', \ldots) \overset{=}{\wedge} OO'(G, M', N', \ldots).$$

Пусть центром перспективы этих рядов будет точка K. Очевидно, точка K будет одним из следов прямой KZ (Z — второй след этой прямой, он находится аналогично; на основании вышеизложенного можно сказать, что K — след на плоскости β), сопряженная которой относительно Σ будет отображаться в проективные ряды

$$f(F, M_1, N_1, \ldots) \overline{\wedge} OO'(G, M', N', \ldots).$$

Между прямолинейными рядами f и OO' можно установить ∞^2 проективных соответствий, таких, что точке $F \in f$ соответствует точка $G \in OO'$. Следовательно, существует ∞^2 прямых, отображающихся в различные проективные соответствия между прямыми f и OO'. Так как прямых f в плоскости эпюра ∞^2, то существует ∞^4 проективных соответствий между прямыми эпюра f и прямой OO', которые отображают ∞^4 прямых пространства.

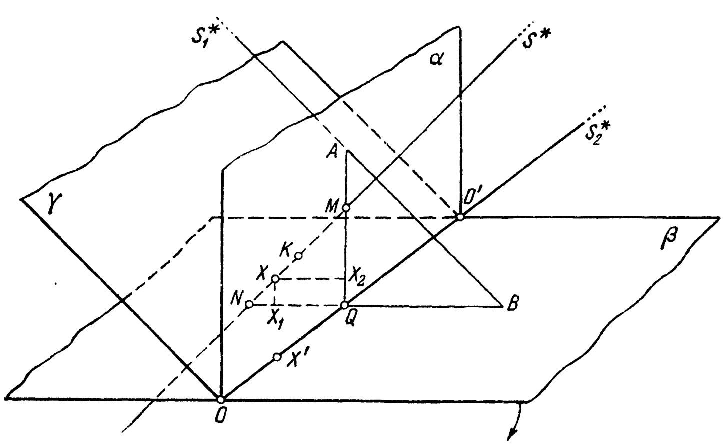
Итак, каждая прямая пространства отображается на эпюр в два проективных ряда, один из которых есть OO'.

Посмотрим, как изображаются на эпюре плоскости, проходящие через прямую OO'. OO' является лучом линейного комплекса, определяемого пучками $|O| \overline{\wedge} |O'|$; поэтому нулевые точки плоскостей пучка $|OO'|$ лежат на прямой OO'. Пусть M — произвольная точка прямой OO', а μ — нулевая плоскость этой точки; тогда $\mu \supset OO'$. Нулевая плоскость η точки $N \in \mu$ будет проходить через точку M; следовательно, произвольная точка N плоскости μ определяется на эпюре парой точек (N, M).

Таким образом, любая точка M прямой OO' определяет единственную плоскость пучка $|OO'|$ — плоскость μ, любая точка X которой представляется на эпюре парой точек (X_1, M). Это положение облегчает решение некоторых позиционных задач.

Выше было показано, что произвольной точке K эпюра соответствует пучок плоскостей, нулевые точки которых отображаются в точку K. Нулевые точки плоскостей, принадлежащих пучку, образуют прямолинейный ряд k. Точки этого прямолинейного ряда отображаются на эпюр в пары точек (K, X_i), где X_i — точки прямой OO'. Каждой прямой пространства соответствует на эпюре прямая: в данном случае (это соответствие вырождается) рассматриваемому прямолинейному ряду нулевых точек k соответствует на эпюре точка K. Точка $K(K, O)$ является следом прямой k на плоскости β, точка $K(K, O')$ является следом прямой k на плоскости α. Таким образом, точки пересечения прямой k с плоскостями α и β на эпюре совпадают с точкой K. Последнее говорит о том, что прямая k проходит через несобственную точку S^*, определяемую направлением перпендикуляра к биссекторной плоскости II-го и IV-го квадрантов.

Итак, пусть точке X пространства соответствует на эпюре пара точек (X_1, X'), тогда точка X_1 является проекцией на плоскость α (плоскость β) точки X из центра S^*. Если точку X_1 назвать главным изображением точки X, то можно сказать, что главное изображение на эпюре любой конфигурации пространства есть параллельная проекция ее из центра S^*.



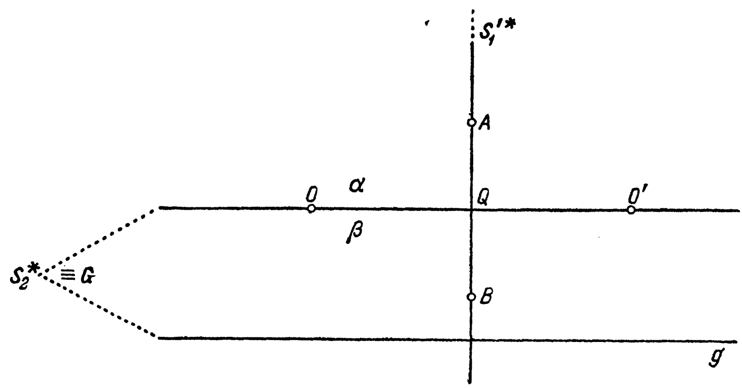
Фиг. 5

Пусть $QO = QO', Q \in OO'$, γ — нулевая плоскость точки Q (см. фиг. 5), являющаяся биссекторной плоскостью четных квадрантов. Возьмем прямую AB, лежащую в профильной плоскости, проходящей через точку Q, и параллельную плоскости γ, пл. $\gamma \cap AB \equiv S_1^*$. Возьмем прямую MN, лежащую в той же профильной плоскости, что и AB, и перпендикулярную к плоскости γ, $MN \cap$ пл. $\gamma \equiv K$,

$$OO'(O, O', Q, \ldots) \overline{\wedge} OO'(\beta, \alpha, \gamma, \ldots),$$

$$OO'(\beta, \alpha, \gamma, \ldots) \overline{\overline{\wedge}} AB(B, A, S_1^*, \ldots);$$

следовательно, $OO'(O, O', Q, \ldots) \overline{\wedge} AB(B, A, S_1^*, \ldots)$. На эпюре получим следующую картину (см. фиг. 6):



Фиг. 6

Прямая AB задана своими следами $A(A, O')$ и $B(B, O)$, причем $AB \cap OO' \equiv \equiv Q$, $AQ = BQ$; точка S_1^* спроектировалась в точку $S_1'^*$. Точке Q должна соответствовать точка $G \equiv OO' \cap g$ (g — ось перспективы пучков $|O|$ и $|O'|$); так как $AB(B, A, S_1'^*, Q) \overline{\wedge} OO'(O, O', Q, G)$, то $G \equiv S_2^*$, где S_2^* — несобственная точка прямой OO'.

Обратно, если имеется вышеуказанный эпюр, то точке Q ($OQ = O'Q$) соответствует нулевая плоскость γ, которая является биссекторной плоскостью четных квадрантов, так как она проходит через S_1^*.

Рассмотрим прямую MN:

$$MN(M, N, K, \ldots) \overline{\overline{\wedge}} OO'(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

следовательно,

$$MN(M, N, K, \ldots) \overline{\wedge} OO'(O', O, Q, \ldots)$$

и

$$MN(M, N, K, S^*) \overline{\overline{\wedge}} OO'(O', O, Q, S_2^*).$$

Так как несобственные точки рядов MN и OO' являются соответствующими, то рассматриваемые проективные ряды MN и OO' сохраняют простое отношение. Пусть X — произвольная точка прямой MN, X' — соответствующая точка на OO'; тогда $\frac{MX}{XN} = \frac{O'X'}{X'O}$. Если X_1 и X_2 — ортогональные проекции точки X соответственно на плоскости β и α, то $\frac{MX}{XN} = \frac{O'X'}{X'O} = \frac{XX_2}{XX_1}$. Последнее дает возможность легко переходить от задания точки в данном эпюре к заданию точки в эпюре Монжа.

Кратко остановимся на следующих метрических задачах.

1) Измерение отрезков. Пусть отрезок AB перпендикулярен пло-

скости β. Нетрудно видеть, что главное изображение этого отрезка A_1B_1 равно по длине самому отрезку AB. Итак, длина любого отрезка, перпендикулярного плоскости β, равна его главному изображению.

Аналогичное утверждение справедливо и для отрезков, перпендикулярных плоскости α. Вообще, так как главное изображение фигуры есть параллельная проекция оригинала на плоскость α (β) из точки S^*, то можно сказать, что длина любого отрезка, параллельного одной из плоскостей α или β, равна его главному изображению. Последнее дает возможность находить длину отрезка, занимающего произвольное положение в пространстве.

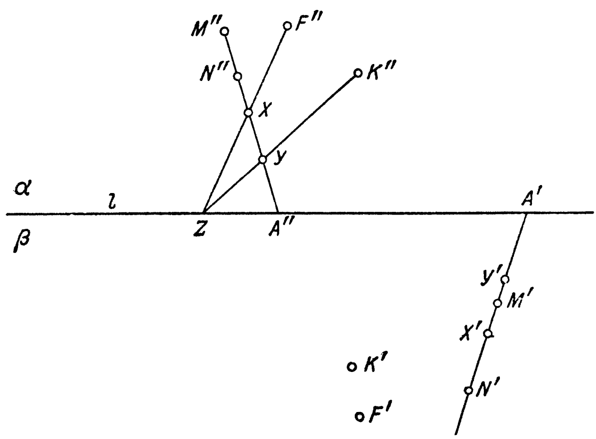
2) Перпендикулярность прямой к плоскости.

Задача. Через данную точку $A(A_1, A')$ провести перпендикуляр к плоскости $f(f_\alpha, f_\beta)$.

Решим эту задачу. Находим следы любой прямой M_α и N_β, перпендикулярной плоскости $f(f_\alpha, f_\beta)$. (Построение проводится так же, как в эпюре Монжа.) Прямая, проходящая через точку A_1 и параллельная прямой $M_\alpha N_\beta$, будет искомой (проективное соответствие, выделяемое искомой прямой, вполне определено).

С помощью рассматриваемого эпюра докажем следующую теорему:

Пять произвольных лучей (общего положения) линейного комплекса вполне определяют этот комплекс.



Фиг. 7

Доказательство. Пусть ось эпюра l есть луч линейного комплекса (см. фиг. 7). Четыре остальных луча линейного комплекса заданы с помощью своих следов на плоскостях α и β. Комплекс будет построен, если мы найдем положение прямой g и точек O и O'. Имеем:

$$M'N' \cap l \equiv A', \quad M''N'' \cap l \equiv A''.$$

Между прямыми $M'N'$ и $M''N''$ установим проективное соответствие

$$M'N'(M', N', A', \ldots) \overline{\wedge} M''N''(M'', N'', A'', \ldots). \tag{1}$$

Рассмотрим перспективное соответствие

$$F''(F''Z) \overline{\overline{\wedge}} K''(K''Z), \tag{2}$$

высекающее на $M''N''$ проективное соответствие

$$M''N''(X) \overline{\wedge} M''N''(Y).$$

В проективном соответствии (1) точке X соответствует точка X', точке Y — точка Y'. Соответствие между точками X' и Y' будет проективным, так как оно является произведением проективных соответствий (1) и (2). Имеем:

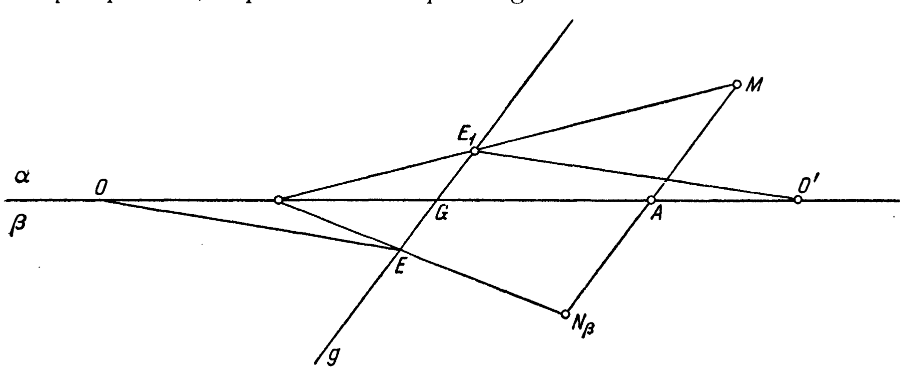
$$K'(K'Y') \overline{\wedge} F'(F'X').$$

Эти пучки высекают на прямой l проективное соответствие, в котором A' — двойная точка. Обозначим через O' вторую двойную точку этого проективного соответствия. Построенные выше соответствия определят на прямой l точку O, соответствующую точке O'. Вурф лучей $(OM'', ON'', OF'', OK'', l) = (O'M', O'N', OF', OK', l)$; следовательно, пучки $|O|$ и $|O'|$ перспективны; ось перспективы этих пучков g является искомой прямой. Комплекс построен.

Диаметры нуль-системы. Прямые, сопряженные относительно линейного комплекса несобственным прямым пространства, называются диаметрами нуль-системы. Пусть T^* — нулевая точка несобственной плоскости пространства. В силу инцидентности диаметры нуль-системы должны проходить через T^*, и потому они будут параллельны между собой. Посмотрим, как располагаются диаметры на эпюре. Следы несобственной плоскости совпадают с несобственной прямой плоскости эпюра.

Нулевые точки плоскостей, следы которых на эпюре совпадают, проектируются из S^* в точки прямой g. Следовательно, T^* проектируется из S^* на эпюр в несобственную точку прямой g.

Таким образом, диаметры рассматриваемой нуль-системы изображаются на эпюре прямыми, параллельными прямой g.



Фиг. 8

Проведем произвольную прямую OE и $O'E_1 \| OE$ (см. фиг. 8) (точки E и E_1 лежат на g). Тогда, очевидно, точки E_1 и E являются следами некоторого диаметра на плоскостях α и β. Имеем: $\triangle OGE \sim \triangle O'GE_1$. Следовательно,

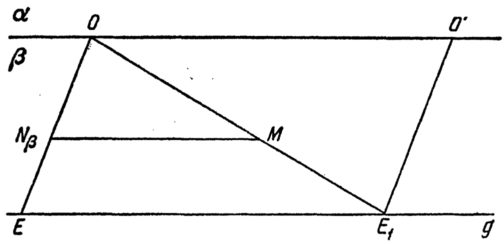
$$\frac{E_1G}{GE} = \frac{O'G}{GO}.$$

Пусть M и N_β — следы произвольного диаметра, $MN_\beta \cap OO' \equiv A$. Учитывая, что все диаметры параллельны между собой, имеем:

$$\frac{MA}{AN_\beta}=\frac{O'G}{GO}.$$

Эта формула дает возможность строить любой диаметр нуль-системы.

На эпюре, в котором $g \parallel OO'$, вышеприведенные построения примут следующий вид (см. фиг. 9):



Фиг. 9

$$\frac{MN_\beta}{E_1E}=\frac{MN_\beta}{O'O}=\frac{OM}{OE_1}.$$

Эта формула дает возможность строить любой диаметр на данном эпюре.

Ось нуль-системы (ось линейного комплекса). Диаметр нуль-системы, перпендикулярный к нулевым плоскостям своих точек, называется осью линейного комплекса или нуль-системы. Покажем, что линейный комплекс имеет единственную ось. Действительно, проведем плоскость, перпендикулярную диаметрам нуль-системы. Тогда прямая, сопряженная несобственной прямой этой плоскости, будет осью линейного комплекса или рассматриваемой нуль-системы.

Ниже приводится построение оси линейного комплекса на нашем эпюре (см. фиг. 10).

Теорема. *Линейный комплекс вполне определен своей осью и произвольным лучом.*

Доказательство. Пусть даны ось комплекса a и его произвольный луч l. Проведем через l две взаимно перпендикулярные плоскости α и β,

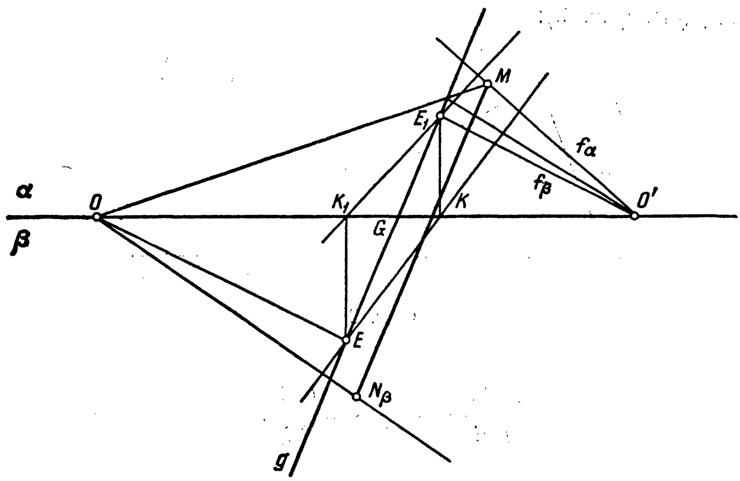
$$a \cap \text{пл.}\,\alpha \equiv M,$$

$$a \cap \text{пл.}\,\beta \equiv N_\beta.$$

Повернув плоскости α и β до их совмещения, получим эпюр с осью l (эпюр Монжа). Через точку M проведем плоскость $f\,(f_\alpha, f_\beta)$, перпендикулярную прямой MN_β, пл. $f \cap l \equiv O'$. Через точку N_β проводим прямую, параллельную прямой f_β, до пересечения с l в точке O. Пусть $OM \cap f_\beta \equiv K$. Через точку K проводим прямую g, параллельную MN_β. O, O' и g определяют линейный комплекс (так как определяют его эпюр).

На основании вышеизложенного определенный таким образом комплекс имеет MN_β своей осью, а $OO' \equiv l$ — своим лучом. Полученный комплекс не будет зависеть от выбора двух взаимно перпендикулярных плоскостей α и β.

В работе [1] доказано, что при приведении системы векторов к какой-либо точке главный вектор параллелен центральной оси (оси нуль-системы), а главный момент параллелен нормали к полярной плоскости (нулевой плоскости) точки приведения. Отсюда непосредственно вытекает построение

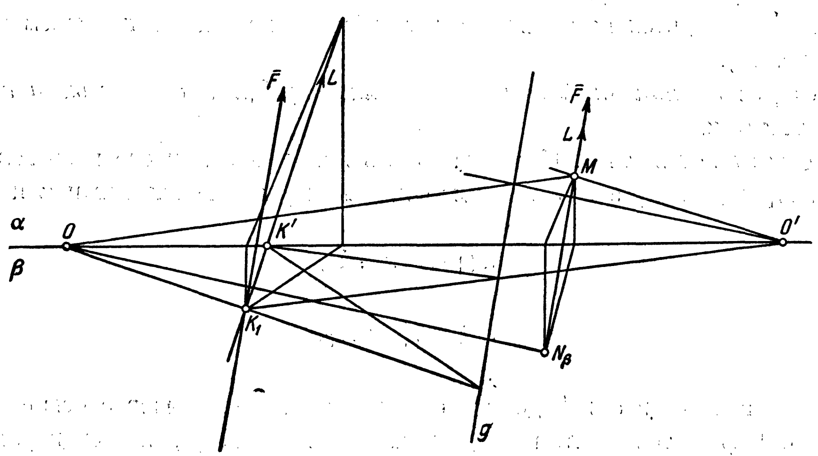


Фиг. 10

(M, O') (N_β, O) — следы оси линейного комплекса на плоскостях α и β

главного вектора и главного момента системы сил в произвольной точке пространства на эпюре (см. фиг. 11).

Известно также (см. [2]), что если система сил задана главным вектором и главным моментом, направленным по оси нуль-системы, то данную



Фиг. 11

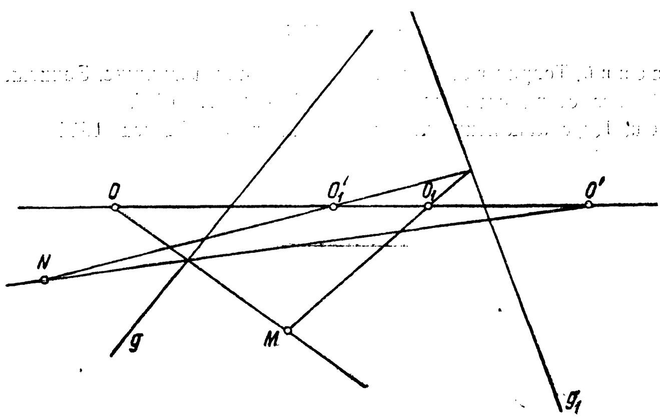
Приведение системы сил в произвольную точку $K(K_1, K')$

систему сил можно заменить двумя силами, из которых одна направлена по произвольной прямой, а другая — по прямой, сопряженной первой. Подобные замены можно просто осуществить на рассматриваемом эпюре.

Применение данного метода позволяет легко получить свойство линейной конгруэнции.

Действительно, линейную конгруэнцию можно задать на чертеже (см. фиг. 12) прямой OO', на которой имеется пара точек O_1, O_1', и прямыми g и g_1.

Прямая g и точки O, O' определяют некоторый линейный комплекс Σ; прямая g_1 и точки O_1, O_1' определяют другой линейный комплекс Σ_1. Общие лучи этих комплексов принадлежат линейной конгруэнции.



Фиг. 12

Возьмем на чертеже произвольную точку M. Лучу OM пучка $|O|$ соответствует луч $O'N$ пучка $|O'|$; лучу O_1M пучка $|O_1|$ соответствует луч $O_1'N$ пучка $|O_1'|$. Точки M и N являются следами некоторого луча линейной конгруэнции. Так как точка M была взята произвольно, то можно сказать, что на чертеже установлено взаимно однозначное точечное соответствие, в котором M и N — пара соответственных точек. Легко видеть, что это соответствие является коллинеацией с двойной прямой OO'.

Таким образом, получена известная теорема:

Два коллинеарных поля, линия пересечения которых сама себе соответствует, определяют линейную конгруэнцию.

Рассмотрим три пары перспективных пучков $|O| \overline{\overline{\wedge}} |O'|$, $|O_1| \overline{\overline{\wedge}} |O_1'|$, $|O_2| \overline{\overline{\wedge}} |O_2'|$, центры которых лежат на одной прямой (оси эпюра), а осями перспективы которых являются соответственно прямые g, g_1, g_2. Этими данными определяются три линейных комплекса, общие лучи которых принадлежат одной поверхности второго порядка F^2.

Геометрическое место точек X, для которых лучи пучков $|O'|$, $|O_1'|$, $|O_2'|$, соответствующие лучам OX, O_1X, O_2X, пересекаются в одной точке X', есть кривая второго порядка α^2. Точки X' образуют кривую второго порядка β^2 (это положение можно использовать для построения прибора, вычерчивающего кривые второго порядка). Кривые α^2 и β^2 являются следами поверхности F^2 соответственно на плоскостях α и β.

Таким образом, линейчатая поверхность второго порядка вполне определяется на эпюре тремя произвольными прямыми g, g_1, g_2 и тремя произвольными парами точек O, O'; O_1, O_1'; O_2, O_2', лежащих на одной прямой (оси эпюра).

Такое определение позволяет просто решать на эпюре позиционные задачи на линейчатые поверхности второго порядка.

(Поступило в редакцию 19/VII 1957 г.)

Литература

1. Н. Занчевский, Теория винтов и приложения ее к механике, Записки Матем. отд. Новороссийского об-ва естествоиспытателей, Одесса, 1889.
2. О. Дзиобек, Курс аналитической геометрии, ч. II, Одесса, 1912.