1959 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 48 (90), № 1

# Об устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя системы линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами

**Б. Ф. Былов** (Москва)

### Постановка задачи

Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j + F_i(t,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \qquad (0.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $a_{ij}(t)$ — непрерывные почти-периодические функции, а функции $F_i(t,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ непрерывны при $t \geqslant 0$ по совокупности переменных и удовлетворяют условиям

$$\left|F_i(t,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) - F_i(t,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n)\right| \leqslant \delta \sum_{j=1}^{n} |\bar{x}_j - x_j|,$$
$$F_i(t,\ 0,\ 0, \ldots, 0) = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n), \qquad (0.2)$$

где $\delta > 0$ — некоторая константа. Вместе с системой (0.1) рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n), \qquad (0.3)$$

для которой функции $F_i$ будем называть в о з м у щ а ю щ и м и.

Пусть $\{x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ — решение системы (0.3). Х а р а к т е р и с т и ч е с к и м п о к а з а т е л е м этого решения называется число

$$\lambda = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \frac{1}{t} \ln \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + \ldots + x_n^2(t)}.$$

Как известно, существует лишь конечная система чисел, являющихся характеристическими показателями линейной системы уравнений [1]. Обозначим через $\Lambda$ наибольший характеристический показатель системы (0.3).

Назовем наибольший характеристический показатель $\Lambda$ у с т о й ч и в ы м с в е р х у по о т н о ш е н и ю к в о з м у щ а ю щ и м ф у н к ц и я м рассматриваемого типа, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $F_i$, удовлетворяющих условиям (0.2), характеристический показатель любого решения системы (0.1) не превосходит величины $\Lambda + \varepsilon$.

В работе приводятся некоторые условия для матрицы коэффициентов системы (0.3), при выполнении которых наибольший характеристический показатель $\Lambda$ этой системы будет устойчив сверху.

## § 1. Предварительные замечания

1. Системы (0.1) и (0.3) будем записывать в матричном виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t, x), \tag{1.1}$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{1.2}$$

Смысл $A(t)$, $F(t, x)$ и $x$ в этой записи очевиден из предыдущего.

2. Введем обозначения:

A) $\sup\limits_{(i, j, t)} |a_{ij}(t)| = K$,

B) $\|x(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2(t)}$ ,

C) $\|A(t)\| = \max\limits_{(i, j)} \left\{ \sqrt{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}^2(t)}, \sqrt{\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_{\mu j}^2(t)} \right\}$.

3. Так как элементы матрицы $A(t)$ являются почти-периодическими функциями, то для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотная система $\varepsilon$-периодов матрицы $A(t)$, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $L$, что во всяком отрезке длины $L$ находится по крайней мере одно значение $\tau$, такое, что $\sup\limits_{-\infty<t<\infty} \|A(t+\tau) - A(t)\| \leqslant \varepsilon$.

4. Через $S(0)$ обозначим совокупность $\{x(t)\}$ решений системы (1.2), для каждого из которых $\|x(0)\| = 1$, а через $S(\tau)$ — совокупность $\{x(t, \tau)\}$ решений, таких, что $\|x(\tau, \tau)\| = 1$. Очевидно, что если $x(t, \tau) \in S(\tau)$, то найдется такое $x(t) \in S(0)$, что $x(t, \tau) = \dfrac{x(t)}{\|x(\tau)\|}$.

5. Легко убедиться, что при любом $\alpha > 0$ для каждого $x(t) \in S(0)$ будет выполняться неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant B(\alpha) e^{(\Lambda+\alpha)t},$$

где $B(\alpha)$ — некоторая константа, зависящая от величины $\alpha$, но не зависящая от выбранного решения $x(t) \in S(0)$.

6. Пусть $x(t) \in S(0)$. Положим тогда

$$p(t) = \frac{d}{dt} \ln \|x(t)\| = \frac{1}{2\|x(t)\|^2} \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i x_j. \tag{1.3}$$

Таким образом, каждому решению $x(t) \in S(0)$ соответствует некоторая функция $p(t)$. Не исключена возможность, что различным решениям соответствует одна и та же функция $p(t)$. Обозначим через $P$ совокупность функций $p(t)$. Заметим, что функции $p(t)$ ограничены в совокупности, как легко видеть из определяющего их равенства (1.3). Следовательно, для любой $p(t) \in P$

$$|p(t)| \leqslant \bar{p},$$

де $\bar{p}$ — некоторая константа. Из определения функций $p(t)$ вытекает также, что при любом $x(t) \in S(0)$

$$\| x(t) \| = e^{\int\limits_0^t p(\xi) d\xi},$$

где $p(t)$ — соответствующая этому решению функция из совокупности $P$. Так как $\Lambda$ — наибольший характеристический показатель системы (1.2), то для любой функции $p(t) \in P$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t p(\xi)\, d\xi = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \| x(t) \| \leqslant \Lambda, \tag{1.4}$$

причем для некоторых $p(t) \in P$ имеет место равенство.

7. Множество действительных чисел разобьем на два класса по следующим признакам: число $\alpha$ отнесем к первому классу, если существует такое $T \geqslant 0$, что для любой $p(t) \in P$ и любых $t$ и $\tau$ при $t - \tau \geqslant T$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\tau^t p(\xi)\, d\xi \leqslant (\Lambda + \alpha)(t - \tau). \tag{1.5}$$

Ко второму классу отнесем остальные действительные числа. Первый класс не пуст, так как при $\alpha \geqslant |\bar{p} - \Lambda|$ соотношение (1.5) выполняется при любых $t$ и $\tau$ $(t \geqslant \tau)$. Во второй класс входят все отрицательные числа, ибо выполнение (1.5) при некотором $\alpha < 0$ противоречило бы тому, что $\Lambda$ — наибольший характеристический показатель (ср. п. 6). Заметим далее, что если некоторое $\alpha_1$ принадлежит первому классу, то $\alpha > \alpha_1$ также принадлежит первому классу. Поэтому проведенное разбиение множества действительных чисел на два класса является сечением, определяющим некоторое $\alpha_0 \geqslant 0$, которое является точной нижней гранью чисел первого класса.

Определим функцию $T(\alpha)$ на множестве чисел первого класса, положив $T(\alpha)$ равной нижней грани тех $T$, для которых при $t - \tau \geqslant T$ имеет место (1.5).

Легко видеть, что и при $t - \tau \geqslant T(\alpha)$ неравенство (1.5) будет иметь место для любой $p(t) \in P$. При $\alpha \geqslant |\bar{p} - \Lambda|$ будем, в частности, иметь: $T(\alpha) = 0$. Из определения $T(\alpha)$ следует, что $T(\alpha)$ — невозрастающая функция $\alpha$.

8. Если $x(t, \tau) \in S(\tau)$ — некоторое решение системы (1.2), то

$$\| x(t, \tau) \| = e^{\int\limits_\tau^t p(\xi) d\xi},$$

где $p(t)$ — некоторая функция из совокупности $P$. Поэтому, как это следует из п. 7, при $\alpha > \alpha_0$ и $t - \tau \geqslant T(\alpha)$

$$\| x(t, \tau) \| \leqslant e^{(\Lambda+\alpha)(t-\tau)}.$$

Так как при $0 \leqslant t - \tau \leqslant T(\alpha)$

$$\| x(t, \tau) \| \leqslant e^{\bar{p}(t-\tau)} \leqslant e^{\bar{p}T(\alpha)},$$

то, полагая $B_1(\alpha) = e^{\bar{p}T(\alpha)}$, для всех $t \geqslant \tau$ будем иметь:

$$\| x(t, \tau) \| \leqslant B_1(\alpha) e^{(\Lambda+\alpha)(t-\tau)}. \tag{1.6}$$

Заметим, что константа $B_1(\alpha)$ не зависит ни от выбора решения $x(t, \tau) \in S(\tau)$, ни от самого $\tau$.

Пусть теперь $X(t)$ — какая-либо матрица, составленная из $n$ линейно независимых решений системы (1.2) (каждый столбец матрицы состоит из функций, образующих одно из линейно независимых решений). Известно, что $X(t, \tau) = X(t) X^{-1}(\tau)$ тоже является матрицей решений, причем $X(\tau, \tau) = E$.

Так как каждое из $n$ решений $\{x^{(i)}(t, \tau)\}$, порождающих матрицу $X(t, \tau)$, принадлежит совокупности $S(\tau)$, то из (1.6) вытекает, что

$$\| X(t, \tau) \| \leqslant B_2(\alpha) e^{(\Lambda+\alpha)(t-\tau)} \tag{1.7}$$

при $\alpha > \alpha_0$ и всех $t \geqslant \tau$. Из замечания, сделанного выше, следует, что $B_2(\alpha)$ не зависит ни от выбора исходной матрицы решений $X(t)$, ни от $\tau$. Особо отметим, что выполнения условия (1.7) для всех $\alpha > 0$ (т. е. для случая $\alpha_0 = 0$) достаточно для устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя системы (1.2) [2].

**9.** Пусть $\alpha < \alpha_0$ — произвольное число из второго класса и пусть $\alpha_1$ таково, что $\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$. Так как $\alpha_1$ принадлежит второму классу, то существует последовательность функций $\{p_i(t)\} \in P$ и соответствующая последовательность отрезков $[\tau_i, t_i]$, для которых

$$\int_{\tau_i}^{t_i} p_i(\xi)\, d\xi > (\Lambda + \alpha_1)(t_i - \tau_i) \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

в то же время $(t_i - \tau_i) \to \infty$ при $i \to \infty$. Для каждой функции $p_i(t)$ из указанной последовательности проведем разбиение полуоси $[0, \infty)$ на отрезки точками $\{h_k\}_i$, полагая при этом $h_0 = 0$.

Способ определения последующих значений $h_k$ укажем рекуррентно. Пусть $h_k$ найдено, тогда:

1) Если

$$\int_{h_k}^{h_k+1} p_i(\xi)\, d\xi \leqslant \Lambda + \alpha,$$

то положим $h_{k+1} = h_k + 1$.

2) Если

$$\int_{h_k}^{h_k+1} p_i(\xi)\, d\xi > \Lambda + \alpha,$$

то $h_{k+1}$ полагаем равным наименьшему из тех значений $t > h_k + 1$, для которых

$$\int_{h_k}^{t} p_i(\xi)\, d\xi = (\Lambda + \alpha)(t - h_k).$$

Если же такого значения $t$ нельзя указать, т. е. если для всех $t > h_k + 1$ окажется, что

$$\int_{h_k}^{t} p_i(\xi)\, d\xi > (\Lambda + \alpha)(t - h_k),$$

то процесс определения последующих точек разбиения на этом шаге заканчиваем. Последний из отрезков разбиения в этом случае будет иметь бесконечную длину.

Чтобы не усложнять обозначений, мы не вводим дополнительного индекса для точки $h_k$, указывающего на принадлежность ее к разбиению, соответствующему функции $p_i(t)$, но нужно помнить, что каждой функции $p_i(t)$ соответствует свое разбиение оси.

Докажем, что совокупность длин полученных таким образом отрезков не может быть ограниченной. Допустим противное, т. е., что существует константа $T$ такая, что для всех $i$ и $k$ $h_{k+1} - h_k \leqslant T$ (в этом случае при любом фиксированном $i$ не может получиться конечного числа точек разбиения). Для любой функции $p_i(t)$ из указанной последовательности при $t > \tau$ имеем в таком случае:

$$\int_{\tau}^{t} p_i(\xi)\, d\xi = \int_{\tau}^{h_\mu} p_i(\xi)\, d\xi + \sum_{k=\mu}^{k=\nu-1} \int_{h_k}^{h_{k+1}} p_i(\xi)\, d\xi + \int_{h_\nu}^{t} p_i(\xi)\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \bar{p}(h_\mu - \tau) + (\Lambda + \alpha)(h_\nu - h_\mu) + \bar{p}(t - h_\nu) = (\Lambda + \alpha)(t - \tau) -$$

$$-(\Lambda + \alpha)(t - h_\nu) + (\Lambda + \alpha)(\tau - h_\mu) + \bar{p}(h_\mu - \tau) + \bar{p}(t - h_\nu) \leqslant$$

$$\leqslant (\Lambda + \alpha)(t - \tau) + 2(|\Lambda| + |\alpha| + \bar{p})\, T$$

(здесь $h_\mu$ и $h_\nu$ — соответственно самая левая и самая правая точки разбиения, лежащие на отрезке $[\tau, t]$). Полагая $2(|\Lambda| + |\alpha| + \bar{p})T = B$, запишем предыдущую оценку следующим образом:

$$\int_{\tau}^{t} p_i(\xi)\, d\xi \leqslant (\Lambda + \alpha)(t - \tau) + B = \left(\Lambda + \alpha + \frac{B}{t - \tau}\right)(t - \tau).$$

Так как $\alpha < \alpha_1$, то можно указать такое $T_1 > 0$, что при $t - \tau \geqslant T_1$ будет выполняться неравенство

$$\alpha + \frac{B}{t - \tau} \leqslant \alpha_1.$$

Следовательно, для всех $p_i(t)$ из рассматриваемой последовательности при $t-\tau \geqslant T_1$ получим оценку:

$$\int_\tau^t p_i(\xi)\,d\xi \leqslant (\Lambda+\alpha_1)(t-\tau),$$

которая противоречит (1.8), так как при достаточно большом $i$ будет выполняться неравенство $t_i-\tau_i > T_1$.

Итак, совокупность длин отрезков разбиений для всевозможных $i$ не может быть ограниченной.

Результат предыдущих рассмотрений сформулируем в виде леммы, которая будет иметь существенное значение в дальнейшем.

Лемма. *Для всякого $\alpha<\alpha_0$ существуют последовательность функций $\{p_i(t)\}\in P$ и последовательность отрезков $[h_i,\ h_i+H_i]$ для которых*

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi)\,d\xi > (\Lambda+\alpha)(t-h_i) \tag{1.9}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots)$$

*при всех $t$ из сегмента*

$$h_i+1 \leqslant t \leqslant h_i+H_i,$$

*причем $H_i\to\infty$ при $i\to\infty$.* (Заметим, что «скорость» роста $H_i$ — длины отрезков — может предполагаться как угодно большой, так как любая подпоследовательность этих отрезков обладает тем же свойством.)

### § 2. Формулировка и доказательство теорем

Теорема 1. *Для того чтобы наибольший характеристический показатель $\Lambda$ системы (1.2) был устойчив сверху по отношению к возмущающим функциям рассматриваемого типа, необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_0=0$, т. е. чтобы для любого $\alpha>0$ существовала константа $B(\alpha)$, не зависящая от $\tau$ и такая, что*

$$\|X(t,\ \tau)\| \leqslant B(\alpha)\,e^{(\Lambda+\alpha)(t-\tau)}.$$

Достаточность этого условия была отмечена в п. 8. Докажем его необходимость.

Итак, пусть $\alpha_0\neq 0$. Тогда $\frac{\alpha_0}{2}$ принадлежит к числам второго класса (ср. п. 7) и, как это следует из леммы п. 9, существуют последовательность функций $\{p_i(t)\}\in P$ и последовательность отрезков $[h_i,\ h_i+H_i]$, для которых

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi)\,d\xi > \left(\Lambda+\frac{\alpha_0}{2}\right)(t-h_i) \tag{2.1}$$

при всех $t$ из сегмента

$$h_i+1 \leqslant t \leqslant h_i+H_i. \tag{2.2}$$

Последовательности функций $\{p_i(t)\}$ соответствует последовательность решений $\{x^{(i)}(t, h_i)\}$ системы (1.2), таких, что

$$x^{(i)}(t, h_i) \in S(h_i) \text{ и } \| x^{(i)}(t, h_i) \| = e^{\int\limits_{h_i}^{t} p_i(\xi) d\xi} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Для указанной последовательности решений имеем из (2.1) и предыдущего соотношения оценку

$$\| x^{(i)}(t, h_i) \| > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)(t - h_i)} \tag{2.3}$$

для всех $t$ из сегмента (2.2).

Очевидно, что при любом $i$ вектор $\overline{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t + h_i, h_i)$ является решением системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t + h_i)\, x, \tag{2.4}$$

причем $\| \overline{x}^{(i)}(0) \| = \| x^{(i)}(h_i, h_i) \| = 1$ и, как это вытекает из (2.3),

$$\| \overline{x}^{(i)}(t) \| = \| x^{(i)}(t + h_i, h_i) \| > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)t} \tag{2.5}$$

для всех $t$ из сегмента $1 \leqslant t \leqslant H_i$.

Не нарушая общности, можно считать, что последовательность индексов $i = 1, 2, \ldots$ такова, что

1) Последовательность матриц $\{A(t + h_i)\}$ сходится равномерно [3] на всей оси к некоторой почти-периодической матрице $\overline{A}(t)$.

2) Последовательность векторов $\overline{x}^{(i)}(0)$, определяющих начальные данные решений $\overline{x}^{(i)}(t)$, сходится к вектору $\overline{x}(0)$.

В противном случае можно использовать известный прием выбора подпоследовательности, обладающей требуемыми свойствами, с последующим изменением нумерации.

Рассмотрим «предельную» систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \overline{A}(t)\, x. \tag{2.6}$$

Через $\overline{x}(t)$ обозначим решение этой систеты, определенное вектором начальных данных $\overline{x}(0)$. Из определения системы (2.6) и выбора начальных данных вытекает, что на всяком конечном отрезке $[0, T]$ $(T \geqslant 1)$ равномерно по $t$ выполняется предельное соотношение

$$\overline{x}(t) = \lim_{i \to \infty} \overline{x}^{(i)}(t).$$

Так как при всех достаточно больших $i$ $H_i > T$, то из (2.5) следует, что

$$\| \overline{x}(t) \| > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)t} \tag{2.7}$$

при $1 \leqslant t \leqslant T$. В силу произвольности $T$ отсюда, в свою очередь, вытекает, что (2.7) выполняется при любых $t \geqslant 1$. Поэтому характеристический показатель решения $x(t)$ не менее $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$, и, следовательно, наибольший характеристический показатель системы (2.6) не менее величины $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$.

Рассмотрим теперь последовательность систем

$$\frac{dx}{dt} = \bar{A}(t - h_i)\,x \quad (i = 1,\ 2, \ldots), \tag{2.8}$$

полученных из (2.6) сдвигом времени на величину $-h_i$. Этот сдвиг, очевидно, не может изменить величины характеристических показателей, так что каждая из систем (2.8) имеет наибольший характеристический показатель не меньший, чем $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$.

Запишем каждую из систем последовательности (2.8) в таком виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + F^{(i)}(t,\ x), \tag{2.9}$$

где

$$F^{(i)}(t,\ x) = [\bar{A}(t - h_i) - A(t)]\,x.$$

Так как равномерно по $t$ имело место соотношение

$$\|\bar{A}(t) - A(t + h_i)\| \to 0 \quad \text{при } i \to \infty,$$

то и $\|\bar{A}(t - h_i) - A(t)\| \to 0$ равномерно на всей оси при $i \to \infty$. Поэтому векторы $F^{(i)}(t,\ x)$ удовлетворяют условиям (0.2), в которых константа $\delta$ при достаточно больших $i$ может предполагаться как угодно малой. Тем не менее, как уже было отмечено выше, наибольший характеристический показатель каждой из систем (2.9) не менее, чем $\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}$. Это свидетельствует о том, что наибольший характеристический показатель системы (1.2) в случае $\alpha_0 \neq 0$ не будет устойчивым сверху, что и доказывает необходимость условий теоремы 1.

Теорема 2. *Если матрица $A(t)$ системы* (1.2) *такова, что для некоторого $\gamma > 0$ существует последовательность чисел $\{L_i\} \to \infty$ таких, что в каждом отрезке длины $L_i$ находится по крайней мере одно значение $\tau_i$, для которого*

$$\|A(t + \tau_i) - A(t)\| \leqslant \varepsilon_i, \ \textit{где}\ \varepsilon_i = e^{-\gamma L_i}, \tag{2.10}$$

*то наибольший характеристический показатель $\Lambda$ системы* (1.2) *устойчив сверху.*

В силу замечания, сделанного в конце п. 8, достаточно показать, что при выполнении условий теоремы будем иметь $\alpha_0 = 0$.

Допустим противное, т. е., что $\alpha_0 \neq 0$. Выберем такое $N$, чтобы выполнялось неравенство

$$2\alpha_0 - \frac{\gamma(N-2)}{8} < 0. \tag{2.11}$$

Так как число $\alpha_0+\frac{\alpha_0}{N}$ принадлежит первому классу, то при $t-\tau\geqslant \geqslant T\left(\alpha_0+\frac{\alpha_0}{N}\right)$ для любой функции $p(t)\in P$ имеем в силу п. 7:

$$\int_\tau^t p(\xi)\,d\xi\leqslant\left(\Lambda+\alpha_0+\frac{\alpha_0}{N}\right)(t-\tau). \tag{2.12}$$

По условию $\{L_i\}\to\infty$, поэтому для достаточно больших $i$

$$L_i>T\left(\alpha_0+\frac{\alpha_0}{N}\right)\quad\text{и}\quad L_i>1. \tag{2.13}$$

Очевидно, не нарушая общности, можно считать неравенства (2.13) выполняющимися для всех $i=1,\ 2,\ \ldots$.

Число $\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}$ принадлежит второму классу, поэтому, в силу леммы п. 9, можно для любого $i$ указать такую функцию $p_i(t)\in P$ и такой отрезок $[h_i,\ h_i+H_i]$, что

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi)\,d\xi>\left(\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}\right)(t-h_i) \tag{2.14}$$

для всех $t$, удовлетворяющих неравенству

$$h_i+1\leqslant t\leqslant h_i+H_i, \tag{2.15}$$

причем $H_i\geqslant\frac{8L_i}{N-2}+2L_i$.

Пусть $\tau_i$ — значение, при котором выполнено (2.10), и

$$L_i\leqslant\tau_i-h_i\leqslant 2L_i. \tag{2.16}$$

Тогда

$$\int_{h_i}^t p_i(\xi)\,d\xi=\int_{h_i}^{\tau_i} p_i(\xi)\,d\xi+\int_{\tau_i}^t p_i(\xi)\,d\xi\geqslant$$

$$\geqslant\left(\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}\right)(t-h_i) \tag{2.17}$$

для всех $t$ из сегмента (2.15). Используя (2.17) и (2.12) вместе с (2.13) и (2.16), получим для тех же значений $t$:

$$\int_{\tau_i}^t p_i(\xi)\,d\xi>\left(\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}\right)(t-h_i)-\int_{h_i}^{\tau_i} p_i(\xi)\,d\xi\geqslant$$

$$\geqslant\left(\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}\right)(t-\tau_i)+\left(\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}\right)(\tau_i-h_i)-$$

$$-\left(\Lambda+\alpha_0+\frac{\alpha_0}{N}\right)(\tau_i-h_i)=\left(\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}\right)(t-\tau_i)-$$

$$-\frac{2\alpha_0}{N}(\tau_i-h_i)=\left[\Lambda+\alpha_0-\frac{\alpha_0}{N}-\frac{2\alpha_0(\tau-h_i)}{N(t-\tau_i)}\right](t-\tau_i). \tag{2.18}$$

Положим

$$t_i = \frac{8L_i}{N-2} \text{ и } t_i^* = \tau_i + t_i. \tag{2.19}$$

Так как $h_i + L_i \leqslant \tau_i \leqslant h_i + 2L_i$ и $L_i \geqslant 1$, то

$$h_i + 1 \leqslant t_i^* \leqslant h_i + \frac{8L_i}{N-2} + 2L_i \leqslant h_i + H_i.$$

Следовательно, $t_i^*$ принадлежит отрезку (2.15). Вместе с тем, при $t = t_i^*$ имеем из (2.16) и (2.19):

$$\frac{\alpha_0}{N} + \frac{2\alpha_0(\tau_i - h_i)}{N(t_i^* - \tau_i)} \leqslant \frac{\alpha_0}{N} + \frac{2\alpha_0}{N} \cdot \frac{2L_i(N-2)}{8L_i} = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Поэтому неравенства (2.18) при $t = t_i^*$ можно записать в таком виде:

$$\int_{\tau_i}^{t_i^*} p_i(\xi)\, d\xi > \left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right)(t_i^* - \tau_i) = \left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right) t_i. \tag{2.20}$$

Пусть теперь $\{x^{(i)}(t, \tau_i)\}$ — последовательность решений системы (1.2), таких, что

$$x^{(i)}(t, \tau_i) \in S(\tau_i) \text{ и } \| x^{(i)}(t, \tau_i) \| = e^{\int_{\tau_i}^{t} p_i(\xi) d\xi}. \tag{2.21}$$

Очевидно, что каждый из векторов последовательности $\{\overline{x}^{(i)}(t)\}$, определенных равенствами $\overline{x}^{(i)}(t) = x^{(i)}(t + \tau_i, \tau_i)$, является решением системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t + \tau_i)\, x \tag{2.22}$$

при соответствующем значении индекса $i$. При этом

$$\| \overline{x}^{(i)}(0) \| = \| x^{(i)}(\tau_i, \tau_i) \| = 1$$

и, в силу неравенства (1.6),

$$\| \overline{x}^{(i)}(t) \| = \| x^{(i)}(t + \tau_i, \tau_i) \| \leqslant B_1(2\alpha_0)\, e^{(\Lambda + 2\alpha_0)t}. \tag{2.23}$$

В то же время при $t = t_i = \frac{8L_i}{N-2}$, используя (2.19) и (2.20), получим:

$$\| \overline{x}^{(i)}(t_i) \| = \| x^{(i)}(t_i + \tau_i, \tau_i) \| = e^{\int_{\tau_i}^{t_i^*} p_i(\xi) d\xi} > e^{\left(\Lambda + \frac{\alpha_0}{2}\right) t_i}. \tag{2.24}$$

Каждую из систем (2.22) представим в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + [A(t+\tau_i) - A(t)]\,x \tag{2.25}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть $\{x^{(i)}(t)\}$ — последовательность решений системы (1.2), для каждого из которых $x^{(i)}(0) = \overline{x}^{(i)}(0)$. Тогда при любом $i$ вектор $\overline{x}^{(i)}(t)$ удовлетворяет соответствующему интегральному уравнению

$$\overline{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t) = \int_0^t X(t,\ \tau)\,[A(\tau+\tau_i) - A(\tau)]\,\overline{x}^{(i)}(\tau)\,d\tau.$$

Используя (2.10), (2.23) и (1.7), получим:

$$\|\,\overline{x}^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)\,\| \leqslant B_1(2\alpha_0)\,B_2(2\alpha_0)\int_0^t e^{(\Lambda+2\alpha_0)(t-\tau)}\varepsilon_i e^{(\Lambda+2\alpha_0)\tau}d\tau =$$

$$= Cte^{(\Lambda+2\alpha_0)t}e^{-\gamma L_i} \tag{2.26}$$

(здесь положено $C = B_1(2\alpha_0)\cdot B_2(2\alpha_0)$). Полагаем теперь в (2.26) $t = t_i = \frac{8L_i}{N-2}$; тогда

$$\|\,\overline{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\,\| \leqslant Ct_ie^{\left[\Lambda+2\alpha_0-\frac{\gamma(N-2)}{8}\right]t_i}.$$

Так как, в силу выбора $N$, $2\alpha_0 - \frac{\gamma(N-2)}{8} < 0$, то из предыдущей оценки следует, что

$$\lim_{i\to\infty}\|\,\overline{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\,\|\,e^{-\Lambda t_i} = 0. \tag{2.27}$$

С другой стороны, используя (2.24) и п. 5, выводим:

$$\|\,\overline{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\,\|\,e^{-\Lambda t_i} \geqslant \{\,\|\,\overline{x}^{(i)}(t_i)\,\| - \|\,x^{(i)}(t_i)\,\|\}\,e^{-\Lambda t_i} >$$

$$> \left\{e^{\left(\Lambda+\frac{\alpha_0}{2}\right)t_i} - B\left(\frac{\alpha_0}{4}\right)e^{\left(\Lambda+\frac{\alpha_0}{4}\right)t_i}\right\}e^{-\Lambda t_i} =$$

$$= e^{\frac{\alpha_0}{2}t_i}\left(1 - B\left(\frac{\alpha_0}{4}\right)e^{-\frac{\alpha_0}{4}t_i}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{i\to\infty}\|\,\overline{x}^{(i)}(t_i) - x^{(i)}(t_i)\,\|\,e^{-\Lambda t_i} = \infty. \tag{2.28}$$

Сравнивая (2.27) и (2.28), получаем противоречие, которое получено в результате предположения о том, что $\alpha_0 \neq 0$. Следовательно, $\alpha_0 = 0$. Если учесть сделанное в конце п. 8 замечание, то доказательство теоремы этим завершается.

(Поступило в редакцию 2/IX 1957 г.)

### Литература

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
2. Б. Ф. Былов, Устойчивость характеристических показателей систем линейных дифференциальных уравнений, Диссертация, Москва, МГУ, 1954.
3. S. Bochner, Beitrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, Math. Ann., **96** (1927), 119—147; 383—409.