МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

НОВАЯ СЕРИЯ

ТОМ СОРОК ВОСЬМОЙ
ВЫПУСК ВТОРОЙ
Т. 48 (90) : 2

ИЮНЬ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959

К вопросу о последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений

А. Ф. Леонтьев (Москва)

Обозначим через $y_j(z, \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ какие-нибудь линейно независимые решения уравнения

$$\sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\, y^{(s-j)}(z) = \lambda^s y, \tag{1}$$

где $Q_j(z)$ — некоторые аналитические функции и λ — параметр (вообще говоря, комплексный). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — какая-нибудь последовательность значений параметра λ. В работе [1] (в ней вместо λ^s в правой части (1) стоит λ, что несущественно) указаны некоторые свойства последовательностей линейных агрегатов

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{s} a_{kj}^{(n)} y_j(z, \lambda_k) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

($a_{kj}^{(n)}$ — постоянные), составленных из решений $y_j(z, \lambda_k)$, которые равномерно сходятся в круге $|z - z_0| < r$, причем радиус r предполагается большим определенной величины, зависящий от $\{\lambda_n\}$ и коэффициентов $Q_j(z)$. В частности, там показано, что если $Q_j(z)$ — целые функции, причем $Q_0(z)$ нигде не обращается в нуль (в этом случае все $y_j(z, \lambda_k)$ — целые функции), и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k} = 0, \tag{3}$$

то из сходимости последовательности (2) в некоторой области следует, что область существования D предельной функции $P(z)$ этой последовательности односвязна. В зависимости от $\{\lambda_k\}$ и $Q_j(z)$ область D может иметь ту или иную форму: она может быть полуплоскостью, полосой, внутренностью эллипса, параболы и т. д.

Рассмотрим, например, уравнение

$$y'' - z^2 y = -(2n+1)\, y.$$

Ему удовлетворяет функция

$$h_n(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}),$$

где $H_n(z)$ — полином Чебышева—Эрмита. Возьмем в качестве $y_1(z, \lambda_k)$ функции $h_{n_k}(z)$ $(\lambda_k^2 = -(2n_k+1))$. Доказывается, что если, кроме условия (3), которое в нашем случае принимает вид

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n_k}} = 0, \tag{3'}$$

выполняется дополнительное условие

$$\sqrt{2n_{k+1}+1} - \sqrt{2n_k+1} > \mu > 0, \tag{4}$$

то из сходимости последовательности

$$P_m(z) = \sum_{k=1}^{p_m} a_k^{(m)} h_{n_k}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

в некоторой области следует, что область существования D предельной функции $P(z)$ представляет собой горизонтальную полосу (без условия (4) можно утверждать на основе предыдущего только то, что D — односвязная область). Более того, при указанных условиях последовательность (5) сама обязательно сходится в некоторой горизонтальной полосе; эта полоса может быть меньше полосы D. Во всей полосе D к $P(z)$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k h_{n_k}(z), \tag{6}$$

где $a_k = \lim\limits_{m\to\infty} a_k^{(m)}$. В этом результате, как частный случай, содержится известная теорема Е. Хилла [2] о том, что при условиях (3′) и (4) область сходимости произвольного ряда (6) совпадает с областью существования суммы ряда и представляет собой горизонтальную полосу.

Отмеченные результаты указывают на большую аналогию между последовательностями (5), в частности рядами (6), с одной стороны, и последовательностями полиномов Дирихле, в частности рядами Дирихле, с другой стороны. В самом деле, для последовательностей полиномов Дирихле имеет место, например, следующая теорема ([3], [4]) (будем называть ее в дальнейшем теоремой А):

Если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$ *и последовательность полиномов Дирихле*

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \left(a_k^{(n)} e^{-\lambda_k z} + b_k^{(n)} e^{\lambda_k z}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

(полезно отметить, что функции $e^{\pm\lambda z}$ удовлетворяют уравнению $y'' = \lambda^2 y$) *равномерно сходится внутри области G, содержащей вертикальный замкнутый отрезок длины $2\pi\sigma$, то эта последовательность равномерно сходится внутри некоторой вертикальной полосы (указанный выше отрезок содержится в этой полосе).*

Предельная функция $P(z)$ является регулярной в некоторой вертикальной полосе, причем в каждом замкнутом отрезке граничных вертикальных прямых длины $2\pi\sigma$ у $P(z)$ есть хотя бы одна особая точка.

То, что говорилось относительно последовательности (5), соответствует случаю $\sigma = 0$.

Подмеченная аналогия между свойствами последовательностей (5) и (7) привела к мысли, что теорему А можно перенести в соответствующем виде на последовательность (5) и при $\sigma \neq 0$ и, кроме того, можно отказаться от ограничения (4). Использованный в статье [1] общий метод исследования не позволил (по крайней мере до сих пор) заключить о правильности этого предположения.

В настоящей заметке с помощью другого метода показывается, что ряд результатов относительно последовательностей полиномов Дирихле, в частности отмеченную выше теорему А, действительно можно перенести на последовательности (5); более того, показывается, что эти результаты можно перенести на последовательности линейных агрегатов, образованных из решений уравнения

$$y'' + q_1(z)\, y = \lambda_n^2\, y, \tag{8}$$

где $q_1(z)$ — целая функция.

В основе этого перенесения лежит тесная связь между решениями уравнения (8) и решениями простейшего уравнения

$$y'' = \lambda_n^2\, y \tag{9}$$

(частными решениями уравнения (9) являются функции $e^{\pm\lambda_n z}$). Эта связь выражается формулой (см. монографию Б. Я. Левина [5], стр. 553)

$$f(z) = \varphi(z) + \int_{-z}^{z} K(z, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{10}$$

где $f(z)$ и $\varphi(z)$ — любые решения соответственно уравнений (8) и (9), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям в точке $z = 0$, и $K(z, t)$ — ядро, которое зависит только от $q_1(z)$. Операторы преобразования вида (10) первоначально рассматривались в действительной области (указания на литературу см. в [5]). Б. Я. Левин показал, что если $q_1(z)$ — целая функция, то ядро $K(z, t)$ — целая функция переменных z и t и формула (10) имеет место во всей плоскости комплексного переменного z. По линии применения формулы (10) в комплексной области он же показал, как, исходя из теорем о полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ — системы решений уравнения (9) — в комплексной области, можно получить аналогичные теоремы о полноте системы решений уравнения (8). Тем же приемом пользуемся и мы в настоящей заметке.

Итак, рассмотрим оператор

$$F(z) = A(\Phi) = \Phi(z) + \int_{-z}^{z} K(z, t)\, \Phi(t)\, dt.$$

Каждой функции $\Phi(z)$, аналитической в области, симметричной и звездообразной относительно начала (такой области одновременно принадлежат точки z, $-z$ и соединяющий их прямолинейный отрезок), соответствует функция $F(z)$, аналитическая в той же области. Оператор $A(\Phi)$, как легко доказывается известным приемом, обратим, т. е. каждой функции $F(z)$, аналитической в области D, симметричной и звездообразной относительно начала, соответствует единственная функция $\Phi(z)$ такая, что $A(\Phi) = F(z)$.

Оператор, обратный оператору $A(\Phi)$, обозначим через $B(F)$. Отметим, что этот оператор является непрерывным.

Обозначим теперь через $y_n(z)$ и $y_{-n}(z)$ какие-нибудь два линейно независимых решения уравнения

$$y'' + q(z)\, y = \lambda_n^2 y \tag{11}$$

($q(z)$ — целая функция) и рассмотрим последовательность агрегатов

$$Q_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [\alpha_j^{(n)} y_j(z) + \beta_j^{(n)} y_{-j}(z)] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Мы покажем, что если эта последовательность равномерно сходится внутри какой-нибудь области G, симметричной и звездообразной относительно какой-нибудь точки z_0, то внутри той же области равномерно сходится и некоторая последовательность полиномов Дирихле, определенным образом связанная с первой последовательность, и обратно.

Итак, пусть последовательность (12) равномерно сходится внутри области G, симметричной и звездообразной относительно точки z_0. Тогда последовательность

$$Q_n(z + z_0) = \sum_{j=1}^{p_n} [\alpha_j^{(n)} y_j(z + z_0) + \beta_j^{(n)} y_{-j}(z + z_0)] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится внутри области G_1, полученной из G путем сдвига последней на вектор $- z_0$. Область G_1 симметрична и звездообразна относительно начала, функции $y_j(z + z_0)$ и $y_{-j}(z + z_0)$ суть решения уравнения (8):

$$y'' + q_1(z)\, y = \lambda_j^2 y, \qquad q_1(z) = q(z + z_0).$$

Пусть $\psi_j(z)$ и $\psi_{-j}(z)$ — те (линейно независимые) решения этого уравнения, которые (см. (10)) удовлетворяют условиям

$$\psi_j(z) = A(e^{\lambda_j z}) \qquad \psi_{-j}(z) = A(e^{-\lambda_j z}).$$

Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} y_j(z + z_0) &= a_j \psi_j(z) + b_j \psi_{-j}(z), \\ y_{-j}(z + z_0) &= c_j \psi_j(z) + d_j \psi_{-j}(z) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

и

$$Q_n(z + z_0) = \sum_{j=1}^{p_n} [(\alpha_j^{(n)} a_j + \beta_j^{(n)} c_j)\, \psi_j(z) + (\alpha_j^{(n)} b_j + \beta_j^{(n)} d_j)\, \psi_{-j}(z)] \tag{13}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Так как $e^{\lambda_j z} = B(\psi_j)$, $e^{-\lambda_j z} = B(\psi_{-j})$, причем оператор B непрерывен, и последовательность (13) равномерно сходится внутри C_1, то последовательность полиномов Дирихле

$$R_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [(\alpha_j^{(n)} a_j + \beta_j^{(n)} c_j) e^{\lambda_j z} + (\alpha_j^{(n)} b_j + \beta_j^{(n)} d_j) e^{-\lambda_j z}] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится внутри области G_1. Заменяя z на $z - z_0$, получим, что искомая последовательность полиномов Дирихле

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [(\alpha_j^{(n)} a_j + \beta_j^{(n)} c_j) e^{-\lambda_j z_0} e^{\lambda_j z} + (\alpha_j^{(n)} b_j + \beta_j^{(n)} d_j) e^{\lambda_j z_0} e^{-\lambda_j z}] \qquad (14)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится внутри исходной области G.

Проведя рассуждения в обратном порядке, убедимся, что если последовательность (14) равномерно сходится внутри области G, то внутри этой же области равномерно сходится и последовательность (12). Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Внутри области G, симметричной и звездообразной относительно точки z_0, последовательности* (12) *и* (14) *одновременно равномерно сходятся.*

На основании этой теоремы уже нетрудно распространить на последовательности (12) ряд результатов, установленных относительно последовательностей полиномов Дирихле. Например, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$ *и последовательность* (12) *равномерно сходится внутри области D, содержащей вертикальный замкнутый отрезок длины $2\pi\sigma$. Тогда эта последовательность равномерно сходится внутри некоторой вертикальной полосы* $\alpha < \mathcal{R}(z) < \beta$.

Для доказательства обозначим через z_0 середину отрезка, о котором говорится в формулировке теоремы, и через G — звездообразную и симметричную относительно точки z_0 область, содержащуюся в D и содержащую этот отрезок. По условию внутри G последовательность (12) сходится равномерно. По теореме 1 внутри G равномерно сходится последовательность (14). Последовательность (14), на основании указанной выше теоремы А, сходится тогда равномерно внутри некоторой вертикальной полосы E, содержащей точку z_0. Если D_1 — вертикальная полоса, содержащаяся в E и симметричная относительно точки z_0, то внутри нее, согласно теореме 1, равномерно сходится последовательность (12). Итак, из равномерной сходимости последовательности (12) внутри D вытекает равномерная сходимость этой последовательности внутри некоторой вертикальной полосы. Отсюда, далее, следует, что существует максимальная вертикальная полоса $\alpha < \mathcal{R}(z) < \beta$, внутри которой последовательность (12) сходится равномерно; внутри любой области, содержащей вертикальный замкнутый отрезок границы этой полосы длины $2\pi\sigma$, последовательность уже не сходится равномерно. Теорема доказана полностью.

Опираясь на другие теоремы относительно последовательностей полиномов Дирихле, можно показать, что: 1) предельная функция $Q(z)$ последовательности (12) регулярна в полосе $\alpha_1 < \mathscr{R}(z) < \beta_1$, где $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\beta_1 \geqslant \beta$, причем в каждом отрезке граничных прямых длины $2\pi\sigma$ у $Q(z)$ есть хотя бы одна особая точка; 2) существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_j^{(n)} = \alpha_j$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_j^{(n)} = \beta_j$; 3) если $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \mu > 0$, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} [\alpha_j y_j(z) + \beta_j y_{-j}(z)]$ сходится к $Q(z)$ во всей полосе регулярности $\alpha_1 < \mathscr{R}(z) < \beta_1$, и т. д.

Путем замены в уравнении (8) переменного z на iz получим, что если λ_n — чисто мнимые: $\lambda_n = i \mid \lambda_n \mid$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma$, то из равномерной сходимости последовательности (12) в области D, содержащей горизонтальный отрезок длины $2\pi\sigma$, следует равномерная сходимость этой последовательности в некоторой горизонтальной полосе.

Для функций Чебышева—Эрмита $h_{n_k}(z)$ имеем: $\lambda_k = i\sqrt{2n_k + 1}$, и, следовательно, соответствующий результат формулируется так:

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{2n_k+1}} = \sigma$ *и последовательность*

$$P_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} c_j^{(m)} h_{n_j}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится в области, содержащей горизонтальный отрезок длины $2\pi\sigma$, *то эта последовательность сходится в некоторой горизонтальной полосе* $\alpha < \mathscr{I}(z) < \beta$.

Кроме того, можно отметить, что предельная функция $P(z)$ регулярна в некоторой полосе $\alpha_1 < \mathscr{I}(z) < \beta_1$, причем в каждом отрезке граничных прямых длины $2\pi\sigma$ у $P(z)$ есть хотя бы одна особая точка, что существуют пределы $\lim\limits_{m\to\infty} c_j^{(m)} = c_j$ и что если $\sqrt{2n_{j+1} + 1} - \sqrt{2n_j + 1} > \mu > 0$, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j h_{n_j}(z)$ сходится к $P(z)$ во всей полосе регулярности $\alpha_1 < \mathscr{I}(z) < \beta_1$ и т. д.

В заключение рассмотрим вопрос о том, как можно решить уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} D^k F = f(z), \tag{15}$$

где

$$DF = F'' + q(z) F, \quad D^k = D(D^{k-1}),$$

a_{2k} — постоянные коэффициенты и $f(z)$ — некоторая аналитическая функция (другой способ решения уравнения (15), где $f(z) \equiv 0$ и Dy означает левую часть уравнения (1), рассматривался в статье [1]). Пусть $f(z)$ регулярна в области G, симметричной и звездообразной относительно точки z_0. Ради простоты будем считать, что $z_0 = 0$ (к этому случаю всегда можно прийти путем замены z на $z + z_0$). Пусть, далее, $F(z)$ и $\Phi(z)$ — две функции, аналитические в области D, симметричной и звездообразной относительно начала, связанные соотношением

$$F(z) = A(\Phi).$$

Мы имеем, что

$$DF = A(\Phi''). \tag{16}$$

Эта формула в действительной области установлена В. А. Марченко ([6], стр. 400), но она верна, конечно, и в комплексной области. Впрочем, этот факт можно установить и так.

Соотношение (16), как это легко проверить, справедливо для $\Phi = e^{\lambda_n z}$ и $F = \psi_n(z)$. Выберем $\{\lambda_n\}$ так, чтобы система $\{e^{\lambda_n z}\}$ была полной в некоторой окрестности начала. Для этого достаточно положить $\lambda_n = n$. В силу такого выбора, найдется последовательность $\{P_m(z)\}$ агрегатов, составленных из функций системы $\{e^{\lambda_n z}\}$, которая в окрестности начала равномерно сходится к $\Phi(z)$. Пусть

$$Q_m(z) = A(P_m)$$

($Q_m(z)$ — линейные комбинации функций системы $\{\psi_n(z)\}$). Мы имеем:

$$D(Q_m) = A(P''_m).$$

Устремляя m к ∞, в пределе получим: $D(F) = A(\Phi'')$. Это равенство, справедливое в некоторой окрестности начала, выполняется тогда и в области D. Отсюда находим:

$$D^k F = A(\Phi^{(2k)})$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} D^k F = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z)\right) = f(z). \tag{17}$$

Каковы должны быть коэффициенты a_{2k} для того, чтобы встречающиеся в (17) ряды сходились? Будем предполагать, что

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

является целой функцией экспоненциального типа, т. е.

$$|L(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Тогда

$$|a_{2k}| < (\sigma+\varepsilon)^{2k}, \quad k > N,$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z)$$

равномерно сходится в окрестности начала, если функция $\Phi(z)$ регулярна в круге $|z| < \rho$, $\rho > \sigma$. В силу (17), левая часть уравнения (15) имеет смысл (ряд сходится) в достаточно малой окрестности начала, если $F(z)$ регулярна при $|z| < \rho$, $\rho > \sigma$. По этой причине мы ставим вопрос об отыскании решений уравнения (15), аналитических по крайней мере в круге $|z| < \rho$, $\rho > \sigma$.

Из соотношения (17) находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z) = B(f), \tag{18}$$

где B — оператор, обратный оператору A. Функция $B(f)$ является аналитической в области G — области, в которой по условию регулярна $f(z)$. Общее решение уравнения (18) складывается из частного решения неоднородного уравнения (18) и общего решения однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z) = 0.$$

В работах [3], [7], [8] указано, как можно найти частное решение неоднородного уравнения. В работах [3], [8], [9], [10] (см. также обзорную статью [11]) изложено, как решается однородное уравнение. Найдя общее решение $\Phi(z)$ уравнения (18), по формуле

$$F(z) = A(\Phi)$$

найдем тогда общее решение исходного уравнения (11).

Таким образом, вопрос о решении уравнения (15) свелся к вопросу о решении уже изученного в достаточной степени уравнения (18).

(Поступило в редакцию 30/IX 1957 г.)

Литература

1. А. Ф. Леонтьев, О последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений, Изв. АН СССР, серия матем., т. **22** (1958), 201—242.
2. E. Hille, Contributions to the theory of Hermitian series, Duke Math. Journ., **5**, N **4** (1939), 875—936.
3. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. **XXXIX** (1951).
4. I. P. Kahane, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier, **5** (1953—1954 (1955)), 39—130.
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.
6. В. А. Марченко, Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Моск. Матем. об-ва, **1** (1952), 327—420.
7. H. Muggli, Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Comment. Math. Helv., **11** (1938), 151—179.
8. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1952.
9. I. F. Ritt, On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients, Trans. Amer. Math. Soc., **18** (1917), 27—49.
10. G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et a coefficients constants, Ann. Éc. Norm. Sup., **46** (1929), 25—53.
11. А. Ф. Леонтьев, О свойствах последовательностей линейных агрегатов, сходящихся в области, где порождающая линейные агрегаты система функций не является полной, Успехи матем. наук, т. **XI**, вып. **5(71)** (1956), 26—37.

Об оценке ошибки приближенных методов отыскания собственных значений эрмитова ядра

И. П. Мысовских (Ленинград)

Говоря о приближенных методах решения интегральных уравнений, мы имеем в виду два основных метода: метод замены ядра на близкое (например, вырожденное) и метод механических квадратур. Если вопрос об оценке ошибки при решении неоднородного уравнения решен удовлетворительно [1], [2], [3], то этого нельзя сказать относительно вопроса об оценке ошибки собственных значений*. Из немногочисленных работ, посвященных оценке ошибки собственных значений, укажем на работу Виландта [4], в которой рассматривается оценка ошибки величин, обратных собственным значениям эрмитова ядра, вычисляемых способом механических квадратур. Однако указанные там априорные оценки сильно завышены.

В настоящей работе указываются апостериорные оценки ошибки, возникающей при приближенном вычислении собственных значений интегрального уравнения Фредгольма второго рода с эрмитовым ядром. В случае метода замены ядра на близкое такая оценка почти непосредственно вытекает из теоремы Г. Вейля, позволяющей сравнивать собственные числа двух вполне непрерывных самосопряженных операторов в пространстве Гильберта (одном и том же). В случае метода механических квадратур нам приходится сравнивать собственные значения двух операторов, определенных в различных пространствах, поэтому непосредственное применение теоремы Вейля здесь невозможно. В работе указывается прием, который позволяет решить задачу об оценке ошибки собственного значения двукратным применением теоремы Вейля. Основная идея этого приема — переход к повторному ядру с индексом два $K_2(s, t)$ — уже применялась мною при оценке ошибки решения неоднородного уравнения способом механических квадратур [3]. Отметим здесь же, что этот прием пригоден не только для эрмитовых ядер. Ядро предполагается эрмитовым лишь для того, чтобы иметь возможность использовать теорему Вейля.

Пусть $K(s, t)$ — эрмитово ядро в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, удовлетворяющее условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds dt < +\infty. \qquad (1)$$

---

* Собственным значением ядра $K(s, t)$ или матрицы K, как это принято в теории интегральных уравнений, мы называем те значения параметра λ, при которых однородное уравнение $\varphi - \lambda K\varphi = 0$ имеет отличные от нуля решения.

Способ замены ядра на близкое для вычисления собственных значений ядра $K(s, t)$ сводится к тому, что ядро $K(s, t)$ заменяется ядром $M(s, t)$, собственные значения которого можно найти, при этом разность

$$N(s, t) = K(s, t) - M(s, t)$$

предполагается малой в каком-нибудь смысле. Собственные значения ядра $M(s, t)$ и принимаются за приближенные значения собственных чисел ядра $K(s, t)$.

В частности, в качестве $M(s, t)$ можно брать вырожденнсе ядро

$$M(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s) \beta_i(t). \tag{2}$$

При этом систему функций $\alpha_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно считать линейно независимой. Как известно, в этом случае определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\gamma_{11} & -\lambda\gamma_{12} & \ldots & -\lambda\gamma_{1n} \\ -\lambda\gamma_{21} & 1 - \lambda\gamma_{22} & \ldots & -\lambda\gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\gamma_{n1} & -\lambda\gamma_{n2} & \ldots & 1 - \lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix},$$

где

$$\gamma_{ik} = \int_a^b \beta_i(t) \alpha_k(t)\, dt,$$

совпадает со знаменателем Фредгольма ядра $M(s, t)$, и, следовательно, совокупность собственных значений ядра $M(s, t)$ совпадает с совокупностью собственных значений матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Отметим еще тот хорошо известный факт, что если ядро $K(s, t)$ — эрмитово и $M_1(s, t)$ таково, что

$$| K(s, t) - M_1(s, t) | \leqslant \eta \quad \text{или} \quad \left\{ \int_a^b \int_a^b | K(s, t) - M_1(s, t) |^2 \, ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \eta,$$

то эрмитово ядро

$$M(s, t) = \frac{M_1(s, t) + \overline{M_1(t, s)}}{2}$$

удовлетворяет тем же неравенствам

$$| K(s, t) - M(s, t) | \leqslant \eta \quad \text{или} \quad \left\{ \int_a^b \int_a^b | K(s, t) - M(s, t) |^2 \, ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \eta.$$

Поэтому в последующем мы будем предполагать, что приближающее ядро $M(s, t)$ эрмитово.

Метод механических квадратур для вычисления собственных значений ядра $K(s, t)$ сводится к следующему. Возьмем какую-либо формулу механических квадратур

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + \varepsilon; \tag{4}$$

здесь t_k — узлы, A_k — коэффициенты формулы и ε — остаточный член, причем все эти величины зависят от n. Для упрощения записи значок n опускаем. В интегральном уравнении

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt$$

заменим интегральный член квадратурной суммой по формуле (4). Тогда интегральное уравнение заменится соотношением

$$\varphi(s) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\,\varphi(t_k) + \lambda\varepsilon(s). \tag{5}$$

Считаем, что функции

$$K(s, t_1), \quad K(s, t_2), \ \ldots, \quad K(s, t_n)$$

линейно независимы, так как в противном случае в соотношении (5) под знаком суммы можно было бы уменьшить число слагаемых. Отбрасывая в (5) слагаемое, содержащее $\varepsilon(s)$, получим приближенное соотношение

$$\varphi(s) \doteq \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\,\varphi(t_k).$$

Заменяя в последнем соотношении $\varphi(s)$ на $\tilde{\varphi}(s)$, мы получим точное соотношение

$$\tilde{\varphi}(s) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\,\tilde{\varphi}(t_k).$$

Положив в этом соотношении $s = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и воспользовавшись обозначениями $\tilde{\varphi}(t_k) = \tilde{\varphi}_k$, $K(t_i, t_k) = K_{ik}$, получим линейную алгебраическую систему

$$\tilde{\varphi}_i = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K_{ik} \tilde{\varphi}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Значения параметра λ, при которых определитель этой системы равен нулю, и принимаются за приближения к собственным значениям ядра $K(s, t)$. Иначе говоря, метод механических квадратур для приближенного вычисления собственных значений ядра $K(s, t)$ сводится к вычислению собственных значений матрицы

$$L = \begin{pmatrix} A_1K_{11} & A_2K_{12} & \ldots & A_nK_{1n} \\ A_1K_{21} & A_2K_{22} & \ldots & A_nK_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1K_{n1} & A_2K_{n2} & \ldots & A_nK_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $K_{ik} = K(t_i, t_k)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Отметим, что указываемые ниже оценки не учитывают ошибок округления. Иначе говоря, в случае метода замены ядра на близксе мы предполагаем, что собственные значения близкого ядра $M(s, t)$ вычисляются точно, в случае метода механических квадратур предполагается, что элементы матрицы (6) суть точные числа и ее ссбственные числа вычисляются точно

Приведем формулировку теоремы Вейля (см., например, [5], стр. 258).

Пусть B и $A = B + C$ — вполне непрерывные самосопряженные операторы в пространстве Гильберта. Перенумеруем положительные собственные значения оператора A в порядке неубывания:

$$\lambda_1^{(A)} \leqslant \lambda_2^{(A)} \leqslant \lambda_3^{(A)} \leqslant \ldots .$$

Отрицательные собственные значения перенумеруем отрицательными целыми числами:

$$\lambda_{-1}^{(A)} \geqslant \lambda_{-2}^{(A)} \geqslant \lambda_{-3}^{(A)} \geqslant \ldots .$$

При этом считаем, что собственное значение повторяется в соответствующей последовательности столько раз, какова его кратность. Таким же образом перенумеруем собственные числа оператора B:

$$\lambda_j^{(B)} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{\lambda_j^{(A)}} - \frac{1}{\lambda_j^{(B)}} \right| \leqslant \| C \| \quad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7}$$

где $\| C \|$ — норма оператора C.

Из неравенства (7) легко получить оценку $| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} |$, если $\| C \|$ достаточно мала. В самом деле,

$$| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | \leqslant | \lambda_j^{(A)} | \cdot | \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \| . \tag{8}$$

Далее, имеем:

$$| \lambda_j^{(A)} | \leqslant | \lambda_j^{(B)} | + | \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | .$$

Подставляя правую часть последнего неравенства вместо $| \lambda_j^{(A)} |$ в (8), получим:

$$| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | \leqslant (| \lambda_j^{(B)} | + | \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} |) \cdot | \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \| .$$

Отсюда, если предположить, что

$$| \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \| < 1, \tag{9}$$

найдем:

$$| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | \leqslant \frac{| \lambda_j^{(B)} |^2 \cdot \| C \|}{1 - | \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \|} . \tag{10}$$

Оценка (10), очевидно, апостериорная. Ее можно применять, если уже вычислены собственные значения оператора B. Оценку (10) можно рассматривать и как априорную, если известна верхняя граница для $| \lambda_j^{(B)} |$.

При вычислении собственных значений эрмитова ядра $K(s, t)$ методом замены ядра на близкое мы имеем соотношение

$$K(s, t) = M(s, t) + N(s, t),$$

причем интеграл

$$N^2 = \int_a^b \int_a^b |N(s, t)|^2 ds dt \tag{11}$$

предполагается малым. Именно, считаем, что

$$|\lambda_j^{(M)}| N < 1.$$

Обозначим собственные значения интегральных операторов с ядрами $K(s, t)$ и $M(s, t)$ через $\lambda_j^{(K)}$ и $\lambda_j^{(M)}$. Так как норма интегрального оператора с ядром $N(s, t)$ не превосходит N, то из (10) получаем:

$$|\lambda_j^k - \lambda_j^{(M)}| \leqslant \frac{|\lambda_j^{(M)}|^2 N}{1 - |\lambda_j^{(M)}| N} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{12}$$

Очевидно, неравенство (12) останется справедливым, если в его правой части вместо $|\lambda_j^{(M)}|$ написать $|\lambda_j^{(K)}|$. Так как для наименьшего по абсолютной величине собственного значения $\lambda_j^{(K)}$ ($j = +1$ или -1) справедлива оценка

$$|\lambda_j^{(K)}| \leqslant \sqrt{\frac{k_2}{k_4}},$$

где

$$k_l = \int_a^b K_l(s, s) ds \quad (l = 1, 2, \ldots),$$

что мы получаем априорную оценку ошибки для наименьшего по абсолютной величине собственного значения ядра $K(s, t)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться оценкой (10) и в случае, когда B и $A = B + C$ — эрмитовы матрицы. В этом случае в качестве верхней границы нормы матрицы C можно взять

$$\left\{ \sum_{i,k=1}^n |c_{ik}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

где c_{ik} — элементы матрицы C.

Перейдем к способу механических квадратур. Собственные значения ядра $K(s, t)$ будем обозначать через λ_j и собственные значения матрицы L—через $\tilde{\lambda}_j$. Будем считать, что собственные числа λ_j и $\tilde{\lambda}_j$ занумерованы в порядке неубывающих модулей, причем собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. По определению повторного ядра с индексом 2 имеем:

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, t') K(t', t) dt'.$$

Применяя к интегралу в правой части формулу (4), получим:

$$K_2(s, t) = \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k) K(t_k, t) + \varepsilon(s, t), \tag{14}$$

где $\varepsilon(s, t)$ — остаточный член квадратурной формулы:

$$\varepsilon(s, t) = \int_a^b K(s, t') K(t', t)\, dt' - \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k) K(t_k, t). \tag{15}$$

Величина $\varepsilon(s, t)$, вообще говоря, — малая, и умение ее оценивать является совершенно необходимым. Эта величина уже встречалась при оценке ошибки решения неоднородного интегрального уравнения [3].

Из формулы (14) вытекает, что

$$K_2(s, t) = M(s, t) + \varepsilon(s, t),$$

где $M(s, t)$ — вырожденное эрмитово ядро

$$M(s, t) = \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k) K(t_k, t) \tag{16}$$

и $\varepsilon(s, t)$—малое ядро. Предположим, что коэффициенты $A_k > 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда нетрудно проверить, что эрмитово ядро (16) положительно и, следовательно, положительны все его собственные значения.

Обозначим собственные значения ядра $M(s, t)$ через $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$ (считаем их занумерованными в порядке неубывания с учетом кратности). Так как собственными значениями ядра $K_2(s, t)$ являются λ_j^2, то из соотношения (14) и теоремы Вейля вытекает:

$$|\lambda_j^2 - \tilde{\tilde{\lambda}}_j| \leqslant \frac{\tilde{\tilde{\lambda}}_j^2 \cdot \|\varepsilon\|}{1 - |\tilde{\tilde{\lambda}}_j| \cdot \|\varepsilon\|}, \tag{17}$$

где через $\|\varepsilon\|$ обозначена норма интегрального оператора с ядром $\varepsilon(s, t)$.

Рассмотрим вырожденное ядро $M(s, t)$, определяемое формулой (16). Пусть $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(t)$ из формулы (2) будут соответственно

$$\alpha_i(s) = \sqrt{A_i}\, K(s, t_i), \quad \beta_i(t) = \sqrt{A_i}\, K(t_i, t).$$

$K(s, t_i)$ можно считать линейно независимыми. Собственные числа $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$ ядра $M(s, t)$ совпадают с собственными значениями матрицы Γ, определяемой формулой (3), причем элементы Γ

$$\gamma_{ik} = \sqrt{A_i}\sqrt{A_k} \int_a^b K(t_i, t) K(t, t_k)\, dt.$$

Применяя к интегралу в правой части формулу (4), получим:

$$\gamma_{ik} = \sqrt{A_i}\sqrt{A_k} \left\{ \sum_{l=1}^{n} A_l K_{il} K_{lk} + \varepsilon_{ik} \right\}. \tag{18}$$

Составим элемент i-ой строки и k-го столбца квадрата матрицы L, определяемой формулой (6),

$$\{L^2\}_{ik} = \sum_{l=1}^{n} A_l K_{il} A_k K_{lk}.$$

Введем в рассмотрение диагональную неособенную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{A_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{A_n} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы DL^2D^{-1} равен

$$\{DL^2D^{-1}\}_{ik} = \sqrt{A_i}\sqrt{A_k} \sum_{i=1}^{n} A_l K_{il} K_{lk}.$$

Теперь из соотношения (18) видно, что

$$\Gamma = DL^2D^{-1} + E, \tag{19}$$

где введено обозначение

$$E = \begin{pmatrix} A_1\varepsilon_{11} & \sqrt{A_1A_2}\varepsilon_{12} & \dots & \sqrt{A_1A_n}\varepsilon_{1n} \\ \sqrt{A_2A_1}\varepsilon_{21} & A_2\varepsilon_{22} & \dots & \sqrt{A_2A_n}\varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{A_nA_1}\varepsilon_{n1} & \sqrt{A_nA_2}\varepsilon_{n2} & \dots & A_n\varepsilon_{nn} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрицы DL^2D^{-1} и E — эрмитовы, матрица E — малая. Собственные числа матрицы Γ суть $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$, собственные числа DL^2D^{-1} суть $\tilde{\lambda}_j^2$. Воспользовавшись неравенством (10) для матриц, получим:

$$|\tilde{\tilde{\lambda}}_j - \tilde{\lambda}_j^2| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^4 \cdot \|E\|}{1 - \tilde{\lambda}_j^2 \|E\|}, \tag{21}$$

где $\|E\|$ — норма матрицы E. Из неравенства (21) находим:

$$|\tilde{\tilde{\lambda}}_j| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{1 - \tilde{\lambda}_j^2 \|E\|}. \tag{22}$$

В правой части (17) фигурирует абсолютная величина неизвестного собственного значения $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$, поэтому мы ее заменим правой частью неравенства (22). Выполняя простые преобразования, получим:

$$|\lambda_j^2 - \tilde{\tilde{\lambda}}_j| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^4 \|\varepsilon\|}{(1 - \tilde{\lambda}_j^2 \|E\|)\,[1 - \tilde{\lambda}_j^2(\|E\| + \|\varepsilon\|)]}. \tag{23}$$

Из неравенств (21) и (23) находим:

$$|\tilde{\lambda}_j^2-\lambda_j^2|\leqslant|\tilde{\lambda}_j^2-\tilde{\tilde{\lambda}}_j|+|\tilde{\tilde{\lambda}}_j-\lambda_j^2|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\tilde{\lambda}_j^4\,\|E\|}{1-\tilde{\lambda}_j^2\,\|E\|}+\frac{\tilde{\lambda}_j^4\,\|\varepsilon\|}{(1-\tilde{\lambda}_j^2\,\|E\|)\,[1-\tilde{\lambda}_j^2(\|E\|+\|\varepsilon\|)]}=$$

$$=\frac{\tilde{\lambda}_j^4(\|E\|+\|\varepsilon\|)}{1-\tilde{\lambda}_j^2(\|E\|+\|\varepsilon\|)}$$

или

$$|\tilde{\lambda}_j^2-\lambda_j^2|\leqslant\frac{\tilde{\lambda}_j^4(\|E\|+\|\varepsilon\|)}{1-\tilde{\lambda}_j^2(\|E\|+\|\varepsilon\|)}=\Delta_j. \tag{24}$$

Неравенство (24) имеет место при условии

$$\tilde{\lambda}_j^2(\|E\|+\|\varepsilon\|)<1.$$

Будем считать, что λ_j и $\tilde{\lambda}_j$ одного знака. Из неравенства (24) имеем:

$$|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|\leqslant\frac{\Delta_j}{|\tilde{\lambda}_j+\lambda_j|}. \tag{25}$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$|\tilde{\lambda}_j+\lambda_j|\geqslant 2|\tilde{\lambda}_j|-|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|$$

и неравенством (25), получаем:

$$|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|\leqslant\frac{\Delta_j}{2|\tilde{\lambda}_j|-|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|}.$$

Разрешая последнее неравенство относительно $|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|$ и предполагая, что

$$\tilde{\lambda}_j^2(\|E\|+\|\varepsilon\|)<\frac{1}{2}, \tag{26}$$

получаем:

$$|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|\leqslant\frac{\Delta_j}{|\tilde{\lambda}|+\sqrt{\tilde{\lambda}_j^2-\Delta_j}}, \tag{27}$$

где Δ_j определяется формулой (24).

Оценка (27) — апостериорная. Ее можно применять после того, как найдено собственное значение матрицы L. В оценку входят норма интегрального оператора с малым ядром $\varepsilon(s, t)$, определяемым формулой (15), и норма матрицы E (см. (20)) с малыми элементами. При фактическом выполнении оценок нормы можно заменять их верхними границами: в случае ядра $\varepsilon(s, t)$

$$\|\varepsilon\|\leqslant\left\{\int_a^b\int_a^b|\varepsilon(s,t)|^2 ds dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

в случае матрицы E

$$\| E \| \leqslant \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} A_i A_k \mid \varepsilon_{ik} \mid^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Указанные оценки не учитывают ошибок округления. По этому поводу можно сделать следующее замечание. Ошибку округления в элементах матрицы L (см. (6)) можно легко учесть, если воспользоваться неравенством (10). Что касается ошибки округления, которая возникает при вычислении собственных чисел матрицы L, то она зависит от способа, которым производится это вычисление, и от числа знаков, с которыми ведутся вычисления. Абсолютная величина этой ошибки или ее верхняя граница должна быть прибавлена к той границе ошибки, которая указана в настоящей статье Аналогичное замечание можно сделать и о методе вырожденного ядра.

Можно указать также оценки, зависящие от n, если воспользоваться представлением остаточного члена формулы механических квадратур.

Пример 1. Будем вычислять собственные значения симметрического ядра

$$K(s, t) = st - \frac{s^3t^3}{6} + \frac{s^5t^5}{120}, \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant 1,$$

методом замены ядра на близкое. В качестве близкого ядра $M(s, t)$ возьмем

$$M(s, t) = st - \frac{s^3t^3}{6}, \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant 1.$$

В результате вычислений получим следующие собственные значения ядра $M(s, t)$:

$$\lambda_1^{(M)} = 3{,}18909, \quad \lambda_2^{(M)} = -246{,}94.$$

Найдем верхнюю границу для нормы ядра $N(s, t) = K(s, t) - M(s, t)$:

$$N = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{s^5t^5}{120} \right)^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1320}.$$

Применение неравенства (12) дает:

$$| \lambda_1^{(K)} - \lambda_1^{(M)} | \leqslant 7{,}72 \cdot 10^{-3}, \quad | \lambda_2^{(K)} - \lambda_2^{(M)} | \leqslant 56{,}8. \tag{28}$$

Так как ядро $K(s, t)$ — вырожденное, то его собственные значения можно подсчитать:

$$\lambda_1^{(K)} = 3{,}18406, \quad \lambda_2^{(K)} = -261{,}67.$$

Таким образом,

$$| \lambda_1^{(K)} - \lambda_1^{(M)} | = 5{,}03 \cdot 10^{-3}, \quad | \lambda_2^{(K)} - \lambda_2^{(M)} | = 14{,}73$$

мы видим, что для первого собственного значения оценка ошибки (28) превышает действительную ошибку менее, чем в два раза, для второго собственного значения — примерно в четыре раза.

Пример 2. Рассмотрим симметрическое ядро

$$K(s, t) = \sin(s + t), \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant 1.$$

Вычислим собственные значения этого ядра методом механических квадратур, взяв в качестве квадратурной формулы формулу Гаусса с двумя узлами: $t_1 = 0{,}21132$, $t_2 = 0{,}78868$. Коэффициенты $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$. Мы приходим к задаче о вычислении собственных значений $\widetilde{\lambda}_i$ матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}20508 & 0{,}42073 \\ 0{,}42073 & 0{,}49999 \end{pmatrix}.$$

В результате вычислений получаем:

$$\widetilde{\lambda}_1 = 1{,}25257, \quad \widetilde{\lambda}_2 = -10{,}7196.$$

Чтобы воспользоваться неравенством (27), необходимо выполнить оценку величины

$$\varepsilon(s, t) = \int_0^1 \sin(s + t')\sin(t' + t)\,dt' - \sum_{k=1}^{2} A_k \sin(s + t_k)\sin(t_k + t).$$

Применим с этой целью выражение остаточного члена формулы Гаусса

$$R_n[f] = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left\{\frac{1.2\ldots n}{(n+1)\ldots 2n}\right\}^2 \frac{f^{(2n)}(\xi)}{1.2\ldots 2n}, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

В нашем случае $n = 2$ и четвертая производная от подынтегральной функции по t' равна

$$f^{(\mathrm{IV})}(t') = -8\cos(2t' + s + t)$$

и, следовательно,

$$|\, f^{(\mathrm{IV})}(\xi)\, | \leqslant 8.$$

Имеем:

$$|\,\varepsilon(s, t)\,| \leqslant \frac{1}{5}\left\{\frac{1.2}{3.4}\right\}^2 \frac{8}{1.2.3.4} = \frac{1}{540},$$

откуда вытекает, что

$$\|E\| + \|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{270}.$$

Условие (26) выполнено:

$$\widetilde{\lambda}_2^2(\|E\| + \|\varepsilon\|) \leqslant 114{,}9 \cdot \frac{1}{270} = 0{,}426 < \frac{1}{2},$$

и мы можем воспользоваться оценкой (27). По формуле (24) находим:

$$\Delta_1 = 9{,}18 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta_2 = 85{,}4.$$

Из неравенства (27) получаем:

$$|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| \leqslant 3{,}67 \cdot 10^{-3}, \quad |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| \leqslant 5{,}29.$$

Ядро $\sin(s+t)$ — вырожденное, и его собственные значения λ_j $(j=1, 2)$ суть

$$\lambda_1 = 1{,}25098, \quad \lambda_2 = -10{,}9533;$$

поэтому

$$|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| = 1{,}59 \cdot 10^{-3}, \quad |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| = 0{,}2337.$$

Таким образом, полученная оценка превышает действительную ошибку для первого собственного значения примерно в 2,5 раза, а для второго — в двадцать три раза.

Факт, что оценка получилась грубой, вызван тем, что мы воспользовались завышенной оценкой для $\| E \|$ и $\| \varepsilon \|$. В самом деле, легко подсчитать, что

$$\varepsilon(s, t) = \frac{1}{4} [C_1 \sin(s+t) + C_2 \cos(s+t)],$$

где

$$C_1 = 1 - \cos 2 - \sin 2t_1 - \sin 2t_2 = 0{,}600 \cdot 10^{-3},$$

$$C_2 = \cos 2t_1 + \cos 2t_2 - \sin 2 = -0{,}385 \cdot 10^{-3},$$

и

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 \varepsilon^2(s, t)\, ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}924 \cdot 10^{-3}, \quad \left\{ \sum_{i,k=1}^{2} A_i A_k \varepsilon_{ik}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}927 \cdot 10^{-3}.$$

Следовательно,

$$\| E \| + \| \varepsilon \| \leqslant 1{,}851 \cdot 10^{-3}.$$

Применение неравенства (27) дает:

$$|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| \leqslant 1{,}825 \cdot 10^{-3}, \quad |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| \leqslant 1{,}56,$$

и мы видим, что оценка ошибки для первого собственного значения превышает действительную ошибку менее, чем в 1,2 раза, а для второго — менее, чем в 7 раз.

(Поступило в редакцию 27/VII 1957 г.)

Литература

1. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
2. Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, т. **III**, вып. **6**(28) (1948), 89—185.
3. И. П. Мысовских, Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур, Вестник ЛГУ, № **19**, серия матем., мех. и астр., вып. **4** (1956), 66—72.
4. H. Wielandt, Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations, Proc. Symposium in appl. Math., Vol. **VI**: Numerical Analysis, New York, Toronto, London, 1956, 261—282.
5. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, ИЛ, 1954.

Некоторые задачи об устойчивости движения

В. И. Зубов (Ленинград)

Настоящая работа посвящена исследованию следующих трех проблем: во-первых, проблемы аналитического представления решений систем уравнений с частными производными и систем обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особых начальных данных; во-вторых, проблемы качественной характеристики окрестности положения равновесия динамической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с точки зрения устойчивости по Ляпунову; в-третьих, проблемы выяснения вопроса об устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений в ряде сомнительных случаев.

Первая глава связана с результатами Брио и Букэ, Пуанкаре, Пикара, Хорна, Ляпунова и дает дальнейшее развитие этих результатов.

Вторая глава связана с работами Н. П. Еругина, А. А. Шестакова, А. М. Ляпунова. Идейной основной почти всех результатов являются труды А. М. Ляпунова.

Тема настоящей статьи возникла под влиянием работ, проводимых на кафедре дифференциальных уравнений в ЛГУ. Пользуюсь случаем поблагодарить за особое внимание, проявленное к моей работе, В. И. Смирнова и В. В. Немыцкого.

Глава I

Представление решений систем дифференциальных уравнений в окрестности особых начальных данных

§ 1. Вспомогательные теоремы из теории уравнений с частными производными

Рассмотрим систему уравнений в частных производных с одинаковой главной частью

$$\frac{\partial z_j}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{si}(t)x_i+X_s(t,x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_k)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}q_{ji}(t)z_i+\sum_{i=1}^{n}r_{ji}(t)x_i+Z_j(t,x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_k)\quad (j=1,\ldots,k). \tag{1.1}$$

В книге [1] показано, что эта система уравнений эквивалентна одному однородному линейному уравнению для одной функции от $k+n+1$ переменной

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{si}(t)x_i+X_s(t,x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_k)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\left(\sum_{i=1}^{k}q_{ji}(t)z_i+\sum_{i=1}^{n}r_{ji}(t)x_i+Z_j(t,x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_k)\right)=0.$$

Таким образом, задача интегрирования системы (1.1) сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{ds}=1,$$

$$\frac{dx_i}{ds}=\sum_{l=1}^{n} p_{il}(t)\,x_l+X_l(t, x_1,\dots, x_n, z_1,\dots, z_k),$$

$$\frac{dz_j}{ds}=\sum_{i=1}^{k} q_{ji}(t)\,z_i+\sum_{i=1}^{n} r_{ji}(t)\,x_i+Z_j(t, x_1,\dots, x_n, z_1,\dots, z_k)$$

$$(i=1,\dots, n;\ j=1,\dots, k).$$

Функции X_s и Z_j разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин $x_1,\dots, x_n, z_1,\dots, z_k$, сходящиеся для всех $t\in[0, +\infty)$ при достаточно малых $|x_s|$, $|z_j|$. Коэффициенты в разложениях функций X_s и Z_j, а также коэффициенты $p_{si}(t)$, $q_{ji}(t)$, $r_{ji}(t)$ заданы при $t\in[0, +\infty)$, вещественны, непрерывны и ограничены. Будем предполагать далее, что разложения функций X_s, Z_j не содержат членов, линейных относительно величин $x_1,\dots, x_n$, $z_1,\dots, z_k$.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую системе (1.1):

$$\begin{gathered}\frac{dx_s}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\,x_i+X_s \quad (s=1,\dots, n),\\ \frac{dz_j}{dt}=\sum_{i=1}^{k} q_{ji}(t)\,z_i+\sum_{i=1}^{n} r_{ji}(t)\,x_i+Z_j \quad (j=1,\dots, k).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mu_1,\dots, \mu_n$ характеристичные числа линейной системы

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\,x_i \quad (s=1,\dots, n), \tag{1.3}$$

а через $\mu_{n+1},\dots, \mu_{n+k}$ — характеристичные числа системы

$$\frac{dz_j}{dt}=\sum_{i=1}^{k} q_{ji}(t)\,z_i \quad (j=1,\dots, k). \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Если:*

1) $\mu_i>0, \quad i\leqslant n,$

2) $\mu_i=\mu_{n+i}, \quad i\leqslant l,$

3) *системы* (1.3) *и* (1.4) — *правильные по Ляпунову* [2],

то система уравнений (1.1) *имеет семейство решений, зависящее от* l *произвольных постоянных, представимое в форме рядов*

$$z_j=\sum_{m=1}^{\infty} z_j^{(m)}(t, c_1,\dots, c_l,\ x_1,\dots, x_n) \quad (j=1,\dots, k), \tag{1.5}$$

сходящихся при $|c_s| < c_0$, $|x_s| < x_0(t)$, *где* $c_0 > 0$ — *постоянная, а* $x_0(t)$ — *положительная функция, достаточно быстро стремящаяся к нулю при* $t \to +\infty$. *Функции* $z_j^{(m)}$ *являются однородными формами степени* m *относительно величин* $x_1, \ldots, x_n$, *коэффициенты которых суть непрерывные функции* t, *заданные при* $t \geqslant 0$, *с неотрицательными характеристичными числами и одновременно полиномы по* $c_1, \ldots, c_l$.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 1, остановимся на ее третьем условии. Если системы (1.3) и (1.4) не являются правильными, то величина $\sigma = -(S + \mu) > 0$, где $S = \sum_{i=1}^{n+k} \mu_i$,

$$\mu = \text{х. ч. } e^{-\left(\sum_{s=1}^{n} \int_0^t p_{ss}(t)\,dt + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t q_{jj}(t)\,dt\right)}.$$

В этом случае теорема 1 останется в силе, если выполнены неравенства $\mu_l > \sigma$ $(i = 1, \ldots, n + l)$. При этом коэффициенты форм $z_j^{(m)}$ могут иметь отрицательные характеристичные числа.

Доказательство. Для системы (1.2), следуя А. М. Ляпунову ([1], гл. 1, п. 12), построим семейство решений, соответствующее характеристичным числам μ_i, $i \leqslant n + l$:

$$x_s = \sum_{m_1+\ldots+m_{n+l} \geqslant 1} L_s^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)\, e^{-t\left(\sum_{i=1}^{n+l} \mu_i m_i\right)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_{n+l}^{m_{n+l}} \tag{1.6}$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

$$z_j = \sum_{m_1+\ldots+m_{n+l} \geqslant 1} M_j^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)\, e^{-t\left(\sum_{i=1}^{n+l} \mu_i m_i\right)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_{n+l}^{m_{n+l}} \tag{1.7}$$

$$(j = 1, \ldots, k).$$

Ряды (1.6) и (1.7) сходятся при $t \geqslant 0$, если $|\alpha_i| \leqslant \alpha$ $(i = 1, \ldots, n + l)$, $\alpha > 0$ — достаточно малое число, при этом характеристичные числа функций $L_s^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)$ и $M_j^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)$ неотрицательны.

Эти ряды получены Ляпуновым путем применения метода последовательных приближений к системе (1.2), так что члены этих рядов, линейные относительно α_i $(i = 1, \ldots, n + l)$, представляют собой решение линейной системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i \quad (s = 1, \ldots, n),$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} q_{ji}(t)\, z_i + \sum_{i=1}^{n} r_{ji}(t)\, x_i \quad (j = 1, \ldots, k),$$

образующей первое приближение для системы (1.2).

Положим

$$\alpha_{n+i} = c_i\alpha_i, \quad i \leqslant l,$$
$$\beta_s = e^{-\mu_s t}\alpha_s, \quad s \leqslant n. \tag{1.8}$$

Члены рядов (1.6), линейные относительно α_i $(i = 1, \ldots, n+l)$, образуют общее решение системы (1.3). Поэтому якобиан функций (1.6) по величинам $\beta_1, \ldots, \beta_n$ при $\beta_s = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ совпадает с определителем фундаментальной системы решений для системы (1.3), если умножить последний на величину $e^{t(\mu_1+\ldots+\mu_n)}$:

$$\left.\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(\beta_1, \ldots, \beta_n)}\right|_{\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0} = Ce^{\int\limits_0^t \sum\limits_{s=1}^k (p_{ss}(t)+\mu_s)\,dt}, \tag{1.9}$$

где $C \neq 0$, ибо определитель фундаментальной системы решений для (1.3) может быть вычислен по формуле Лиувилля [3]. Из теории неявных функций [4] следует, что из (1.6) можно определить β_s $(s = 1, \ldots, n)$ как функции величин $x_1, \ldots, x_n, t, c_1, \ldots, c_l$, при этом разложения функций β_s по степеням величин $x_1, \ldots, x_n$ будут иметь непрерывные по t коэффициенты, являющиеся одновременно полиномами по $c_1, \ldots, c_l$ [5].

Разрешим систему (1.6) относительно величин β_s, что возможно в силу (1.9). Имеем:

$$\beta_s = \varphi_s(t, c_1, \ldots, c_l, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{1.10}$$

Пользуясь соотношением (1.10), исключим величины (1.8) из системы уравнений (1.7). В результате этого получим семейство решений (1.5) для системы (1.1).

Замечание 1. Рассмотрим случай, когда все коэффициенты в разложениях функций X_s, Z_j и величины p_{si}, q_{ji}, r_{ji} — постоянные и, следовательно, правильность систем автоматически имеет место. Систему (1.1) в этом предположении будем обозначать через (1.1′).

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корни уравнения

$$|P - \lambda E| = 0, \quad \{P\}_{ik} = p_{ik} \quad (i, k = 1, \ldots, n),$$

а через $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$ — корни уравнения

$$|Q - \varkappa E| = 0, \quad \{Q\}_{ji} = q_{ji} \quad (i, j = 1, \ldots, k).$$

Ясно, что

$$\mu_i = -\mathcal{R}(\lambda_i), \quad i \leqslant n, \quad \mu_{n+1} = -\mathcal{R}(\varkappa_i), \quad i \leqslant k.$$

Если выполнены условия теоремы 1 для системы (1.1′), то коэффициенты форм $z_j^{(m)}(t, c_1, \ldots, c_l, x_1, \ldots, x_n)$ можно представить в виде полиномов по t, $c_1, \ldots, c_l$, коэффициенты которых, в свою очередь, являются тригонометрическими многочленами. Эти тригонометрические многочлены будут периодическими функциями t, если величины $\lambda_i - \varkappa_i$, $i \leqslant l$, соизмеримы. В противном случае они будут почти-периодическими функциями.

Если $\lambda_i - \varkappa_i = 0$, $i \leqslant l$, то коэффициенты форм $z_j^{(m)}$ являются полиномами по $c_1, \ldots, c_l, t$. Действительно, в рассматриваемом случае система (1.2'), соответствующая (1.1'), будет иметь решение, зависящее от $n + l$ произвольных постоянных, представимое в форме рядов

$$x_s = \sum_{m_1 + \ldots + m_{n+l} \geqslant 1} L_s'^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)\, e^{t\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \lambda_i \pm \sum\limits_{i=1}^{l} m_{n \pm i} \varkappa_i\right)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_{n+l}^{m_{n+l}} \quad (1.6')$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

$$z_j = \sum_{m_1 + \ldots + m_{n+l} \geqslant 1} M_j'^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)\, e^{t\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \lambda_i + \sum\limits_{i=1}^{l} m_{n+i} \varkappa_i\right)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_{n+l}^{m_{n+l}} \quad (1.7')$$

$$(j = 1, \ldots, k),$$

сходящихся при $t \geqslant 0$, если $|\alpha_i| \leqslant \alpha$ $(i = 1, \ldots, n + l)$, $\alpha > 0$ — достаточно малое число. При этом функции $L_s'^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)$ и $M_j'^{(m_1, \ldots, m_{n+l})}(t)$ являются полиномами относительно t.

Положим

$$\alpha_{n+i} = c_i \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, l), \qquad \beta_s' = \alpha_s e^{\lambda_s t} \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Разрешим теперь ряды (1.6') относительно величин $\beta_1', \ldots, \beta_n'$, что возможно вследствие вышесказанного. Коэффициенты разложения функций β_s' относительно величин $x_1, \ldots, x_n$ будут полиномами относительно $t, c_1, \ldots, c_l$, а также относительно величин $e^{(\varkappa_i - \lambda_i)t}$ $(i = 1, \ldots, l)$. Исключая β_s' из рядов (1.7'), получим функции $z_j(t, x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_l)$, удовлетворяющие системе (1.1'). Разложения этих функций по степеням $x_1, \ldots, x_n$ будут иметь коэффициенты являющиеся полиномами относительно $t, c_1, \ldots, c_l$, а также относительно величин $e^{(\varkappa_i - \lambda_i)t}$ $(i = 1, \ldots, l)$.

Замечание 2. Систему (1.1') можно неособыми линейными преобразованиями над искомыми функциями $z_1, \ldots, z_k$ и над независимыми переменными $x_1, \ldots, x_n$ привести к виду

$$\frac{\partial \bar{z}_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{x}_s} (\varepsilon_{s-1} \bar{x}_{s-1} + \lambda_s \bar{x}_s + \bar{X}_s) =$$

$$= \delta_{j-1} \bar{z}_{j-1} + \varkappa_j \bar{z}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{ji} \bar{x}_i + \bar{Z}_j \quad (j = 1, \ldots, k), \qquad (1.11)$$

где $\varepsilon_0 = \delta_0 = 0$, а ε_s и δ_j равны 0 или 1.

Если $\mathcal{R}(\lambda_s) < 0$, $s \leqslant n$ и $\varkappa_i = \lambda_i$, $i \leqslant l$, то система (1.11) имеет семейство решений

$$\bar{z}_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_j^{(m)} (t, c_1, \ldots, c_l, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{1.12}$$

Положим в (1.12) $t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \bar{x}_1$ и обозначим вновь полученные функции через σ_j $(j = 1, \ldots, k)$. Ясно, что функции

$$\sigma_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_j^{(m)} \left(\frac{\ln \bar{x}_1}{\lambda_1}, c_1, \ldots, c_l, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \right) \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{1.13}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \sigma_j}{\partial \bar{x}_s} (\varepsilon_{s-1} \bar{x}_{s-1} + \lambda_s \bar{x}_s + \bar{X}_s (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \quad \sigma_1, \ldots, \sigma_k)) =$$

$$= \delta_{j-1} \sigma_{j-1} + \varkappa_j \sigma_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{ji} \bar{x}_i + \bar{Z}_j (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_k), \qquad \bar{X}_1 \equiv 0 \,^*. \tag{1.14}$$

Используя замечания 1 и 2, получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Если*

1) $\mathcal{R}(\lambda_i) < 0$, $\quad i \leqslant n$,

2) $\varkappa_i = \lambda_i$, $\quad i \leqslant l$,

то система уравнений (1.14) *или, что то же самое,* (1.11) *имеет семейство решений* (1.13), *зависящее от* l *произвольных постоянных. При этом коэффициенты форм* $\bar{z}_j^{(m)}$ *являются полиномами относительно* $c_1, \ldots, c_l$, $\ln \bar{x}_1$. *Ряды* (1.13) *сходятся при* $|c_s| < c_0$, $|\bar{x}_s| < x_0 \left(\left| \ln \frac{|\bar{x}_{10}|}{|\lambda_1|} \right| \right)$, *где* x_0 — *функция, о которой идет речь в теореме* 1, $|\bar{x}_{10}|$ *достаточно мало.*

Укажем далее случай, когда функции (1.13) не зависят от $\ln \bar{x}_1$, т. е. решения голоморфны.

Теорема 3. *Пусть*:

1) $\mathcal{R}(\lambda_i) < 0$, $\quad i \leqslant n$,

2) $\lambda_i = \varkappa_i$, $\quad i \leqslant l$,

3) $\varepsilon_i = \delta_i$, $\quad i \leqslant l - 1$,

4) $\varepsilon_l = 0$, $\quad \bar{r}_{ij} = 0$, $\quad i, j \leqslant l$,

5) *не существует соотношения вида* $\sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i = \varkappa_j$, $\ j \leqslant k$, *при любых целых неотрицательных* m_i, $\sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 1$, *кроме соотношений* $\lambda_i = \varkappa_i$, $i \leqslant l$.

Тогда система (1.1′) ((1.11), (1.14)) *имеет семейство голоморфных решений, зависящее от* l *произвольных постоянных, представимое в форме рядов*

$$z_j = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{z}_j^{(m)} (c_1, \ldots, c_l, x_1, \ldots, x_n) \quad (j = 1, \ldots, k), \tag{1.15}$$

---

* Условие $\bar{X}_1 \equiv 0$ относится лишь к теореме 2.

где $\tilde{z}_j^{(m)}$ *— однородные формы степени* m *относительно* $x_1,\ldots,x_n$, *коэффициенты которых являются полиномами по* $c_1,\ldots,c_l$. *Ряды* (1.15) *сходятся при* $|c_s|\leqslant c_0$, $|x_s|\leqslant r$, $r>0$, $c_0>0$.

Доказательство. Проведем доказательство для системы (1.14). С этой целью подставим в (1.14) ряды

$$\sigma_j=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_j^{(m)}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\quad (j=1,\ldots,k), \tag{1.16}$$

где $\sigma_j^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$ с коэффициентами, подлежащими определению. Приравнивая формы одинаковой степени, получим систему уравнений для определения $\sigma_j^{(m)}$:

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial\sigma_j^{(m)}}{\partial\bar{x}_s}(\varepsilon_{s-1}\bar{x}_{s-1}+\lambda_s\bar{x}_s)=\delta_{j-1}\sigma_{j-1}^{(m)}+\varkappa_j\sigma_j^{(m)}+R_j^{(m)}. \tag{1.17}$$

Функции $R_j^{(m)}$ являются однородными формами степени m относительно $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n$, зависящими от разложений функций $\bar{X}_s$, $\bar{Z}_j$ и от форм $\sigma_j^{(\mu)}$ ($j=1,\ldots,k$; $\mu=1,\ldots,m-1$).

Если функция $R_j^{(m)}$ при $m>1$ определена, то из условия 5) теоремы 3 следует, что система (1.17) имеет единственное решение в виде форм $\sigma_j^{(m)}(x_1,\ldots,x_n)$ ($j=1,\ldots,k$) [2]. Покажем, что система (1.17) при $m=1$ имеет решение в виде системы линейных форм $\sigma_j^{(1)}$, зависящих от l произвольных постоянных.

Положим

$$\sigma_j^{(1)}=y_j^{(1)}+y_j^{(2)}\quad (j=1,\ldots,l), \tag{1.18}$$

где $y_j^{(1)}$ — линейная форма относительно $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_l)$, а $y_j^{(2)}$ — линейная форма относительно $(\bar{x}_{l+1},\ldots,\bar{x}_n)$.

Для определения этих форм имеем уравнения

$$\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial y_j^{(1)}}{\partial\bar{x}_s}(\varepsilon_{s-1}\bar{x}_{s-1}+\lambda_s\bar{x}_s)=\delta_{j-1}y_{j-1}^{(1)}+\varkappa_j y_j^{(1)} \tag{1.19}$$

$$(j=1,\ldots,l),$$

$$\sum_{s=l+1}^{n}\frac{\partial y_j^{(2)}}{\partial\bar{x}_s}(\varepsilon_{s-1}\bar{x}_{s-1}+\lambda_s\bar{x}_s)=\delta_{j-1}y_{j-1}^{(2)}+\varkappa_j y_j^{(2)}+\sum_{i=l+1}^{n}\bar{r}_{ij}\bar{x}_i \tag{1.20}$$

$$(j=l+1,\ldots,n).$$

В силу условий 4) и 5) теоремы, система (1.20) имеет единственное решение в виде системы линейных форм $y_j^{(2)}$.

Пусть функции $\bar{x}_i = \dfrac{t^{l_i} e^{\lambda_i t}}{l_i!}$ являются решением системы

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \varepsilon_{i-1}\bar{x}_{i-1} + \lambda_i \bar{x}_i \quad (i = 1, \ldots, l). \tag{1.21}$$

Тогда матрица фундаментальной системы решений $X(t)$ для (1.21) будет иметь вид:

$$X(t) = \left\| \begin{matrix} x_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ x_2 & x_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{k_1} & x_{k_1-1} & \ldots & x_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{k_1+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{k_1+2} & x_{k_1+1} & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{k_2} & x_{k_2-1} & \ldots & x_{k_1+1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{k_\alpha+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_{k_\alpha+2} & x_{k_\alpha+1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_l & x_{l-1} & \ldots & x_{k_\alpha+1} \end{matrix} \right\|.$$

Ясно, что

$$Y(t) = X(t)\,C, \tag{1.22}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_l \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_l^{(1)} \end{pmatrix},$$

дает общее решение системы (1.21), и в то же время функции $y_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, l)$, рассматриваемые как линейные формы величин $\bar{x}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$, являются решением системы (1.19).

Таким образом, линейные формы $\sigma_j^{(1)}$ при $j = 1, \ldots, l$ определены. Формы $\sigma_j^{(1)}$ при $j \geqslant l+1$ определяются единственным образом из системы (1.17) при $m = 1$. После определения линейных членов остальные члены формальных рядов (1.16) определяются единственным образом по способу, указанному выше.

Сходимость полученных рядов можно доказать так же, как это было сделано в теореме 1. Действительно, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую системе (1.14):

$$\begin{gathered} \frac{d\bar{x}_s}{dt} = \varepsilon_{s-1}\bar{x}_{s-1} + \lambda_s \bar{x}_s + \bar{X}_s(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k), \\ \frac{d\bar{z}_j}{dt} = \delta_{j-1}\bar{z}_{j-1} + \varkappa_j \bar{z}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{ji}\bar{x}_i + \bar{Z}_j(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k). \end{gathered} \tag{1.23}$$

Построим для нее семейство решений, отвечающее величинам λ_s $(s=1,\ldots,n)$ и $\varkappa_j$ $(j\leqslant l)$. Пусть $\lambda_{n+i}=\varkappa_i$, тогда

$$x_s=\sum_{m_1+\ldots+m_{n+l}\geqslant 1}^{+\infty} K_s^{(m_1,\ldots,m_{n+l})}\alpha_1^{m_1}\ldots\alpha_{n+l}^{m_{n+l}}e^{t\sum_{i=1}^{n+l}\lambda_i m_i}, \tag{1.24}$$

$$z_j=\sum_{m_1+\ldots+m_{n+l}\geqslant 1}^{+\infty} L_j^{(m_1,\ldots,m_{n+l})}\alpha_1^{m_1}\ldots\alpha_{n+l}^{m_{n+l}}e^{t\sum_{i=1}^{n+l}\lambda_i m_i}. \tag{1.25}$$

Семейство решений системы (1.23) представлено в форме рядов, сходящихся при $t\geqslant 0$ и $|\alpha_i|\leqslant\alpha$ $(i=1,\ldots,n+l)$; $\alpha>0$ — достаточно малая величина. Предположим, что в основу построения этих рядов положена фундаментальная система решений Y линейной системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=\varepsilon_{s-1}x_{s-1}+\lambda_s x_s\quad(s=1,\ldots,n),$$

$$\frac{dz_j}{dt}=\delta_{j-1}z_{j-1}+\varkappa_j z_j\quad(j\leqslant l). \tag{1.26}$$

Введем в рассмотрение матрицу C, получающуюся из матрицы X путем замены x_i на c_i. Предположим, что матрица Y выбрана так, что в пересечении первых l строк и l столбцов образуется матрица X, а в пересечении последних l строк и l столбцов матрицы Y образуется матрица CX. Можно доказать, что матрица X коммутирует с матрицей коэффициентов линейной системы (1.26), поэтому матрица CX также является фундаментальной системой решений линейной системы (1.26). Полагая в рядах (1.24) и (1.25) $\alpha_{n+i}=\alpha_i$ и разрешая ряды (1.24) относительно $\alpha_i e^{\lambda_i t}$, будем иметь: $\alpha_i e^{\lambda_i t}=$ $=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n,t)$. Исключая величины $\alpha_i e^{\lambda_i t}$ $(i=1,\ldots,n)$ из рядов (1.25), получим систему функций

$$z_j=z_j(x_1,\ldots,x_n,\ t,\ c_1,\ldots,c_l). \tag{1.27}$$

Функции $z_j(x_1,\ldots,x_n,t,c_1,\ldots,c_l)$ разлагаются в сходящиеся ряды

$$z_j=\sum_{M=1}^{\infty}\bar{z}_j^{(M)}(x_1,\ldots,x_n,t,c_1,\ldots,c_l)\quad(j=1,\ldots,k),$$

где $\bar{z}_j^{(M)}$ — однородные формы степени M относительно $x_1,\ldots,x_n$ с коэффициентами, являющимися полиномами относительно $c_1,\ldots,c_l,t$, причем эти ряды сходятся при достаточно малых $|x_s|$ $(s=1,\ldots,n)$ и для всех $t\geqslant 0$, $|c_i|\leqslant\gamma$, где $\gamma>0$ — достаточно малое число. Ясно, что система функций (1.27) удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}(\varepsilon_{s-1}x_{s-1}+\lambda_s x_s+X_s)+\frac{\partial z_j}{\partial t}=$$

$$=\delta_{j-1}z_{j-1}+\varkappa_j z_j+\sum_{i=1}^{n}r_{ij}x_i+Z_j\quad(j=1,\ldots,k). \tag{1.28}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы функции (1.27) не зависят от t и, следовательно, удовлетворяют системе (1.14). Будем искать решение системы (1.28) в виде рядов

$$\bar{z}_j = \sum_{M \geqslant 1} \bar{z}_j^{(M)} \quad (j=1,\ldots,k), \tag{1.29}$$

где $\bar{z}_j^{(M)}$, $M > 1$, — однородные формы степени M относительно $x_1,\ldots,x_n$, коэффициенты которых являются полиномами по степеням t с коэффициентами, подлежащими определению. Ясно, что разложения функций (1.27) содержат формы $Y_j^{(l)}$ $(j=1,\ldots,l)$. Положим $\bar{z}_j^{(1)} = Y_j^{(l)} + \bar{Y}_j^{(n-l)}$ $(j=1,\ldots,l)$. Подставляя ряды (1.29) в систему (1.28) и приравнивая формы одинакового измерения, получим для их определения систему уравнений:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \bar{z}_j^{(M)}}{\partial x_s}(\varepsilon_{s-1}x_{s-1} + \lambda_s x_s) + \frac{\partial \bar{z}_j^{(M)}}{\partial t} = \delta_{j-1} z_{j-1}^{(M)} + \varkappa_j \bar{z}_j^{(M)} + R_j'^{(M)}, \tag{1.30}$$

где $R_j'^{(M)}$ — однородная форма относительно величин $x_1,\ldots,x_n$. Если формы $\bar{z}_j^{(\mu)}$, $\mu \leqslant M-1$ и $\bar{z}_{j-1}^{(M)}$ не зависят от t, то $R_j'^{(M)}$ не зависит от t, а тогда и $\bar{z}_j^{(M)}$ не зависит от t. Действительно, пусть $\bar{z}_j^{(M)} = \sum_{k=0}^{N} t^k \bar{z}_{jk}^{(M)}$, тогда $\bar{z}_{jN}^{(M)}$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \bar{z}_{jN}^{(M)}}{\partial x_s}(\varepsilon_{s-1}x_{s-1} + \lambda_s x_s) = \varkappa_j \bar{z}_{jN}^{(M)},$$

откуда $\bar{z}_{jN}^{(M)} \equiv 0$, ибо $M > 1$ и $N \geqslant 1$. Легко доказать, что $\bar{z}_j^{(1)}$ $(j \geqslant l)$ не зависит от t, а тогда ряды (1.29) не зависят от t. Таким образом, ряды (1.27), удовлетворяющие системе (1.28), не зависят от t, а следовательно, совпадают с формальными рядами. Этим сходимость полученных выше рядов доказана.

В этом параграфе были даны условия существования семейства решений системы (1.1), удовлетворяющих условию $z_j \equiv 0$ $(j=1,\ldots,k)$ при $x_s = 0$ $(s=1,\ldots,n)$. Эти решения предлагается строить в виде рядов по степеням независимых переменных $x_1,\ldots,x_n$. Коэффициенты этих рядов являются непрерывными функциями относительно t и одновременно полиномами относительно l произвольных постоянных. Подобная задача была рассмотрена А. М. Ляпуновым в [2]. Он получил достаточные условия существования единственной системы аналитических функций z_j $(j=1,\ldots,k)$, удовлетворяющих системе (1.14) и условиям $z_j = 0$ $(j=1,\ldots,k)$ при $x_s = 0$ $(s=1,\ldots,n)$. Эта так называемая вспомогательная теорема применялась Ляпуновым при решении разнообразных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Развитая в этом параграфе теория в дальнейшем также будет применена к решению вопросов, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями и прежде всего с представлением решений в окрестности особых начальных данных и с представлением O-кривых [6]. Попутно каждый раз мы будем останавливаться на истории разбираемых вопросов.

§ 2. Представление решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особых начальных данных

Рассмотрим уравнение

$$z\frac{dy}{dz}=f(z,y). \tag{2.1}$$

Предположим, что функция $f(z,y)$ разлагается в ряд $f(z,y)=\sum\limits_{i+j=1}^{\infty}a_{ij}z^iy^j$, сходящийся при $|z|<r$, $|y|<\rho$, $r>0$, $\rho>0$.

Брио и Буке [7] показали, что во всех случаях, когда a_{01} не есть целое положительное число, уравнение (2.1) имеет единственное голоморфное решение $y=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_iz^i$, определенное условием $y(0)=0$.

Если a_{01} — целое, то при помощи ряда подстановок вида $y=z\left(u+\frac{a_{10}}{1-a_{01}}\right)$ можно уравнение (2.1) привести к виду

$$z\frac{du}{dz}=u+\bar{a}_{10}z+\sum_{i+j=2}^{\infty}\bar{a}_{ij}z^iu^j.$$

Брио и Буке показали также [7], что при $\bar{a}_{10}=0$ уравнение (2.1) имеет семейство голоморфных решений, зависящих от одной произвольной постоянной, удовлетворяющих условию $y(0)=0$.

А. Пуанкаре [8] углубил результаты Брио и Буке. Он показал, что при $\mathcal{R}(a_{01})>0$ уравнение (2.1), кроме голоморфного решения, удовлетворяющего условию $y(0)=0$, имеет также решение, представимое в виде сходящегося ряда $y=\sum\limits_{i+j=1}^{\infty}c_{ij}z^ix^{a_{01}j}$. Если же a_{01} — целое положительное число и $\bar{a}_{10}\neq 0$, то уравнение (2.1) имеет решение, определенное условием $y(0)=0$, представимое в виде ряда по целым положительным степеням величин z и $z\ln z$, сходящегося при достаточно малых $|z|$.

Возникает задача — распространить результаты Пуанкаре, Брио и Буке на систему n дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений

$$z^N\frac{dy_s}{dz}=f_s(z,y_1,\ldots,y_n)\quad(s=1,\ldots,n), \tag{2.2}$$

где $f_s(z,y_1,\ldots,y_n)$ могут быть представлены в виде рядов:

$$f_s(z,y_1,\ldots,y_n)=\sum_{i=1}^{n}p_{si}y_i+p_sz+$$

$$+\sum_{m_1+\ldots+m_n\geqslant 2}P_s^{(m,m_1,\ldots,m_n)}z^my_1^{m_1}\ldots y_n^{m_n},$$

сходящихся при $|z|<r$, $|y_s|<\rho$ $(s=1,\ldots,n)$, где r и ρ — некоторые положительные постоянные, а p_{si}, p_s, $P_s^{(m,m_1,\ldots,m_n)}$ — вещественные постоянные.

Пусть z_1, $z_2,\ldots,z_n,\ldots$ — такая последовательность, что $|z_j|\to 0$ при $j\to+\infty$, а $|\arg z_i|\leqslant c<+\infty$. Встает вопрос: существует ли решение $y_s=y_s(z)$ $(s=1,\ldots,n)$ системы (2.2), обладающее следующим свойством:

$$|y_s(z_j)|\to 0 \text{ при } j\to+\infty? \qquad (2.3)$$

Если решение $y_s=y_s(z)$ системы (2.2), обладающее свойством (2.3), существует, то возникает задача отыскания такого решения и его аналитического представления.

Через $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ обозначим корни уравнения $|P-\lambda E|=0$, $\{P\}_{ik}=p_{ik}$, E — единичная матрица.

Система (2.2) в случае $N'=1$ и $\frac{\partial f_s}{\partial z}=0$ $(s=1,\ldots,n)$ была рассмотрена Пикаром [9]. Он получил следующий результат.

Если:

1) *элементарные делители матрицы P — простые,*

2) $\mathscr{R}(\lambda_i)>0$ $(i=1,\ldots,n)$,

3) *не существует соотношений вида* $\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i=\lambda_j$ $(j=1,\ldots,n)$, *где* $m_1,\ldots,m_n$ — *целые неотрицательные числа*, $\sum_{i=1}^{m} m_i\geqslant 2$,

то существует семейство решений, зависящее от n произвольных постоянных и представимое в виде рядов

$$y_s=\sum_{m_1+\ldots+m_n\geqslant 1}^{\infty} C_s^{(m_1,\ldots,m_n)}\, c_1^{m_1}\ldots c_n^{m_n} z^{\sum_{i=1}^{n} m_i\lambda_i} \qquad (s=1,\ldots,n), \quad (2.4)$$

сходящихся при достаточно малых $|c_i|$ $(i=1,\ldots,n)$, $|z|$. Величины $C_s^{(m_1,\ldots,m_n)}$ в (2.4) являются определенными постоянными.

Нетрудно убедиться, что ряды (2.4), полученные Пикаром, обладают свойством (2.3). В случае $N=1$, $n=2$, $\frac{\partial f_s}{\partial z}\equiv 0$ $(s=1,\ldots,n)$ Хорну [10] удалось построить решение, обладающее свойством (2.3) в предположении, что $\lambda_1>0$ — целое число, $\lambda_2=0$.

Таким образом, результаты Брио, Буке и Пуанкаре не распространены на системы n дифференциальных уравнений.

Дадим более полное решение поставленного вопроса. С этой целью рассмотрим следующую систему уравнений:

$$z\frac{dy_s}{dz}=\sum_{i=1}^{n} p_{si}(z)\,y_i+p_s(z)\,z+Y_s(z,y_1,\ldots,y_n) \quad (s=1,\ldots,n). \quad (2.5)$$

Функции Y_s разлагаются в ряды

$$Y_s = \sum_{m+m_1+\ldots+m_n \geqslant 2} P_s^{(m, m_1, \ldots, m_n)}(z) z^m y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n} \quad (s = 1, \ldots, n),$$

сходящиеся при $|z| < z_1$, где $z_1 > 0$ — постоянная, и $|y_j| < y_0$ $(j = 1, \ldots, n)$. Функции

$$p_{si}(z), \ p_s(z), \ P_s^{(m, m_1, \ldots, m_n)}(z) \tag{2.6}$$

заданы при $z \in (0,1]$, вещественны, непрерывны и ограничены.

Для системы (2.5) в точке $y_1 = \ldots = y_n = 0$, $z = 0$, вообще говоря, не выполнены условия существования решения. Поэтому возникает вопрос: при каких условиях существует решение системы (2.5) $y_s = y_s(z)$ $(s = 1, \ldots, n)$ такое, что $y_s \to 0$ при $z \to 0$. Далее будут выведены нужные условия и будет дано аналитическое представление таких решений.

Обозначим через $\mu_1, \ldots, \mu_n$ характеристичные числа системы

$$\frac{dy_s}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} p_{si}(e^{-t}) y_i \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{2.7}$$

Теорема 4. *Пусть*:

1) $\mu_i > 0$ *при* $i \leqslant l$,

2) *система* (2.7) — *правильная*.

Тогда система уравнений (2.5) *имеет семейство решений, зависящее от* l *произвольных постоянных, представимое в форме рядов*:

$$y_s = \sum_{m+m_1+\ldots+m_l \geqslant 1} K_s^{(m, m_1, \ldots, m_l)}(z) z^{m + \sum_{i=1}^{l} m_i \mu_i} c_1^{m_1} \ldots c_l^{m_l} \tag{2.8}$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

сходящихся при $|z| \leqslant z_0$, $|c_j| \leqslant c_0$ $(j = 1, \ldots, l)$, *при этом* $z_0 < \beta$ *и* $c_0 z_0 < \beta$, *где* β — *достаточно малая постоянная*, c_0, z_0 — *положительные постоянные. Функции* $K_s^{(m, m_1, \ldots, m_l)}(z)$ *обладают следующим свойством*: $K_s^{(m, m_1, \ldots, m_l)}(z) z^{\alpha} \to 0$ *при* $z \to 0$, *где* $\alpha > 0$ — *постоянная*.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$-\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \mu_j x_j - z \frac{\partial y_s}{\partial z} + \frac{\partial y_s}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} p_{si}(e^{-t}) y_i - p_s(e^{-t}) z - Y_s. \tag{2.9}$$

Для системы (2.9) выполнены условия теоремы 1. Поэтому существует система функций

$$y_s(t, c_1, \ldots, c_l, x_1, \ldots, x_l, z) = \sum_{m=1}^{\infty} y_s^{(m)}(t, c_1, \ldots, c_l, x_1, \ldots, x_l, z) \tag{2.10}$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

удовлетворяющая системе (2.9). Ясно, что форма $y_s^{(m)}$ имеет вид

$$y_s^{(m)} = \sum_{\overline{m}+\ldots+\overline{m}_l=m} \overline{K}_s^{(\overline{m}, \overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_l)} z^{\overline{m}} x_1^{\overline{m}_1} \ldots x_l^{\overline{m}_l} c_1^{\overline{m}_1} \ldots c_l^{\overline{m}_l} \quad (2.11)$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

где $m \geqslant 1$. Положим в (2.10)

$$x_j = z^{\mu_j}, \quad t = -\ln z. \quad (2.12)$$

Тогда получим семейство решений (2.8), удовлетворяющее системе (2.5), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Замечание 1. Пусть функции (2.6) являются вещественными постоянными. В этом случае систему (2.5) будем обозначать через (2.5′).

Обозначим, как и выше, через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ корни уравнения $|P - \lambda E| = 0$, $\{P\}_{ik} = p_{ik}$. Легко видеть, что для системы (2.5′) $\mu_i = \mathcal{R}(\lambda_i)$. Таким образом, при $\mathcal{R}(\lambda_i) > 0$, $i \leqslant l$ система (2.5′) имеет семейство решений (2.8). При этом функции $K_s^{(m, m_1, \ldots, m_l)}(z)$ суть полиномы относительно $\ln z$, коэффициенты которых являются тригонометрическими многочленами на основании замечания 1 к теореме 1.

Замечание 2. Приведем в системе (2.5′) матрицу P к каноническому виду. Тогда получим:

$$z \frac{d\overline{y}_s}{dz} = \varepsilon_{s-1}\overline{y}_{s-1} + \lambda_s\overline{y}_s + \overline{p}_s z + \overline{Y}_s \quad (s = 1, \ldots, n), \quad (2.13)$$

где $\varepsilon_0 = 0$.

Рассмотрим систему уравнений с частными производными, соответствующую (2.13):

$$-\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \overline{y}_s}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{j-1}x_{j-1} + \lambda_j x_j - z\frac{\partial \overline{y}_s}{\partial z}\right) =$$

$$= -(\varepsilon_{s-1}\overline{y}_{s-1} + \lambda_s\overline{y}_s + \overline{Y}_s + \overline{p}_s z). \quad (2.14)$$

По теореме 2 эта система имеет решение в виде сходящихся рядов:

$$\overline{y}_s = \sum_{m+m_1+\ldots+m_l=1} \widetilde{K}_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}(z) c_1^{m_1} \ldots c_l^{m_l} z^m x_1^{m_1} \ldots x_l^{m_l} \quad (2.15)$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

где $\widetilde{K}_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}(z)$ суть полиномы по степеням $\ln z$. Если $m + \sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i \neq \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, l)$ при любых целых неотрицательных $m, m_1, \ldots, m_l$ таких, что $m + m_1 + \ldots + m_l \geqslant 2$, то величины $\widetilde{K}_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}$ являются постоянными.

Положим

$$x_j = \frac{(\ln z)^{l_j} z^{\lambda_j}}{l_j!}, \tag{2.16}$$

где постоянные l_j выбраны так, чтобы функции (2.16) удовлетворяли системе

$$z\frac{dx_j}{dz} = \varepsilon_{j-1}x_{j-1} + \lambda_j x_j.$$

Если функции (2.16) подставить в ряды (2.15), то получим семейство решений системы (2.13). Следовательно, мы получили следующую теорему:

Теорема 5. *Если среди собственных чисел матрицы P в системе* (2.5′) *имеется l чисел с положительными вещественными частями, то существует семейство решений системы* (2.5′), *представимое в форме рядов*

$$y_s = \sum_{m+m_1+\ldots+m_l \geqslant 1} N_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}(\ln z)\, z^{m+\sum\limits_{i=1}^{l} m_i\lambda_i} (\ln z)^{\sum\limits_{i=1}^{l} m_i\lambda_i} c_1^{m_1}\ldots c_l^{m_l} \tag{2.17}$$

$$(s = 1, \ldots, n),$$

сходящихся при $|z| \leqslant z_0$, $|c_j| \leqslant c_0$ $(j = 1, \ldots, l)$, $z_0 < \beta$, $c_0 z_0 < \beta$, *где* $N_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}(\ln z)$ *являются полиномами относительно* $\ln z$. *Если же* $m + \sum\limits_{i=1}^{l} m_i\lambda_i \neq \lambda_j$ *при* $m + \sum\limits_{i=1}^{l} m_i \geqslant 1$ $(j=1, \ldots, l)$, *за исключением соотношений* $\lambda_i = \lambda_i$, *то величины* $N_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}$ *являются постоянными.*

Рассмотрим систему

$$z^N \frac{dy_s}{dz} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}y_i + p_s z + Y_s(z, y_1, \ldots, y_n) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{2.18}$$

Будем считать далее, что правые части системы (2.18)—такие же как и у системы (2.5′).

Пусть $z_1, \ldots, z_k, \ldots$ — последовательность, такая, что $|z_j| \to 0$ при $j \to +\infty$, а $|\arg z_i| \leqslant c < +\infty$. Возникает вопрос: существует ли при $N \neq 1$ решение $y_s = y_s(z)$ $(s = 1, \ldots, n)$ системы (2.18), обладающее тем свойством, что

$$|y_s(z_j)| \to 0 \text{ при } j \to +\infty? \tag{2.19}$$

Если решение $y_s = y_s(z)$ системы (2.18), обладающее свойством (2.19), существует, то ставится задача отыскания такого решения и его аналитического представления.

Дадим решение поставленной задачи при $N \neq 1$.

I. Пусть $N = \frac{p}{q}$, $p < q$, p, q — натуральные числа.

Теорема 6. *Система* (2.18) *в случае* $N=\frac{p}{q}$, $p<q$ *имеет единственное решение, обладающее свойством* (2.19) *и представимое в виде рядов*

$$y_s(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_s^{(k)} z^{\frac{k}{q}} \quad (s=1,\ldots,n). \tag{2.20}$$

Доказательство. В системе (2.18) положим $z=\xi^q$. Тогда будем иметь:

$$\xi^{p-q+1}\frac{dy_s}{d\xi}=f_s(\xi^q, y_1,\ldots,y_n) \quad (s=1,\ldots,n),$$

откуда

$$\frac{dy_s}{d\xi}=\xi^{q-p-1} f_s(\xi^q, y_1,\ldots,y_n). \tag{2.21}$$

Применяя к уравнению (2.21) теорему Коши, получим утверждение теоремы.

II. Пусть $N>1$. Рассмотрим случай, когда $p_s=0$, $\frac{\partial Y_s}{\partial z}=0$ $(s=1,\ldots,n)$. Выберем некоторую величину ψ, удовлетворяющую уравнению

$$z^N d\psi=\psi dz. \tag{2.22}$$

Теорема 7. *Если в системе* (2.18) *среди собственных чисел матрицы* P, $\{P\}_{ij}=p_{ij}$ *имеется* l *величин с положительными вещественными частями* $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$, *то существует решение, представимое в виде рядов*

$$y_s(z)=\sum_{m+m_1+\ldots+m_l\geqslant 1} G_s^{(m,m_1,\ldots,m_l)}(\ln\psi)\,\psi^{m+\sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i} c_1^{m_1}\ldots c_l^{m_l} \tag{2.23}$$

$$(s=1,\ldots,n),$$

сходящихся при $|c_i|\leqslant c_0$, $|\psi|\leqslant\psi_0$, *где* c_0, ψ_0 — *некоторые положительные постоянные.*

Доказательство. Теорема 7 следует из теоремы 5.

Область $|\psi(z)|\leqslant\psi_0$ на плоскости комплексного переменного z не содержит, вообще говоря, никакого круга с центром в начале координат. Поэтому ряды (2.23) удовлетворяют условию (2.19) лишь для некоторых специально выбранных последовательностей $z_1,\ldots,z_k,\ldots$, $|\psi(z_i)|<\psi_0$.

Дадим теперь решение вопроса для особого случая.

Если $\mathcal{R}(\lambda_i)\leqslant 0$ $(i=1,\ldots,n)$, то приведенный выше способ построения решений, обладающих интересующим нас свойством, не пригоден. Если даже $\mathcal{R}(\lambda_i)>0$ при $i=1,\ldots,l$, то может оказаться, что решение с нужными начальными данными не входит в семейство решений, представимых в виде рядов.

Теорема 8. *Если система* (2.18) *при* $N=1$ *имеет решение* $y_s=y_s(z)$ $(s=1,\ldots,n)$, *обладающее теми свойствами, что*

$$y_s(z)\to 0 \text{ при } z\to 0, \quad y_s(z_0)=y_s^{(0)},\ z_0>0, \tag{2.24}$$

то функции $y_s(z)$ *являются аналитическими в круге* $|z|\leqslant\eta(z_0)$ *с вырезом по сектору, содержащему отрезок отрицательной вещественной полу-*

оси $-\eta(z_0)<z<0$, *где* $\eta(z_0)$ — *достаточно малая положительная величина.*

Доказательство этой теоремы может быть получено при помощи некоторого видоизменения доказательства теоремы 26 работы [11].

В качестве следствия приведем следующий результат.

Теорема 9. *Если существует решение* $y_s = y_s(z)$ *системы* (2.18) *при* $N = 1$, *обладающее свойствами* (2.24), *то это решение может быть построено в виде рядов*

$$y_s(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_s^{(m)}(z_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) V^m(z) \quad (s = 1, \ldots, n),$$

сходящихся при $|v(z)| < 1$, *где* $\psi_s^{(m)}$ — *некоторые определенные функции своих аргументов, а* $v(z)$ — *функция, отображающая круг* $|z| \leqslant \eta(z_0)$ *с указанным выше вырезом на круг* $|v| < 1$.

Отметим, что исследованию интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки посвящено большое количество работ. Среди них работы [19], [20], [21]. В этих работах интегральные кривые строятся по методу последовательных приближений и получена в результате этого некоторая характеристика множества интегральных кривых системы уравнений вида, аналогичного (2.2).

Глава II

Исследование вопроса об устойчивости в некоторых сомнительных случаях

§ 3. Качественное исследование окрестности положения равновесия

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

Правые части системы (3.1) заданы при $|\overline{X}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant h$ и удовлетворяют в этой области условиям существования и единственности решений и условию $f_s(0, \ldots, 0) = 0$.

Теорема 10. *Для того чтобы нулевое решение системы* (3.1) *было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{t\leqslant 0,\ |X^{(0)}|=\varepsilon} |X(t, X^{(0)})| = \delta(\varepsilon), \text{ где } \delta(\varepsilon) > 0 \text{ при } \varepsilon > 0.^*$$

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что существует интегральная кривая системы (3.1) $X = X(t, X^{(0)})$ такая, что

$$|X(t_m, X^{(0)})| \to 0 \text{ при } t_m \to -\infty.$$

Возьмем $\varepsilon < X(t_1, X_0)$. Тогда, какое бы $\delta > 0$ ни взять, найдется точка $X_k =$

* Замечание при корректуре. Теорема 7 из монографии «Методы А. М. Ляпунова и их применение», обобщающая теорему 10 настоящей статьи, сформулирована неточно, на что мне указал С. Лефшец.

$= X(t_k, X_0)$, такая, что $|X_k| < \delta$ и $|X(\tau_k, X_k)| > \varepsilon$ при $\tau_k = t_1 - t_k > 0$, а это противоречит определению устойчивости.

Достаточность. Возьмем $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < h$. По ε можно указать $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, такое, что при $X^{(0)2} = \varepsilon^2$ будет

$$X^2(t, X^{(0)}) \geqslant \delta^2 \quad \text{при } t \in [0, -\infty).$$

Действительно, если такое δ указать невозможно, то из компактности сферы $X^{(0)2} = \varepsilon^2$ следует нарушение условия теоремы.

Пусть теперь $X_2^2 < \delta^2$. Траектория $X = X(t, X_2)$ не выходит за пределы сферы $X^2 = \varepsilon^2$ при $t > 0$. Этим теорема доказана полностью.

Теорема 11. *Для того чтобы нулевое решение системы* (3.1) *было асимптотически устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *Не существует траектории $X = X(t, X^{(0)})$, $X^{(0)} \neq 0$, для которой точка $X = 0$ является α-предельной.*

2) *Существует достаточно малая окрестность точки $X = 0$, не содержащая целых траекторий системы* (3.1).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво. Тогда условие 1) выполняется по теореме 10, а условие 2) следует из существования функции Ляпунова (см. работу [12]).

Достаточность. При выполнении условия 1) нулевое решение системы (3.1) устойчиво по Ляпунову, согласно теореме 10. Возьмем $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$, соответствующее взятому ε, и предположим, что $X^2(t, X_1)$ не стремится к нулю при $t \to +\infty$, где $X_1^2 < \delta^2$. Тогда в сфере $X^2 \leqslant \varepsilon^2$ существует целая траектория системы (3.1), являющаяся ω-предельной [6] для решения $X = X(t, X_1)$, что невозможно в силу условия 2), если ε выбрано достаточно малым.

Таким образом, $X^2(t, X_1) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $X_1^2 < \delta^2(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 12. *Для того чтобы нулевое решение системы* (3.1) *было асимптотически устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *Не существует интегральной кривой $X = X(t, X^{(0)})$, для которой*

$$X^2(t, X^{(0)}) \to 0 \text{ при } t \to -\infty, \quad X^{(0)} \neq 0.$$

2) *Существует достаточно малая окрестность точки $X = 0$, не содержащая целых траекторий системы* (3.1).*

Доказательство. *Необходимость.* Условие 1) следует из работы [13], условие 2) — из работы [12].

Достаточность. Предположим, что существует интегральная кривая системы (3.1) $X = X(t, X^{(0)})$, для которой точка $X = 0$ является α-предельной. Тогда можно указать достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что эта интегральная кривая пересекает сферу $X^2 = \varepsilon^2$ бесконечное число раз при $t \in [0, -\infty)$.

Пусть t_n — очередной момент пересечения траектории $X = X(t, X^{(0)})$ со сферой $X^2 = \varepsilon^2$ такой, что $X^2(t_n + \tau, X^{(0)}) < \varepsilon^2$, где $\tau < 0$ достаточно мало.

* Здесь считаем, что решение непрерывно по совокупности (t, X_0).

Пусть τ_n — очередной момент пересечения той же траектории со сферой, такой, что $X^2(\tau_n, X^{(0)}) = \varepsilon^2$ и $X^2(t, X^{(0)}) < \varepsilon^2$ при $t \in (t_n, \tau_n)$. Последовательность $X(t_n, X^{(0)})$ имеет предельную точку P. Интегральная кривая $X = X(t, P)$ лежит при $t \leqslant 0$ целиком в сфере $X^2 \leqslant \varepsilon^2$, ибо в сколь угодно малой окрестности точки P имеются точки $X(t_n, X^{(0)})$ такие, что интегральная кривая $X(t, X(t_n, X^{(0)}))$ находится внутри сферы $X^2 < \varepsilon^2$ при $t \in (0, \tau_n - t_n)$. При этом $\tau_n - t_n \to -\infty$ для $n \to +\infty$.

Либо интегральная кривая $X(t, P)$ стремится к точке $X = 0$ при $t \to -\infty$, либо внутри сферы $X^2 \leqslant \varepsilon^2$ имеется целая траектория системы (3.1), являющаяся α-предельной для $X = X(t, P)$. Первое невозможно в силу условия 1), второе невозможно в силу условия 2). Таким образом, не существует интегральной кривой $X = X(t, X^{(0)})$, $X^{(0)} \neq 0$, системы (3.1), для которой $X = 0$ является α-предельной точкой. А тогда по теореме 11 нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво.

В случае системы двух уравнений теорема 12 может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 13. *Для того чтобы изолированное нулевое решение системы* (3.1) ($n = 2$) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *Не существует O^--кривой* [6] *системы* (3.1).

2) *Существует O^+-кривая* [6] *системы* (3.1).

Доказательство. *Необходимость* условий следует из определения асимптотической устойчивости и работы [6].

Достаточность. Предположим, что в сколь угодно малой окрестности точки $x_1 = x_2 = 0$ существуют целые траектории системы (3.1). Тогда они являются или периодическими кривыми, или кривыми, входящими двумя концами в точку $x_1 = x_2 = 0$, или спиралями, приближающимися к периодическим кривым. Первое и третье невозможно в силу условия 2), второе невозможно в силу условия 1).

Следовательно, существует достаточно малая окрестность точки $x_1 = x_2 = 0$, не содержащая целых траекторий. В силу теоремы 12 нулевое решение системы (3.1) для $n = 2$ асимптотически устойчиво.

§ 4. Асимптотически устойчивые системы уравнений

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{m=\mu}^{+\infty} X_s^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{4.1}$$

где функции $X_s^{(m)}$ являются однородными формами степени m относительно $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными, непрерывными, ограниченными коэффициентами, заданными при $t > 0$.

Будем предполагать также, что ряды, стоящие в правых частях системы (4.1), сходятся при достаточно малых $|x_s|$ и всех $t \geqslant 0$.

Определение. Система (4.1) называется **асимптотически устойчивой**, если нулевое решение системы (4.1) асимптотически устойчиво вне зависимости от выбора форм $X_s^{(m)}$, $m > \mu$.

А. М. Ляпунов [2] показал, что система (4.1) будет асимптотически устойчивой при $\mu = 1$, если характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n)$$

положительны и сама система — правильная. При этом допустимы достаточно малые по абсолютной величине комплексные возмущения.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты форм $X_s^{(\mu)}$ — постоянные.

Теорема 14. *Если система уравнений*

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

имеет решение

$$x_s = x_s(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{4.3}$$

то она имеет также семейство решений

$$y_s = c x_s(tc^{\mu-1}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = x_s(t, cx_1^{(0)}, \ldots, cx_n^{(0)}) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Доказательство этой теоремы очевидно.

Следствие 1. *Семейство* (4.4) *заполняет коническую поверхность, вершина которой лежит в точке* $x_1 = \ldots = x_n = 0$, *а направляющим множеством служит кривая* (4.3).

Следствие 2. *Если кривая* (4.3) *обладает тем свойством, что* $X^2(t, X_0) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *то существует решение* $y_s = y_s(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$, *такое, что* $\sum_{s=1}^{n} y_s(t)\overline{y_s(t)} \to 0$ *при* $t \to -\infty$.

Для доказательства достаточно положить в (4.4) $c^{\mu-1} = -1$ и заменить на $-t$ в системе (4.2).

Теорема 15. *Система* (4.1) *при четном* μ *не является асимптотически устойчивой, а при нечетном* μ *она может быть асимптотически устойчивой лишь при рассмотрении вещественных возмущений.*

Доказательство этой теоремы вытекает из следствия 2.

Действительно, пусть $\mu = 2k$ и нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво. Тогда существует интегральная кривая $X = X(t, X^{(0)})$ этой системы, такая, что $X(t, X^{(0)}) \to 0$ при $t \to +\infty$. Как следует из теоремы 14, система (4.2) имеет семейство решений $\overline{X} = cX(c^{\mu-1}t, X^{(0)})$. Положим здесь $c = -1$; тогда получим интегральную кривую системы (4.2) $\overline{X} = -X(-t, X^{(0)}) = X(t, -X^{(0)})$, обладающую тем свойством, что $\overline{X} \to 0$ при $t \to -\infty$. Таким образом, система (4.2) имеет интегральную кривую, входящую в точку $X = 0$ при $t \to -\infty$, что невозможно вследствие асимптотической устойчивости нулевого решения. Попутно мы получили следующий результат:

Если D — *множество точек* $X^{(0)}$ *таких, что* $X(t, X^{(0)}) \to 0$ *при* $t \to +\infty$, *то симметричное множество* $\overline{D}$ *точек* $-X^{(0)}$ *обладает таким свойством:* $X(t, Y^{(0)}) \to 0$ *при* $t \to -\infty$ *при* $Y^{(0)} \in \overline{D}$.

Пусть теперь $\mu = 2k+1$. Покажем, что в этом случае нулевое решение системы (4.2) не может быть асимптотически устойчивым при любых комплексных возмущениях. Действительно, пусть, напротив, нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво при любых комплексных возмущениях. Тогда существует интегральная кривая $X = X(t, X^{(0)}) \to 0$ при $t \to +\infty$. Вместе с тем система (4.2) имеет семейство интегральных кривых $\overline{X} = cX(c^{\mu-1}t, X^{(0)}) = X(t, cX^{(0)})$. Положим $c^{2k} = -1$; тогда получим: $\overline{X} = X(t, \sqrt[2k]{-1}X^{(0)})$. Легко видеть, что выделенная интегральная кривая обладает тем свойством, что $\overline{X} \to 0$ при $t \to -\infty$, ибо $X(t, \sqrt[2k]{-1}X^{(0)}) = \sqrt[2k]{-1}X(-t, X^{(0)})$, что невозможно вследствие асимптотической устойчивости (см. теорему 12). Здесь $\sqrt[2k]{-1}$ означает какое-либо решение уравнения $c^{2k} = -1$.

Дадим, далее, условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4.2), основанное на использовании второго метода А. М. Ляпунова. Эти условия будут носить необходимый и достаточный характер, и их можно будет выразить через свойства функций $X_s^{(\mu)}$.

Теорема 16. *Для того чтобы нулевое решение системы* (4.2) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовала определенно-отрицательная функция* $V(X)$, *удовлетворяющая системе уравнений*

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i^{(\mu)} = W, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = (m+1-\mu)V,\end{gathered} \tag{4.5}$$

где W *— определенно-положительная, непрерывно дифференцируемая однородная функция порядка* $m > \mu - 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Если нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво, то, как показал Н. Н. Красовский [14], любое решение системы (4.2) удовлетворяет неравенству

$$|X(t, X^{(0)})| \leqslant At^{-\frac{1}{\mu-1}} \text{ при } t > 0 \text{ и } |x^{(0)}| = 1. \tag{4.6}$$

Возьмем любую непрерывно дифференцируемую положительно определенную функцию $W(x_1, \ldots, x_n)$ порядка $m > \mu - 1$. Построим соответствующую ей функцию V, положив

$$V(X^{(0)}) = -\int_0^{-\infty} W(X(t, X^{(0)}))\,dt. \tag{4.7}$$

Пользуясь свойством однородности функции W и оценкой (4.6), получим:

$$\int_0^{+\infty} W(X(t, X^{(0)}))\,dt \leqslant C\int_1^{\infty} t^{-\frac{m}{\mu-1}}\,dt + B$$

(C и B — положительные постоянные), откуда следует, что равенство (4.7) ввиду сходимости интеграла, стоящего в правой части, в действительности определяет функцию, заданную на поверхности сферы $|X^{(0)}| = 1$.

Перейдем к исследованию построенной функции. Прежде всего отметим, что формула (4.7) определяет функцию V во всем пространстве. Действительно, пусть $X^{(0)}$ — любой вектор вещественного n-мерного пространства. Тогда его можно представить в виде $X^{(0)} = rY^{(0)}$, где $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(0)2}}$, а $Y^{(0)}$ — вектор единичной длины. Из теоремы 14 следует, что $X(t, X^{(0)}) = rX(r^{\mu-1}t, Y^{(0)})$; подставляя это соотношение в равенство (4.7), получим:

$$V(X^{(0)}) = -\int_0^{+\infty} W(rX(r^{\mu-1}t, Y^{(0)}))\,dt = -r^m \int_0^{-\infty} W(X(r^{\mu-1}t, Y^{(0)}))\,dt.$$

Полагая в последнем равенстве $r^{\mu-1}t = \tau$, получим:

$$V(X^{(0)}) = -r^{m+1-\mu}\int_0^{+\infty} W(X(\tau, Y^{(0)}))\,d\tau = r^{m+1-\mu}V(Y^{(0)}). \tag{4.8}$$

Соотношение (4.8) показывает, что V посредством равенства (4.7) определена во всем пространстве и является однородной функцией порядка $m+1-\mu$.

Для завершения доказательства необходимости условий теоремы 16 остается доказать, что функция V является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет первому из уравнений (4.5). Покажем сначала, что функция V непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. С этой целью продифференцируем формально по переменной $x_k^{(0)}$ соотношение (4.7). Тогда получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k^{(0)}} = -\int_0^{+\infty} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_k^{(0)}}\,dt. \tag{4.9}$$

Функции $\frac{\partial W}{\partial x_s}$, стоящие под интегралом (4.9), являются однородными порядка $m-1$, а функции $\frac{\partial x_s}{\partial x_k^{(0)}}$ удовлетворяют относительно t системе линейных уравнений с переменными коэффициентами. Эта линейная система уравнений получается из системы (4.2) следующим образом: подставим решение $X(t, X^{(0)})$ в систему (4.2), продифференцируем полученные тождества по $x_k^{(0)}$. Функции $\frac{\partial x_s}{\partial x_k^{(0)}}$ обозначим через y_s, тогда будем иметь:

$$\frac{\partial y^s}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_s^{(\mu)}}{\partial x_j}\,y_j.$$

Как следует из оценки (4.6) и однородности функций $X_s^{(\mu)}$, функции $\frac{\partial X_s^{(\mu)}}{\partial x_j}$ будут удовлетворять следующим неравенствам:

$$\left|\frac{\partial X_s^{(\mu)}}{\partial x_j}\right| < \frac{C_1}{t} \text{ при } t \geqslant T > 0,$$

где C_1 — некоторая положительная постоянная. Обычным путем для решения этой системы можно получить оценку:

$$|Y| \leqslant |Y^{(0)}| C_2 t^{C_3}, \tag{4.10}$$

C_2 и C_3 — некоторые положительные константы.

Оценим интеграл, стоящий в (4.9):

$$\left|\int_0^{+\infty} \sum_{s=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial x_k^{(0)}} dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \sqrt{\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial x_s}\right)^2} \sqrt{\sum_{s=1} \left(\frac{\partial x_s}{\partial x_k^{(0)}}\right)^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \sqrt{\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial W}{\partial x_s}\right)^2} \sqrt{\sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial x_s}{\partial x_k^{(0)}}\right)^2} dt + \int_1^{+\infty} C_4 t^{-\frac{m}{\mu-1}+C_3} dt,$$

откуда следует, что интеграл (4.9) сходится при достаточно большом m и притом равномерно относительно $X^{(0)}$ в каждой конечной области. Таким образом, функция V непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Вычислим теперь значение этой функции на некоторой интегральной кривой $X = X(t, X^{(0)})$. Из (4.7) будем иметь:

$$V(X(t, X^{(0)})) = -\int_0^{+\infty} W(X(\tau, X(t, X^{(0)})))\, d\tau,$$

откуда

$$V(X(t, X^{(0)})) = -\int_t^{+\infty} W(X(\tau, X^{(0)}))\, dt.$$

Дифференцируя обе части полученного соотношения по t, получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i^{(\mu)} = W.$$

Таким образом, функция V удовлетворяет первому из соотношений (4.5) вдоль любой интегральной кривой системы (4.2). Вследствие наличия непрерывных производных у функции V можно утверждать, что она удовлетворяет системе (4.6). Этим необходимость условий доказана.

Достаточность. Если функция V, удовлетворяющая системе (4.6), существует, то, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, нулевое решение системы (4.2) будет асимптотически устойчивым.

Следствие 1. *Система уравнений* (4.5) *в частных производных при* $n=2$ *может быть легко разрешена. В результате этого функция* V *определится через* $X_1^{(\mu)}$, $X_2^{(\mu)}$ *и* W *при помощи квадратур. В общем случае эта система также может быть разрешена, и необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы* (4.2) *можно будет выразить через свойства функций* $X_s^{(\mu)}$.

Следствие 2. *Если нулевое решение системы* (4.2) *асимптотически устойчиво, то система* (4.1) *асимптотически устойчива.*

Действительно, пусть нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво. Тогда существует определенно-отрицательная функция V, удовлетворяющая системе (4.6). Следуя работе [15], вычислим полную производную функции V в силу системы (4.1). Тогда получим определенно-положительную функцию W_1. Из теоремы Ляпунова и получаемых при этом оценок следует наше утверждение.

Получение условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4.2) через свойства функций $X_s^{(\mu)}$ связано с анализом функции V, получаемой при решении системы (4.5), и приводит к весьма громоздким алгебраическим вычислениям, причем эти вычисления связаны всегда с нелинейными алгебраическими соотношениями. Далее мы покажем, что эти трудности лежат в некотором смысле в существе самой проблемы, а именно, покажем, что условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4.2) сводятся к нахождению условий ограниченности области притяжения некоторой системы дифференциальных уравнений, устойчивость нулевого решения которых определяется уже линейными членами. Таким образом, для того чтобы было получено решение локальной проблемы, необходимо и достаточно разрешение нелокальной проблемы, указанной выше.

Если нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво, то существуют две однородных знакоопределенных функции V и W, связанных соотношением (4.6). Вследствие однородности эти функции будут удовлетворять неравенствам

$$-a_1 \mid X\mid^{m-\mu+1} \leqslant V \leqslant -a_2 \mid X\mid^{m-\mu+1}, \tag{4.11}$$

$$b_1 \mid X\mid^{m} \leqslant W \leqslant b_2 \mid X\mid^{m}. \tag{4.12}$$

Следуя работе [16], дадим оценку расстояния интегральной кривой $X(t, X^{(0)})$ до начала координат. Легко видеть, что имеет место равенство

$$[V(X(t,X^{(0)}))]^{1-\lambda} = [V(X^{(0)})]^{1-\lambda} + (1-\lambda)\int_0^t W(X(\tau,X^{(0)}))\,[V(X(\tau,\ X^{(0)}))]^{-\lambda} d\tau. \tag{4.13}$$

Применяя неравенства (4.11), (4.12) к (4.13), получим:

$$\frac{c_1 \mid X^{(0)}\mid}{\sqrt[2k]{1+c_2 \mid X^{(0)}\mid^{2k}t}} \leqslant \mid X(t,X^{(0)})\mid \leqslant \frac{d_1 \mid X^{(0)}\mid}{\sqrt[2k]{1+d_2 \mid X^{(0)}\mid^{2k}t}}. \tag{4.14}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_s}{d\tau} = -x_s - X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{4.15}$$

Нулевое решение системы (4.15) асимптотически устойчиво, и поэтому любое решение этой системы, начинающееся в достаточно малой окрестности начала координат, ограничено при $\tau \in [0, +\infty)$.

Теорема 17. *Для того чтобы нулевое решение системы* (4.2) *было асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы область притяжения нулевого решения системы* (4.15) *была ограничена.*

Прежде, чем перейти к непосредственному доказательству этой теоремы, установим некоторое соответствие между решениями систем (4.2) и (4.15). Обозначим через $\overline{X}(\tau, X^{(0)})$ интегральную кривую системы (4.15).

Рассмотрим векторную функцию $X = z(t)\overline{X}(\ln z(t), X^{(0)})$, где $z(t)$ — положительное решение уравнения $\frac{dz}{dt} = -z^{\mu}$. Дифференцируя покоординатно построенную функцию, получим:

$$\frac{dx_s}{dt} = -z^{\mu}\overline{x}_s(\ln z, X^{(0)}) - z^{\mu}\frac{d\overline{x}_s(\ln z, X^{(0)})}{d\ln z} = z^{\mu}X_s^{(\mu)}(\overline{X}(\ln z, X^{(0)})),$$

$$\text{т. е. } \frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, если $\overline{X}(\tau, X^{(0)})$ — решение системы (4.15), то векторая функция

$$z(t)\overline{X}(\ln z, X^{(0)}) \tag{4.16}$$

является решением уравнения (4.2). Если $z(0) = 1$, то соответствующие интегральные кривые обеих систем проходят через одну точку.

Доказательство. *Необходимость.* Если нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво, то любое ее решение удовлетворяет неравенству (4.14). Из соотношений (4.16) следует, что для ограниченности области притяжения нулевого решения системы (4.15) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$a \leqslant \frac{|X(t, X^{(0)})|}{z(t)} \leqslant b, \quad t > 0,$$

где $X(t, X^{(0)})$ — любое решение системы (4.2), a и b — положительные постоянные. Это последнее неравенство следует из (4.14), так как

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt[2k]{1 + 2kt}}.$$

Достаточность. Пусть область притяжения нулевого решения системы (4.15) ограничена. Тогда для достаточно малых $|X^{(0)}|$ из (4.16) имеем: $|X(t, X^{(0)})| < z(t)C$ при $t > 0$, $C > 0$. А тогда, как было показано в теореме 16, существуют две функции V и W, удовлетворяющие системе (4.6) и показывающие, что нулевое решение системы (4.2) асимптотически устойчиво.

Следствие. Из работы [11] вытекает, что *уравнение*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(-x_i - X_i^{(\mu)}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)(1 + V),$$

где φ — определенно-положительная аналитическая функция (например, определенно-отрицательная квадратичная форма), имеет решение в виде аналитической определенно-отрицательной функции, заданной во всей области притяжения нулевого решения системы (4.15). *Эта функция обладает следующим предельным свойством: $V(X) \to -1$ при $X \to \bar{X}$, где $\bar{X}$ — точка границы области притяжения, а X — внутренняя точка этой области.* Таким образом, *для того чтобы нулевое решение системы* (4.2) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы область $V > -1$, содержащая начало координат, была ограниченной.*

Отметим, что задача устойчивости, связанная с некоторой механической системой, сводится иногда к исследованию условной устойчивости нулевого решения системы (4.1). Далее будут выведены критерии условной асимптотической устойчивости, а также предложен способ отыскания O^+-кривых и O^--кривых, основанный на теоремах, изложенных в § 2.

§ 5. Аналитическое представление O-кривых системы (4.1)

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{d\varphi} = x_s + aX_s^{(\mu)} \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{5.1}$$

где или $a = +1$, или $a = -1$.

Обозначим через

$$x_s = x_s(\varphi, a) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.2}$$

решение системы (5.1), определенное при $\varphi \in (-\infty, +\infty)$.

Обозначим через

$$\mu_1, \ldots, \mu_n \tag{5.3}$$

характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{d\varphi} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi, a) x_i \quad (s = 1, \ldots, n), \tag{5.4}$$

где

$$p_{si}(\varphi, a) = \delta_{si} + a \left.\frac{\partial X_s^{(\mu)}}{\partial x_i}\right|_{\substack{x_1 = x_1(\varphi, a), \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n(\varphi, a)}}.$$

Теорема 18. *Если:*

1) *система* (5.1) *имеет ограниченное при $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ решение* (5.2),
2) *система* (5.4) — *правильная,*

3) *среди чисел* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *имеется* l *положительных,* $\mu_i > 0$ *при* $i \leqslant l$, *то система* (4.1) *имеет два семейства решений, каждое из которых зависит от* l *произвольных постоянных и представимо в форме рядов*

$$y_s^{(j)} = z(at)(-1)^{j+1}x_s(\varphi, a) +$$

$$+ \sum_{m+m_1+\ldots+m_l \geqslant 1} F_s^{(j,m,m_1,\ldots,m_l)}(z)\, c_{1j}^{m_1} \ldots c_{lj}^{m_l}\, z^{m + \sum\limits_{i=1}^{l} m_i \mu_i} \tag{5.5}$$

$$(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2),$$

сходящихся при $|z| < z_0$, $|c_{ij}| \leqslant c_0$, $z_0 < \beta$, $c_0 z_0 < \beta$ $(j = 1, 2;\ j = 1, \ldots, l)$, *где* $z(at)$ — *некоторая положительная функция, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{dz}{dt} = -az^{\mu}, \tag{5.6}$$

$$\varphi = -\ln z. \tag{5.7}$$

Функции $F_s^{(j,m,m_1,\ldots,m_l)}(z)$ *таковы, что*

$$z^{\alpha}F_s^{(j,\,m,\,m_1,\,\ldots,\,m_l)}(z) \to 0 \text{ при } z \to 0 \text{ для любого } \alpha > 0.$$

Доказательство. С помощью уравнения (5.6) сделаем в системе (4.1) замену независимой переменной, а затем замену искомых функций по формулам

$$x_s^{(j)} = z(at)\,[x_s(\varphi, a)(-1)^{j+1} + y_s^{(j)}] \quad (s = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2), \tag{5.8}$$

где $y_s^{(j)}$ — новые искомые функции. Для определения $y_s^{(j)}$ получим систему:

$$z\frac{dy_s^{(j)}}{dz} = -\left[\sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi, a)\, y_i + p_s(\varphi, a) z\right] + Y_s^{(j)} \tag{5.9}$$

$$(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2).$$

К системе (5.9) можно применить теорему 4. В результате этого получим два семейства решений, каждое из которых зависит от l произвольных постоянных и представимо в форме рядов, которые, благодаря замене (5.8), определят семейство (5.5).

Этим теорема доказана полностью.

Замечание 1. Из (5.6) следует, что

$$z(at) = z_0(1 + 2katz_0^{2k})^{-\frac{1}{2k}}.$$

Поэтому при достаточно малой величине $z_0 > 0$ ряды (5.5) будут сходиться при всех $at \in [0, +\infty)$.

Таким образом, любая интегральная кривая, входящая в семейство (5.5), будет O-кривой, при этом она будет O^{+}-кривой при $a = 1$ и O^{-}-кривой при $a = -1$. В последнем случае имеет место неустойчивость.

Замечание 2. Пусть функции (5.2) являются постоянными: $x_s(\varphi, a) = a_s$ $(s = 1, \ldots, n)$. Тогда любая интегральная кривая, входящая в семейство (5.5), обладает тем свойством, что

$$\frac{x_s^{(j)}(t)}{z(at)} \to a_s(-1)^{j+1} \text{ при } t \to +\infty. \tag{5.10}$$

В этом случае величины $p_{si}(\varphi, a) = p_{si}(a, a_1, \ldots, a_n)$ являются постоянными. Поэтому характеристичные числа системы (5.4) совпадают с вещественными частями корней $\lambda_s(a, a_1, \ldots, a_n)$ $(s = 1, \ldots, n)$ уравнения

$$| P + \lambda E | = 0, \quad \{P\}_{ik} = p_{ik}(a, a_1, \ldots, a_n).$$

Определение. Будем говорить, что интегральная кривая системы (4.1)

$$x_s = x_s(t) \quad (s = 1, \ldots, n)$$

имеет определенное направление, если

$$\lim_{at \to +\infty} \frac{x_s(t)}{z(at)} = a_s \quad (s = 1, \ldots, n),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — вещественные постоянные.

Ясно, что величины $a_1, \ldots, a_n$ являются вещественным решением алгебраической системы

$$x_s + aX_s^{(\mu)} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{5.11}$$

Всякое вещественное решение системы (5.11), отличное от нулевого, будем называть направлением.

Определение. Направление $a_1, \ldots, a_n$ назовем асимптотически устойчивым, если

$$\mathcal{R}(\lambda_s(a, a_1, \ldots, a_n)) > 0 \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Сделаем в системе (4.2) замену

$$x_s = z(t)[a_s + y_s(t)] \quad (s = 1, \ldots, n),$$

где $y_s(t)$ — новые искомые функции, а величины $a_1, \ldots, a_n$ определяют асимптотически устойчивое направление, соответствующее $a = 1$. Полагая $\varphi = -\ln z(t)$, получим следующую систему для определения функций $y_s(t)$:

$$\frac{dy_s}{d\varphi} = y_s + a_s + X_s^{(\mu)}(y_1 + a_1, y_2 + a_2, \ldots, y_n + a_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{si}(a_1, \ldots, a_n) y_i + \sum_{m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 2}^{\mu} P_s^{(m_1, \ldots, m_n)} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n} \tag{5.12}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Нулевое решение системы (5.12) асимптотически устойчиво при $\varphi \to +\infty$.

Обозначим через $A(a_1, \ldots, a_n)$ область асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5.12).

Положим

$$B(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n) + (d_1, \ldots, d_n), \tag{5.13}$$

где точка $(d_1, \ldots, d_n) \in A$.

Рассмотрим случай, когда система (4.1) асимптотически устойчива и при этом каждая O^+-кривая имеет определенное направление. Тогда имеются две возможности:

1) Существует конечное число вещественных решений системы (5.11) при $a = 1$.

2) Существует бесконечное число вещественных решений системы (5.11) при $a = 1$.

В этих случаях система (5.11) не имеет вещественных решений при $a = -1$,

Теорема 19. *Для того чтобы система* (4.1) *была асимптотически устойчивой, и при этом имелось конечное число направлений, и чтобы любая интегральная кривая имела направление, необходимы и достаточны следующие условия:*

1) *Система* (5.11) *имеет конечное число вещественных решений.*

2) *Замыкание суммы областей* $\bar{B}(a_1, \ldots, a_n)$, *распространенной на все асимптотически устойчивые направления, покрывает* n*-мерную сферическую окрестность точки* $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 18 и предыдущих рассуждений.

Замечание 3. Если функции (5.2) ограничены при $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ и система (5.4) — приводимая [2], то существует O-кривая системы (4.1) и, более того, среди величин $\mu_1, \ldots, \mu_n$ имеется по крайней мере одна положительная $\mu_1 = 2k$.

Лемма 1. *Если приводимая система*

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i, \tag{5.14}$$

где $p_{si}(t)$ — *непрерывные ограниченные функции, заданные при* $t \geqslant 0$, *имеет характеристичные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *то система*

$$\frac{dx_s}{dt} = \gamma \sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i \tag{5.15}$$

имеет характеристичные числа $\mu_1, \ldots, \mu_n$, *при этом* $\mu_i = \gamma\lambda_i$, *где* $\gamma > 0$ — *некоторая постоянная.*

Доказательство. Обозначим через $X(t)$ нормальную систему решений для линейной системы (5.14), а через $Y(t)$ — нормальную систему решений для (5.15). Эти нормальные системы решений можно представить в виде

$$X(t) = e^{\Lambda t} Q(t), \tag{5.16}$$

$$Y(t) = e^{\mathrm{M} t} R(t), \tag{5.17}$$

где Λ и M — диагональные матрицы:

$$\Lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \quad M = [\mu_1, \ldots, \mu_n].$$

При этом элементы матриц $Q(t)$ и $R(t)$ имеют неотрицательные характеристичные числа.

Запишем линейные системы (5.14) и (5.15) в матричной форме:

$$\frac{dX}{dt} = XP \quad \text{и} \quad \frac{dY}{dt} = \gamma YP.$$

Из (5.14) имеем:

$$P(t) = Q^{-1}(t)\, e^{-\Lambda t} \frac{d}{dt}(e^{\Lambda t} Q(t)) = Q^{-1}(t)\left(\Lambda Q + \frac{dQ}{dt}\right). \tag{5.18}$$

Подставляя (5.18) в (5.15) и полагая $Y(t) = e^{Mt} R(t)$, получим:

$$\frac{d}{dt}(e^{Mt} R(t)) = \gamma e^{Mt} R(t)\, Q^{-1}(t)\left(\Lambda Q + \frac{dQ}{dt}\right). \tag{5.19}$$

Положим в тождестве (5.19)

$$S_1 = e^{Mt} R Q^{-1};$$

тогда получим:

$$\frac{dS_1}{dt} = S_1\left(\gamma\Lambda + (\gamma - 1)\frac{dQ}{dt} Q^{-1}\right). \tag{5.20}$$

Наряду с тождеством (5.20), рассмотрим матричное неоднородное уравнение

$$\frac{dS}{dt} = S\gamma\Lambda + (\gamma - 1)\, e^{Mt} R Q^{-1} \frac{dQ}{dt} Q^{-1}. \tag{5.21}$$

Уравнение (5.21) имеет решение $S = S_1$. Найдем это решение методом вариации произвольных постоянных. Для этого положим

$$S(t) = C(t)\, e^{\gamma\Lambda t}. \tag{5.22}$$

Подставляя (5.22) в (5.21), получим:

$$\frac{dC(t)}{dt} = (\gamma - 1)\, e^{Mt} R Q^{-1} \frac{dQ}{dt} Q^{-1} e^{-\gamma\Lambda t}. \tag{5.23}$$

Интегрируя уравнение (5.23) при начальных данных, соответствующих S_1, получим:

$$S_1 = C(t)\, e^{\Lambda\gamma t}, \tag{5.24}$$

откуда

$$R(t)\, Q^{-1} = e^{-Mt}\left(S_1(0) + \int_0^t e^{Mt'} R \frac{dQ^{-1}}{dt'} e^{-\gamma\Lambda t'} (1 - \gamma)\, dt'\right) e^{\Lambda\gamma t}. \tag{5.25}$$

Анализируя выражение (5.25), получим: $M = \gamma\Lambda$. Тем самым лемма 1 доказана.

Предположим теперь, что система (5.1) имеет ограниченное вещественное решение

$$x_s = x_s(\varphi, a) \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Подставив это решение в систему (5.1), получим n тождеств; умножая каждое из них на μ и пользуясь теоремой Эйлера, будем иметь:

$$\mu X_s^{(\mu)}(x_1(\varphi, a), \ldots, x_n(\varphi, a)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(\varphi, a) \frac{\partial X_s^{(\mu)}(x_1(\varphi, a), \ldots, x_n(\varphi, a))}{\partial x_i};$$

тогда

$$\mu x_s' = 2kx_s - \sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi, a) x_i. \tag{5.26}$$

Умножая каждое из тождеств (5.26) на $z^{\frac{2k}{\mu}}$, получим:

$$\mu \frac{d\bar{x}_s}{d\varphi} = -\sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi, a) \bar{x}_i. \tag{5.27}$$

У системы (5.27) существует решение вида $\bar{x}_s = z^{\frac{2k}{\mu}} x_s(\varphi, a)$, откуда следует, что система (5.27) имеет характеристичное число $\frac{2k}{\mu}$. На основании леммы 1 можно утверждать, что система (5.4) имеет характеристичное число $2k$.

Лемма 2. *Если система* (5.1) *имеет ограниченное решение* $x_s = x_s(\varphi, a)$, *то среди характеристичных чисел приводимой системы* (5.4) *имеется по крайней мере одно положительное* $\lambda_1 = 2k$.

Доказательство этого утверждения следует из вышеприведенных рассуждений.

Таким образом, если система (5.1) имеет ограниченное решение $x_s = x_s(\varphi, a)$, $\varphi \in [\varphi_0, +\infty)$, и система (5.4) — приводимая, то система (4.1) имеет два семейства решений, каждое из которых зависит от одной произвольной постоянной и представимо в форме рядов (5.5) при $l = 1$. При этом каждая из интегральных кривых этих семейств определена при $at \in [0, +\infty)$ и обладает тем свойством, что $y_s^{(j)} \to 0$ при $at \to +\infty$ ($j = 1, 2$; $s = 1, \ldots, n$).

Теорема 20. *Если система уравнений* (5.11) *при* $n = 2$, $a = +1$ *имеет вещественное ненулевое решение, то для асимптотической устойчивости системы* (4.1) *при* $n=2$ *необходимо и достаточно, чтобы система* (5.11) *при* $n = 2$ *и* $a = -1$ *не имела вещественных решений, отличных от нулевого.*

Доказательство этой теоремы следует из замечания 3 и теоремы 13.

Действительно, как показано в замечании 3, система (4.1) при $n = 2$ будет иметь два семейства решений, представимых в форме рядов (5.5), $l = 1$, $a = +1$, определяющих семейство O^+-кривых системы (4.1). Из условий теоремы 20 следует, что система (4.2) не имеет O^--кривых. Следовательно, на основании теоремы 13 можно заключить, что система (4.1) асимптотически устойчива.

Теорема 20 в другой форме была сформулирована уже в работе [17]. Там доказательство этой теоремы проводится при помощи второго метода А. М. Ляпунова. В настоящей работе она получена как следствие первого метода, основанного на построении O-кривых системы (4.1).

§ 6. Случай нескольких нулевых корней характеристического уравнения для системы первого приближения

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \quad (s = 1, \ldots, k),$$
$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}y_i + Y_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6.1}$$

Функции X_s, Y_j разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n$, сходящиеся при достаточно малых $|x_s|$, $|y_j|$ $(s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n)$ и не содержащие членов, линейных относительно $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$. Коэффициенты в разложениях X_s, Y_j и величины p_{si} являются вещественными постоянными.

Предположим далее, что собственные числа матрицы P, $\{P\}_{ij} = p_{ij}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеют отрицательные действительные части.

Обозначим через $u_j(x_1, \ldots, x_k)$ $(j = 1, \ldots, n)$ голоморфное при достаточно малых $|x_s|$ $(s = 1, \ldots, n)$ решение системы

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ji}y_i + Y_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6.2}$$

Теорема 21. *Для того чтобы система* (6.1) *имела k голоморфных не зависящих от t интегралов вида $c_s = x_s + f_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$, где функции f_s разлагаются в сходящиеся ряды по целым положительным степеням величин $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n$, не содержащие членов, линейных относительно этих величин, и, кроме того, $f_s \equiv 0$ при $x_1 = \ldots = x_k = 0$ и $f_s \equiv 0$ при $y_j = u_j(x_1, \ldots, x_k)$ $(j = 1, \ldots, n)$, необходимо и достаточно, чтобы $X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Сделаем в системе (6.1) замену искомых функций по формулам

$$y_j = u_j(x_1, \ldots, x_k) + \eta_j, \tag{6.3}$$

тогда эта система примет вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, u_n + \eta_n) = \overline{X}_s \quad (s = 1, \ldots, k),$$
$$\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\eta_i + Y_j(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, u_n + \eta_n) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} p_{ji}u_i - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial u_j}{dx_s}\overline{X}_s =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\eta_i + \overline{Y}_j(x_1, \ldots, x_k, \eta_1, \ldots, \eta_n) - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial u_j}{dx_s}\overline{X}_s \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6.4}$$

Функции $\overline{Y}_j$ в системе (6.4) обладают тем свойством, что $\overline{Y}_j \equiv 0$ при $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$. Система (6.4) имеет, согласно условию теоремы, k не зависящих от t голоморфных интегралов

$$c_s = x_s + f_s(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, u_n + \eta_n); \tag{6.5}$$

так как разложения функций $f_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$ не содержат членов, линейных относительно величин $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n$, и $f_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, k)$, то равенства (6.5) можно обратить. В результате их обращения получим:

$$x_s = c_s + g_s(c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n). \tag{6.6}$$

Функции $g_s(c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ разлагаются в сходящиеся ряды по целым положительным степеням величин $c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n$, не содержащие членов, линейных относительно этих величин. Кроме того, $g_s \equiv 0$ при $c_1 = \ldots = c_k = 0$ и $g_s \equiv 0$ при $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$. Легко видеть, что функции (6.6) удовлетворяют системе уравнений в частных производных

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial \eta_j} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ji}\eta_i + \overline{Y}_j - \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \overline{X}_l \right) = \overline{X}_s \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{6.7}$$

Из свойств функций g_s следует, что равенство (6.6) можно переписать в форме

$$x_s = c_s + \sum_{m=1}^{\infty} x_s^{(m)}, \tag{6.8}$$

где $x_s^{(m)}$ — однородные формы степени m относительно величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, коэффициенты которых являются аналитическими функциями величин $c_1, \ldots, c_k$, обращающимися в нуль при $c_1 = \ldots = c_k = 0$. Подставляя ряды (6.8) в функции $\overline{X}_s$ и разлагая затем эти функции по степеням величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, получим:

$$\overline{X}_s = \sum_{m=0}^{+\infty} \overline{X}_s^{(m)}, \tag{6.9}$$

где $\overline{X}_s^{(m)}$ — формы степени m относительно величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$, при этом $\overline{X}_s^{(0)} = X_s(c_1, \ldots, c_k, u_1(c_1, \ldots, c_k), \ldots, u_n(c_1, \ldots, c_k))$.

Как было указано выше, функции (6.6) удовлетворяют системе (6.7), поэтому при подстановке рядов (6.8) в уравнения (6.7) мы должны получить тождества; подставляя ряды (6.8) и (6.9) в уравнения (6.7) и приравнивая коэффициенты форм относительно $\eta_1, \ldots, \eta_n$, мы получим алгебраические системы, которые устанавливают взаимно однозначную связь между коэффициентами форм $x_s^{(m)}$ и функциями X_s и Y_j. Пусть

$$x_s^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{si}\eta_i. \tag{6.10}$$

Величины a_{sl} в соотношениях (6.10) являются аналитическими функциями относительно $c_1, \ldots, c_k$, причем $a_{sl}=0$ при $c_1=\ldots=c_k=0$. При подстановке рядов (6.8) в систему (6.7) формы (6.10) порождают члены, не зависящие от величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Для того чтобы ряды (6.8) удовлетворяли системе (6.7), необходимо, чтобы свободные члены в системе (6.7) слева и справа были одинаковыми. Отсюда получаем соотношения

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{sj}\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\overline{X}_l^{(0)}\right)=\overline{X}_s^{(0)}$$

и имеем:

$$\sum_{l=1}^{k}\overline{X}_l^{(0)}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{sj}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}-\delta_{sl}\right)=0, \tag{6.11}$$

где $\delta_{sl}=0$ при $l\neq s$ и $\delta_{sl}=1$ при $l=s$. Соотношения (6.11) можно рассматривать как систему линейных уравнений, определяющих величины $\overline{X}_s^{(0)}$ $(s=1, \ldots, k)$. Определитель этой системы уравнений при достаточно малых $|c_s|$ $(s=1, \ldots, k)$ может быть сделан сколь угодно близким к числу $(-1)^k$. Таким образом, при достаточно малых $|c_s|$

$$\overline{X}_s^{(0)}=X_s(c_1, \ldots, c_k, u_1(c_1, \ldots, c_k), \ldots, u_n(c_1, \ldots, c_k))\equiv 0.$$

Этим необходимость наличия k голоморфных интегралов доказана полностью.

Достаточность. Сделаем в системе (6.1) замену $y_j=u_j+\eta_j$ $(j=1, \ldots, n)$. Тогда система (6.1) примет вид:

$$\frac{dx_s}{dt}=\overline{X}_s \quad (s=1, \ldots, k),$$
$$\frac{d\eta_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\eta_i+\overline{Y}_j \quad (j=1, \ldots, n). \tag{6.12}$$

Рассмотрим систему уравнений в частных производных, соответствующую этой системе:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial\eta_j}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\eta_i+\overline{Y}_j\right)=\overline{X}_s \quad (s=1, \ldots, k). \tag{6.13}$$

Сделаем в системе (6.13) замену искомых функций по формуле $x_s=c_s+\xi_s$, тогда новые искомые функции ξ_s будут удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\xi_s}{\partial\eta_j}\left(\sum_{i=1}^{n}p'_{ji}\eta_i+\overline{Y}'_j\right)=\overline{X}'_s=\sum_{m=1}^{+\infty}X_s^{(m)'}, \tag{6.14}$$

где p'_{ji} — аналитические функции относительно величин $c_1, \ldots, c_k$, такие, что собственные числа матрицы p'_{ji} при достаточно малых $c_1, \ldots, c_k$ имеют отрицательные действительные части при достаточно малых $|c_s|$, а функции $X_s^{(m)'}$ представляют собой формы относительно величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ с коэффициентами, аналитическими по $c_1, \ldots, c_k, \xi_1, \ldots, \xi_k$. Функции $X_s^{(1)'}$ таковы, что $X_s^{(1)'} \equiv 0$ при $c_1 = \ldots = c_k = \xi_1 = \ldots = \xi_k = 0$. Поэтому существует единственная система голоморфных функций $\xi_s = f_s(c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, удовлетворяющая системе (6.14) (см. [2], вспомогательная теорема). Функции g_s будут таковы, что $g_s \equiv 0$ при $c_1 = \ldots = c_k = 0$ и $g_s \equiv 0$ при $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$. Таким образом, система (6.13) имеет семейство решений, зависящих от k произвольных постоянных

$$x_s = c_s + g_s(c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n). \tag{6.15}$$

Разрешая соотношения (6.15) относительно $c_1, \ldots, c_k$, получим:

$$c_s = x_s + \varphi_s(x_1, \ldots, x_k, \eta_1, \ldots, \eta_n).$$

Переходя к старым переменным, будем иметь:

$$c_s = x_s + \varphi_s(x_1, \ldots, x_k, y_1 - u_1, \ldots, y_n - u_n) = x_s + f_s(X, Y).$$

Из свойств функции g_s следует, что последние соотношения являются интегралами системы (6.1), причем функции $f_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$, построенные здесь, удовлетворяют всем условиям теоремы 21.

Случай, когда $X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, k)$, является особым и с точки зрения устойчивости нулевого решения системы (6.1) поддается исследованию до конца.

Теорема 22. *Если $X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0$, то нулевое решение системы* (6.1) *устойчиво.*

Доказательство. Преобразование (6.3) над искомыми функциями, переводящее систему (6.1) в систему (6.12), не нарушает устойчивости, поэтому теорема 22 будет доказана, если установить, что нулевое решение системы (6.12) устойчиво. При условиях настоящей теоремы система (6.12) имеет k голоморфных интегралов, представимых в форме

$$x_s = c_s + g_s(c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n) \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Пользуясь этими соотношениями, исключим величины $x_1, \ldots, x_k$ из второй группы уравнений (6.12). В результате этого для определения функций $\eta_1, \ldots, \eta_n$ получим систему уравнений

$$\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p'_{ji}\eta_i + \widetilde{Y}_j. \tag{6.16}$$

Разложения функций $\widetilde{Y}_j$ по степеням величин $\eta_1, \ldots, \eta_n$ не содержат членов ниже второго порядка относительно этих величин, поэтому нулевое решение системы (6.16) при достаточно малых $|c_s|$ асимптотически устойчиво, так как выше было указано, что матрица p'_{ji} имеет собственные числа с отрицательными действительными частями, а тогда $x_s \to c_s$ при $t \to +\infty$. Этим теорема доказана.

Остановимся теперь на качественном строении семейства интегральных кривых системы (6.1), расположенных в достаточно малой окрестности начала координат.

Теорема 23. *Если* $X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n) \equiv 0$, *то достаточно малая окрестность точки* $x_1 = \ldots = x_k = 0$, $y_1 = \ldots = y_n = 0$ *распадается на континуальную сумму непересекающихся множеств, обладающих следующими свойствами:*

1) *Интегральная кривая системы* (6.1), *начинаясь в одном из множеств* D, *остается в нем во всяком случае до тех пор, пока не покидает рассматриваемой окрестности начала координат.*

2) *Между этими множествами и достаточно малой окрестностью начала координат k-мерного пространства можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если* D *соответствует* $c_1, \ldots, c_k$, *то все интегральные кривые системы* (6.1), *начинающиеся в* D, *удовлетворяют тому условию, что*

$$x_s \to c_s, \quad y_s \to u_s(c_1, \ldots, c_k) \text{ при } t \to +\infty.$$

Доказательство. Возьмем достаточно малую окрестность k-мерного пространства. Выберем какую-либо точку этой окрестности $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k)$. При выполнении условий теоремы система (6.1) имеет семейство интегралов, которое можно представить в виде $c_s = x_s + f_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n)$. Каждое из этих равенств определяет в $n+k$-мерном пространстве некоторое многообразие. Обозначим через $D(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k)$ множество всех общих точек многообразий $\bar{c}_s = x_s + f_s$ $(s = 1, \ldots, k)$. Совокупность всех множеств $D(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_k)$ покрывает достаточно малую окрестность начала координат $n+k$-мерного пространства. Действительно, пусть $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — некоторая точка этой окрестности. Положим $c_s^{(0)} = x_s^{(0)} + f_s(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$. Ввиду свойств функций f_s точка $c_1^{(0)}, \ldots, c_k^{(0)}$ будет принадлежать достаточно малой окрестности k-мерного пространства. Поэтому ей соответствует множество $D(c_1^{(0)}, \ldots, c_k^{(0)})$. Ясно, что точка $x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ принадлежит этому множеству. Пусть $X(t)$, $Y(t)$ — интегральная кривая системы (6.1), начинающаяся в точке $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$. Тогда вдоль рассматриваемой интегральной кривой будут иметь место равенства

$$x_s(t) + f_s(x_1(t), \ldots, x_k(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)) = c_s^{(0)} \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Поэтому эта интегральная кривая содержится в множестве $D(c_1^{(0)}, \ldots, c_k^{(0)})$. В теореме 22 было показано, что нулевое решение системы (6.12) устойчиво. При этом $\eta_j \to 0$ при $t \to +\infty$, а $x_s \to c_s$ при $t \to +\infty$, поэтому из (6.3) следует, что $y_j \to u_j(c_1, \ldots, c_k)$, если только $|c_s|$ $(s = 1, \ldots, k)$ достаточно малы. Отсюда и из полученного выше следует, что любая интегральная кривая, лежащая в множестве $D(c_1, \ldots, c_k)$, будет обладать тем свойством, что $x_s(t) \to c_s$, $y_j(t) \to u_j(c_1, \ldots, c_k)$ при $t \to +\infty$.

Отметим, что сформулированные здесь теоремы относятся к любой системе $n+k$ дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями, если только матрица коэффициентов линейной системы, образующей первое приближение, имеет k нулевых собственных чисел, которым отвечают простые элементарные делители, а остальные n собственных чисел этой матрицы имеют отрицательные действительные части. Это следует из того, что всегда можно указать линейное неособое преобразование над искомыми функциями, приводящее такую систему к виду (6.1).

Остановимся теперь вкратце на общем случае исследования вопроса об устойчивости системы вида (6.1).

Положим

$$X_s^{(0)} = \overline{X}_s(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n) \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

$$Y_j^{(0)} = \overline{Y}_j(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = -\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial x_s} X_s^{(0)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Функции $X_s^{(0)}$ и $Y_j^{(0)}$ разлагаются в сходящиеся ряды

$$X_s^{(0)} = \sum_{m=\mu}^{+\infty} X_s^{(m)}, \quad Y_j^{(0)} = \sum_{m=\nu}^{+\infty} Y_j^{(m)} \qquad (s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n), \quad \nu > \mu.$$

Известно [18], что нулевое решение системы (6.1) будет асимптотически устойчиво (устойчиво), если нулевое решение системы

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(0)} \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

будет асимптотически устойчиво (устойчиво) вне зависимости от выбора форм $X_s^{(m)}$, $m > \mu$. Таким образом, при исследовании общего случая можно воспользоваться результатами, содержащимися в §§ 3—5.

§ 7. Случай нескольких пар чисто мнимых корней

Рассматривая систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= -\lambda_s y_s + X_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_n) \\ &\qquad (s = 1, \ldots, k), \\ \frac{dy_s}{dt} &= \lambda_s x_s + Y_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_n), \\ \frac{dz_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} r_{ji} z_i + Z_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_n) \\ &\qquad (j = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

предположим, что функции X_s, Y_s, Z_j разлагаются в сходящиеся степенные ряды относительно $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_n$, не содержащие линейных членов. Будем считать правые части системы (7.1) вещественными. Величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ положительны и таковы, что

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i \neq 0 \tag{7.2}$$

при любых целых $\mu_1, \ldots, \mu_k$, $\quad \sum_{i=1}^{k} |\mu_i| \neq 0.$

Система

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial z_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_{ji} z_i + \overline{Z}_j\Big) = -\lambda_s y_s + \overline{X}_s,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_s}{\partial z_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_{ji} z_i + \overline{Z}_j\Big) = \lambda_s x_s + \overline{Y}_s \tag{7.3}$$

$$(s = 1, \ldots, k)$$

имеет решение

$$x_s = u_s(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n),$$

$$y_s = v_s(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n),$$

голоморфное в окрестности точки $\overline{z}_1 = \ldots = \overline{z}_n = 0$. Сделаем преобразование

$$x_s = \overline{x}_s + u_s, \quad y_s = \overline{y}_s + v_s \tag{7.4}$$

в системе (7.1), тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\overline{x}_s}{dt} &= -\lambda_s \overline{y}_s + \overline{X}_s(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n),\\
\frac{d\overline{y}_s}{dt} &= \lambda_s \overline{x}_s + \overline{Y}_s,\\
\frac{d\overline{z}_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{k} (p_{ji}\overline{x}_i + q_{ji}\overline{y}_i) + \sum_{i=1}^{n} r_{ji}\overline{z}_i + \overline{Z}_j.
\end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

Ясно, что $\overline{X}_s$, $\overline{Y}_s$, $\overline{Z}_j$ обладают теми же свойствами, что и исходные функции X_s, Y_s, Z_j, кроме того, $\overline{X}_s = \overline{Y}_s \equiv 0$, когда все $\overline{x}_s = \overline{y}_s = 0$ $(s = 1, \ldots, k)$.

Сделаем, далее, в системе (7.5) замену

$$\overline{x}_s = r_s \cos\vartheta_s, \quad \overline{y}_s = r_s \sin\vartheta_s, \tag{7.6}$$

результате чего получим систему

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dr_s}{dt} &= R_s,\\
\frac{d\vartheta_s}{dt} &= \lambda_s + \Theta_s,\\
\frac{d\overline{z}_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} r_{ji}\overline{z}_i + P_j(r_1, \ldots, r_k, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n),
\end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

где

$$R_s = \cos\vartheta_s \overline{X}_s(r_1\cos\vartheta_1, \ldots, r_k\cos\vartheta_k\ r_1\sin\vartheta_1, \ldots, r_k\sin\vartheta_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) +$$
$$+ \sin\vartheta_s \overline{Y}_s(r_1\cos\vartheta_1, \ldots, r_k\sin\vartheta_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n),$$

$$\Theta_s = \frac{\cos\vartheta_s \overline{Y}_s - \sin\vartheta_s \overline{X}_s}{r_s}, \quad P_j = \overline{Z}_j(r_1\cos\vartheta_1, \ldots, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n).$$

Легко видеть, что функции R_s и P_j голоморфны в окрестности точки $r_1 = \ldots = r_k = \bar{z}_1 = \ldots = \bar{z}_n = 0$. При этом $R_s \equiv 0$ при $r_1 = \ldots = r_k = 0$. Коэффициенты в разложениях функций R_s и P_j — периодические функции относительно ϑ_i $(i = 1, \ldots, k)$. Будем предполагать далее, что функции Θ_s обладают теми же свойствами, что R_s и P_j. Заметим, что условия (7.2) позволяют произвести преобразование над системой (7.5), после которого функции Θ_s формально будут разлагаться в ряды по степеням $r_1, \ldots, r_k, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$.

Будем искать решение системы (7.7) в виде рядов

$$r_s = c_s + \sum_{m=2}^{\infty} r_s^{(m)}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, c_1, \ldots, c_k),$$
$$\bar{z}_j = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{z}_j^{(m)}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, c_1, \ldots, c_k). \tag{7.8}$$

Функции $r_s^{(m)}$ и $\bar{z}_j^{(m)}$ являются однородными формами относительно $c_1, \ldots, c_k$ степени m с периодическими коэффициентами относительно $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$, подлежащими определению. Исключим параметр t в системе (7.7). Тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial r_s}{\partial \vartheta_i}(\lambda_i + \Theta_i) = R_s \quad (s = 1, \ldots, k),$$
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \vartheta_i}(\lambda_i + \Theta_i) = \sum_{i=1}^{n} r_{ji}\bar{z}_i + P_j \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{7.9}$$

Подставляя ряды (7.8) в систему (7.9) и приравнивая формы одной степени относительно величин $c_1, \ldots, c_k$, получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial r_s^{(m)}}{\partial \vartheta_i}\lambda_i = R_s^{(m)} \quad (s = 1, \ldots, k),$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial \bar{z}_j^{(m)}}{\partial \vartheta_i} = \sum_{i=1}^{n} r_{ji}\bar{z}_i^{(m)} + P_j^{(m)} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{7.10}$$

Формы $R_s^{(m)}$ и $P_j^{(m-1)}$ определены, если найдены функции $r_s^{(m_1)}$ и $\bar{z}_j^{(m_2)}$, $m_1 < m$, $m_2 < m - 1$.

Предположим, что функции (7.9), будучи определенными из системы (7.10), оказались периодическими относительно $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k$ и дают при достаточно малых $|c_s|$ решение системы (7.9). Пусть построение рядов (7.8) осуществлялось так, что $r_s^{(m)} \equiv 0$ при $m \geqslant 2$ $(\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_k = 0)$.

Исследуем в этом особом случае вопрос об устойчивости нулевого решения системы (7.1). Сделаем в системе (7.7) замену

$$r_s = \rho_s + \sum_{m=2}^{\infty} r_s^{(m)}(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k), \tag{7.11}$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — новые искомые функции; тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho_s}{dt} &= \overline{R}_s, \\ \frac{d\vartheta_s}{dt} &= \lambda_s + \overline{\Theta}_s, \\ \frac{d\overline{z}_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} r_{ji} z_i + \overline{P}_j. \end{aligned}\right\} \tag{7.12}$$

Система (7.12) имеет семейство решений

$$\rho_s = c_s \quad (s = 1, \ldots, k), \qquad z_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, k).$$

Далее можно показать, что система

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho_s}{\partial \overline{z}_j} \left(\sum_{i=1}^{n} r_{ji} \overline{z}_i + \overline{P}_j \right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \rho_s}{\partial \vartheta_i} (\lambda_i + \overline{\Theta}_i) = \overline{R}_s \tag{7.13}$$

имеет семейство решений

$$\rho_s = c_s + F_s(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, c_1, \ldots, c_k) \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{7.14}$$

Функции F_s разлагаются в сходящиеся степенные ряды относительно $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n, c_1, \ldots, c_k$ при достаточно малых $|\overline{z}_j|$ и $|c_s|$ и, кроме того, $F_s \equiv 0$ при $\overline{z}_1 = \ldots = \overline{z}_n = 0$.

Пользуясь равенствами (7.14), исключим величины ρ_s из третьей группы уравнений (7.12). Тогда получим систему для определения функций $\overline{z}_j$, из которой следует, что при всех достаточно малых $|c_s|$ и при любом выборе непрерывных вещественных функций $\vartheta_1(t), \ldots, \vartheta_k(t)$ $\overline{z}_j(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно относительно $c_1, \ldots, c_k$, как только $|\overline{z}_j(0)|$ достаточно малы. Отсюда и из (7.14) следует, что $\rho_s \to c_s$ при $t \to +\infty$, а значит, нулевое решение системы (7.1) устойчиво. Таким образом, доказана

Теорема 24. *Если система* (7.7) *имеет семейство ограниченных решений* (7.8), *то нулевое решение системы* (7.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Разрешим равенства (7.14) относительно величин $c_1, \ldots, c_k$. Тогда получим:

$$c_s = \rho_s + \Phi_s(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{7.15}$$

Перейдя в равенствах (7.15) к величинам $r_1, \ldots, r_k$ и пользуясь (7.6), получим:

$$c_s^2 = \overline{x}_s^2 + \overline{y}_s^2 + \psi_s(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{7.16}$$

Можно показать, что функции ψ_s разлагаются в сходящиеся ряды по целым положительным степеням величин $\overline{x}_s, \overline{y}_s, \overline{z}_i$. Таким образом, равенства (7.16) дают k голоморфных интегралов системы (7.5), при этом

$$\sqrt{\overline{x}_s^2 + \overline{y}_s^2 + \psi_s} = r_s + \overline{\psi}_s(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, r_1, \ldots, r_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n),$$

где $\overline{\psi}_s$ голоморфно в окрестности точки

$$r_1 = \ldots = r_k = \overline{z}_1 = \ldots = \overline{z}_n = 0. \tag{7.17}$$

Теорема 25. *Для того чтобы система* (7.4) *имела семейство ограниченных решений* (7.8), *необходимо и достаточно, чтобы существовало* k *голоморфных интегралов системы* (7.5) *вида* (7.16), *обладающих свойством* (7.17).

Доказательство. Необходимость условия установлена выше, а достаточность условия можно вывести путем проведения обратных преобразований над интегралами (7.17).

Перейдем к анализу общего случая. Предположим, что $r_s^{(m)}$ $(m < \mu)$ получились периодическими, а в ряде функций $r_s^{(\mu)}$ $(s = 1, \ldots, k)$ по крайней мере одна не определяется как периодическая. Положим в системе (7.9)

$$R_s^{(\mu)} = \sum_{m_1+\ldots+m_k=\mu} R_s^{(\mu, m_1, \ldots, m_k)} (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k) c_1^{m_1} \ldots c_k^{m_k},$$

где

$$R_s^{(\mu, m_1, \ldots, m_k)} = \sum_{\sum_{j=1}^{k} |\mu_j| < M} R_s^{(\mu, m_1, \ldots, m_k, \mu_1, \ldots, \mu_k)} e^{i \sum_{j=1}^{k} \mu_j \vartheta_j}.$$

Ясно, что

$$R_s^{(\mu, m_1, \ldots, m_k, \mu_1, \ldots, \mu_k)} \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad \sum_{j=1}^{k} |\mu_j| = 0.$$

Обозначим через $R_{0s}^{(\mu)}$ форму

$$\sum_{m_1+\ldots+m_k=\mu} R_s^{(\mu, m_1, \ldots, m_k, 0, \ldots, 0)} c_1^{m_1} \ldots c_k^{m_k}$$

и через $r_s^{(\mu)}$—периодическое решение системы

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial r_s^{(\mu)}}{\partial \vartheta_i} = R_s^{(\mu)} - R_{0s}^{(\mu)}. \tag{7.18}$$

Сделаем в системе (7.7) замену

$$r_s = \rho_s + \sum_{m=2}^{\mu} r_s^{(m)} (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k). \tag{7.19}$$

Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\rho_s}{dt} &= \widetilde{R}_s (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k, \rho_1, \ldots, \rho_k), \\
\frac{d\vartheta_s}{dt} &= \lambda_s + \widetilde{\Theta}_s, \\
\frac{d\bar{z}_j}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} r_{ji} \bar{z}_i + \widetilde{P}_j.
\end{aligned}\right\} \tag{7.20}$$

Разложения функций $\widetilde{R}_s$ в ряды по степеням величин $\rho_1, \ldots, \rho_k$ начинаются с форм $R_{0s}^{(\mu)} (\rho_1, \ldots, \rho_k)$. Таким образом, вопрос об устойчивости нулевого решения системы (7.1) можно сформулировать несколько суженно для системы (7.20), потребовав, чтобы $\rho_s(t) \to 0$, $\bar{z}_j(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех достаточно малых $\rho_j(0)$ и $\bar{z}_j(0)$ независимо от членов в разложениях функций $\widetilde{R}_s$ порядка $> \mu$. Следовательно, вопрос об устойчивости решения системы (7.1) можно свести к исследованию вопроса об устойчивости нулевого решения системы вида (4.1).

(Поступило в редакцию 2/IX 1957 г.)

Литература

1. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики. т. II, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1951.
2. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
3. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Москва, Гостехиздат, 1953.
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1947.
5. Б. А. Фукс, Теория аналитических функций многих комплексных переменных, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.
6. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1949.
7. Briot, Bouquet, Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations differentieles, Journ. École Polytech., **21** (1856).
8. H. Poincaré, Sur les propriétés des fonctions définies par les équations differentielles, Journ. École Polytech., **45** (1878).
9. E. Picard, Traité d' analyse, v. 3, Paris, 1896.
10. J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig, 1934.
11. В. И. Зубов, Вопросы теории второго метода А. М. Ляпунова построения общего решения в области асимптотической устойчивости, Прикл. матем. и мех., т. **XIX**, вып. 2 (1955), 179—210.
12. Н. Н. Красовский, Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. **XVIII**, вып. 5 (1954), 513—532.
13. Н. П. Еругин, О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом, Прикл. матем. и мех., т. **XIV**, вып. 5 (1950), 459—512.
14. Н. Н. Красовский, Об устойчивости по первому приближению, Прикл. матем. и мех., т. **XIX**, вып. 5 (1955), 516—530.
15. Е. А. Барбашин, Метод сечений в теории динамических систем, Матем. сб., **29**(71) (1951), 233—280.
16. В. И. Зубов, Условия асимптотической устойчивости в случае неустановившегося движения и оценка скорости убывания общего решения, Вестник ЛГУ, № **1**, вып. 1 (1957), 110—129.
17. Г. В. Каменков, Об устойчивости движения, Труды КАИ, № **9**, Казань (1939), 1—137.
18. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1952.
19. O. Perron, Beweis für die Existenz von Integralen einer gewöhnlichen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unstetigkeitsstelle, Math. Ann., **75** (1914), 256—273.
20. И. Г. Петровский, О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки, Матем. сб., **41** (1934), 107—156.
21. А. А. Шестаков, О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки, ДАН СССР, т. **62**, № 2 (1948), 171—174.

Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов

В. И. Пономарев (Москва)

Введение

В настоящей работе приняты такие обозначения:

$\mathscr{E}(x, \ldots)$ — множество всех элементов x (некоторого множества X), удовлетворяющих некоторому условию (выраженному многоточием);

Λ — пустое множество;

$[M]$ — замыкание множества M.

1. В моей работе [1], в частности, доказывается, что однозначное отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y тогда и только тогда является непрерывным открытым отображением, когда множество всех прообразов $f^{-1}y$ точек $y \in Y$ (т. е. множество элементов разбиения, соответствующего данному отображению) является замкнутым в обычном пространстве замкнутых множеств пространства X. В связи с этим естественно возникает вопрос об аналогичной характеристике непрерывных отображений бикомпактов. Легко понять, что обычное пространство замкнутых множеств бикомпакта X (мы будем его везде в этой работе обозначать через ϕX) непригодно для этой цели, и в то же время этого легко достигнуть, если во множестве всех непустых замкнутых множеств пространства X по-новому ввести топологию. Мы приходим, таким образом, к новому пространству замкнутых множеств — назовем его $\varkappa X$,—определенному для всякого T_1-пространства X следующим образом. Точками пространства $\varkappa X$ по-прежнему являются всевозможные непустые замкнутые множества пространства X. *Окрестности в пространстве $\varkappa X$ определяются так*: произвольная окрестность $O(F_0)$ точки $(F_0) \in \varkappa X$ — это множество всех замкнутых множеств $F \subseteq X$, лежащих в (произвольно заданной) окрестности OF_0 множества F_0 в пространстве X.* Ту же топологию в $\varkappa X$ можно определить и в следующих терминах. Пусть M — какое-нибудь множество в X; обозначим через $D_1(M)$ множество всех непустых замкнутых множеств $F \subseteq X$, лежащих в M, а через $D_2(M)$ — множество всех замкнутых множеств $F \subseteq X$, пересекающихся с M. Тогда открытый базис пространства $\varkappa X$ можно определить, как совокупность всех множеств $D_1(U)$, получаемую, когда U пробегает совокупность всех непустых открытых множеств пространства X. Легко проверить, что для любого T_1-пространства X пространство $\varkappa X$ является бикомпактным и связным T_0-пространством.

Как известно, топология в классическом пространстве замкнутых множеств ϕX может быть определена так: открытым псевдобазисом пространства

* Если F—замкнутое множество в X, то мы иногда будем обозначать это замкнутое множество, рассматриваемое как точка пространства $\varkappa X$, через (F). Аналогично будем обозначать через OF произвольную окрестность множества F в пространстве X, а через $O(F)$ —окрестность точки (F) в пространстве $\varkappa X$.

ψX является совокупность всех множеств $D_1(U)$ и $D_2(U)$, получающаяся, когда U пробегает все открытые множества пространства X. Отсюда следует, что $\varkappa X$ — взаимно однозначный и в одну сторону непрерывный образ («уплотнение») пространства ψX. Докажем, *что разбиение* $\mathfrak{A}$ *бикомпакта* X:

$$X = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \tag{1}$$

на дизъюнктные замкнутые множества A тогда и только тогда непрерывно в смысле П. С. Александрова (см., например, [3], стр. 42—43), *когда множество $\mathfrak{A}$ всех элементов этого разбиения, рассматриваемое в топологии пространства $\varkappa X$, является бикомпактным* *.

В самом деле, если разбиение (1) непрерывно, то топология в пространстве разбиения совпадает с топологией, которую это пространство, рассматриваемое как множество, лежащее в $\varkappa X$, получает из $\varkappa X$. Следовательно, множество всех элементов разбиения с топологией из $\varkappa X$ является бикомпактом.

Пусть, обратно, множество $\mathfrak{A}$ всех элементов разбиения (1) бикомпактно в топологии пространства $\varkappa X$. Так как элементы разбиения (1) суть непересекающиеся в бикомпакте X замкнутые множества, то множество $\mathfrak{A}$ в топологии из $\varkappa X$ есть хаусдорфово пространство, т. е. бикомпакт. Ставя в соответствие каждой точке $x \in X$ множество A, ее содержащее, получим, очевидно, непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт $\mathfrak{A}$. Разбиение, соответствующее этому отображению, по известной теореме П. С. Александрова непрерывно, но это разбиение и есть как раз разбиение (1), которое оказывается, таким образом, непрерывным.

2. Это положение вещей делает естественной попытку привлечь пространство $\varkappa X$ также и для характеристики многозначных непрерывных отображений. Мы рассматриваем лишь отображения, ставящие в соответствие каждой точке $x \in X$ замкнутое множество $fx \subseteq Y$, а непрерывность понимаем в точности по Коши: непрерывность заключается в требовании, чтобы для каждой окрестности Ofx множества fx в Y можно было подобрать такую окрестность $Ox \subseteq X$, чтобы образ этой окрестности (т. е. сумма образов всех составляющих эту окрестность точек) содержался в заданной окрестности Ofx:

$$fOx \subseteq Ofx.$$

Очевидно, во-первых, что так определенная непрерывность равносильна непрерывности однозначного отображения $\overline{f}$ пространства X в $\varkappa Y$, получающегося, если рассматривать множества fx как точки пространства $\varkappa Y$. Во-вторых, если определить обратное отображение f' к отображению f, полагая

$$f'y = \mathcal{E}(x, fx \ni y),$$

то это обратное отображение также оказывается непрерывным, причем отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y тогда и только тогда непрерывно, если все $f'y$ суть замкнутые множества и если для любого замкнутого в Y

* И тогда непременно бикомпактом (т. е. удовлетворяющим аксиоме отделимости Хаусдорфа). Замкнутым в $\varkappa X$ множество $\mathfrak{A}$ не будет никогда (за исключением того тривиального случая, когда разбиение (1) состоит из единственного элемента $A = X$).

множества B множество $\overline{\overline{f'}}$ всех $f'y$, $y \in B$, рассматриваемое в топологии пространства $\varkappa X$, бикомпактно.

Эти теоремы доказываются в § 2 настоящей работы. Там же доказывается, что непрерывное отображение бикомпакта в бикомпакт всегда замкнуто и что (в предположении, что множества fx и $f'y$ замкнуты для всех $x \in X$ и $y \in Y$) замкнутость одного какого-нибудь из отображений f и f' достаточна и необходима для непрерывности (и замкнутости) обоих этих отображений,— результат, который можно рассматривать как далеко идущее усиление одной теоремы Куратовского.

3. В § 3 показывается, что непрерывность отображения (в том смысле, в котором она постоянно понимается в этой работе) может быть определена посредством понятия сходимости последовательностей по любому направленному множеству: отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y непрерывно тогда и только тогда, когда из сходимости последовательности $\{x_\alpha\}$ (по любому направленному множеству индексов α) к точке $x_0 \in X$ следует сходимость множеств fx_α к множеству fx_0 (совпадающая со сходимостью соответствующих точек в пространстве $\varkappa Y$). В том же параграфе доказывается, что непрерывность отображения бикомпакта X в бикомпакт Y эквивалентна свойству замкнутости графика этого отображения в бикомпакте $X \times Y$.

4. Подводя итог этим результатам, можно сказать, что принятое в настоящей работе определение непрерывности многозначного отображения (а именно определение в смысле Коши) для случая, когда пространства X и Y суть бикомпакты, полностью себя оправдывает и оказывается эквивалентным различным другим определениям, представляющимся естественными. Поэтому это определение могло бы считаться окончательным. В частности, мне кажется что класс непрерывных отображений, рассматриваемый Стротером [7] *, является чересчур специальным. В настоящей работе он естественно появляется как особый класс «сильно непрерывных» отображений и рассматривается в § 4 в связи с открытыми многозначными отображениями: сильно непрерывные отображения, т. е. непрерывные в смысле Стротера, суть в точности отображения, обратные к открытым. В § 4, наряду с некоторыми теоремами, доказанными в [7], устанавливаются предложения, разумно обобщающие на случай многозначных открытых (соответственно сильно непрерывных) отображений результаты, установленные для однозначных открытых (соответственно непрерывных) отображений (речь идет о теоремах 1—4 § 4).

5. Изложению свойств пространства $\varkappa X$ посвящен § 1 настоящей работы. Как уже упоминалось, пространство $\varkappa X$ есть бикомпактное T_0-пространство; оно никогда не является хаусдорфовым, за исключением тривиального случая, когда пространство X состоит из одной точки. Пространство $\varkappa X$ при всяком однозначном непрерывном отображении в себя имеет неподвижную точку.

Наконец, обозначая через D^τ обобщенный канторов дисконтинуум веса τ, т. е. топологическое произведение τ экземпляров пространства, состоящего из двух изолированных точек, мы доказываем в § 1, что пространство $\varkappa D^\tau$ является универсальным для всех T_0-пространств веса $\leqslant \tau$, т. е. что $\varkappa D^\tau$ содержит топологический образ каждого такого пространства.

---

* Работа Стротера [7] стала мне известной лишь по окончании настоящего исследования.

Выражаю сердечную благодарность П. С. Александрову за внимание к моей работе и за большую помощь при написании этой статьи.

§ 1. Пространство $\varkappa X$

1. Пусть X — какое-нибудь T_0-пространство. Определение пространства $\varkappa X$ было дано во введении (п. 1). Установим некоторые свойства этого пространства.

1°. *Пространство X является подпространством пространства $\varkappa X$ (т. е. $\varkappa X$ индуцирует в X ту топологию, которая с самого начала была там задана).*

Точки пространства $X \subset \varkappa X$ в дальнейшем называются «м а л ы м и т о ч к а м и» пространства $\varkappa X$; все остальные точки называются «б о л ь ш и м и». Точка $(X) \in \varkappa X$ называется «н а и б о л ь ш е й» или «г л а в н о й» т о ч к о й п р о с т р а н с т в а $\varkappa X$.

2°. *Пространство $\varkappa X$ есть T_0-пространство.*

Действительно, каковы бы ни были два различных замкнутых множества F_1 и F_2 в X, существует точка одного из них, например $x_2 \in F_2$, не принадлежащая другому. Тогда $X \setminus x_2$ является окрестностью OF_1 множества F_1, не содержащей множества F_1; соответствующая окрестность $O(F_1)$ точки (F_1) в $\varkappa X$ не содержит точки (F_2).

3°. *Для того чтобы точка $(F_0) \in \varkappa X$ содержалась в замыкании (множества, состоящего из одной точки) точки $(F_1) \in \varkappa X$, необходимо и достаточно, чтобы $F_1 \subseteq F_0 \subseteq X$.*

Так как точка (F_0) содержится в замыкании точки (F_1) тогда и только тогда, когда всякая окрестность точки (F_0) содержит точку (F_1), то свойство 3° можно сформулировать так:

3°_1. *Условие $F_1 \subseteq F_0 \subseteq X$ необходимо и достаточно для того, чтобы всякая окрестность точки (F_0) содержала точку (F_1).*

Доказательство свойства 3°, эквивалентного 3°_1, может быть предоставлено читателю.

Из 3° сразу следует

4°. *«Малые точки» пространства $\varkappa X$ и только они обладают следующим свойством:*

«малая точка» пространства $\varkappa X$ не содержится в замыкании никакой другой точки $(F_0) \in \varkappa X$.

Это свойство иначе можно сформулировать так:

Если (x_0) — «малая точка» пространства $\varkappa X$, то, какова бы ни была точка $(F_0) \in \varkappa X$, существует окрестность $O(x_0)$, не содержащая точку (F_0).

При топологическом отображении свойство точки входить или не входить в замыкание другой точки сохраняется, поэтому имеет место свойство

5° *При топологическом отображении пространства $\varkappa X$ на себя или на пространство $\varkappa Y$, где Y — какое-нибудь T_1-пространство, всякая малая точка переходит в малую, а всякая большая точка — в большую.*

З а м е ч а н и е. Пространство ψX свойством 5°, вообще говоря, не обладает: если X — канторово совершенное множество, то, как известно (см., например, [5] или [6], стр. 152), пространство ψX — также канторово совершенное множество, следовательно, в нем любая точка может быть топологическим преобразованием переведена в любую другую точку.

Из теоремы 5° вытекает:

6°. *Пространства* $\varkappa X$ *и* $\varkappa Y$ *гомеоморфны тогда и только тогда, когда гомеоморфны пространства* X *и* Y.

Я не знаю, имеет ли место аналогичное утверждение для пространств ψX.

2. Дальнейшим непосредственным следствием свойства 3° является свойство

7°. *Главная точка* (X) *пространства* $\varkappa X$ *является единственной точкой пространстоа* $\varkappa X$, *содержащейся в замыкании любой точки, а следовательно, и любого множества* $M \subseteq \varkappa X$.

Отсюда вытекает:

7°_1. *Главная точка* (X) *содержится в любом непустом замкнутом множестве пространства* $\varkappa X$.

Отсюда далее следует

8°. *Пространство* $\varkappa X$ (*для любого* X) *бикомпактно и связно*.

Мы уже видели во введении, что при этом пространство $\varkappa X$ является уплотнением пространства ψX.

9°. *При всяком* (*однозначном*) *непрерывном отображении* f *пространства* $\varkappa X$ *на себя главная точка* $(X) \in \varkappa X$ *остается неподвижной.*

Доказательство. Так как любая точка $(F_0) \in \varkappa X$ является при отображении f образом (по крайней мере) одной точки $(F') \in \varkappa X$ и $(X) \in [(F')]$, то в силу непрерывности отображения f,

$$f(X) \in [f(F')] = [(F_0)].$$

Так как (F_0) — произвольная точка пространства $\varkappa X$, то это означает, что точка $f(X)$ входит в замыкание любой точки пространства $\varkappa X$, но этим свойством обладает лишь главная точка (X) пространства $\varkappa X$. Следовательно, $f(X) = (X)$, что и требовалось доказать.

3. Переходим к доказательству следующего предложения.

Теорема 1. *Если* X *бикомпактно, то при всяком однозначном непрерывном отображении* f *пространства* $\varkappa X$ *в себя имеется, по крайней мере, одна неподвижная точка.*

Доказательство. Возьмем главную точку $(X) \equiv (X_0) \in \varkappa X$ и положим $f(X_0) = (X_1)$. Тогда $X_0 \supseteq X_1$. Предположим, что для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$ построены $(X_\beta) \in \varkappa X$, так что при $\beta' < \beta''$ $X_{\beta'} \supseteq X_{\beta''}$. Построим (X_α). Если α — первого рода: $\alpha = \alpha' + 1$, то полагаем $(X_\alpha) = f(X_{\alpha'})$. Если α — второго рода, то полагаем $X_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha' < \alpha} X_{\alpha'}$. Докажем теперь, что для $\beta < \beta' \leqslant \alpha$ имеем: $X_{\beta'} \subseteq X_\beta$. Это достаточно доказать для $\beta' = \alpha$. Если α — второго рода, то утверждение очевидно, так как $X_\alpha = \bigcap\limits_{\beta < \alpha} X_\beta$. Пусть α — первого рода, $\alpha = \alpha' + 1$. Тогда во всяком случае $X_\beta \supseteq X_{\alpha'}$; поэтому достаточно доказать, что $X_{\alpha'} \supseteq X_\alpha$. Имеем: $(X_\alpha) = f(X_{\alpha'})$, и рассматриваем снова два случая: α' — первого рода и α' — второго рода. Если α' — первого рода, $\alpha' = \alpha'' + 1$, то $X_{\alpha''} \supseteq X_{\alpha'}$, следовательно, $(X_{\alpha''}) \in [(X_{\alpha'})]$, а потому, по непрерывности отображения f, имеем:

$$f(X_{\alpha''}) \in [f(X_{\alpha'})],$$

т. е. $(X_{\alpha'}) \in [(X_{\alpha'+1})]$, а это значит, что

$$X_{\alpha'+1} \subseteq X_{\alpha'},$$

т. е. $X_{\alpha'} \supseteq X_\alpha$. Если α'—второго рода, то $X_{\alpha'} = \bigcap\limits_{\beta<\alpha'} X_\beta$. Следовательно, для всякого $\beta < \alpha'$ имеем: $X_{\alpha'} \subseteq X_\beta$, $(X_\beta) \in [(X_{\alpha'})]$ и, по непрерывности отображения f, будет

$$f(X_\beta) \in [f(X_{\alpha'})] = [(X_{\alpha'+1})],$$

т. е. $(X_{\beta+1}) \in [(X_\alpha)]$ при любом $\beta < \alpha'$, т. е. $X_\alpha \supseteq X_{\beta+1}$ при любом $\beta < \alpha'$. Но тогда

$$X_\alpha \subseteq \bigcap_{\beta<\alpha'} X_{\beta+1} = \bigcap_{\beta<\alpha'} X_\beta = X_{\alpha'},$$

что и требовалось доказать. Таким образом, процесс построения убывающей трансфинитной последовательности множеств X_α продолжается неограниченно. Но он заведомо должен остановиться на некотором порядковом числе α мощности, не большей чем вес пространства X. Тогда $X_\alpha = X_{\alpha+1}$, т. е. $f(X_\alpha) = (X_\alpha)$, что и заканчивает доказательство теоремы 1.

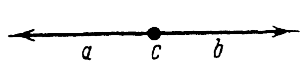
4. Пусть τ — какое-нибудь кардинальное число; через D^τ, как всегда, обозначаем бикомпакт, являющийся топологическим произведением τ экземпляров «простого двоеточия» D (т. е. пространства, состоящего из двух изолированных точек).

Теорема 2. *Пространство $\varkappa D^\tau$ является универсальным для всех T_0-пространств веса $\leqslant \tau$ (т. е. $\varkappa D^\tau$ содержит топологический образ любого T_0-пространства веса $\leqslant \tau$).*

Доказательство этого утверждения основывается на следующем вспомогательном предложении.

Лемма 1. *Пусть $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$ — топологическое произведение бикомпактов X_α. Тогда пространство $\prod\limits_\alpha \varkappa X_\alpha$ топологически содержится в пространстве $\varkappa X$.*

Предположив, что лемма 1 доказана, выведем из нее теорему 2. В силу известного результата П. С. Александрова (см., например, [2], стр. 34) пространство F^τ, определенное как произведение τ экземпляров связного двоеточия F (т. е. T_0-пространства, состоящего из двух точек, из которых одна образует открытое, но не замкнутое, а другая — замкнутое множество), является универсальным для всех T_0-пространств веса $\leqslant \tau$. Поэтому достаточно доказать, что пространство $\varkappa D^\tau$ топологически содержит в себе пространство F^τ. Но, в силу леммы 1, пространство $\varkappa D^\tau$ содержит в себе топологическое произведение τ экземпляров пространства $\varkappa D$, где D — простое двоеточие; пространство $\varkappa D$ есть «связное троеточие», состоящее из a, b и c, в котором открытыми множествами являются: все пространство, пустое множество, одноточечные множества $\{a\}$ и $\{b\}$ и множество, состоящее из двух точек $\{a\}$ и $\{b\}$ (см. чертеж). Множество, состоящее из двух точек $\{a\}$



и $\{c\}$ (или $\{b\}$ и $\{c\}$) является связным двоеточием, содержащимся, таким образом, в троеточии $\varkappa D$. Поэтому пространство $\varkappa D^\tau$, содержа произведение τ экземпляров пространства $\varkappa D$, содержит и произведение τ экземпляров связного двоеточия, т. е. пространство F^τ. Универсальность пространства $\varkappa D^\tau$, тем самым доказана.

Остается доказать лемму 1. Доказательству ее предпошлем некоторые замечания.

Итак, $X=\prod\limits_{\alpha} X_\alpha$, где пространства X_α суть бикомпакты. Через F_α обозначаем произвольное непустое замкнутое множество в X_α. Ставя в соответствие каждому набору $\{F_\alpha\}$, по одному F_α из каждого X_α, замкнутое множество $\prod\limits_{\alpha} F_\alpha \subseteq \prod\limits_{\alpha} X_\alpha = X$, получим, как легко видеть, взаимно однозначное отображение f пространства $\prod\limits_{\alpha} \varkappa X_\alpha$ в пространство $\varkappa X$. Надо доказать, что отображение f является топологическим отображением пространства $\prod\limits_{\alpha} \varkappa X_\alpha$ в пространство $\varkappa X$.

Назовем «базисной окрестностью» в пространстве X всякое открытое множество

$$V = O_{U_{\alpha_1} \dots U_{\alpha_s}},$$

состоящее из всех точек $x=\{x_\alpha\}\in X$, для которых при $i=1, 2, \dots, s$ имеем $x_{\alpha_i}\in U_{\alpha_i}$.

Существенной частью доказательства леммы 1 является

Лемма 2. *Пусть в X дано замкнутое множество F, являющееся произведением некоторых F_α по одному из каждого $X_\alpha: F=\prod\limits_{\alpha} F_\alpha$. Тогда в каждой окрестности OF множества F содержится базисная окрестность этого множества.*

Доказательство леммы 2. Докажем, прежде всего, что пересечение всех базисных окрестностей множества F совпадает с множеством F, т. е. что любая точка $x_0=\{x_\alpha^0\}$, содержащаяся во всех базисных окрестностях множества F, содержится в самом множестве F. Так как $F=\prod\limits_{\alpha} F_\alpha$, то достаточно доказать, что в наших предположениях при любом α имеем $x_\alpha^0\in F_\alpha$.

Рассмотрим в системе Σ всех базисных окрестностей V множества F подсистему Σ_{α_0}, в представлении элементов которой участвует именно данный индекс α_0. Когда V пробегает все элементы системы Σ_{α_0}, проекция V в X_{α_0} пробегает все окрестности множества F_{α_0} (в пространстве X_{α_0}). Следовательно, пересечение проекций всех $V\in\Sigma_{\alpha_0}$ на X_{α_0} совпадает с F_{α_0}; то же тем более справедливо для пересечения проекций на X_{α_0} всех базисных окрестностей множества F. Так как точка $x_0=\{x_\alpha^0\}$ принадлежит всем базисным окрестностям множества, то x_α^0 принадлежит проекциям в X_α всех этих окрестностей, т. е. $x_\alpha^0\in F_\alpha$.

Мы доказали, что пересечение всех базисных окрестностей множества F совпадает с этим множеством. Так как всякая базисная окрестность, как легко видеть, содержит замыкание некоторой меньшей базисной окрестности того же множества, то и пересечение замыканий $[V]$ всех базисных окрестностей множества F совпадает с множеством F. Так как пересечение двух, а следовательно, и любого конечного числа базисных окрестностей, является снова базисной окрестностью, то, в предположении, что не существует ни одной базисной окрестности V, лежащей в OF, система замкнутых множеств $[V]\setminus OF$, $V\in\Sigma$, будет центрированной и, следовательно, имеет непустое пересечение; последнее противоречит тому, что $\bigcap\limits_{V\in\Sigma}[V]=F$. Лемма 2 доказана.

Переходим к доказательству леммы 1. Из леммы 2 следует, что окрестности в пространстве $\varkappa X$, основанные на одних лишь базисных окрестностях пространства X, уже образуют базу пространства $\varkappa X$. А так как при отображении f пространства $\prod\limits_\alpha \varkappa X_\alpha$ на часть пространства $\varkappa X$ окрестности в $\prod\limits_\alpha \varkappa X_\alpha$ точки $\{F_\alpha\} \in \prod\limits_\alpha \varkappa X_\alpha$ взаимно однозначно соответствуют базисным окрестностям точки $(F) = (\prod\limits_\alpha F_\alpha) \in X$, то отображение f является топологическим. Лемма 1, а следовательно, и вся теорема 2 доказаны.

Изложенные свойства пространства $\varkappa X$ оправдывают обозначение $\varkappa X$ (от слова «κῆτος», что значит «морское чудище», «кит»).

5. В дальнейшем нам понадобится следующая, впрочем, очень простая

Теорема 3. *Пусть X — бикомпакт и множество $\mathfrak{B} = \{F_\alpha\}$ бикомпактно в топологии пространства $\varkappa X$ (пространства ψX). Тогда сумма F всех множеств $F_\alpha \in \mathfrak{B}$ является замкнутым множеством пространства X.*

Доказательство. Так как X — бикомпакт, то достаточно доказать бикомпактность множества F. Пусть $\omega = \{U_\lambda\}$ — произвольное покрытие множества F открытыми в X множествами. Для каждого $(F_\alpha) \in \mathfrak{B}$ рассмотрим конечное множество элементов $U_\lambda \in \omega$, покрывающих замкнутое множество F_α. Обозначим полученное покрытие множества F_α через ω_α.

Рассмотрим множества* $V_\alpha = \mathscr{E}(F', F' \subseteq \tilde{\omega}_\alpha)$. При (F_α), пробегающем все элементы системы $\mathfrak{B}$, получаем бесконечное покрытие $\Omega = \{V_\alpha\}$ множества $\mathfrak{B} \subseteq \varkappa X$, из которого выделим конечное. Пусть это будут множества

$$V_1, \ldots, V_s.$$

Рассмотрим соответствующие $\omega_1, \ldots, \omega_s$. Множества, составляющие покрытия $\omega_1, \ldots, \omega_s$, будут покрывать все множество F, т. е. F бикомпактно.

Замечание. Совершенно аналогично доказывается следующее предложение:

Теорема 3′. *Если X — финально-компактное пространство и множество $\mathfrak{B} = \{F_\alpha\}$ финально-компактно в топологии пространства $\varkappa X$ (пространства ψX), то сумма F всех $F_\alpha \in \mathfrak{B}$ есть множество, финально-компактное в топологии пространства X.*

При доказательстве этого предложения повторяются рассуждения, доказавшие теорему 3, с заменой в этих рассуждениях конечных покрытий счетными.

§ 2. Многозначные непрерывные отображения

1. Мы будем рассматривать лишь такие многозначные отображения f пространства X в пространство Y, при которых каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие некоторое непустое замкнутое множество $fx \subseteq Y$ («образ точки x при многозначном отображении f»). Под образом множества $M \subseteq X$ при отображении f мы понимаем множество $fM \subseteq Y$, являющееся суммой образов всех точек $x \in M$, т. е. множество $fM = \bigcup\limits_{x \in M} fx$. Отображение f простран-

* Через $\tilde{\omega}_\alpha$ («тело покрытия ω_α») здесь и в аналогичных случаях дальше обозначена сумма всех множеств, являющихся элементами покрытия ω_α. В случае, относящемся к пространству ψX, надо определять V_α как множество тех $F' \subseteq \tilde{\omega}_\alpha$, которые пересекаются с каждым элементом покрытия ω_α.

ства X в пространство Y называется отображением *на* Y, если $fX=Y$ т. е. если каждая точка $y \in Y$ содержится во множестве fx хотя бы для одного $x \in X$).

Определение 1. Отображение f называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для каждой окрестности $Ofx_0 \subseteq Y$ множества fx_0 можно подобрать такую окрестность $Ox_0 \subseteq X$ точки x_0, что $fOx_0 \subseteq Ofx_0$. Отображение f назовем непрерывным (во всем пространстве X), если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Замечание. Из этого определения сразу следует, что *отображение f, непрерывное во всем пространстве X, будет непрерывно и во всяком множестве $X_0 \subseteq X$.*

Рассматривая замкнутые множества fx как точки пространства $\varkappa Y$, видим, что многозначное отображение f пространства X в Y порождает *однозначное отображение* (которое будем обозначать через $\overline{f}$) пространства X в пространство $\varkappa Y$, а именно на множество $\overline{f}X$ образов fx точек $x \in X$ при отображении f

Из того, как была определена топология в $\varkappa Y$, сразу следует:

1°. *Многозначное отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно однозначное отображение $\overline{f}$ пространства X на $\overline{f}X \subseteq \varkappa Y$.*

Отсюда легко выводим

2°. *Многозначное отображение f пространства X в Y тогда и только тогда непрерывно, когда для каждого открытого в Y множества B множество $A = \mathscr{E}(x, fx \subseteq B)$ открыто в X.*

В самом деле, открытое множество $B \subseteq Y$ определяет открытое множество $(B) \subseteq \varkappa Y$, состоящее из всех точек пространства $\varkappa Y$, являющихся лежащими в B замкнутыми множествами пространства Y. Множество $A = \mathscr{E}(x, fx \subseteq B)$ есть не что иное, как $\mathscr{E}(x, \overline{f}x \in (B))$, т. е. прообраз открытого в $\varkappa Y$ множества (B) при однозначном отображении $\overline{f}$. Поэтому требование, чтобы множество $A = \mathscr{E}(x, fx \subseteq B)$ было открыто в X, каково бы ни было открытое в Y множество B, равносильно требованию, чтобы прообраз при отображении $\overline{f}$ любого открытого в $\varkappa Y$ множества (B) был открыт в X, т. е. требованию непрерывности однозначного отображения $\overline{f}$ и, следовательно, непрерывности многозначного отображения f.

2. Теорема 1. *Если f — непрерывное отображение бикомпакта X на T_1-пространство Y, причем для каждого $x \in X$ множество fx бикомпактно в Y, то Y — бикомпактное пространство.*

Доказательство. Непрерывность отображения f означает непрерывность однозначного отображения $\overline{f}$ бикомпакта X на множество $\overline{f}X \subseteq \varkappa Y$ в топологии $\varkappa Y$, которое, следовательно, в этой топологии будет бикомпактным Но тогда, по теореме 3 из § 1, множество $\bigcup_{x \in X} fx = Y$ будет бикомпактным, что и требовалось доказать.

Замечание. Совершенно аналогично, но с заменой ссылки на теорему 3 из § 1 ссылкой на теорему 3′ из того же параграфа, доказывается

Теорема 1′. *Если f — непрерывное отображение финально-компактного пространства X на T_1-пространство Y, при котором все fx финально-компактны, то и Y финально-компактно.*

Читатель легко сформулирует и докажет аналогичное предложение для (инициально) компактных пространств.

В дальнейшем мы будем почти исключительно заниматься непрерывными отображениями бикомпактов; теорема 1 позволит при этом ограничиться случаем отображений «на».

Теорема 2. *Всякое непрерывное отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y замкнуто (т. е. при замкнутом $A \subseteq X$ множество $fA = \bigcup\limits_{x \in A} fx$ всегда замкнуто в Y).*

Доказательство. Пусть A — произвольное замкнутое множество в X. Так как отображение f непрерывно, то непрерывно отображение $\overline{f}$, а следовательно, множество $\overline{f}A$ будет бикомпактным в топологии пространства $\varkappa Y$. Тогда, по теореме 3 из § 1, множество

$$B = \bigcup_{(fx) \in \overline{f}A} fx = \bigcup_{x \in A} fx = fA$$

замкнуто в пространстве Y. Замкнутость отображения f доказана.

Таким образом, если f непрерывно, то определено отображение $\overline{f}$ не только пространства $X \subseteq \varkappa X$, но и всего пространства $\varkappa X$ в $\varkappa Y$: отображение $\overline{f}$ тавит в соответствие каждому $(A) \in \varkappa X$ точку $(fA) \in \varkappa Y$. Очевидно, отображение $\overline{f}$ пространства $\varkappa X$ в $\varkappa Y$ является продолжением ранее определенног отображения $\overline{f}$ пространства X в $\varkappa Y$.

Теорема 3. *Если отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y непрерывно, то непрерывно и отображение $\overline{f}$ пространства $\varkappa X$ в $\varkappa Y$.*

Доказательство. Пусть $(A_0) \in \varkappa X$ произвольно и $(B_0) = \overline{f}(A_0) = (fA_0) \in \varkappa Y$. Пусть $O(B_0)$ — произвольная окрестность точки $(B_0) \in \varkappa Y$; она состоит из всех замкнутых множеств $B \subseteq Y$, лежащих в некоторой окрестности OB_0 множества B_0 в Y. В силу непрерывности отображения f, для каждой точки $x \in A_0$ существует такая окрестность Ox в X, что $fOx \subseteq OB_0$е Сумма этих Ox образует окрестность OA_0 множества A_0 в X, а лежащи в ней замкнутые множества образуют окрестность точки $O(A_0)$, $(A_0) \in \varkappa X$, причем $fOA_0 \subseteq OB_0$, а потому для всякого замкнутого $A \subseteq OA_0$ будет $fA \subseteq OB_0$, т. е. $\overline{f}(A_0) \in O(B_0)$, что и означает включение $\overline{f}\, O(A) \subseteq O(B_0)$, доказывающее непрерывность отображения $\overline{f}$.

Верно и обратное предложение:

Теорема 3'. *Если отображение f замкнуто, а отображение $\overline{f}$ непрерывно, то непрерывно и отображение f.*

Это предложение следует из того, что отображение $\overline{f}$ непрерывно, в частности, на пространстве $X \subseteq \varkappa X$, откуда, как мы видели в п. 1 (утверждение 2°), вытекает непрерывность отображения f.

Теоремы 3 и 3' позволяют свести к случаю однозначных отображений следующее предложение, легко доказываемое и непосредственно:

Если f — непрерывное отображение пространства X в Y, а g — непрерывное отображение пространства Y в Z, то суперпозиция gf является непрерывным отображением пространства X в Z.

3. Замечание. Из теоремы 3 этого параграфа и теоремы 1 предыдущего параграфа сразу следует, что *при непрерывном (многозначном) отобра-*

жении f бикомпакта X в себя всегда существует замкнутое неподвижное множество, т. е. такое замкнутое множество $A \subseteq X$, что $fA = A$.

При многозначном отображении f точку $x_0 \in X$ естественно назвать неподвижной, если $x_0 \in fx_0$. Приведем пример непрерывного многозначного отображения f отрезка на себя, не обладающего неподвижной точкой.

Отображение f отрезка $[a, b]$ состоит в следующем: пусть c, d, e — точки отрезка $[a, b]$ (слева направо), делящие его на четыре равные части. К каждой точке $x_0 \in [a, b]$ берется точка z_0, симметричная с x_0 относительно ближайшей из точек c, e, и этой точке x_0 ставится в соответствие точка $y_0 = fx_0$, симметричная точке z_0 относительно точки d (центра отрезка), центру же ставится в соответствие замкнутое множество, состоящее из двух точек a и b. Отображение f непрерывно, но никакая его точка x не содержится в замкнутом множестве fx.

4. Обратное отображение f'. Пусть дано (многозначное) отображение f пространства X в пространство Y. Для каждой точки $y \in fX$ полагаем

$$f'y = \mathcal{E}(x,\ fx \ni y).$$

Таким образом, записи

$$y \in fx \text{ и } x \in f'y$$

равносильны. Установим основные свойства отображения f'.

А. *Если f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y, то для каждой точки $y \in Y$ множество $f'y$ является замкнутым в X множеством.*

В самом деле, вследствие непрерывности отображения f множество $V = \mathcal{E}(x,\ fx \subseteq Y \setminus y)$, где y — произвольная точка пространства Y, открыто в X. По самому определению f' имеем: $f'y = X \setminus V$, т. е. множество $f'y$ замкнуто в X.

Таким образом, для каждого непрерывного отображения f пространства X в пространство Y оказывается определенным обратное отображение f' множества fX на пространство X. При этом ни аксиома отделимости Хаусдорфа, ни бикомпактность рассматриваемых пространств не предполагаются

В. Имеет место основное соотношение:

$$(f')' = f.$$

В самом деле, $(f')'x = \mathcal{E}(y,\ f'y \ni x) = \mathcal{E}(y,\ y \in fx) = fx$, где x — произвольная точка X.

С. Наконец, легко проверяется и тождество

$$(gf)' = f'g'$$

(где f — отображение X в Y, а g — отображение Y в Z).

5. Для дальнейшего удобно следующее

Определение 2. Большим прообразом (при отображении f) множества $B \subseteq Y$ называется множество $f'B = \mathcal{E}(x,\ fx \cap B \neq \Lambda)$; малым прообразом — множество $\mathcal{E}(x,\ fx \subseteq B)$. Малым образом множества $A \subseteq X$ при отображении f называется множество $\mathcal{E}(y,\ f'y \subseteq A)$. Обычный образ fA множества $A \subseteq X$ по соображениям симметрии иногда удобно называть «большим» образом.

Теперь можно сказать (перефразируя утверждение 2° на стр. 199):

D. *Отображение f пространства X в пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда малый прообраз всякого открытого в Y множества открыт в X.*

Автоматически устанавливается для всякого отображения f пространства X на Y следующее утверждение.

E. *Малый и большой прообразы взаимно дополнительных в Y множеств взаимно дополнительны в X.*

Отсюда сразу следует, что критерий непрерывности D можно сформулировать и так:

F. *Отображение f непрерывно тогда и только тогда *, когда большой прообраз всякого замкнутого в Y множества замкнут в X.*

Так как большой прообраз при отображении f совпадает с большим образом при отображении f', то при любых T_1-пространствах X и Y *непрерывность* отображения f тождественна с замкнутостью обратного отображения f'.*

Отсюда и из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Если f — непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y, то обратное отображение f' тоже непрерывно.*

Более того, имеет место и

Следствие 2. *Если f и f' — взаимно обратные отображения бикомпакта X на бикомпакт Y, соответственно Y на X, при которых все fx и $f'y$ замкнуты, и если одно из отображений f, f' замкнуто (или непрерывно), то оба отображения непрерывны (и замкнуты).*

С точки зрения задачи, поставленной в п. 1 введения, отновными результатами этого параграфа являются теоремы 4 и 4'.

Теорема 4. *Для того чтобы отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы все $f'y$ были замкнуты и чтобы для любого замкнутого в X множества A множество $\overline{f}A$ было бикомпактным в топологии пространства $\varkappa Y$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть условия теоремы выполнены. В силу только что доказанного, достаточно показать, что для любого замкнутого в X множества A множество fA замкнуто в Y. Но множество $\overline{f}A = \mathscr{E}(fx,\ x \in A)$, по условию, бикомпактно в $\varkappa X$, следовательно, по теореме 3 § 1 множество $fA = \bigcup\limits_{x \in A} fx$ замкнуто в бикомпакте Y.

Необходимость. Пусть f непрерывно. Тогда непрерывно отображение $\overline{f}$ бикомпакта X на $\overline{f}X$. Отображение $\overline{f}$ будет непрерывным и на любом множестве $A \subseteq X$ пространства X. Если A — произвольное замкнутое множество из X, то множество $\overline{f}A$ (по непрерывности отображения $\overline{f}$ на бикомпактном множестве A) бикомпактно в $\varkappa Y$. Тем самым доказана вся теорема.

Так как (для бикомпактов X и Y) непрерывность отображения f равносильна непрерывности f', то имеет место

Теорема 4'. *Для того чтобы отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы множе-*

* Все время предполагается замкнутость всех fx и всех $f'y$.

ства fx *и* $f'y$ *были замкнуты для всех* $x \in X$ *и* $y \in Y$ *и чтобы для любого замкнутого множества* $B \subseteq Y$ *множество* $\overline{f}'B$ (*т. е. множество всех* $f'y$ *для* $y \in B$) *было замкнуто в топологии пространства* $\varkappa X$.

Замечание. Теорема 4′ является перенесением на случай многозначных отображений характеристики непрерывных однозначных отображений, данной во введении.

Приведем пример отображения f, которое не будучи непрерывным, обладает тем свойством, что множество $\overline{f}X$ бикомпактно в топологии пространства $\varkappa Y$; из этого следует, что теорема 4 является окончательной.

Пример строится так. Пусть X и Y — два экземпляра отрезка $[0;\ 1]$ числовой оси. Обозначим через X_0, Y_0 отрезки $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$, лежащие соответственно на X и Y. Определяем отображение f следующим образом. На X_0 определяем f, как некоторое взаимно однозначное отображение, но заведомо не непрерывное, отрезка X_0 на отрезок Y_0; для всех $x \in X \setminus X_0$ полагаем $fx = Y$. Множество $\overline{f}X$ состоит из всех точек $y \in Y_0$ (в топологии этого отрезка $Y_0 \subseteq \varkappa Y$) и из большой точки $(Y) \in \varkappa Y$; оно, очевидно, бикомпактно. Между тем, отображение f не является непрерывным (оно заведомо разрывно на X_0). Чтобы получить замкнутое $A \subseteq X$, для которого $\overline{f}A$ не бикомпактно, достаточно взять такое замкнутое $A \subset X_0$, образ которого fA при взаимно однозначном отображении f не замкнут в $Y_0 \subseteq Y$; в силу взаимной однозначности отображения f на X_0, будем иметь: $\overline{f}A = fA$, и это множество не бикомпактно в топологии $\varkappa Y$ (дающей в данном случае то же, что и топология самого Y).

Приведем еще один пример многозначного отображения. Бикомпакт X есть окружность, а бикомпакт Y — круг (ограниченный окружностью X). Отображение f бикомпакта X на бикомпакт Y состоит в следующем: мы ставим в соответствие каждой точке окружности x диаметр fx круга, через эту точку проходящий. Отображение f оказывается непрерывным, причем множество $\overline{f}X$ всех диаметров $\{fx\}$ в топологии пространства $\varkappa Y$ представляет собой хаусдорфово пространство. Следовательно, разбиение бикомпакта X на прообразы $\overline{f}^{-1}(fx)$ при однозначном отображении $\overline{f}$ оказывается непрерывным, причем пространство разбиения $\{\overline{f}^{-1}(fx)\}$ гомеоморфно множеству $\overline{f}X = \{fx\} \subseteq \varkappa Y$. А так как разбиение $\{\overline{f}^{-1}(fx)\}$ есть разбиение окружности на пары диаметральных точек, то пространство этого разбиения, а следовательно, и множество $\overline{f}X$ гомеоморфно окружности. Обратное отображение f' состоит в том, что мы центру круга ставим в соответствие всю окружность, а каждой точке $y \in Y$ круга Y, отличной от центра, ставим в соответствие пару точек, являющихся концами диаметра, проходящего через точку y. Это отображение также непрерывно. Множество замкнутых множеств $\{f'y\}$ представляет собою T_0-(но не T_1) пространство в топологии пространства $\varkappa X$. Отметим, что отображение $f'f$ состоит в том, что мы каждой точке окружности ставим в соответствие всю окружность.

В случае многозначного отображения f, при котором для любых двух точек x_1, x_2 множества fx_1 и fx_2 или совпадают, или не пересекаются, всегда будет $ff'f = f$.

§ 3. Дальнейшие свойства непрерывных отображений

1. О сходимости последовательности по направленному множеству индексов. Направленным множеством, как известно, называется частично упорядоченное множество $\Theta = \{\alpha\}$, для любых двух элементов α и β которого найдется третий элемент γ, следующий как за α, так и за β.

Пусть дано направленное множество $\Theta = \{\alpha\}$, элементы которого мы будем называть индексами. Предположим, что у нас имеется пространство X и что каждому индексу $\alpha \in \Theta$ поставлена в соответствие точка $x_\alpha \in X$. Тогда мы говорим, что в пространстве X дана последовательность точек x_α («направленная» множеством индексов Θ). Точно так же, если каждому $\alpha \in \Theta$ соответствует множество $M_\alpha \subseteq X$, то будем иметь последовательность множеств M_α в пространстве X. Если Θ — множество натуральных чисел (в их естественном порядке), то получаем обычные счетные последовательности. Мы говорим, что последовательность $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ точек пространства X сходится к точке $x_0 \in X$ (или что x_0 есть предел последовательности $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$), если для каждой окрестности Ox_0 этой точки найдется такой индекс $\alpha_0 \in \Theta$, что $x_\alpha \in Ox_0$ для всех $\alpha > \alpha_0$.

Точно так же будем говорить, что последовательность замкнутых множеств $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ пространства X сходится к замкнутому множеству* F_0 (или что F_0 есть предельное множество для последовательности $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$), если для каждой окрестности OF_0 найдется такой индекс $\alpha_0 \in \Theta$, что для всех $\alpha > \alpha_0$ имеем $F_\alpha \subset OF_0$. Очевидно, последовательность замкнутых множеств $F_\alpha \subset X$ сходится к замкнутому множеству $F_0 \subset X$ тогда и только тогда, когда эти множества, рассматриваемые как точки пространства $\varkappa X$, сходятся к точке (F_0) этого пространства.

Легко видеть, что в хаусдорфовом пространстве никакая последовательность точек не может сходиться к двум различным точкам. Однако в бикомпактном T_1-пространстве одна и та же последовательность точек может сходиться к двум различным точкам.

Что касается сходимости множеств, то даже в хаусдорфовом пространстве X одна и та же сходящаяся последовательность множеств $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ сходится, вообще говоря, к нескольким множествам. В самом деле, если последовательность $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ сходится к какому-нибудь замкнутому множеству $F \subseteq X$ и если $F' \supseteq F$, то эта последовательность, очевидно, сходится и к F'. Поэтому представляют интерес следующее определение и теорема:

Определение. Множество F_0 называется минимальным пределом для последовательности множеств $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, если эта последовательность сходится к множеству F_0, но не сходится ни к какому собственному (замкнутому) подмножеству множества F_0.

Теорема 1. *Пусть X — бикомпакт. Всякая сходящаяся последовательность множеств $\{F_\alpha \subseteq X, \alpha \in \Theta\}$ имеет в X минимальный предел и притом единственный.*

* Сходимость к незамкнутым множествам в этой работе не будет ни рассматриваться, ни определяться.

Доказательство. Докажем сначала существование минимального предела, а затем его единственность.

Лемма. *Пусть в бикомпакте X дана вполне упорядоченная убывающая система замкнутых множеств*

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_\lambda \supseteq \ldots, \quad \lambda < \xi$$

где индексы суть все порядковые числа, меньшие некоторого порядкового числа ξ). Предположим, что каждое из множеств Φ_λ является предельным множеством для данной последовательности $\{F_\alpha \subseteq X, \alpha \in \Theta\}$. Тогда пересечение $\Phi = \bigcap\limits_{\lambda<\xi} \Phi_\lambda$ есть предельное множество для последовательности $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$.

В самом деле, пусть $O\Phi$ — произвольная окрестность множества Φ. Как известно, тогда существует $\Phi_\lambda \subseteq O\Phi$, и $O\Phi$ есть окрестность этого Φ_λ, содержащая (так как Φ_λ — предельное множество для последовательности F_α, $\alpha \in \Theta\}$) все F_α, для которых α следует за некоторым α_0. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству существования минимального предела. Будем вести это доказательство посредством трансфинитной индукции.

Пусть Φ_1 — какое-нибудь предельное множество для последовательности $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Если оно минимально, то теорема доказана. Предположим, что это не так и что построены $\Phi_{\lambda'}$ для всех порядковых чисел λ', меньших некоторого λ, причем каждое из этих $\Phi_{\lambda'}$ есть предельное множество последовательности $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Если λ — первого рода, $\lambda = \lambda_0 + 1$, и Φ_{λ_0} — минимальное предельное множество для нашей последовательности, то все доказано. Если нет, то существует предельное множество, строго меньшее чем Φ_{λ_0}; выберем такое множество и обозначим его через Φ_λ. Если λ — второго рода, то положим $\Phi_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda'<\lambda} \Phi_{\lambda'}$. Согласно лемме, Φ_λ снова есть предельное множество последовательности $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$. Процесс останавливается на некотором порядковом числе λ первого рода мощности, не превосходящей веса пространства τ, и тогда, по самому построению, Φ_λ есть минимальное предельное множество для нашей последовательности.

Докажем единственность минимального предела. Пусть F и F' — два различных минимальных предела для последовательности $\{F_\alpha \subseteq X, \alpha \in \Theta\}$. Так как замкнутые множества F и F' различны, то существует окрестность одного из них, не содержащая другого; пусть, например, OF не содержит F'. Берем окрестность O_1F, удовлетворяющую условию $[O_1F] \subseteq OF$, и рассматриваем множество $F'' = [O_1F] \cap F'$, являющееся собственным подмножеством множества F'. Докажем, что множество F'' — предельное для последовател ности $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, этим путем будет получено нужное нам противоречие. Пусть OF'' — произвольная окрестность множества F''. Множество $OF'' \cup (X \setminus [O_1F]) = \Gamma$ является окрестностью множества F'. Поэтому существует такое $\alpha_1 \in \Theta$, что все F_α, для которых $\alpha > \alpha_1$, содержатся в Γ. С другой стороны, существует такое α_2, что все F_α, для которых $\alpha > \alpha_2$, содержатся в O_1F, а следовательно, не имеют ни одной точки в $X \setminus [O_1F]$. Поэтому все F_α, для которых одновременно $\alpha > \alpha_1$ и $\alpha > \alpha_2$, содержатся в Γ и не содержат ни одной точки $X \setminus [O_1F]$, т. е. лежат в OF''. Таким образом, доказательство единственности, а следовательно, и всей теоремы завершено.

2. Теорема 2. *Для того чтобы отображение f пространства X в пространство Y было непрерывным в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы, какова бы ни была последовательность точек $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, сходящаяся к точке x_0, последовательность множеств $\{fx_\alpha \subseteq Y, \alpha \in \Theta\}$ сходилась к множеству $fx_0 \subseteq Y$.*

Доказательство. *Достаточность.* Нам дано, что для всякой сходящейся к точке x_0 последовательности точек x_α последовательность множеств fx_α сходится к fx_0. Докажем непрерывность отображения f в точке x_0.

Предположим противное. Пусть существует такая окрестность Ofx_0 множества fx_0, что, какова бы ни была окрестность Vx_0 точки x_0, всегда $fVx_0 \cap (X \setminus Ofx_0) \neq \Lambda$. Считая $V_\alpha x_0 < V_\beta x_0$, если $V_\alpha x_0 \supseteq V_\beta x_0$, рассмотрим направленную систему $\{V_\alpha x_0\} = \Theta$ окрестностей точки x_0. Так как, по предположению, $fV_\alpha x_0 \cap (Y \setminus Ofx_0) \neq \Lambda$, то из каждой окрестности $V_\alpha x_0$ можем взять такую точку x_α, что

$$fx_\alpha \cap (X \setminus Ofx_0) \neq \Lambda. \qquad (1)$$

Получаем последовательность точек $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, сходящуюся к точке x_0; последовательность же множеств fx_α к множеству fx_0 не сходится (в силу (1)), что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Необходимость. Пусть отображение f непрерывно в точке x_0, и пусть дана какая-нибудь последовательность точек $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$, сходящаяся к точке x_0. Покажем, что последовательность fx_α сходится к множеству fx_0.

Пусть Ofx_0 — произвольная окрестность множества fx_0. По непрерывности берем такую окрестность Vx_0 точки x_0, что

$$fVx_0 \subseteq Ofx_0.$$

Так как последовательность $\{x_\alpha\}$ сходится к точке x_0, то существует такой индекс $\alpha_0 \in \Theta$, что для всех $\alpha > \alpha_0$ имеем:

$$x_\alpha \in Vx_0.$$

Тогда $fx_\alpha \subseteq Ofx_0$ (для $\alpha > \alpha_0$), т. е. последовательность замкнутых множеств $\{fx_\alpha\}$ сходится к множеству fx_0.

3. График отображения. Пусть f — любое многозначное отображение бикомпакта X в бикомпакт Y. Рассмотрим топологическое произведение Z бикомпактов X и Y. Для каждого $x_0 \in X$ обозначим через $p'x_0$ множество всех точек $(x, y) \in Z$, для которых $x = x_0$, $y \in fx_0$. Множество

$$D = \bigcup_{x \in X} p'x \subseteq Z.$$

называется графиком отображения f.

Теорема 3. *Для того чтобы отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы его график D был замкнут в $X \times Y$.*

Доказательство. Множество $p'x$ замкнуто в Z, так как fx замкнуто в Y. Ставя в соответствие каждой точке $x \in X$ замкнутое в Z множество

$p'x$, получим отображение p' пространства X в пространство Z (а именно на множество D).

Замечание. Обозначение вызвано тем, что отображение p', как легко видеть, действительно есть отображение, обратное (в смысле § 3) к проектированию p пространства D на пространство X.

Лемма. *Отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно отображение p' пространства X в бикомпакт Z.*

Доказательство леммы. 1°. Пусть f непрерывно. Докажем непрерывность отображения p'. Пусть $Op'x_0 = Ox_0 \times Ofx_0$ — «прямоугольная» окрестность * множества $p'x_0$ в пространстве Z. Так как отображение f непрерывно, то содержащее точку x_0 множество

$$O'x_0 = \mathscr{E}(x,\ fx \subseteq Ofx_0)$$

открыто и, следовательно, является окрестностью точки x_0. Положим $O''x_0 = Ox_0 \cap O'x_0$. Тогда

$$p'O''x_0 \subseteq Op'x_0,$$

что и доказывает непрерывность отображения p'.

2°. Пусть p' непрерывно. Докажем непрерывность отображения f. Возьмем произвольную окрестность Ofx_0 и рассмотрим окрестность $Op'x_0 = Ofx_0 \times X \subseteq Z$ множества $p'x_0$. Из непрерывности отображения p' следует, что множество $\mathscr{E}(x,\ p'x \subseteq Op'x_0)$ открыто; но это множество тождественно с множеством $\mathscr{E}(x,\ fx \subseteq Ofx_0)$, которое, таким образом, оказывается открытым, что и доказывает непрерывность отображения f.

Теорема 3 следует из леммы. В самом деле:

1°. Пусть f непрерывно, тогда p'—непрерывное отображение бикомпакта X в бикомпакт Z; следовательно, p' — замкнутое отображение, а потому множество

$$D = p'X$$

замкнуто в Z.

2°. Пусть D замкнуто в Z; тогда D — бикомпакт; проекция p бикомпакта D на бикомпакт X, очевидно, непрерывна, а потому непрерывно и обратное отображение p' бикомпакта X на бикомпакт D; по лемме отсюда вытекает и непрерывность отображения f, что и требовалось доказать.

Замечание. Если многозначное отображение f бикомпакта X в бикомпакт Y непрерывно, то множество замкнутых множеств $Q_1 = \{p'x\}$, взятое в топологии $\varkappa Z$, гомеоморфно бикомпакту X. Точно так же, обозначив через q_y, множество всех точек D, для которых $y = y_0$, можем утверждать, что множество Q_2 всех непустых замкнутых множеств q_y в топологии пространства $\varkappa Z$ гомеоморфно бикомпакту Y.

§ 4. Сильно непрерывные и открытые отображения

1. Определение 1. Отображение f назовем открытым, если большой образ при этом отображении всякого открытого множества в X есть открытое множество в Y.

* Ввиду бикомпактности пространства $X \times Y$ всякая окрестность множества $p'x_0$ содержит прямоугольную окрестность.

Переходя к дополнению, получаем, что отображение f открыто тогда и только тогда, когда малый образ всякого замкнутого множества в X есть замкнутое множество в Y. Как показывает пример любого однозначного непрерывного, но не открытого отображения, отображение, обратное к многозначному открытому отображению, может не быть открытым.

По аналогии с основным определением непрерывности (см. § 2, п. 5) естественно вводится

Определение 2. Отображение f называется косо-непрерывным, если при отображении f большой прообраз всякого открытого в Y множества V, т. е. множество $U = f'V = \mathcal{E}(x, fx \cap V \neq \Lambda)$, есть открытое в X множество. Вместо этого можно было бы потребовать, чтобы малый прообраз $\mathcal{E}(x, fx \subseteq B)$ всякого замкнутого $B \subseteq Y$ был замкнут в X.

Отображение f назовем сильно непрерывным, если оно одновременно непрерывно и косо-непрерывно*.

Легко видеть, что сильно непрерывные отображения бикомпактов суть не что иное как отображения, обратные к непрерывным открытым отображениям.

Для сильно непрерывных отображений легко доказываются следующие теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем**.

Теорема А. *Многозначное отображение f сильно непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно однозначное отображение $\bar{f}$ пространства X на множество замкнутых множеств $\{fx\}$ в топологии пространства ψY.*

Доказательство этой теоремы сразу же следует из определения открытого псевдобазиса в пространстве ψY и из следующего общего предложения:

Теорема А'. *Пусть в пространстве Y дан открытый псевдобазис $\mathfrak{S}$. Для того чтобы однозначное отображение f пространства X на Y было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы прообраз любого множества $V \in \mathfrak{S}$ при отображении f был открытым множеством в пространстве X.*

Замечание. Отображение $\bar{f}$ бикомпакта X в бикомпакт ψY может быть (при замкнутом отображении f) продолжено в отображение (которое мы будем обозначать также через $\bar{f}$) всего бикомпакта ψX в ψY.

При этом имеет место

Теорема В. *Для того чтобы замкнутое отображение f было сильно непрерывно, необходимо (и достаточно), чтобы отображение $\bar{f}$ бикомпакта ψX в бикомпакт ψY было непрерывным.*

Определение 3. Частично упорядоченную последовательность замкнутых множеств $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ в X назовем сильно сходящейся к замкнутому множеству F, если последовательность $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ этих замкнутых множеств, рассматриваемых как точки пространства ψX, сходится к точке $(F) \in \psi X$.

Легко доказывается, что последовательность $\{F_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ замкнутых множеств сильно сходится к замкнутому множеству F тогда и только тогда, когда эта последовательность имеет множество F своим минимальным пределом (в смысле § 3).

---

* Стротер в работе [7] именно эти отображения называет непрерывными.

** Эти теоремы имеются и у Стротера [7].

Теорема C. *Для того чтобы отображение f было сильно непрерывно в точке $x_0 \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для любой частично упорядоченной последовательности $\{x_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ точек пространства X, сходящейся к точке x_0, последовательность замкнутых множеств $\{fx_\alpha, \alpha \in \Theta\}$ сильно сходилась к замкнутому множеству fx_0.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в § 3.

Следующая теорема доказывается непосредственной проверкой.

Теорема D. *Отображение f, сильно непрерывное на всем пространстве X, будет сильно непрерывно на любом множестве $A \subseteq X$ (т. е. будет сильно непрерывно отображать множество A на множество $fA \subseteq Y$).*

Отображение f, открытое на X, будет открытым на всяком открытом множестве $A \subseteq X$ (т. е. будет открыто отображать множество A на множество $fA \subseteq Y$).

Так же, как в случае однозначных отображений, доказывается

Теорема E. *Пусть f — открытое отображение пространства X на пространство Y; пусть множество $A \subseteq X$ является при отображении f большим прообразом некоторого множества $B \subseteq Y$: $A = f'B$. Тогда f осуществляет открытое отображение множества A на множество $fA \subseteq Y$.*

В самом деле, пусть $H \subseteq A$ открыто в A. Тогда $H = A \cap \Gamma$, где Γ открыто в X, причем легко проверить, что в нашем случае $f(A \cap \Gamma) = fA \cap f\Gamma$, откуда, поскольку $f\Gamma$ открыто в Y, и следует теорема E.

2. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1. *Пусть f — сильно непрерывное отображение связного пространства X на пространство Y. Если, по крайней мере, для одной точки $x_0 \in X$ множество fx_0 связно, то Y — связное пространство.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму:

Лемма. *Если $\mathfrak{B} \subseteq \psi X$ — связное множество пространства ψX и по крайней мере одно из множеств $F_\alpha \subseteq X$, являющихся элементами множества $\mathfrak{B}$, связно, то сумма $A \subseteq X$ всех этих множеств также есть связное множество.*

Доказательство леммы (проведем его с помощью рассуждений от противного). Предположим, что существует непустое открыто-замкнутое в A множество Φ_0. Рассмотрим открыто-замкнутое в $\mathfrak{B}$ множество $(\Phi_0) = \mathscr{E}(F_\alpha,\ (F_\alpha) \in \mathfrak{B},\ F_\alpha \subset \Phi_0)$. Во всяком случае $(\Phi_0) \neq \mathfrak{B}$ (так как в противном случае было бы $\Phi_0 = A$). Поэтому, так как $\mathfrak{B}$ связно, а множество (Φ_0) открыто-замкнуто в $\mathfrak{B}$, (Φ_0) непременно пусто. Но тогда возможны два случая: открыто-замкнутое в $\mathfrak{B}$ множество $(\Phi_1) = \mathscr{E}(F_\alpha,\ (F_\alpha) \in \mathfrak{B},\ F_\alpha \subset X \setminus \Phi_0)$ пусто или не пусто. Но множества (Φ_0) и (Φ_1) одновременно пустыми быть не могут, так как существующее по предположению связное множество $F_{\alpha_0} \in \mathfrak{B}$, пересекаясь заведомо с одним из открыто-замкнутых множеств Φ_0, $\Phi_1 = X \setminus \Phi_0$, должно в нем целиком лежать. Следовательно, так как множество (Φ_0) пусто, множество $(\Phi_1) \subseteq \mathfrak{B}$ не пусто, а потому, в силу связности множества $\mathfrak{B}$, совпадает с этим последним. Если $(\Phi_1) = \mathfrak{B}$, то Φ_0 пусто, вопреки нашим предположениям. Итак, множество F связно, что и требовалось доказать.

Из леммы теорема следует почти непосредственно: так как f сильно непрерывно, то непрерывно отображение $\overline{f}$, а так как образ связного пространства при однозначном непрерывном отображении есть связное пространство, то множество $\overline{f}X = \{fx\}$ связно. Тогда, согласно лемме, связным будет множество

$$\bigcup_{fx \in \overline{f}X} fx = Y.$$

Под открытым отображением мы теперь всегда будем понимать открытое непрерывное отображение.

Теорема 2. *Пусть f — открытое отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Пусть C — связное замкнутое множество (континуум) в Y и k — любая компонента множества $A = f'C$. Тогда $fk \supseteq C$.*

Доказательство. Предположим противное. Это значит, что существует такая точка $y_0 \in C$, что $f'y_0 \cap k = \Lambda$. Так как бикомпакт нормален, то непересекающиеся замкнутые множества k и $f'y_0$ можно в A окружить непересекающимися окрестностями Vk и $Vf'y_0$. По лемме Шуры-Буры (см., например, [4], стр. 97—98) можно найти открыто-замкнутое в A множество $V^*k \supseteq k$, целиком содержащееся в окрестности Vk. Так как отображение f открыто на бикомпакте A и, будучи непрерывным, замкнуто, то множество fV^*k является открыто-замкнутым множеством в fA, а множество $fV^*k \cap C$ — открыто-замкнутое множество в C, причем $fV^*k \cap C \neq C$ (так как точка $y_0 \notin fV^*k$), а это противоречит связности множества C.

Только что доказанная теорема дополняется следующим предложением:

Теорема 3. *Пусть f — открытое отображение бикомпакта X на бикомпакт Y и C — связное замкнутое множество в Y. Пусть k — любая компонента бикомпакта $A = f'C$. Тогда множество $f^*k = C \cap \mathscr{E}(y, f'y \subseteq k)$ или пусто или совпадает со всем множеством C.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда множество $f^*k \neq \Lambda$ и существует такая точка $y_0 \in C$, что $f'y_0$ не содержится в k. Возьмем открыто-замкнутую в A окрестность Ok множества k, которая не содержит всего $f'y_0 \subseteq A$. Такая окрестность существует вследствие регулярности бикомпакта и леммы Шуры-Буры.

Отображение f' бикомпакта Y на бикомпакт X, как обратное к открытому отображению f, сильно непрерывно на Y, а следовательно, и на C; это отображение, рассматриваемое как отображение бикомпакта C в X, обозначаем через f'_C. При этом, в силу определения бикомпакта A, отображение f'_C есть отображение бикомпакта C на бикомпакт A. Множество

$$V = \mathscr{E}(y \in C,\ f'y \subseteq Ok \subseteq A) = \mathscr{E}(y \in C,\ f'_C y \subseteq Ok)$$

есть малый прообраз при сильно непрерывном отображении f'_C открыто-замкнутого в A множества Ok. Поэтому множество V открыто-замкнуто в C; при этом, в силу выбора окрестности Ok, оно не содержит точки y_0. Так как множество V содержит непустое множество f^*k, то оно не пусто, что противоречит связности множества C. Теорема доказана.

Простой пример показывает, что множество f^*k может быть пусто для любой компоненты множества A. В самом деле, пусть X состоит из двух горизонтальных отрезков

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ y = 3 \end{matrix}\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ на плоскости } Oxy,$$

а пространство Y — из двух горизонтальных отрезков

$$\left.\begin{matrix} y=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Для любой точки $\xi \in X$ образ $f\xi$ состоит из двух точек, являющихся ортогональными проекциями точки ξ на прямые $y=1$ и $y=2$. За множество C берем отрезок $y=1$, $0\leqslant x\leqslant 1$. Очевидно, для любой из двух компонент k множества A имеем $f^{*}k=\Lambda$.

Теорема 4. *Пусть f — открытое вместе со своим обратным f' (т. е. в обе стороны сильно непрерывное) отображение локально связного бикомпакта X в бикомпакт Y и континуум (т. е. замкнутое связное множество) $C\subseteq Y$ содержит внутренние точки (относительно Y). Тогда множество $A=f'C$ состоит из конечного числа компонент.**

Доказательство. Пусть $y_0 \in C$ — внутренняя точка континуума C, так что существует лежащая в C окрестность Oy_0 (относительно Y). Обозначим через V открытое в X множество $f'Oy_0 \subseteq A$. Так как X локально связно, то компоненты Γ_γ этого открытого множества V суть открытые в X множества. Теперь рассмотрим компоненты k_α множества A. Назовем отмеченной такую компоненту $\Gamma_{\gamma'} \in \{\Gamma_\gamma\}$, которая пересекается с множеством $f'y_0$. Прежде всего каждое множество Γ_γ, будучи связным подмножеством множества A, содержится в некоторой компоненте k_α этого множества A. С другой стороны, докажем, что каждая компонента k_α содержит некоторое отмеченное $\Gamma_{\gamma'}$. В самом деле, если данная компонента k_α не содержит отмеченной компоненты $\Gamma_{\gamma'}$, то она и не пересекается с нею. Но если бы данная компонента k_α не пересекалась ни с одной отмеченной компонентой, то она не пересекалась бы и с суммой всех отмеченных $\Gamma_{\gamma'} \in \{\Gamma_\gamma\}$, которая содержит множество $f'y_0$. Итак, если бы данная компонента k_α не содержала ни одной отмеченной $\Gamma_{\gamma'}$, то было бы $k_\alpha \cap f'y_0=\Lambda$. Но тогда fk_α не содержало бы точку y_0, а это противоречит тому, что (по теореме 2) $fk_\alpha \supseteq C \supseteq Oy_0$. Поэтому, если мы докажем, что число всех отмеченных $\Gamma_{\gamma'}$ конечно, этим будет доказана конечность числа всех k_α. Но отмеченные открытые множества $\Gamma_{\gamma'}$ покрывают бикомпакт $f'y_0$, поэтому некоторое конечное их число покрывает этот бикомпакт. Но так как каждое отмеченное $\Gamma_{\gamma'}$ пересекается с $f'y_0$ и они попарно не имеют общих точек, то число их конечно, чем все и доказано.

В заключение рассмотрим отображения f, каждое из которых одновременно со своим обратным отображением f' открыто (или, что то же самое, одновременно со своим обратным сильно непрерывно).

Отображение f входит в рассматриваемый класс тогда и только тогда, когда отображение $\overline{f}$ пространства X на $\{fx\}\subset \psi Y$ и отображение $\overline{f}'$ пространства Y на $\{f'y\}\subset \psi X$ непрерывны.

Теорема 5. *Для того чтобы отображения f бикомпакта X на бикомпакт Y и обратное отображение f' одновременно были открыты, достаточно, чтобы по крайней мере одно из однозначных отображений $\overline{f}$ и $\overline{f}'$ (соответственно на $\overline{f}X$ и $\overline{f}'Y$) было открыто; тогда открытым будет и второе из этих отображений.*

* В частности, для однозначных отображений получаем теорему о квазимонотонности открытых отображений бикомпактов, доказанную для компактов впервые Хопфом (H.Hopf).

Доказательство. Пусть отображение f таково, что отображение $\overline{f}$ открыто. Докажем, что отображения f и f' одновременно открыты. Сильная непрерывность отображения f и, следовательно, открытость отображения f' сразу же следует из непрерывности отображения $\overline{f}$. Остается доказать, что отображение f открыто, т. е. сильную непрерывность отображения f'. Так как отображение f непрерывно, то непрерывно и отображение f', так что остается доказать косую непрерывность f', т. е. надо доказать, что малый прообраз при отображении f' или, что то же самое, малый образ при отображении f всякого замкнутого множества F в X есть замкнутое множество в Y. Так как отображение $\overline{f}$ открыто, то множество $\overline{f}(X \setminus F)$ представляет собой открытое множество в $\overline{f}X$. Обозначим через M сумму замкнутых множеств fx, которые, как точки пространства ψY, лежат в замкнутом в $\overline{f}X$ множестве $\overline{f}X \setminus \overline{f}(X \setminus F)$. По теореме 3 из § 1 множество M замкнуто в бикомпакте Y. Это множество и есть малый образ при отображении f множества F, что и завершает доказательство теоремы.

Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова
Кафедра высшей геометрии и топологии

(Поступило в редакцию 9/X 1957 г.)

Литература

1. В. И. Пономарев, О непрерывных разбиениях бикомпактов, Успехи матем. наук, т. **XII**, вып. **4(76)** (1957), 335—340.
2. П. С. Александров, О понятии пространства в топологии, Успехи матем. наук, т. **II**, вып. **1(17)** (1947), 5—57.
3. П. С. Александров, Комбинаторная топология, Москва, Гостехиздат, 1947.
4. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Москва, Гостехиздат, 1954.
5. E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1951), 152—182.
6. В. М. Иванова, Общая теория пространств замкнутых множеств, Кандидатская диссертация, Матем. институт АН СССР, 1950.
7. W. Strother, Fixed points, fixed sets and M-retracts, Duke Math. Journ., **22**, N **4** (1955), 551.

Комбинаторная топология незамкнутых множеств. III

К. А. Ситников (Москва)

Изоморфизм двойственности

Оглавление

Введение

В настоящей работе доказывается с помощью первого закона двойственности, установленного мною в [1], целая серия теорем двойственности для произвольных множеств, лежащих в сферических пространствах S^n. Из этих теорем двойственности следует, что все в настоящее время определенные предельные группы нервов бесконечных покрытий данного множества и все предельные группы компактов, содержащихся в данном множестве, дуализируемы. При этом каждая теорема двойственности утверждает изоморфизм или двойственность группы, основанной на бесконечных покрытиях, с группой с компактными носителями. Иначе обстоит дело с группами, основанными на конечных покрытиях: они, как показано в работах П. С. Александрова [3] и [4], не дуализируемы. Недуализируемым оказывается и другое геометрическое свойство множеств: соединимость точек континуумами — континуальная связность (см. фиг. 2 работы [1]). Несмотря на это, группы Бетти с компактными носителями дуализируемы. Отсюда видно, что в случае произвольных множеств между геометрическими и алгебраическими подходами имеется бóльшая разница, чем в случае замкнутых множеств (об этом см. также главу 3 работы [2]).

Доказываемые в настоящей работе теоремы двойственности справедливы для произвольных множеств, лежащих в n-мерных замкнутых многообразиях, удовлетворяющих обычным условиям ацикличности. Если эти условия не выполняются, то, как и в случае замкнутых множеств, вместо теорем двойственности имеют место теоремы расположения (см. [5] и [6]). Для случая, когда объемлющее пространство не есть n-мерное многообразие, законы двойственности для произвольных множеств, по-видимому, не могут быть получены с имеющимися в настоящее время группами Бетти. Причиной этому—то, что произвольное разбиение пространства симметрично, тогда как законы двойственности типа Колмогорова не симметричны по отношению к замкнутому и открытому множествам и имеют дело с неустойчивыми группами (см. главу 3 работы [1]).

Напомним содержание первой теоремы двойственности, доказанной в [1], которая для нас будет основной в настоящей работе.

Первая теорема двойственности. *Пусть M^n — замкнутое, ориентируемое, гомологическое n-мерное многообразие и p, q — неотрицательные целые числа, дающие в сумме $n-1$. Предполагаем, что M^n ациклично в размерностях q и $q+1$ по данной произвольной группе коэффициентов $\mathfrak{A}$. Тогда для любого множества $A \subseteq M^n$ и $B = M^n \setminus A$ группы $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$, взятые по группе коэффициентов $\mathfrak{A}$, изоморфны между собой.*

При этом $\Delta^q B$ есть новая группа, основанная на более сильных, чем обычные виеторисовские, циклах и гомологиях: под Δ-циклом $z^q = \{z_k^q, x_k^{q+1}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ в B понимается последовательность лежащих на каком-либо компакте $\Psi \subseteq B$ ε_k-циклов z_k^q и ε_k-цепей x_k^{q+1}, $\varepsilon_k \to 0$, причем $\Delta x_k^{q+1} = z_{k+1}^q - z_k^q$. Цикл z^q ограничивает в B, если на некотором компакте Ψ', $\Psi \subseteq \Psi' \subseteq B$, существуют такие ε_k'-цепи y_k^{q+1} и x_k^{q+2}, $\varepsilon_k' \to 0$, что

$$\Delta y_k^{q+1} = z_k^q, \quad \Delta x_k^{q+2} = y_{k+1}^{q+1} - y_k^{q+1} - x_k^{q+1}.$$

В теореме двойственности, сформулированной выше, не предполагается, что группа коэффициентов $\mathfrak{A}$ снабжена какой-либо топологией. Однако, если $\mathfrak{A}$ — бикомпактная топологическая группа, то группа $\Delta^q B$ совпадает со старой виеторисовской группой $\Delta_c^q B$ с компактными носителями (доказательство см. в [1], стр. 39). Если условие бикомпактности не выполнено, в частности, в важнейшем случае, когда $\mathfrak{A}$ — просто группа целых чисел, группа $\Delta^q B$ существенно отлична от группы $\Delta_c^q B$. Это можно видеть на примере, когда B — соленоид (доказательство см. в [2], стр. 413).

Группа $\nabla^p A$ есть известная ∇-группа, основанная на бесконечных цепях, взятых на нервах открытых звездно-конечных покрытий множества A. Если размерность множества A равна p, то группа $\nabla^p A$ по целочисленной области коэффицентов имеет простой геометрический смысл: ее элементы находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами непрерывных отображений множества A в p-мерную сферу S^p.

Приведем пример, показывающий о сколь сложных множествах могут быть получены результаты с помощью первой теоремы двойственности. Возьмем известное урысоновское разбиение n-мерного пространства на два множества, из которых ни одно не содержит континуума, отличного от точки. Тогда нульмерная группа каждого из этих множеств будет континуальна, так как разные точки суть не гомологичные между собой нульмерные циклы. Но тогда по первой теореме двойственности и $(n-1)$-мерная ∇-группа каждого из этих множеств будет также континуальна. Это означает, что каждое из этих множеств может быть отображено на $(n-1)$-мерную сферу континуальным числом не гомотопных между собой отображений.

С помощью первого закона двойственности можно получить целую серию других теорем двойственности. А именно, в группах $\Delta^q B$ и $\nabla^p A$, между которыми, в силу первого закона двойственности, существует вполне определенный изоморфизм M, можно выделить несколько подгрупп, которые при изоморфизме M переходят друг в друга. Такой оказывается, например, подгруппа $H^q B$ группы $\Delta^q B$, состоящая из тех ее элементов, которые ограничивают в B в вьеторисовском смысле. Фактор-группа $\Delta^q B - H^q B$ изоморфна вьеторисовской группе $\Delta_c^q B$, которая таким образом оказывается дуализируемой. Вопрос об этом был поставлен П. С. Александровым в 1935 г.

Доказательство этого требует определения проекционной Δ-группы нового типа по бикомпактной области коэффициентов. Для этого рассмотрим на нерве каждого покрытия α множества A p-мерную Δ-группу $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$, основанную на конечных цепях и взятую по бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$, но без всякой топологии, и p-мерную ∇-группу $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$, основанную на бесконечных цепях и взятую по дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$, двойственной $\mathfrak{B}$. В силу скалярного умножения, каждый элемент одной из этих групп является алгебраическим характером другой. В группе $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$ выделяем подгруппу $N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, аннулирующую всю группу $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$, а в группе $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$ — подгруппу $N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$, аннулирующую всю $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$. Тогда группа $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, топологизированная как группа характеров группы $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$, имеет бикомпактное пополнение $\bar{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$, двойственное группе $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$. Группы $\bar{\delta}^p(\alpha, \mathfrak{B})$ образуют обратный спектр, бикомпактная предельная группа которого и есть искомая бикомпактная проекционная группа $\bar{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$.

Оказывается, что группа $H^q(B; \mathfrak{A})$ состоит из тех элементов группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$, которые имеют нулевой коэффициент зацепления со всей группой $\bar{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$. При изоморфизме M между группами $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ и $\nabla^p(A; \mathfrak{A})$ подгруппа $H^q(B; \mathfrak{A})$ переходит в подгруппу $N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$, имеющую нулевое скалярное произведение со всей группой $\bar{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$. (Это следует из того, что при изоморфизме M коэффициент зацепления с элементом из $\bar{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ переходит в скалярное произведение.) Это утверждение составляет содержание второго закона двойственности.

Дадим более полную картину дуализируемых подгрупп групп $\Delta^q B$ и $\nabla^p A$, составляющую содержание изоморфизма двойственности. В Δ-группе $\Delta^q B$ множества B, взятой по дискретной или по бикомпактной области коэффициентов, определяются две подгруппы незацепляемости $N^q_\Delta B$ и $N^q_{\Delta c} B$ с элементами проекционной, соответственно Δ-группы дополнительного множества A, взятым по двойственным областям коэффициентов. (В случае дискретной области коэффициентов, как говорилось выше, $N^q_\Delta B = H^q B$.) Определение этих подгрупп, имеющее неинвариантную форму, на самом деле инвариантно. Группы $N_{\Delta c}$ являются ядрами при гомоморфизмах вложения Δ-групп в проекционные. Группа $N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})$ в случае бикомпактной области коэффициентов есть группа незацепляемости П. С. Александрова, введенная им в работе [7], где и доказана ее инвариантность.

При изоморфизме M подгруппы незацепляемости $N^q_\Delta B$ и $N^q_{\Delta c} B$ переходят в подгруппы $N^p_\nabla A$ и $N^p_{\nabla c} A$ группы $\nabla^p A$, имеющие нулевые скалярные произведения с проекционной, соответственно Δ-группой. Отсюда следует, что будут дуализируемы и всевозможные фактор-группы, в частности, изоморфизм $\Delta^q(B; \mathfrak{B}) - N^q_\Delta(B; \mathfrak{B}) = \nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B})$ есть лишь иная форма закона двойственности П. С. Александрова [7].

Общий итог. Все рассмотренные четырнадцать групп можно расположить в центрально-симметричную таблицу, в которой слева — группы по бикомпактной области коэффициентов, а справа — по дискретной:

$$\begin{array}{cc} & \delta^q B \\ & \uparrow \\ N^q_\nabla B \subseteq N^q_{\nabla c} B \subseteq \nabla^q B & \overline{\Delta^q B \supseteq N^q_{\Delta c} B} \supseteq H^q B \\ & \\ N^p_\Delta A \subseteq \underline{N^p_{\Delta c} A \subseteq \Delta^p A} & \nabla^p A \supseteq N^p_{\nabla c} A \supseteq N^p_\nabla A. \\ \downarrow & \\ \bar{\delta}^p A & \end{array}$$

Группы, стоящие по одной вертикали, изоморфны (за исключением групп δ и $\bar{\delta}$). Кроме того, имеются указанные ниже двойственности (они обозначены вертикальной чертой, а горизонтальная жирная черта обозначает переход к бикомпактному пополнению; топологизируются эти группы как подгруппы групп характеров стоящих справа групп):

$$\bar{\delta}^p A \mid \nabla^p A - N^p_\nabla A; \qquad \overline{\nabla^q B - N^q_\nabla B} \mid \delta^q B;$$

$$\overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla c} B} \mid \Delta^q B - N^q_{\Delta c} B.$$

Как показывают примеры, в трехмерном пространстве все рассмотренные группы попарно различны между собой.

С помощью доказанных общих теорем двойственности находятся необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество, чтобы виеторисовские Δ-группы (группы Δ_c) этого множества и его дополнения в S^n по любой области коэффициентов были двойственны между собой, т. е. чтобы был справедлив закон двойственности Понтрягина. Все эти множества образуют область двойственности, т. е. совокупность множеств, инвариантную по отношению к топологическим отображениям и к переходу к дополнению во всевозможных S^n. Эта область двойственности содержит все ошкурённые полиэдры.

§ 1. Связь первого закона двойственности с зацеплениями

Пусть имеются две двойственные между собой группы коэффициентов — дискретная группа $\mathfrak{A}$ и бикомпактная $\mathfrak{B}$. Тогда для любого ∇-цикла u^p и любого проекционного цикла $z^p = \{z^p_\alpha\}$ множества A, из которых один (все равно какой) взят по группе коэффициентов $\mathfrak{A}$, а другой — по $\mathfrak{B}$, определено скалярное произведение $u^p \cdot z^p$: если u^p лежит на нерве покрытия α, то $u^p \cdot z^p$ определяется как произведение $u^p \cdot z^p_\alpha$, взятое на нерве α. Легко проверить, что это произведение не меняет своего значения, если заменить какой-либо из циклов u^p, z^p гомологичным ему в A циклом. Поэтому скалярное произведение определено для любых элементов групп $\nabla^p A$ и $\delta^p A$, взятых по двойственным областям коэффициентов.

При доказательстве первого закона двойственности в главе I работы [1] был построен вполне определенный изоморфизм $M = \Gamma \cdot D \cdot I^{-1}$ между группами $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$ по одной и той же области коэффициентов.

Если u^p — какой-либо ∇-цикл множества A и $\mathfrak{z}^p \in \nabla^p A$ — его гомологический класс, то под Mu^p мы будем понимать любой Δ-цикл множества B, содержащийся в гомологическом классе $M\mathfrak{z}^p$.

При этом справедлива следующая

Лемма. *Для любого ∇-цикла u^p и любого проекционного цикла $z^p = \{z^p_\alpha\}$ множества A, взятым по двойственным между собой областям коэффициентов, имеет место равенство*

$$u^p \cdot z^p = \mathfrak{v}\,(Mu^p;\ z^p),$$

где $\mathfrak{v}$ обозначает коэффициент зацепления.

Для доказательства переходим от циклов u^p и z^p к соответствующим им внешним циклам $I^{-1}u^p$ и $I^{-1}z^p = \{z^p_\tau\}$. При этом ∇-цикл $I^{-1}u^p$ лежит на триангуляции τ некоторой окрестности λ множества A. Скалярное произведение $I^{-1}u^p \cdot I^{-1}z^p$ определено (на триангуляции τ) и

$$I^{-1}u^p \cdot I^{-1}z^p = u^p \cdot z^p. \tag{1}$$

В самом деле, мы всегда можем взять в качестве α, служащего для определения скалярного произведения $u^p \cdot z^p$, некоторое каноническое покрытие*, а в качестве τ — триангуляцию канонической окрестности, ретрагирующейся посредством непрерывного отображения f) на нерв α. Тогда один и тот же цикл z^p_τ может рассматриваться и как элемент z^p_α проекционного цикла z^p и как элемент z^p_λ скользящего цикла $I^{-1}z^p$. Что касается ∇-цикла $I^{-1}u^p$, то можно написать $I^{-1}u^p = \overline{f}u^p$, понимая под $\overline{f}$ оператор, сопряженный оператору непрерывного отображения f. Но тогда

$$u^p \cdot z^p_\tau = \overline{f}u^p \cdot z^p_\tau,$$

что и означает равенство (1).

∇-циклу $I^{-1}u^p$ соответствует звездный Δ-цикл $DI^{-1}u^p$, лежащий на комплексе барицентрических звезд триангуляции τ и имеющий с циклом z^p_τ пересечение, равное скалярному произведению $I^{-1}u^p \cdot z^p_\tau$.

Цикл $\Gamma DI^{-1}u^p = \{z^q_k,\ x^{q+1}_k\}$ получается из цикла $DI^{-1}u^p$ следующим образом: берется возрастающая последовательность конечных подкомплексов τ_k.

---

* Определение канонического покрытия и канонической окрестности можно найти в [1], стр. 34.

триангуляции τ и z_k^q определяются как границы кусков w_k цикла $DI^{-1}u^p$, лежащих на комплексах τ_k. Поэтому для достаточно больших k имеем:

$$DI^{-1}u^p \times z_\tau^p = w_k \times z_\tau^p = \mathfrak{v}(z_k^q;\ z_\tau^p)$$

и, следовательно,

$$u^p \cdot z^p = \mathfrak{v}(z_k^q;\ z_\tau^p).$$

Лемма доказана.

§ 2. Формулировка и доказательство второго закона двойственности

1. Определение групп $N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$; двойственность $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A}) \mid \overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$. На каждом покрытии α множества A рассмотрим основанную на бесконечных цепях ∇-группу $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$ по дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$ и основанную на конечных цепях Δ-группу $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ по бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$, но без всякой топологии. В группе $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$ выделим подгруппу $N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, состоящую из элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$; в группе $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ выделим подгруппу $N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, состоящую из элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$. Каждый элемент группы $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ есть характер группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, причем разные элементы являются разными характерами. Следовательно, группа $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ лежит в бикомпактной группе характеров $\overline{\delta}^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$. Докажем, что она там всюду плотна. Для этого достаточно доказать, что аннулятор ее замыкания есть нуль. Но мы увидим даже, что для любого отличного от нуля элемента $\xi \in \nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$ можно найти характер $\eta \in \Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, принимающий на ξ отличное от нуля значение. Это последнее утверждение следует из того, что, раз $\xi \neq 0$, значит для всякого $x \in \xi$ найдется такой элемент $y \in \Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, что $x \cdot y \neq 0$. Обозначая через η класс смежности, содержащий элемент y, видим, что $\xi \cdot \eta = x \cdot y \neq 0$. Утверждение доказано.

В прямом ∇-спектре множества A

$$\{\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A});\ \pi_\beta^\alpha\} \tag{1}$$

подгруппы $N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, в силу включений

$$\pi_\beta^\alpha N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) \subseteq N_\nabla^p(\beta;\ \mathfrak{A}),$$

образует подспектр, предельную группу которого мы и обозначим через $N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$. Можно говорить и о спектре, образованном фактор-группами $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, с проекциями, естественно определяемыми проекциями из (1) (и поэтому обозначенными также через π_β^α). Легко видеть, что предельная группа спектра

$$\{\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A});\ \pi_\beta^\alpha\}$$

есть $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$.

Группы $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$, естественно, объединяются в обратный спектр. В самом деле, при $\beta > \alpha$ проекция ϖ^β_α группы $\Delta^p(\beta; \mathfrak{B})$ в группу $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$ есть гомоморфизм, причем

$$\varpi^\beta_\alpha N^p_\Delta(\beta; \mathfrak{B}) \subseteq N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B}),$$

так что определен и непрерывный гомоморфизм группы $\Delta^p(\beta; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\beta, \mathfrak{B})$ в $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, обозначаемый также через ϖ^β_α. Этот гомоморфизм, распространенный по непрерывности на группу $\overline{\delta}^p(\beta; \mathfrak{B})$, дает нам искомую проекцию ϖ^β_α группы $\overline{\delta}^p(\beta; \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$. Предельная группа так определенного спектра

$$\{\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B}); \varpi^\beta_\alpha\}$$

есть группа $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$. Так как группы $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$ двойственны между собой, а гомоморфизмы π^α_β и ϖ^β_α являются сопряженными, то группы $\nabla^p(A; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ также двойственны между собой.

2. Определение группы $H^q(B; \mathfrak{A})$. Скажем, что сильный Δ-цикл $\{z^q_k, x^{q+1}_k\}$ множества B слабо гомологичен нулю в этом множестве, если на некотором компакте $\Psi \subseteq B$ существуют такие ε_k-цепи y^{q+1}_k, $\varepsilon_k \to 0$, что $\Delta y^{q+1}_k = z^q_k$. Группа $H^q(B; \mathfrak{A})$ определяется как подгруппа группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$, состоящая из тех ее гомологических классов, элементы которых суть Δ-циклы, слабо гомологичные нулю в B.

Каждому Δ-циклу $z^q = \{z^q_k, x^{q+1}_k\}$ соответствует виеторисовский цикл $\{z^q_k\}$, и этим, очевидно, определяется гомоморфное отображение группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ на группу $\Delta^q_c(B; \mathfrak{A})$. Так как ядром этого гомоморфизма является группа $H^q(B; \mathfrak{A})$, то мы имеем изоморфизм:

$$\Delta^q_c(B; \mathfrak{A}) = \Delta^q(B; \mathfrak{A}) - H^q(B; \mathfrak{A}).$$

3. Формулировка второго закона двойственности.

Теорема. *При изоморфизме M, составляющем содержание первого закона двойственности, группа $\nabla^p(A; \mathfrak{A})$ отображается на группу $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ так, что при этом группа $N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$ отображается на группу $H^q(B; \mathfrak{A})$.*

Следовательно, имеем изоморфизм и фактор-групп

$$\nabla^p(A; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{A}) = \Delta^q(B; \mathfrak{A}) - H^q(B; \mathfrak{A}) = \Delta^q_c(B; \mathfrak{A}),$$

а так как

$$\nabla^p(A; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{A}) \mid \overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}),$$

то

$$\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta^q_c(B; \mathfrak{A}). *$$

* Эта двойственность для частного случая, когда B замкнуто, следует из общего закона двойственности П. С. Александрова, так как в этом случае $\Delta^q_c(B; \mathfrak{A}) = \delta^q(B; \mathfrak{A})$. Общий случай может быть получен из этого частного путем предельного перехода по спектру (см. [8]).

Замечание. Элементы группы $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ суть нити $\zeta^p = \{\zeta^p_\alpha\}$. Среди этих нитей можно различать «истинные» нити, в которых $\zeta^p_\alpha \in \Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, и «идеальные», в состав которых входят идеальные элементы групп $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$, не содержащиеся в группах $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, а предельные для них.

Для каждой истинной нити ζ^p и каждого Δ-цикла z^q, $p+q=n-1$, множества B совершенно естественно определяется коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\zeta^p; z^q)$. Пусть теперь ζ^p — идеальная нить, а z^q — по-прежнему Δ-цикл в B по области коэффициентов $\mathfrak{A}$. Существует такое α, что в достаточно малой окрестности $O\zeta^p_\alpha$ элемента ζ^p_α все $\zeta^p_\alpha \in \Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, лежащие в этой окрестности, имеют определенные коэффициенты зацепления, мало отличающиеся друг от друга. Поэтому по непрерывности определен коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\zeta^p_\alpha; z^q)$. Можно убедиться в том, что этот коэффициент зацепления не зависит от выбора α, поэтому его естественно назвать коэффициентом зацепления $\mathfrak{v}(\zeta^p; z^q)$ нити ζ^p с циклом z^q.

При этом определении зацепления двойственность $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta^q_c(B; \mathfrak{A})$, содержащаяся во втором законе двойственности, становится двойственностью зацепления, а подгруппа $H^q(B; \mathfrak{A})$ группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ — группой незацепляемости при зацеплении элементов группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ с элементами группы $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$.

Аналогично можно определить и скалярное произведение элементов группы $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ с элементами группы $\nabla^p(A; \mathfrak{A})$. При этом элементы подгруппы $N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$ характеризуются тем, что их скалярное произведение со всеми элементами группы $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ равно нулю.

Лемма § 1 остается в силе, если в ее формулировке под проекционным циклом понимать идеальный цикл.

4. Доказательство второго закона двойственности. Случай открытого множества A. Доказательство второго закона двойственности начнем со случая, когда A открыто, следовательно, $B = \mathcal{M}^n \setminus A$ замкнуто.

Пусть τ — триангуляция множества A. Для этого случая первый закон двойственности устанавливает изоморфизм M между группами $\nabla^p\tau$ и $\Delta^q B$. Применим лемму § 1 о связи первого закона двойственности с зацеплениями. Она утверждает, что для $\xi \in \nabla^p\tau$ и $\eta \in \Delta^p\tau$ имеет место равенство $\xi\cdot\eta = \mathfrak{v}(M\xi; \eta)$. Поэтому при изоморфизме M между $\nabla^p\tau$ и $\Delta^q B$ подгруппа $N_\nabla\tau$ переходит в подгруппу группы $\Delta^q B$, состоящую из элементов, имеющих нулевой коэффициент зацепления со всеми $\eta \in \Delta^p\tau$. Докажем, что эта подгруппа и есть подгруппа $H^q B$, состоящая из классов цикла, слабо гомологичных нулю в B. Действительно, из того, что цикл $M\xi$ имеет нулевой коэффициент зацепления со всеми $\eta \in \Delta^p\tau$, следует, что он гомологичен нулю вне любого конечного подкомплекса τ_k триангуляции τ, так как в противном случае он мог бы быть зацеплен циклом из τ_k. Но, раз $M\xi$ гомологичен нулю в любой окрестности B, значит он слабо гомологичен нулю в B. С другой стороны, если $M\xi \in H^q B$, то он гомологичен нулю в любой окрестности B и, значит, имеет нулевой коэффициент зацепления с любым $\eta \in \Delta^p\tau$. Итак, мы доказали следующее предложение:

Лемма 1. *В случае открытого A при изоморфизме M между группами $\nabla^p B$ и $\Delta^q B$ подгруппа $N^p_\nabla A$ переходит в подгруппу $H^q B$.*

5. Общий случай. Переходим к общему случаю произвольного множества $A \subseteq \mathcal{M}^n$. Пусть α — каноническое покрытие множества A, а $\lambda = \bar{\tau}$ — каноническая окрестность, ретрагирующаяся на нерв α; полагаем $\psi = \mathcal{M}^n \setminus \lambda \subseteq B$. Как уже говорилось в § 1, при естественных изоморфизмах

$$\nabla^p \alpha = \nabla^p \tau,$$

$$\Delta^p \alpha = \Delta^p \tau$$

скалярное произведение сохраняется. Отсюда следует, что при изоморфизме между $\nabla^p \lambda$ и $\nabla^p \alpha$ подгруппа $N^p_\nabla \lambda$ переходит в подгруппу $N^p_\nabla \alpha$. Отсюда и из леммы 1 вытекает следующая

Лемма 2. *При естественном изоморфизме между группами $\nabla^p \alpha$ и $\Delta^q \psi$ осуществляется изоморфизм между подгруппами $N^p_\nabla \alpha$ и $H^q \psi$.*

Возьмем изоморфные спектры, участвующие в спектральном законе двойственности главы 2 работы [1]. Первый спектр

$$\{\nabla^p \alpha;\ \pi^\alpha_\beta\}$$

образуется из групп канонических покрытий α множества A. Второй спектр

$$\{\Delta^q \psi;\ E^\psi_{\psi'}\}$$

образован из компактов ψ, дополнительных к каноническим окрестностям множества A. В этих спектрах выделяем изоморфные, в силу леммы 2, группы $N^p_\nabla \alpha$ и $H^q \psi$, которые, как легко видеть, также образуют два изоморфных спектра. Их предельными группами и являются как раз группы $N^p_\nabla A$ и $H^q B$ которые, таким образом, изоморфны в силу основного изоморфизма M между группами $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$. Теорема доказана.

§ 3. Связь с законом двойственности П. С. Александрова

Определения и теорема настоящего параграфа аналогичны определениям и теореме предыдущего параграфа, только области коэффициентов — бикомпактная и дискретная меняются местами. А именно, в предыдущем параграфе ∇-группы, определенные с помощью покрытий, брались по дискретным областям коэффициентов и была определена бикомпактная проекционная группа $\bar{\delta}$ по бикомпактной области коэффициентов; в настоящем параграфе ∇-группы на покрытиях берутся по бикомпактной, а проекционные группы δ — по дискретной областям коэффициентов. Группы Δ с компактными носителями в предыдущем параграфе рассматривались по дискретной области коэффициентов; в настоящем же параграфе они берутся по бикомпактной области коэффициентов, и, как доказано в работе [1] (стр. 39), они совпадают с группой Δ_c.

1. Определение группы $N^p_\nabla(A, \mathfrak{B})$; двойственность $\nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B}) \mid \delta^p(A; \mathfrak{A})$. Эта группа определяется как подгруппа груп-

пы $\nabla^p(A; \mathfrak{B})$, состоящая из тех ее элементов, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми элементами проекционной группы $\delta(A; \mathfrak{A})$. Группу $\nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B})$ можно топологизировать как подгруппу характеров группы $\delta^p(A; \mathfrak{A})$. Тогда по теореме Чогошвили* ее пополнение будет группой характеров группы $\delta^p(A; \mathfrak{A})$.

2. Определение группы $N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})$. Это есть группа незацепляемости, введенная П. С. Александровым в его работе [7]. Она определяется как подгруппа группы $\Delta^q(B; \mathfrak{B})$, состоящая из тех ее элементов, которые имеют нулевой коэффициент зацепления со всеми элементами группы $\delta^p(A; \mathfrak{A})$.

Это определение, имеющее неинвариантную форму, на самом деле инвариантно, т. е. группа $N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})$ есть топологический инвариант множества B. Это известно из работы П. С. Александрова [7] и легко следует из спектрального закона двойственности, доказанного во второй главе работы [1].

3. Теорема. *При изоморфизме M, составляющем содержание первого закона двойственности, группа $\nabla^p(A; \mathfrak{B})$ отображается на группу $\Delta^q(B; \mathfrak{B})$ так, что при этом подгруппа $N^p_\nabla(A; \mathfrak{B})$ отображается на подгруппу $N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})$.*

Доказательство сразу следует из леммы § 1 о связи первого закона двойственности с зацеплениями.

Из этой теоремы, очевидно, следует, что и фактор-группы

$$\nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B}) \text{ и } \Delta^q(B; \mathfrak{B}) - N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})$$

изоморфны между собой. Этот изоморфизм, как следует из спектрального закона двойственности, оказывается топологическим, если в этих группах ввести естественную топологию при помощи сопряженного спектра. Этот изоморфизм переносится на бикомпактные пополнения этих групп

$$\overline{\nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B})} \text{ и } \overline{\Delta^q(B; \mathfrak{B}) - N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})}.$$

Но группа $\overline{\nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B})}$, а значит и группа $\overline{\Delta}^q(B; \mathfrak{B}) =$

---

* Речь идет о следующей теореме Чогошвили:

Пусть дан прямой спектр $\{Y_\alpha; \pi^\alpha_\beta\}$ бикомпактных и сопряженный ему обратный спектр $\{X_\alpha; \tilde{\omega}^\beta_\alpha\}$ дискретных групп. Обозначим через Y_0 подгруппу алгебраической предельной группы $Y = \lim\limits_{\longrightarrow} \{Y_\alpha; \pi^\alpha_\beta\}$, состоящую из тех элементов, скалярное произведение которых со всеми элементами группы $X = \lim\limits_{\longleftarrow}\{X_\alpha; \tilde{\omega}^\beta_\alpha\}$ равно нулю. Тогда фактор-группа $Y' = Y - Y_0$ есть всюду плотная подгруппа группы характеров X^* группы X.

Доказательство теоремы Чогошвили. Пусть группа Y' (будучи, очевидно, некоторым множеством характеров группы X) не является всюду плотным подмножеством группы X^* всех характеров группы X. Тогда аннулятор (в группе X), замыкания множества Y' (в X^*), будучи группой характеров ненулевой фактор-группы, был бы также отличен от нуля. Следовательно, нашлась бы нить $x = \{x_\alpha\} \neq 0$, имеющая нулевое скалярное произведение со всей группой Y'. Но если взять какой-либо элемент x_α, не равный нулю, и к нему подобрать такой элемент $y_\alpha \in Y_\alpha$, что, $x_\alpha \cdot y_\alpha \neq 0$, то определенный этим y_α элемент $y \in Y'$ имеет с x отличное от нуля скалярное произведение. Полученное противоречие доказывает теорему Чогошвили.

$\overline{= \Delta^q (B; \mathfrak{B}) — N^q_\Delta (B; \mathfrak{B})}$, двойственна группе $\delta^p (A; \mathfrak{A})$, что и дает нам первую форму закона двойственности П. С. Александрова, а именно двойственность зацепления:

$$\delta^p (A; \mathfrak{A}) \mid \overline{\Delta}^q (B; \mathfrak{B}).$$

§ 4. Другие подгруппы, соответствующие друг другу при изоморфизме двойственности M

1. Определение групп $N_{\Delta c}$. Каждому Δ-циклу с компактным носителем по дискретной или по бикомпактной области коэффициентов произвольного множества A соответствует проекционный Δ-цикл. Таким образом, определены гомоморфизмы вложения групп $\Delta^p(A; \mathfrak{A})$ и $\Delta^p(A; \mathfrak{B})$ в группы $\delta^p (A; \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p (A; \mathfrak{B})$. Ядра этих гомоморфизмов и обозначаются через $N^p_{\Delta c}(A; \mathfrak{A})$ и $N^p_{\Delta c}(A; \mathfrak{B})$. Докажем, что они состоят из элементов, имеющих нулевые коэффициенты зацепления со всеми циклами с компактными носителями дополнительного множества B. Действительно, так как при гомоморфизме вложения коэффициент зацепления сохраняется, то всякий элемент группы с компактными носителями, перешедший в нулевой элемент проекционной группы, имеет, как и этот последний, нулевой коэффициент зацепления со всеми циклами дополнения. С другой стороны, если элемент группы с компактными носителями имеет нулевой коэффициент зацепления со всеми циклами с компактными носителями дополнения, то он не может перейти в ненулевой элемент проекционной группы, так как с таким элементом зацеплен ненулевой элемент группы с компактными носителями. Утверждение доказано.

2. Определение групп $N_{\nabla c}$. Группы $N^p_{\nabla c}(A; \mathfrak{A})$ и $N^p_{\nabla c}(A; \mathfrak{B})$ определяются как подгруппы групп $\nabla^p (A; \mathfrak{A})$ и $\nabla^p (A; \mathfrak{B})$, состоящие из тех элементов, которые имеют нулевые скалярные произведения со всеми элементами группы $\overline{\delta}^p (A; \mathfrak{B})$, соответственно $\delta^p (A; \mathfrak{A})$.

3. Теорема. *При изоморфизме M, составляющем содержание первого закона двойственности, группа $\nabla^p A$ отображается на группу $\Delta^q B$ так, что при этом подгруппа $N^p_{\nabla c} A$ отображается на подгруппу $N^q_{\Delta c} B$.*

Доказательство сразу следует из леммы § 1 о связи первого закона двойственности с зацеплениями.

§ 5. Общий итог: теорема об изоморфизме двойственности

Все рассмотренные четырнадцать групп можно расположить в центрально-симметричную таблицу, в которой слева — группы по бикомпактной области коэффициентов, а справа — по дискретной:

$$\begin{array}{lcl}
 & & \qquad\quad \delta^q B \\
 & & \qquad\quad \uparrow \\
N^q_\nabla B \subseteq N^q_{\nabla c} B \subseteq \nabla^q B & \qquad & \overline{\Delta^q B \supseteq N^q_{\Delta c} B} \supseteq H^q B \\
 & & \\
N^p_\Delta A \subseteq \underline{N^p_{\Delta c} A \subseteq \Delta^p A} & \qquad & \nabla^p A \supseteq N^p_{\nabla c} A \supseteq N^p_\nabla A. \\
\qquad\quad \downarrow & & \\
\qquad\quad \overline{\delta}^p A & &
\end{array}$$

Группы, стоящие по одной вертикали, изоморфны (за исключением групп δ и $\overline{\delta}$). Кроме того, имеются указанные ниже двойственноси (они обозначены вертикальной чертой, а горизонтальная жирная черта обозначает переход к бикомпактному пополнению; топологизируются эти группы как подгруппы групп характеров стоящих справа групп):

$$\overline{\delta}^p A \mid \nabla^p A - N^p_\nabla A, \quad \overline{\nabla^q B - N^q_\nabla B} \mid \delta^q B, \quad \overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla c} B} \mid \Delta^q B - N^q_{\Delta c} B.*$$

§ 6. Квазиоткрытые и квазизамкнутые множества; области двойственности

Закон двойственности Понтрягина, утверждающий двойственность групп Бетти с компактными носителями открытого и дополнительного к нему замкнутого множества, не может быть распространен на случай произвольных множеств. Полученные нами общие теоремы двойственности позволяют получить необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество, чтобы для него и для его дополнения выполнялась теорема Понтрягина.

1. Квазиоткрытые множества. Назовем множество $A \subseteq S^n$ квазиоткрытым, если группа $\Delta^p_c(A; \mathfrak{A})$ по любой дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$ для любой размерности p двойственна в смысле зацеплений с надлежащим образом топологизированной группой $\Delta^q_c(B; \mathfrak{B})$ дополнительного множества $\mathfrak{B}$.

Это определение, имеющее неинвариантную форму, на самом деле инвариантно, а потому множество A, квазиоткрытое в данном S^n, будет квазиоткрытым и при любом топологическом включении в любое $S^{n'}$.

Инвариантная характеристика квазиоткрытых множеств состоит в следующем: множество A тогда и только тогда квазиоткрыто, когда имеет место двойственность

$$\Delta^p_c(A; \mathfrak{A}) \mid \nabla^p(A; \mathfrak{B})$$

для всех p и всех областей коэффициентов, осуществляемая скалярным умножением; при этом группа $\nabla^p(A; \mathfrak{B})$ берется в надлежащей топологии.

Доказательство этого утверждения сразу следует из первого закона двойственности, в силу которого группа $\nabla^p(A; \mathfrak{B})$ изоморфна группе $\Delta^q(B; \mathfrak{B})$, которая в нашем случае компактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$ совпадает с группой $\Delta^q_c(B; \mathfrak{B})$.

---

* Обозначим через h естественный гомоморфизм вложения группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ в $\delta^q(B; \mathfrak{A})$, имеем из последних двух двойственностей:

$$\overline{N^q_{\nabla c}(B; \mathfrak{B}) - N^q_\nabla(B; \mathfrak{B})} = \delta^q(B; \mathfrak{A}) - h\Delta^q(B; \mathfrak{A}) = \mathfrak{M}^q(B; \mathfrak{A}),$$

т. е. группа $\mathfrak{M}^q(B; \mathfrak{A})$ дуализируема. Простой пример, построенный Мищенко [9], показывает, что эта группа может быть отлична от нуля. Аналогичное утверждение справедливо и при вложении группы $\Delta^q(B; \mathfrak{B})$ в $\overline{\delta}^q(B; \mathfrak{B})$. Эти результаты были получены П. С. Александровым в [10].

2. Квазизамкнутые множества. Назовем множество $A \subseteq S^n$ квазизамкнутым, если группа $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ по любой бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$ для любой размерности p, взятая в надлежащей топологии, двойственна в смысле зацепления с группой $\Delta_c^q(B; \mathfrak{A})$ дополнительного множества B.

Инвариантная характеристика квазизамкнутых множеств состоит в следующем: естественный гомоморфизм вложения группы $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ есть изоморфизм на всю группу.

Доказательство. По второму закону двойственности имеем:

$$\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{A}).$$

Эта двойственность есть двойственность зацепления. Поэтому требование двойственности зацепления

$$\Delta_c^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{A})$$

эквивалентно тому, чтобы группы $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ и $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ не только были изоморфны, но чтобы этот изоморфизм осуществлялся тем естественным гомоморфизмом вложения группы $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$, о котором говорилось выше.

3. Области двойственности. Очевидно, что множества квазиоткрытые и квазизамкнутые взаимно дополнительны.

Множества, одновременно квазиоткрытые и квазизамкнутые, составляют максимальную элементарную область двойственности в смысле П. С. Александрова, т. е. совокупность всех множеств во всевозможных S^n, для которых при любых $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ и $p+q=n-1$ имеют место двойственности

$$\Delta_c^p(A; \mathfrak{A}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{B}),$$

$$\Delta_c^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{A})$$

(группы по $\mathfrak{B}$ всегда берутся в надлежащей топологии).

В доказанном выше содержится, таким образом, инвариантная характеристика этой максимальной области двойственности.

Замечание. Несимметричность, имеющаяся в характеристике квазиоткрытых и квазизамкнутых множеств, проистекает от того, что группы Δ и Δ_c связаны друг с другом по-разному в случае бикомпактной и дискретной областей коэффициентов: в первом случае они совпадают, а во втором, для того чтобы получить группу Δ_c, нужно группу Δ профакторизовать по подгруппе H, являющейся аналогом подгруппы незацепляемости в случае дискретной области коэффициентов (вопрос об этом был поставлен в [1], стр. 45). Если определить квазиоткрытые и квазизамкнуые множества с группами Δ, то их характеристики получатся симметричными. Соответствующая этому определению область двойственности построена в [1] (стр. 49).

Содержание настоящей работы кратко изложено в [11] и [12].

(Поступило в редакцию 9/X 1957 г.)

Литература

1. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств. I, Матем. сб., **34** (**76**) (1954), 3—54.
2. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств. II, Матем. сб., **37** (**79**) (1955), 385—434.
3. П. С. Александров, Недуализируемость групп Бетти, основанных на конечных покрытиях, ДАН СССР, т. **105**, № **1** (1955), 5—6.
4. П. С. Александров, Исправление заметки «Недуализируемость групп Бетти, основанных на конечных покрытиях», ДАН СССР, т. **107**, № **3** (1956), 357—358.
5. П. С. Александров, О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств, Изв. АН СССР, серия матем. т. **6**, № **5** (1942), 227—282.
6. А. Тынянский, О распространении закона двойственности Ситникова на случай множеств, лежащих в многообразиях, не удовлетворяющих условиям ацикличности, Ученые записки МГУ, т. **10** (1959).
7. П. С. Александров, Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств n-мерного пространства, Матем. сб., **21** (**63**) (1947), 161—232.
8. Н. А. Берикашвили, О теоремах двойственности для произвольных множеств, Сообщ. АН ГрузССР, т. **15**, № **7** (1954), 407—414.
9. Е. Ф. Мищенко, О некоторых вопросах комбинаторной топологии незамкнутых множеств, Матем. сб., **32** (**74**) (1953), 219—224.
10. П. С. Александров, О некоторых следствиях второго закона двойственности Ситникова, ДАН СССР, т. **96**, № 5 (1954), 885—889.
11. К. А. Ситников, Новые соотношения двойственности для незамкнутых множеств, ДАН СССР, т. **96**, № 5 (1954), 925—928.
12. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств, Чехослов. матем. журн., т. **6** (**81**) (1956), 444—449.

О метрической размерности точечных множеств *

В. И. Егоров (Москва)

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию понятия метрической размерности, представляющего собой некоторый аналог понятия обычной топологической размерности $\dim M$**.

Метрическая размерность данного точечного множества M есть наименьшее число r такое, что существует сколь угодно малый сдвиг множества M в локально конечный полиэдр размерности r. Метрическую размерность множества M мы будем обозначать через $\mathrm{dm}\, M$.

Еще в 1926 г. П. С. Александровым была доказана одна из основных теорем теории размерности, так называемая теорема об ε-сдвигах [1]. Эта теорема утверждает, что для всякого компакта Φ эвклидова пространства имеет место равенство $\mathrm{dm}\, \Phi = \dim \Phi$. К. А. Ситников построил пример множества $M \subset E^3$, для которого $\dim M = 2$, а $\mathrm{dm}\, M = 1$ [2], решив тем самым проблему, поставленную П. С. Александровым в 1935 г. Таким образом, в случае произвольного $M \subset E^n$ можно только утверждать, что выполняется неравенство $\mathrm{dm}\, M \leqslant \dim M$. Равенство $\mathrm{dm}\, M = \dim M$ выполняется также и для множеств $M \subset E^n$, для которых $\dim M = \dim [M]$. (Этот результат весьма сложным путем получен К. А. Ситниковым [2].) Отсюда и из того, что любое точечное множество можно топологически вложить в компакт той же размерности (теорема Гуревича [3]), следует, что метрическая размерность не является топологическим инвариантом. Но метрическая размерность сохраняется при так называемых равномерных гомеоморфизмах, т. е. при взаимно однозначных и в обе стороны равномерно непрерывных отображениях. Это легко вытекает из следующего определения метрической размерности:

Метрической размерностью метрического пространства R называется наименьшее число r такое, что при любом $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие пространства R кратности $r+1$, каждый элемент которого по диаметру меньше ε.

Следует заметить, что это определение пригодно для любых метрических пространств. Ю. М. Смирнов в работе [4] показывает, что аналогичное определение метрической размерности с помощью локально конечных (а для пространств со счетной базой — звездно-конечных) покрытий дает тот же класс метрических пространств, что и приведенное выше определение. Для точечных

* Здесь везде под точечными множествами понимаются множества эвклидовых пространств.

** Топологической размерностью множества M называется наименьшее число n такое, что в любое конечное открытое покрытие множества M можно вписать конечное открытое покрытие кратности $n+1$.

множеств Ю. М. Смирновым в той же работе была доказана равносильность этого определения с определением метрической размерности с помощью ε-сдвигов в полиэдры.

Большая часть первого раздела настоящей работы посвящена характеристикам метрической размерности с помощью так называемых лебеговых покрытий *.

Теорема 1. *Пусть R — произвольное метрическое пространство; $\operatorname{dm} R \leqslant r$ в том и только в том случае, если во всякое лебегово покрытие пространства R можно вписать открытое покрытие кратности, меньшей или равной $r+1$.*

Этот результат применяется в работе при доказательстве основных теорем. Здесь также доказано, что для определения метрической размерности множества M пространства E^n достаточно открытых покрытий, локально конечных в этом пространстве ** (теорема 2).

Основным результатом второго раздела работы является так называемая теорема о существенных отображениях [5], состоящая в следующем:

Теорема 7. *Пусть $M \subset E$. Тогда $\operatorname{dm} M$ есть наибольшее число r такое, что существует равномерно непрерывное существенное отображение множества M в r-мерный замкнутый симплекс.* (Существенность отображения здесь обычная, т. е. определенная с помощью допустимых непрерывных деформаций.)

Эта теорема выводится из ряда более специальных результатов, формулировка которых требует дополнительных определений.

Следуя Ю. М. Смирнову [6], назовем триангуляцию K равномерной, если эта триангуляция удовлетворяет следующим двум условиям:

1. Длины всех ребер триангуляции K меньше некоторого фиксированного числа l.

2. Расстояние между любыми двумя не имеющими общих вершин симплексами триангуляции K больше некоторого h, где $h > 0$.

Отображение f множества M в триангуляцию K назовем r-существенным, если r — наибольшее число такое, что в триангуляции K найдется r-мерный замкнутый симплекс T^r, на прообразе $f^{-1}(T^r)$ которого отображение f — существенное.

Сформулированная выше теорема о существенных отображениях выводится из следующего предложения:

Для всякого точечного множества M метрической размерности r существует равномерно непрерывное r-существенное отображение этого множества в некоторую равномерную триангуляцию, и всякое равномерно непрерывное отображение множества M в равномерную триангуляцию будет r'-существенным, причем $r' \leqslant r$ (теоремы 5 и 6).

В той же части работы в качестве следствий из теоремы 7 приведены, в частности, такие результаты:

---

* Открытое покрытие λ метрического пространства R назовем **лебеговым покрытием**, если для некоторого $\eta > 0$ существует покрытие пространства R множествами M_γ такое, что покрытие пространства R окрестностями $O(M_\gamma, \eta)$ вписано в покрытие λ.

** См. сноску** на стр. 231.

Теорема 8. *Метрическая размерность точечного множества M есть наименьшее из чисел r таких, что всякое равномерно непрерывное отображение f произвольного (замкнутого) подмножества A множества M в r-мерную сферу можно продолжить до непрерывного отображения в эту сферу всего множества M.*

Теорема 10. *Пусть A_i, B_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ — любые удовлетворяющие условию $\rho(A_i, B_i) > 0$ пары замкнутых подмножеств точечного множества M. Метрическая размерность точечного множества M не превосходит r в том и только в том случае, если существуют замкнутые множества $\Phi_i \subset M$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Φ_i разделяет множества A_i и B_i $(i = 1, \ldots, r+1)$.*
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$.

В третьем и последнем разделе работы строится гомологическая характеристика метрической размерности с помощью так называемых равномерных ∇-циклов *.

Пусть дано метрическое пространство R. Рассмотрим множество всевозможных звездно-конечных покрытий этого пространства. Из этого множества выделим всевозможные подмножества таким образом, чтобы, во-первых, в каждое из выделенных подмножеств вошли покрытия одной кратности и чтобы, во-вторых, каждое подмножество содержало сколь угодно мелкие покрытия. Поставив в соответствие каждому такому подмножеству номер—кратность входящих в него покрытий, выберем подмножество с наименьшим номером. Покрытия пространства R вошедшие в это подмножество, мы будем называть основными.

Пусть A — какое-нибудь множество пространства R. Рассмотрим какой-нибудь равномерный ∇-цикл Z множества A, т. е. какой-нибудь ∇-цикл нерва некоторого лебегова покрытия λ этого множества. Мы будем говорить, что цикл Z можно продолжить на пространство R, если среди основных покрытий пространства R найдется покрытие $\alpha = \{O_i\}$, удовлетворяющее следующим двум требованиям:

1. Множества $O_i \cap A$ составляют покрытие множества A, вписанное в покрытие λ.

2. Проекция Π_α^λ цикла Z в комплекс α продолжаема до ∇-цикла всего комплекса α (в данном случае мы не делаем различия в обозначении покрытий и их нервов).

Теорема 11. *Если метрическая размерность пространства R равна r и A — произвольное множество, входящее в R, то всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все пространство R.*

Здесь же доказано и обратное предложение:

Теорема 13. *Если A — произвольное замкнутое подмножество точечного множества M и всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все множество M, то метрическая размерность множества M меньше или равна r.*

---

* Равномерным ∇-циклом данного множества мы будем называть всякий ∇-цикл, определенный на нерве некоторого лебегова покрытия этого множества.

Доказательство этого предложения опирается на доказанную здесь же теорему, представляющую собой аналог известной теоремы Хопфа и состоящую в следующем:

Теорема 12. *Пусть $A \subset R$ — замкнутое в R множество и* $\dim R = n+1$. *Для того чтобы равномерно непрерывное отображение f множества A в сферу S^n можно было продолжить до непрерывного отображения в S^n всего пространства R, необходимо и достаточно, чтобы степень отображения f^* можно было также продолжить на все пространство R.*

I. Характеристика метрической размерности с помощью покрытий и сдвигов в полиэдры

Определение 1. *Метрической размерностью пространства R называется неотрицательное число r такое, что при любом числе $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие пространства R кратности $r+1$, каждый элемент которого имеет диаметр меньше ε, и при некотором $\varepsilon > 0$ всякое открытое ε-покрытие этого пространства имеет кратность, большую или равную $r+1$.*

§ 1. В настоящем параграфе приводится характеристика метрической размерности с помощью так называемых лебеговых покрытий.

Прежде всего дадим определение лебегова покрытия метрического пространства.

Определение 2. *Открытое покрытие λ метрического пространства R назовем лебеговым покрытием, если для некоторого числа $\eta > 0$ существует покрытие пространства R множествами A_γ такое, что покрытие пространства R окрестностями $O(A_\gamma, \eta)$ вписано в покрытие λ. Число η будем называть лебеговым числом покрытия λ.*

С помощью этого определения сформулируем свойство метрических пространств, эквивалентное свойству, выраженному определением 1.

Теорема 1. *Метрическая размерность пространства R меньше или равна r ($\dim \leqslant r$) в том и только в том случае, если в любое лебегово покрытие этого пространства можно вписать (даже комбинаторно)** открытое покрытие кратности, меньшей или равной $r+1$.*

Легко видеть, что доказательство достаточности нашего утверждения сводится к доказательству существования лебеговых ε-покрытий, где ε — произвольное положительное число. Пусть дано некоторое положительное число ε. Выберем какое-нибудь положительное число $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, например положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Построим в пространстве R δ-сеть. Для этого, как это обычно делается, выберем в пространстве R какую-нибудь точку x_1. Если x_1 не является δ-сетью, то в R существует точка x_2 такая, что имеет место неравенство $\rho(x_1, x_2) \geqslant \delta$. Если точки x_1 и x_2 не составляют δ-сети пространства R, то в R существует третья точка x_3, удаленная от x_1 и x_2 не меньше чем на δ. Продолжая этот процесс дальше и, если нужно, пользуясь для обозначения

---

* См. стр. 248.

** Пусть покрытие β вписано в покрытие α. Мы будем говорить, что β **комбинаторно вписано в** α, если каждый элемент покрытия α содержит не более одного элемента покрытия β.

новых точек трансфинитными индексами, мы в конце концов построим интересующую нас δ-сеть пространства R. Сферические окрестности $O\left(x_\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центрами в точках x_γ построенной δ-сети и образуют нужное нам лебегово ε-покрытие пространства R. В самом деле, система окрестностей $O(x_\gamma, \delta)$, в силу нашего построения, является покрытием пространства R, причем при любом γ имеет место включение $O(O(x_\gamma, \delta), \eta) \subseteq O\left(x_\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, где $\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} - \delta$ *.

Обратно, пусть открытые множества O_γ составляют некоторое лебегово покрытие λ пространства R и пусть η — лебегово число этого покрытия. Выберем открытое покрытие α пространства R кратности, меньшей или равной $r+1$, каждый элемент которого по диаметру меньше η. (По условию теоремы такое покрытие существует.) Легко видеть, что покрытие α вписано в данное лебегово покрытие λ. Определим открытые множества O'_γ следующим образом: для $\gamma = 1$ положим O'_γ равным сумме всех элементов покрытия α, содержащихся в O_1, а для всех последующих γ определим O'_γ как сумму всех элементов покрытия α, включенных в O_γ и не вошедших ни в одно из множеств $O'_{\gamma'}$, где $\gamma' < \gamma$. Легко видеть, что построенные таким образом множества O'_γ составляют покрытие пространства R, комбинаторно вписанное в покрытие λ и той же кратности, что и покрытие α. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что для определения метрической размерности вполне ограниченных пространств достаточно конечных покрытий. В самом деле, само понятие полной ограниченности метрического пространства предусматривает существование в нем конечной δ-сети при сколь угодно малом δ, а следовательно (это вытекает из приведенного выше доказательства теоремы 1), и существование сколь угодно мелких конечных лебеговых покрытий этого пространства. Так как, согласно теореме 1, во всякое лебегово покрытие пространства R при $\operatorname{dm} R \leqslant r$ можно комбинаторно вписать открытое покрытие кратности, меньшей или равной $r+1$, то мы имеем следующее предложение:

Для всякого вполне ограниченного пространства метрической размерности, меньшей или равной r, при любом $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое ε-покрытие кратности, меньшей или равной $r+1$.

Обратное предложение очевидно.

§ 2. В этом параграфе доказывается теорема, позволяющая определять метрическую размерность точечных множеств с помощью открытых покрытий, локально конечных в эвклидовых пространствах, содержащих эти множества **.

---

* Для доказательства достаточности нашего утверждения вполне можно было бы обойтись лебеговыми покрытиями, образованными шаровыми окрестностями всех точек пространства R. Такое же специальное построение лебеговых покрытий понадобится нам при доказательстве следствия, вытекающего из данной теоремы.

** Система множеств $\{A_\gamma\}$ пространства E^n называется **локально конечной в пространстве** E^n, если каждая точка $x \in E^n$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом A_γ. Следует заметить, что, если система множеств $\{A_\gamma\}$ локально конечна в пространстве E^n, то она будет локально конечна и в любом другом эвклидовом пространстве, содержащем эту систему.

Теорема 2. *Пусть множество M включено в пространство E^n. Метрическая размерность множества M меньше или равна r в том и только в том случае, если при любом $\varepsilon > 0$ существует открытое ε-покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n.*

Достаточность условия теоремы очевидна. Докажем его необходимость.

Пусть имеет место неравенство $\dim M \leqslant r$. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется открытое ε-покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n. Для этого, выбрав в пространстве E^n какую-нибудь ортогональную систему координат с осями $Ox_1, \ldots, Ox_n$, рассмотрим плоскости вида $x_i = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} j$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots)$. Эти плоскости разбивают пространство E^n на равные кубы $V_1, V_2, \ldots$, диаметр каждого из которых равен $\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем η, удовлетворяющее условию $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{4}$, и рассмотрим множества $O_i = O(V_i, \eta)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что O_i составляют лебегово покрытие пространства E^n, локально конечное в этом пространстве, причем диаметр каждого из множеств O_i меньше ε. Рассмотрим множества $O_i \cap M$. Эти множества, очевидно, составляют лебегово покрытие λ множества M, поэтому, согласно теореме 1, существует открытое покрытие α множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, комбинаторно вписанное в покрытие λ. А так как покрытие λ (по построению) — локально конечное в пространстве E^n, то, поскольку α комбинаторно вписано в λ, тем же свойством будет обладать и покрытие α. Теорема доказана.

Применяя эту теорему к ограниченным точечным множествам, можно легко получить следующий результат:

Пусть M — ограниченное множество пространства E^n. Метрическая размерность множества M меньше или равна r в том и только в том случае, если при любом $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое ε-покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$.

Справедливость этого утверждения следует также из результата предыдущего параграфа.

Из теоремы 2 вытекает также (в этом можно легко убедиться, проводя рассуждения § 1), что *метрическая размерность множества $M \subset E^n$ не превосходит r в том и только в том случае, если во всякое лебегово покрытие множества M можно вписать открытое, локально конечное в пространстве E^n покрытие этого множества кратности, меньшей или равной $r+1$.*

§ 3. В настоящем параграфе приводится характеристика метрической размерности с помощью ε-сдвигов в полиэдры.

Результат предыдущего параграфа позволяет доказать для точечных множеств следующее предложение:

Теорема 3. *Пусть M — множество пространства E^n. Для того чтобы метрическая размерность множества M была меньше или равна r, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал ε-сдвиг* *множества M в локально конечный полиэдр* размерности, меньшей или равной r, лежащий в том же пространстве E^n.*

Докажем прежде необходимость, т. е. покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ и при условии $\mathrm{dm}\, M \leqslant r$ существует ε-сдвиг множества M в локально конечный полиэдр $P \subset E^n$ размерности, меньшей или равной $r+1$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Согласно теореме 2, существует открытое ε-покрытие α множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n. Пусть множества $O_1, O_2, \ldots$ — элементы этого покрытия. Выбрав по точке в каждом из множеств O_i $(i=1, 2, \ldots)$, реализуем нерв покрытия α в пространстве E^n (при этом, разумеется, может случиться, что среди симплексов этого нерва окажутся вырожденные). Следует заметить, что система вершин реализованного таким образом нерва покрытия α, так же как и система множеств O_i, локально конечна в пространстве E^n, откуда следует, что и сам этот нерв локально конечен в пространстве E^n. Пусть полиэдр P есть тело построенного нерва покрытия α и пусть φ — барицентрическое отображение множества M в этот полиэдр**. Рассмотрим произвольную точку x множества M. Точка x отображением φ переводится в симплекс, вершинами которого служат точки элементов покрытия α, содержащих эту точку. Так как все элементы покрытия α по диаметру меньше ε, то и расстояние между точками x и $\varphi(x)$ также меньше ε, а это и означает, что отображение φ есть ε-сдвиг. Построенный нерв покрытия α, конечно, может не быть триангуляцией полиэдра P, так как в нем могут встречаться как вырожденные, так и пересекающиеся симплексы. Но каждый из этих симплексов можно подразделить на конечное число более мелких симплексов так, чтобы в конце концов получилась триангуляция полиэдра P. Такая триангуляция будет локально конечной в пространстве E^n, так как локально конечным в пространстве E^n является нерв, подразделением которого служит эта триангуляция.

Теперь докажем достаточность. Пусть при любом положительном ε существует ε-сдвиг множества M в локально конечный полиэдр P размерности, меньшей или равной r.

Покажем, что, каково бы ни было $\sigma > 0$, существует открытое покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше σ.

Пусть σ — произвольное положительное число. Тогда, выбрав положительное $\varepsilon < \frac{\sigma}{3}$, рассмотрим ε-сдвиг множества M в локально конечный полиэдр $P \subset E^n$ размерности, меньшей или равной r. Пусть K — локально конечная триангуляция полиэдра P. Не уменьшая общности, можно считать, что ди-

* Здесь локальная конечность полиэдра понимается в следующем смысле:

Пусть P — полиэдр, лежащий в пространстве E^n. Полиэдр P называется локально конечным, если существует триангуляция полиэдра P такая, что система симплексов этой триангуляции локально конечна в пространстве E^n.

** Возможная вырожденность некоторых симплексов не мешает нам пользоваться понятиями тела комплекса и барицентрического отображения, ибо определение центра тяжести точек не предполагает их линейной независимости.

аметр каждого симплекса этой триангуляции меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначив вершины триангуляции K через $e_1, e_2, \ldots$, рассмотрим звезды Oe_i ($i = 1, 2, \ldots$) всех этих вершин*. Эти звезды составляют открытое локально конечное в пространстве E^n ε-покрытие полиэдра P кратности, меньшей или равной $r+1$ (точнее, кратность этого покрытия на единицу больше размерности полиэдра P). Рассмотрим множества $\varphi^{-1}(Oe_i)$. Диаметр каждого из этих множеств меньше σ, так как для любых двух точек x' и x'' множества $\varphi^{-1}(Oe_i)$ при любом i имеем:

$$\rho(x', x'') \leqslant \rho(x', \varphi(x')) + \rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) + \rho(x'', \varphi(x'')) < 3\varepsilon < \sigma.$$

Кроме того, система множеств $\varphi^{-1}(Oe_i)$ имеет кратность, меньшую или равную $r+1$. Таким образом, мы построили открытое (даже локально конечное в пространстве E^n) покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше σ. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы сразу следует, что *для характеристики метрической размерности ограниченных точечных множеств достаточно рассматривать ε-сдвиги лишь в конечные полиэдры.*

II. Характеристика метрической размерности с помощью равномерно непрерывных отображений

§ 4. В настоящем параграфе определяется понятие так называемой равномерной триангуляции, а также доказывается теорема, устанавливающая свойство равномерной триангуляции, необходимое нам в следующих параграфах.

Определение 3. Следуя Ю. М. Смирнову [6], *назовем триангуляцию K равномерной, если выполняются следующие два условия:*

1. *Длины всех ребер триангуляции K меньше некоторого фиксированного числа l.*

2. *Расстояние между любыми двумя не имеющими общих вершин симплексами триангуляции K больше некоторого $h > 0$.*

Теорема 4. *Если K — равномерная триангуляция полиэдра $\widetilde{K}$, то звезды вершин триангуляции K образуют лебегово покрытие этого полиэдра.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму:

Лемма 1. *Для всех симплексов $T^r \subset E^n$, ребра которых не превосходят некоторого числа l, а высоты** ограничены снизу числом $h > 0$, существует $\varepsilon > 0$, такое, что ε-окрестности граней T_i^{r-1} ($i = 0, 1, \ldots, r$) симплекса T^r не покрывают этого симплекса.*

---

* Звездой вершины e_i триангуляции K называется сумма всех симплексов этой триангуляции, имеющих точку e_i своей вершиной. В настоящей работе рассматриваются открытые симплексы (за исключением тех мест второго раздела, где применение замкнутых симплексов специально оговаривается), поэтому и звезды Oe_i суть открытые множества полиэдра P.

** Под высотой симплекса понимается расстояние от его вершины до плоскости противоположной грани.

Для доказательства этой леммы рассмотрим произвольный r-мерный симплекс T^r. Разобьем его на $r+1$ пирамид с основаниями T_0^{r-1}, T_1^{r-1}, ..., T_r^{r-1} и общей вершиной s, где T_0^{r-1}, T_1^{r-1}, ..., T_r^{r-1} суть $(r-1)$-мерные грани симплекса T^r, а s — центр вписанного в этот симплекс шара. Пусть ρ — радиус шара, вписанного в симплекс T^r. Обозначив через $V(T^r)$ объем симплекса T^r, а через $V(T_i^{r-1})$ $(i=0, 1, \ldots, r)$ — объем его граней, получим, что объемы образовавшихся в результате нашего разбиения пирамид соответственно равны $\frac{\rho}{r} V(T_i^{r-1})$ $(i=0, 1, \ldots, r)$. Отсюда получаем:

$$V(T^r) = \frac{\rho}{r} \sum_{i=0}^{r} V(T_i^{r-1}).$$

Нетрудно также показать, что для объема симплекса T^r и для объемов его граней имеют место следующие оценки:

$$\frac{h^r}{r!} \leqslant V(T^r) \leqslant \frac{l^r}{r!}, \quad \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} \leqslant V(T_i^{r-1}) \leqslant \frac{l^{r-1}}{(r-1)!} \qquad (i=0, 1, \ldots, r),$$

где l — верхняя грань длин ребер симплекса T^r, а h — нижняя грань длин его высот. Пользуясь приведенными оценками, получим:

$$V \leqslant \frac{\rho}{r} (r+1) \frac{l^{r-1}}{(r-1)!},$$

откуда имеем:

$$\frac{\rho}{r} (r+1) \frac{l^{r-1}}{(r-1)!} \geqslant \frac{h^r}{r!}.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\rho \geqslant \frac{h^r}{(r+1)\, l^{r-1}}.$$

Выбрав $\varepsilon < \frac{h^r}{(r+1)\, l^{r-1}}$, заметим, что множества $O(T_i^{r-1}, \varepsilon)$ $(i=0, 1, \ldots, r)$, и даже их замыкания, не покрывают симплекса T^r. А отсюда следует сразу, что если l и h — числа из условия леммы и если выбрать $\varepsilon < \min \frac{h^r}{(r+1) l^{r-1}}$, то указанным свойством будет обладать всякий симплекс, удовлетворяющий условию леммы. Лемма доказана.

Применим доказанную лемму к триангуляции K (это можно сделать, так как симплексы триангуляции K, очевидно, удовлетворяют условию этой леммы), т. е. указанным выше способом выберем число ε такое, что ε-окрестности $O(T_i^{r-1}, \varepsilon)$ граней T_i^{r-1} $(i=0, 1, \ldots, r)$ произвольного симплекса T^r триангуляции K не покрывают некоторой окрестности центра шара, вписанного в этот симплекс. Рассмотрим, наряду со звездами Oe_i вершин e_i триангуляции K, их границы U_i, $U_i = [Oe_i] \setminus Oe_i$, и для каждой звезды Oe_i построим открытое множество O_i следующим образом: $O_i = Oe_i \setminus [O(U_i, \varepsilon)]$.

Покажем, что O_i образуют покрытие полиэдра $\widetilde{K}$; для этого предположим противное, т. е. предположим, что в триангуляции K найдется точка x, не принадлежащая ни одному из O_i. Пусть T^r с вершинами $e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ — симплекс триангуляции K, содержащий точку x. Из того, что x не принадлежит ни одному из O_i, следует, что x содержится в каждом из множеств $T^r \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)]$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$. А отсюда вытекает, что множества $T^r \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)$ покрывают симплекс T^r. Поэтому, если T^r — грань симплекса T^n триангуляции K, то множества $T^n \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)]$ будут покрывать симплекс T^n. Но это противоречит выбору ε, так как среди симплексов T^n триангуляции K, содержащих T^r в качестве грани, найдутся такие, которые не являются собственными гранями никаких других симплексов триангуляции K, а для таких симплексов множества $T^n \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)]$ совпадают соответственно с множествами $T^n \cap [O(T_j^{n-1}, \varepsilon)]$, где T_j^{n-1} — противоположные вершинам e_{i_j} грани симплекса T^n. Таким образом, множества O_i действительно образуют покрытие полиэдра $\widetilde{K}$.

Нам остается показать теперь, что существует положительное число η, для которого при любом i имеет место включение $O(O_i, \eta) \subseteq Oe_i$. Существование такого η будет выведено из следующей леммы, доказанной Ю. М. Смирновым [6], которую мы приводим без доказательства.

Лемма 2. *Для любой равномерной триангуляции и любого положительного числа σ найдется положительное η такое, что η-окрестности любых двух не имеющих общих вершин симплексов данной триангуляции не пересекаются, а пересечение η-окрестностей любых двух имеющих общие вершины симплексов этой триангуляции содержится в σ-окрестности их «наибольшей» общей грани.*

Применив лемму 2 к нашему случаю, выберем η таким образом, чтобы пересечение η-окрестностей любых двух симплексов триангуляции K было пусто или содержалось в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности их «наибольшей» общей грани, в случае если эти симплексы имеют общие вершины. Пусть T — произвольный симплекс триангуляции K. Если симплекс T не имеет общих вершин с симплексами звезды Oe_i, то $O(Oe_i, \eta) \cap O(T, \eta) = \Delta$, откуда $O(Oe_i, \eta) \cap T = \Delta$. Если же T имеет общие вершины с каким-нибудь симплексом T' звезды Oe_i, то для симплексов T и T' имеет место следующее соотношение:

$$O(T, \eta) \cap O(T', \eta) \subset O\left(T'', \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset O\left(U_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где T'' — «наибольшая» общая грань этих симплексов. Отсюда следует, что $O(Oe_i, \eta) \cap T \subset O\left(U_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, и получается нужное нам включение

$$O(O_i, \eta) \subset Oe_i,$$

так как $O\left(U_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap O\left(O_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \Delta$, а $O\left(O_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \supset O(O_i, \eta)$. Таким образом, мы показали, что покрытие полиэдра $\widetilde{K}$ звездами Oe_i есть лебегово покрытие этого полиэдра. Теорема доказана.

§ 5. В этом параграфе приводятся теоремы, устанавливающие связь метрической размерности точечных множеств со свойствами равномерно непрерывных отображений этих множеств в равномерные триангуляции.

Прежде всего дадим следующее

Определение 4. *Пусть f — непрерывное отображение множества M в триангуляцию K полиэдра $\widetilde{K}$. Мы будем говорить, что степень существенности отображения f равна r, если r — наибольшее из чисел p таких, что в триангуляции K существует p-мерный замкнутый симплекс $\overline{T}^p$, на прообразе $f^{-1}(\overline{T}^p)$ которого отображение f существенно*. В случае если степень существенности отображения f равна r, мы будем говорить также, что отображение f r-существенно.*

Имеет место следующее предложение:

Теорема 5. *Если метрическая размерность множества $M \subset E^n$ равна r ($\mathrm{dm}\, M = r$), то степень существенности любого равномерно непрерывного отображения этого множества в равномерную триангуляцию меньше или равна r.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую простую лемму:

Лемма 3. *Пусть f — равномерно непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Если λ — лебегово покрытие пространства Y, то лебеговым будет также и покрытие пространства X, составленное прообразами элементов покрытия λ при отображении f.*

В самом деле, пусть η — лебегово число покрытия λ. Выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы для любых точек x' и x'' пространства X, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, было $\rho(y', y'') < \eta$, где $y' = f(x')$ и $y'' = f(x'')$. Пусть α — такое покрытие пространства Y, что для любого элемента A этого покрытия имеет место включение $O(A, \eta) \subset O$, где O — некоторый элемент покрытия λ. Легко видеть, что $O(f^{-1}(A), \delta) \subset f^{-1}(O)$, откуда следует утверждение леммы.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 5.

Пусть f — равномерно непрерывное r'-существенное отображение множества M в равномерную триангулярию K полиэдра $\widetilde{K}$. Покажем, что $r' \leqslant r$. Для этого рассмотрим звезды Oe_i вершин триангуляции K. Согласно утверждению теоремы 4, эти звезды образуют лебегово покрытие полиэдра $\widetilde{K}$, поэтому можно утверждать (см. лемму 3), что множества $f^{-1}(Oe_i)$ составляют лебегово покрытие λ множества M. Следовательно, в покрытие λ (см. конец § 2) можно вписать открытое локально конечное в пространстве E^n покрытие α кратности $s+1$, где $s \leqslant r$. Рассмотрим нерв покрытия α. Пусть $O_j \in \alpha$ содержится в $f^{-1}(Oe_i)$. Отобразив вершину e'_j нерва α, соответствующую

---

* Пусть $\overline{T}$ — замкнутый симплекс и f — непрерывное отображение множества M в этот симплекс. Непрерывная деформация f_t (t меняется от 0 до 1) отображения называется **допустимой деформацией**, если на множестве $f^{-1}(\dot{T})$, где $\dot{T}$ — граница симплекса $\overline{T}$, эта деформация тождественна. Если ни одна из допустимых деформаций отображения f «не освобождает точек симплекса $\overline{T}$», то отображение f называется **существенным**.

O_j, в вершину e_i триангуляции K, получим симплициальное отображение g этого нерва в триангуляцию K.

Пусть φ — барицентрическое отображение множества M в тело нерва α. Рассмотрим отображение $f_1 = g\varphi$ множества M в полиэдр $\widetilde{K}$. Нетрудно видеть, что отображения f и f_1 таковы, что если $f(x)$ $(x \in M)$ содержится в некотором симплексе T триангуляции K, то $f_1(x)$ содержится в $\overline{T}$. А это означает, что на каждом из множеств $f^{-1}(T)$, где T — произвольный симплекс триангуляции K, отображения f и f_1 удовлетворяют условию следующей леммы:

Лемма 4. *Пусть f — существенное отображение множества M в замкнутый симплекс $\overline{T}$ и пусть $A \subset M$ — прообраз при этом отображении границы $\dot{T}$ симплекса $\overline{T}$. Если отображеиие f_1 получено равномерной деформацией f_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ отображения f и если деформация f_t такова, что при любом t имеет место включение $f_t(A) \subset \dot{T}$, то отображение f_1 множества M в симплекс $\overline{T}$ — существенное*.*

Но так как отображение f_1 переводит множество M в r'-мерный остов триангуляции K, то отображение f может быть существенным лишь на прообразах замкнутых симплексов этого остова. Поэтому имеем: $r' \leqslant s \leqslant r$. Теорема 5 доказана.

Покажем теперь, что для любого точечного множества метрической размерности r существует равномерно непрерывное r-существенное отображение в равномерную триангуляцию некоторого полиэдра. Для этого нам понадобится вспомогательное предложение, которое будет применяться также и в следующем параграфе.

Лемма 5. *Пусть на некотором метрическом пространстве R определено семейство неотрицательных равностепенно непрерывных функций φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Если функции φ_i удовлетворяют следующим трем условиям:*

1) *значения каждой из функций φ_i не превосходят некоторого фиксированного числа l;*

2) *какова бы ни была точка $x \in R$, среди функций φ_i имеется функция, значение которой не меньше некоторого не зависящего от выбора точки x числа $h > 0$;*

3) *в любой точке $x \in R$ число отличных от нуля функций φ_i не превышает некоторого фиксированного числа m,*

то функции вида $\dfrac{\varphi_i}{\sum\limits_j \varphi_j}$ также являются равностепенно непрерывными функциями.

Рассмотрим функции φ_i в точках $x' \in R$ и $x'' \in R$. Среди них могут быть такие, которые и в точке x' и в точке x'' отличны от нуля. Обозначим их

---

* Справедливость этой леммы легко выводится из следующего предложения, доказательство которого приведено в работе К. А. Ситникова [2]:

Пусть f — существенное отображение множества M в замкнутый шар U радиуса 1 и пусть $A = f^{-1}(S)$, где S — граница шара U. Если непрерывное отображение f_1 множества M в шар U таково, что для любой точки $x \in A$ расстояние между точками $f(x)$ и $f_1(x)$ меньше ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, то множество $f_1(M)$ покрывает концентрический шар радиуса $1 - \varepsilon$.

через $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$. Функции же, отличные от нуля в точке x' и равные нулю в точке x'', занумеруем индексами $i_1', \ldots, i_p'$, а функции, отличные от нуля в точке x'' и равные нулю в точке x', — индексами $i_1'', \ldots, i_q''$. Таким образом, дроби $\dfrac{\varphi_i}{\sum\limits_j \varphi_j}$ в точках x' и x'' будут соответственно иметь вид

$$\frac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')}.$$

Рассмотрим разность $\dfrac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_j \varphi_j(x')} - \dfrac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_j \varphi_j(x'')}$:

$$\frac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_j \varphi_j(x')} - \frac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_j \varphi_j(x'')} =$$

$$= \frac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')} - \frac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')} =$$

$$= \frac{\varphi_i(x') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') - \varphi_i(x'') \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \varphi_i(x') \cdot \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')\right)} -$$

$$- \frac{\varphi_i(x'') \cdot \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')\right)} =$$

$$= \frac{\varphi_i(x') \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') - \varphi_i(x'') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')\right)} +$$

$$+ \frac{\varphi_i(x'') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') - \varphi_i(x'') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{r} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1} \varphi_{i_k''}(x'')\right)} +$$

$$+ \frac{\varphi_i(x') \cdot \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'') - \varphi_i(x'') \cdot \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k'}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i_k''}(x'')\right)} =$$

$$= \frac{(\varphi_i(x') - \varphi_i(x''))\cdot \sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \varphi_i(x'')\cdot \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{i_k}(x'') - \varphi_{i_k}(x'))}{\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} +$$

$$+ \frac{\varphi_i(x')\cdot \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'') - \varphi_i(x'')\cdot \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')}{\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Без ограничения общности можно считать (см. условие леммы), что выполняются следующие неравенства:

$$|\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| < \varepsilon,$$

$$|\varphi_{i_k}(x'') - \varphi_{i_k}(x')| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad \varphi_{i''_k}(x') < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, p),$$

$$\varphi_{i''_k}(x'') < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, q).$$

Принимая во внимание неравенства

$$n \leqslant m, \quad p \leqslant m, \quad q \leqslant m,$$

$$\varphi_i(x') \leqslant l, \quad \varphi_i(x'') \leqslant l, \quad \varphi_{i_k}(x'') \leqslant l \quad (k = 1, \ldots, n),$$

а также неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x') \geqslant h, \quad \sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'') \geqslant h,$$

получим:

$$\left| \frac{\varphi_i(x')}{\sum_j \varphi_j(x')} - \frac{\varphi_i(x'')}{\sum_j \varphi_j(x'')} \right| < \frac{4ml}{h^2}\varepsilon,$$

откуда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь произвольное множество $M \subset E^n$ метрической размерности r ($\dim M = r$). Выберем ε столь малым, чтобы всякое открытое ε-покрытие множества M имело кратность, большую или равную $r + 1$. Протриангулируем пространство E^n таким образом, чтобы получившаяся в результате триангуляция была равномерной, чтобы диаметр каждого ее симплекса был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и чтобы число звезд вершин этой триангуляции, пересекающихся со звездой Oe_i, при любом i было меньше некоторого фиксированного числа m. Это всегда можно сделать, разбивая, например, соответствующим образом на симплексы каждый куб какого-нибудь достаточно мелкого кубильяжа пространства E^n. Диаметры звезд Oe_i построенной триангуляции меньше ε, причем образованное ими покрытие пространства E^n имеет нерв, представленный самой этой триангуляцией. Кроме того, покрытие, составленное звездами Oe_i, есть лебегово покрытие пространства E^n (см. теорему 4). Обозначим через $O_1, O_2, \ldots$ всевозможные непустые множества вида $Oe_i \cap M$. Легко видеть, что множества O_i $(i = 1, 2, \ldots)$ составляют лебегово покрытие λ множества M, обладающее следующими свойствами:

1. Нерв K покрытия λ, представленный частью построенной триангуляции пространства E^n, является равномерной триангуляцией полиэдра $\widetilde{K}$.

2. Всякое открытое покрытие множества M, вписанное в покрытие λ, имеет кратность, большую или равную $r + 1$.

3. Для всякого i число элементов покрытия λ, пересекающихся с O_i, меньше m.

Имеет место следующее предложение:

Барицентрическое отображение φ множества M в триангуляцию K полиэдра $\widetilde{K}$ является равномерно непрерывным.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим функции $\rho_i(x) = \rho(x, M \setminus O_i)$ и покажем, что для этих функций имеет место неравенство

$$|\rho_i(x) - \rho_i(x')| \leqslant \rho(x, x') \quad (x \in M, x' \in M).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\rho_i(x')$ не превосходит $\rho_i(x)$. Тогда, выбрав из множества $M \setminus O_i$ точку x'', для которой $\rho(x', x'') = \rho_i(x')$, получим неравенство

$$\rho_i(x) - \rho_i(x') \leqslant \rho(x, x'') - \rho(x', x'').$$

Но из аксиомы треугольника вытекает: $\rho(x, x'') - \rho(x', x'') \leqslant \rho(x')$. Следовательно, выполняется и неравенство $\rho_i(x) - \rho_i(x') \leqslant \rho(x, x')$. А это означает, что $\rho_i(x)$ — равностепенно непрерывные функции. Нетрудно также видеть, что в любой точке $x \in M$ число отличных от нуля функций $\rho_i(x)$ не превосходит m и что среди $\rho_i(x)$ найдется такая функция, значение которой в точке x больше или равно $\eta > 0$, где η — лебегово число покрытия λ. А так как при любом i и произвольной точке $x \in M$ выполняется неравенство $\rho_i(x) < \varepsilon$, то, согласно лемме 5, функции $\varphi_i(x) = \dfrac{\rho_i(x)}{\sum\limits_j \rho_j(x)}$ — равностепенно непрерывные.

Вернемся к барицентрическому отображению φ множества M в полиэдр $\widetilde{K}$. Пусть x' и x'' — произвольные точки множества M, для которых $\rho(x', x'') < \eta$. Тогда в покрытии λ найдется элемент O_i, содержащий обе эти точки; следовательно, их образы $\varphi(x')$ и $\varphi(x'')$ будут содержаться в некоторой звезде Oe триангуляции K. Рассмотрим всевозможные векторы, исходящие из точки e и совпадающие с одномерными симплексами звезды Oe. В силу определенности выбора триангуляции K, число таких векторов меньше m. Обозначим их через $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p$. Пусть барицентрическими функциями, соответствующими концам векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p$, будут $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_p}$. Тогда, как нетрудно видеть, векторы $\overline{e\varphi(x')}$ и $\overline{e\varphi(x'')}$ с началом в точке e и концами соответственно в точках $\varphi(x')$ и $\varphi(x'')$ можно представить в виде следующих линейных комбинаций: $\overline{e\varphi(x')} = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k}(x') \overline{a}_k$, $\overline{e\varphi(x'')} = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k}(x'') \overline{a}_k$. Отсюда вектор

$\overline{\varphi(x')\varphi(x'')}$ можно выразить в виде $\overline{\varphi(x')\varphi(x'')} = \sum_{k=1}^{p} (\varphi_{i_k}(x'') - \varphi_{i_k}(x')) \cdot \overline{a}_k$.

Имеем:

$$\rho(\varphi(x'),\ \varphi(x'')) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\varphi_{i_k}(x') - \varphi_{i_k}(x'')| \cdot |\overline{a}_k| < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p} |\varphi_{i_k}(x') - \varphi_{i_k}(x'')|,$$

так как $|\overline{a}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(k = 1, \ldots, p)$.

Пусть σ — произвольное положительное число. Существует число $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x' \in M$ и $x'' \in M$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, имеют место неравенства

$$|\varphi_{i_k}(x') - \varphi_{i_k}(x'')| < \frac{\sigma}{\varepsilon m} \quad (k = 1, \ldots, p),$$

выполняющиеся для всех функций $\varphi_i(x)$. А так как можно считать, что $\delta < \eta$, то получаем нужное нам неравенство $\rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) < \sigma$. Таким образом, равномерная непрерывность отображения φ доказана.

Пусть степень существенности отображения φ равна s, где (согласно теореме 5) $s \leqslant r$. Продеформируем φ в отображение φ_1, переводящее множество M в s-мерный остов K^s триангуляции K и обладающее следующим свойством: если $\varphi(x)$ (x — произвольная точка множества M) содержится в симплексе T триангуляции K, то $\varphi_1(x)$ содержится в $\overline{T}$, причем для точек $x \in \varphi^{-1}(K^s)$ $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ совпадают. Легко заметить, что прообразы при отображении φ_1 звезд вершин остова K^s составляют открытое покрытие множества M кратности $s+1$, вписанное в покрытие λ. А это возможно лишь при наличии равенства $s = r$ (см. свойство 2 покрытия λ). Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. *Для всякого множества $M \subset E^n$ метрической размерности r $(\dim M = r)$ существует равномерно непрерывное r-существенное отображение в равномерную триангуляцию некоторого полиэдра.*

Легко видеть, что теоремы 5 и 6 полностью характеризуют метрическую размерность точечных множеств.

§ 6. В настоящем параграфе приводится теорема, представляющая собой в некотором смысле аналог известной теоремы о так называемых существенных отображениях *.

Пусть $M \subset E^n$ — множество метрической размерности r $(\dim M = r)$ и пусть λ — лебегово покрытие множества M, удовлетворяющее следующим требованиям.

1. Всякое открытое покрытие множества M, вписанное в λ, имеет кратность, большую или равную $r+1$.

* Подробное доказательство теоремы о существенных отображениях впервые опубликовано П. С. Александровым еще в 1932 г. (см. [5]).

2. Число элементов покрытия λ, пересекающихся с произвольным $O_i \in \lambda$, меньше некоторого фиксированного числа m. (Такие покрытия уже рассматривались в предыдущем параграфе.)

Пусть φ — барицентрическое отображение множества M в тело нерва K покрытия λ. Степень существенности отображения φ равна r (см. доказательство теоремы 6). Обозначив через $\overline{T^r}$ замкнутый симплекс триангуляции K такой, что отображение φ множества $\varphi^{-1}(\overline{T^r})$ в этот симплекс существенно (см. определение 4), и отобразив каждую вершину триангуляции K, не входящую в остов симплекса T^r, в какую-нибудь вершину этого остова, построим симплициальное отображение g триангуляции K в замкнутый симплекс $\overline{T^r}$. Отображение $f = g\varphi$ множества M в симплекс $\overline{T^r}$ существенно, ибо иначе несущественным было бы отображение φ, рассматриваемое на множестве $\varphi^{-1}(\overline{T^r})$. Покажем, что отображение f равномерно непрерывно. Для этого, обозначив через $e_0, e_1, \ldots, e_r$ вершины симплекса T^r и положив $\overline{e_0e_i} = a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, представим вектор $\overline{e_0f(x)}$ в виде $\overline{e_0f(x)} = \sum_{i=1}^{r} b_i(x)\overline{a}_i$, где $b_i(x)$ — соответствующие вершинам e_i нормированные барицентрические координаты точки $f(x)$. Для дальнейшего следует заметить, что $b_i(x)$ можно представить в виде суммы значений в точке x барицентрических функций, соответствующих вершинам триангуляции K, переводимым отображением g в вершину e_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Пусть x' и x'' — точки множества M. Оценим расстояние между точками $f(x')$ и $f(x'')$:

$$\rho(f(x'),\ f(x'')) \leqslant \sum_{i=1}^{r} |b_i(x') - b_i(x'')| \cdot |\overline{a}_i| \leqslant l \sum_{i=1}^{r} |b_i(x') - b_i(x'')|,$$

где $l = \max|\overline{a}_i|$. Рассмотрим разность $b_i(x') - b_i(x'')$. Если все барицентрические функции обозначить через φ_j $(j = 1, 2)$, то разность $b_i(x') - b_i(x'')$ можно представить в виде $\sum_{k=1}^{r} (\varphi_{j_k}(x') - \varphi_{j_k}(x''))$, где $\varphi_{j_1}(x), \ldots, \varphi_{j_p}(x)$ — функции, вошедшие при нашем представлении коэффициентов $b_i(x)$ в качестве отличных от нуля слагаемых или в $b_i(x')$, или в $b_i(x'')$, или одновременно и в $b_i(x')$ и в $b_i(x'')$.

Заметим, что $p \leqslant 2m$. Пусть число $\delta > 0$ такоео, что для любых x' и x'', для которых $\rho(x',\ x'') < \delta$, при всяком j имеет место неравенство $|\varphi_j(x') - \varphi_j(x'')| < \frac{\sigma}{2m^2l}$, где σ — произвольное наперед заданное положительное число (см. лемму 5). Тогда

$$|b_i(x') - b_i(x'')| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\varphi_{j_k}(x') - \varphi_{j_k}(x'')| < 2m\frac{\sigma}{2m^2l} = \frac{\sigma}{ml}.$$

Следовательно,

$$\rho(f(x'),\ f(x'')) < lm\frac{\sigma}{ml} = \sigma.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется для любых точек $x' \in M$ и $x'' \in M$ с расстоянием $\rho(x', x'') < \delta$.

Таким образом, доказано, что *для всяких точечных множеств метрической размерности r имеется равномерно непрерывное существенное отображение в r-мерный замкнутый симплекс.*

С другой стороны, так как всякий симплекс со всеми его гранями представляет собой частный случай равномерной триангуляции, то из теоремы 5 следует несущественность всякого равномерно непрерывного отображения множества метрической размерности r в замкнутый симплекс, размерность которого больше r. Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Метрическая размерность точечного множества есть наибольшая из размерностей симплексов, в которые можно равномерно непрерывно и существенно отобразить это множество.*

§ 7. В этом параграфе с помощью теоремы 7 доказываются три теоремы, также характеризующие метрическую размерность точечных множеств.

Теорема 8. *Метрическая размерность точечного множества M есть наименьшее из чисел r, обладающих следующим свойством: всякое равномерно непрерывное отображение f произвольного подмножества A множества M в r-мерную сферу можно продолжить до непрерывного отображения в эту сферу всего множества M.*

Доказательство. Продолжим отображение f до равномерно непрерывного отображения f_1 всего множества M в эвклидово пространство E^{r+1}, содержащее сферу S^r. Такое продолжение возможно в силу следующей леммы:

Лемма 6. *Для всякой ограниченной равномерно непрерывной функции, определенной на множестве метрического пространства, существует равномерно непрерывное продолжение на все пространство.*

Доказательство этого предложения, которое мы здесь не приводим, незначительно отличается от известного доказательства аналогичного утверждения для непрерывных функций*.

Обозначим теперь через U^{r+1} замкнутый шар, ограниченный сферой S^r. Построим отображение g множества $f_1(M)$, тождественное на $f_1(M) \cap U^{r+1}$ и являющееся на остальной части этого множества проекцией в сферу S^r из ее центра. Это отображение, очевидно, равномерно непрерывно, а следовательно, равномерно непрерывно и отображение $f_2 = gf_1$ множества M в замкнутый шар U^{r+1}.

При $\operatorname{dm} M \leqslant r$ согласно теореме 7 отображение f_2 несущественно. А это означает, что существует отображение множества M в сферу S^r, совпадающее с f_2 на множестве $f_2^{-1}(S^r)$, а значит, и с отображением f на множестве $A \subset f_2^{-1}(S^r)$.

Если же $\operatorname{dm} M > r$, то, в соответствии с теоремой 7, имеется существенное равномерно непрерывное отображение f множества M в r-мерный замкну-

* При доказательстве следует иметь в виду, что для любых двух множеств A и B метрического пространства R, находящихся на положительном расстоянии, функция $\frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$, где $x \in R$, равномерно непрерывна, в чем нетрудно убедиться непосредственной оценкой.

тый симплекс $\overline{T^r}$. Нетрудно заметить, что отображение f нельзя продолжить с множества $f^{-1}(\dot{T})$, где $\dot{T}$ — граница симплекса T^r, до непрерывного отображения в $\dot{T}$ всего множества M. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть $f_1, \ldots, f_{r+1}$ — система $r+1$ заданных на точечном множестве M ограниченных и равномерно непрерывных функций и ε — произвольное положительное число. Метрическая размерность множества M не превосходит r в том и только в том случае, если существует система $f_1', \ldots, f_{r+1}'$ непрерывных не имеющих на M общего нуля функций $\left(\bigcap_{i=1}^{r+1} f_i'^{-1}(0) = 0\right)$, удовлетворяющих соответственно неравенствам $|f_i(x) - f_i'(x)| < \varepsilon$ $(x \in M;\ i = 1, \ldots, r+1)$.*

Предположим сначала, что любые заданные на M ограниченные и равномерно непрерывные функции f_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ можно с любой точностью аппроксимировать непрерывными функциями, не имеющими общего нуля, и покажем, что метрическая размерность множества M не превосходит r. Для этого достаточно показать несущественность всякого равномерно непрерывного отображения множества M в $(r+1)$-мерный замкнутый шар U^{r+1} радиуса 1 с центром в начале координат.

Поставив в соответствие каждой точке $x \in M$ i-ю координату точки $f(x)$ $(i = 1, \ldots, r+1)$, определим на M равномерно непрерывные функции $f_i (i = 1, \ldots, r+1)$. Выберем $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Согласно предположению, существуют непрерывные функции f_i' $(i = 1, \ldots, r+1)$, удовлетворяющие в любой точке $x \in M$ соответственно неравенствам $|f_i(x) - f_i'(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{r+1}}$ и не имеющие общего нуля. Поставив в соответствие точке $x \in M$ точку $f'(x)$ с координатами $f_i'(x)$ $(i = 1, \ldots, r+1)$, построим непрерывное отображение f' множества M в пространство E^{r+1}. Следует заметить, что образ множества M при отображении f' не покрывает начала координат и в любой точке $x \in M$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f'(x)) < \varepsilon$. Отобразив каждую не содержащуюся в U^{r+1} (если такая имеется) точку множества $f'(M)$ в ближайшую к ней точку шара U^{r+1} и оставив на месте остальные точки этого множества, построим отображение g множества $f'(M)$ в шар U^{r+1}. Определим отображение $f'' = gf'$. Это отображение переводит множество M в шар U^{r+1} и (так же как и отображение f') отличается от f меньше чем на ε $(\rho(f(x), f''(x)) < \varepsilon,\ x \in M)$. Отсюда следует, что отображение f несущественно, ибо в противном случае образ множества M при отображении f'' покрывал бы начало координат (см. сноску на стр. 238).

Обратно, пусть ε — произвольное положительное число и f_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ — произвольно заданные на M ограниченные равномерно непрерывные функции (не ограничивая общности, можно считать, что модули этих функций не превосходят единицы). Покажем, что при $\operatorname{dm} M \leqslant r$ существуют непрерывные функции f_i' $(i = 1, \ldots, r+1)$, обладающие следующими двумя свойствами:

1. $|f_i(x) - f_i'(x)| < \varepsilon \quad (x \in M;\ i = 1, \ldots, r+1)$.
2. $\bigcap_{i=1}^{r+1} f_i'^{-1}(0) = 0$.

Для этого, выбрав в пространстве E^{r+1} систему координат с осями Ox_i $(i=1, \ldots, r+1)$, рассмотрим отображение f, ставящее в соответствие каждой точке $x \in M$ точку пространства E^{r+1} с координатами $f_i(x)$ $(i=1, \ldots$ $\ldots, r+1)$. Легко видеть, что это отображение равномерно непрерывно и переводит множество M в замкнутый куб, ограниченный плоскостями $x_i=-1$, $x_i=+1$ $(i=1, \ldots, r+1)$. Пусть $V^{r+1} \subset E^{r+1}$ есть $(r+1)$-мерный замкнутый шар с центром в начале координат, диаметр которого меньше ε. Из теоремы 7 легко выводится, что отображение f в шар V^{r+1} множества $f^{-1}(V^{r+1})$ несущественно. Отсюда следует, что существует непрерывное отображение f', переводящее множество $f^{-1}(V^{r+1})$ в границу S^r шара V^{r+1} и совпадающее с f на остальной части множества M. Легко видеть, что, поставив в соответствие точке $x \in M$, i-ю координату точки $f'(x)$, получим искомые функции f'_i. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть A_i, B_i $(i=1, \ldots, r+1)$ — любые удовлетворяющие условию $\rho(A_i, B_i)>0$ пары замкнутых подмножеств точечного множества M. Метрическая размерность точечного множества M не превосходит r в том и только в том случае, если существуют замкнутые множества $\Phi_i \subset M$ $(i=1, \ldots, r+1)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Φ_i разделяет множества A_i и B_i $(i=1, \ldots, r+1)$.*
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$.

Доказательство. Пусть сначала для пар далеких множеств* $A_i \subset M$ и $B_i \subset M$ существуют разделяющие множества Φ_i, удовлетворяющие условию $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$. Покажем, что метрическая размерность множества M не превосходит r. Для этого рассмотрим на M $r+1$ произвольных равномерно непрерывных функций f_i $(i=1, \ldots, r+1)$, по модулю не превышающих 1. Выбрав произвольно ε, $0<\varepsilon<1$, положим, что A_i есть множество всех точек $x \in M$, в которых выполняется неравенство $f_i(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. B_i определим, как множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих неравенству $f_i(x) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}$ $(i=1, \ldots, r+1)$. Расстояние между определенными таким образом множествами больше нуля при всех $i=1, \ldots, r+1$ (это следует из равномерной непрерывности функций f_i), откуда, по предположению, следует существование разделяющих A_i и B_i замкнутых множеств Φ_i, удовлетворяющих условию $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$.

Выбрав каким-либо образом не содержащую точек множества B_i окрестность $O(A_i)$ множества A_i, граница которой принадлежит Φ_i, построим на M функцию f_i следующим образом: на множестве $A_i \cup B_i$ положим

$$f'_i(x) = f_i(x);$$

в точках множества $O(A_i) \setminus A_i$ определим

$$f'_i(x) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\rho(x, \Phi_i)}{\rho(x, \Phi_i) + \rho(x, A_i)};$$

* В соответствии с терминологией теории пространств близости множества A и B далеки, если $\rho(A, B) > 0$.

на остальной же части множества M положим

$$f_i'(x) = -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\rho(x, \Phi_i)}{\rho(x, \Phi_i) + \rho(x, B_i)}.$$

Легко видеть, что непрерывные функции f_i' $(i = 1, \ldots, r+1)$ не имеют общего нуля и удовлетворяют неравенствам $|f_i(x) - f_i'(x)| < \varepsilon$. А отсюда, согласно теореме 9, следует: $\operatorname{dm} M \leqslant r$.

Обратно, пусть метрическая размерность множества M не превосходит r и $A_i \subset M$, $B_i \subset M$ $(i = 1, \ldots, r+1)$ — произвольная система пар замкнутых далеких множеств. Покажем, что существуют замкнутые не имеющие общих точек множества Φ_i $(i = 1, \ldots, r+1)$, разделяющие соответственно множества A_i и B_i. Для этого рассмотрим на M равномерно непрерывные функции $f_i(x)$, удовлетворяющие условиям:

1. $|f_i(x)| \leqslant 1$.

2. На A_i (соответственно на B_i) $f_i(x) \equiv 1$ (соответственно $f_i(x) \equiv -1$).

Существование таких функций следует из утверждения, содержащегося в сноске на стр. 244. Выберем ε, $0 < \varepsilon < 1$. Согласно теореме 9, на M найдутся не имеющие общего нуля непрерывные функции f_i', удовлетворяющие соответственно неравенствам $|f_i(x) - f_i'(x)| < \varepsilon$. Нетрудно заметить, что множества $\Phi_i = f_i'^{-1}(0)$ суть искомые множества. Теорема 10 доказана.

III. Гомологическая характеристика метрической размерности *

§ 8. Основным понятием настоящего параграфа является понятие равномерного ∇-цикла, а также понятие продолжаемости равномерного ∇-цикла с подмножества на все пространство.

Определение 5. *Равномерным ∇-циклом данного множества мы будем называть всякий ∇-цикл, определенный на нерве некоторого лебегова покрытия этого множества.*

Пусть дано метрическое пространство R. Рассмотрим множество всевозможных открытых звездно-конечных покрытий этого пространства. Из этого множества выделим всевозможные подмножества таким образом, чтобы в каждое из выделенных подмножеств вошли покрытия одной кратности и чтобы каждое подмножество содержало сколь угодно «мелкие» покрытия. Поставив в соответствие каждому такому подмножеству номер — кратность входящих в него покрытий, выберем подмножество с наименьшим номером. Покрытия пространства R, вошедшие в это подмножество, мы будем называть основными.

Пусть A — какое-нибудь множество пространства R. Рассмотрим какой-нибудь равномерный ∇-цикл Z множества A и покрытие λ — носитель этого цикла. Мы будем говорить, что *цикл Z можно продолжить на простран-*

---

* Применяемые здесь понятия комбинаторной топологии (∇-цикл, проекция ∇-цикла и др.) следует понимать в обычном смысле (см, например, [10]).

ство R, если среди основных покрытий пространства R найдется покрытие α с элементами O_γ, удовлетворяющее следующим двум требованиям:

1. *Множества $O_\gamma \cap A$ составляют покрытие множества A, вписанное в покрытие λ.*

2. *Проекция $\Pi_\alpha^\lambda Z$ цикла Z продолжаема до ∇-цикла всего комплекса α.* (В данном случае мы не делаем различия в обозначениях покрытий и их нервов, ибо это почти никогда не приводит к недоразумению.)

Теорема 11. *Если метрическая размерность пространства R равна r и A — произвольное множество, включенное в R, то всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все пространство R.*

В самом деле, пусть λ — лебегово покрытие множества A. Возьмем какой-нибудь n-мерный ∇-цикл Z нерва этого покрытия, $n \geqslant r$. Рассмотрим покрытие α пространства R кратности $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше лебегова числа покрытия λ. Множества, являющиеся пересечениями элементов покрытия α с множеством A, составляют покрытие множества A, вписанное в покрытие λ. Следовательно, для ∇-цикла Z существует проекция $\Pi_\alpha^\lambda Z$ в нерв покрытия α; так как нерв покрытия α есть r-мерный комплекс, цепь $\Pi_\alpha^\lambda Z$ является его ∇-циклом. Теорема доказана.

Для доказательства обратного предложения нам потребуется теорема, представляющая собой аналог известной теоремы Хопфа (см., например, [7], стр. 31 или [8], стр. 197). Определим предварительно нужное нам понятие степени отображения.

Пусть S^n — некоторая фиксированная триангуляция n-мерной сферы $\widetilde{S}^n$ и f — непрерывное отображение пространства R в сферу $\widetilde{S}^n$. Обозначим через Oe_i звезды вершин триангуляции S^n и рассмотрим покрытие α пространства R, образованное множествами $f^{-1}(Oe_i)$. Поставив в соответствие каждому элементу $f^{-1}(Oe_i)$ покрытия α вершину e_i триангуляции S^n, получим симплициальное отображение нерва α в триангуляцию S^n. Это симплициальное отображение порождает проекция всякого ∇-цикла триангуляции S^n в комплекс α. Проекцию основного цикла триангуляции S^n мы обозначим через Z_f^n и будем называть ее степенью отображения f пространства R в триангуляцию S^n. Следует заметить, что степень отображения f, если f равномерно непрерывно, есть равномерный ∇-цикл. Это следует из того, что звезды Oe_i образуют лебегово покрытие сферы, и поэтому их прообразы при отображении f также образуют лебегово покрытие (см. лемму 3).

Теорема 12. *Пусть A — замкнутое множество пространства R метрической размерности $n+1$ ($\dim R = n+1$). Для того чтобы равномерно непрерывное отображение f множества A в сферу $\widetilde{S}^n$ можно было продолжить до непрерывного отображения в $\widetilde{S}^n$ всего пространства R, необходимо и достаточно, чтобы степень отображения f можно было также продолжить на все пространство R.*

Докажем прежде достаточность, т. е. докажем, что если равномерный ∇-цикл Z_f^n можно продолжить на все пространство R, то существует отображение F (непрерывное) пространства R в сферу $\widetilde{S}^n$, совпадающее на A с отображением f.

Обозначим через λ носитель цикла Z_f^n (мы, как и раньше, обозначаем покрытие и его нерв одной и той же буквой). Пусть теперь α с элементами O_i — существующее по условию одно из основных покрытий пространства R, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. Множества $O_i \cap A$ образуют покрытие α' множества A, вписанное в покрытие λ;

2. Цепь $\Pi_\alpha^\lambda Z_f^n$ продолжаема до ∇-цикла всего комплекса α.

Так как покрытие α' вписано в покрытие λ, то это порождает симплициальное отображение нерва α' в триангуляцию S^n. Это симплициальное отображение определяет непрерывное отображение g полиэдра $\widetilde{\alpha}'$ в сферу $\widetilde{S}^n$, степенью которого является, очевидно, ∇-цикл $\Pi_{\alpha'}^\lambda Z_f^n$ комплекса α', продолжаемый до ∇-цикла всего комплекса α. Так как размерность полиэдра $\widetilde{\alpha}$ равна $n+1$, то из только что сказанного вытекает, что отображение g находится в условиях известной теоремы Хопфа для полиэдров *. А это означает, что отображение g можно продолжить до отображения G всего $\widetilde{\alpha}$. Обозначим через φ барицентрический сдвиг пространства R в тело нерва α и определим отображение F' пространства R в сферу $\widetilde{S}^n$ равенством: $F'(x) = G\varphi(x)$. Тогда для всякой точки $x \in A$ образы $F'(x)$ и $f(x)$ при отображениях F' и f содержатся в одном симплексе триангуляции S^n. А это означает, что на множестве A существует деформация отображения F' в отображение f. Следовательно, на основании так называемой леммы Борсука ** отображение f можно продолжить с множества A до отображения F всего пространства R. Достаточность доказана.

Докажем теперь необходимость, т. е. покажем, что если отображение f множества A в сферу $\widetilde{S}^n$ можно продолжить до отображения F пространства R, то и степень Z_f^n отображения f можно продолжить на пространство R.

Рассмотрим покрытие α множества A, состоящее из прообразов $f^{-1}(Oe_i)$ при отображении f звезд вершин триангуляции S^n, и покрытие α_1 пространства R, состоящее из прообразов тех же звезд при отображении F. Легко видеть, что множество A высекает из ∇-цикла Z_F^n степень отображения f. Кратность покрытия α_1 меньше или равна $n+1$, поэтому α не является основным покрытием пространства R. Добавляя к покрытию α_1 вписанные

---

* Эта теорема состоит в следующем:

Пусть K — триангуляция (вообще говоря, локально конечная) $(n+1)$-мерного полиэдра $\widetilde{K}$ и пусть g — симплициальное отображение триангуляции $K' \subset K$ в триангулированную n-мерную сферу S^n. Для того чтобы отображение g можно было продолжить до отображения в S^n всего полиэдра $\widetilde{K}$, необходимо и достаточно, чтобы ∇-степень отображения g была продолжаема до ∇-цикла всего комплекса K.

** Эта лемма состоит в следующем:

Пусть F — непрерывное отображение пространства R в сферу S^n. Если g — отображение замкнутого множества $A \subset R$ в ту же сферу, полученное путем непрерывной деформации отображения F на множестве A, то g можно продолжить до непрерывного отображения всего пространства R (гомотопного отображению F). (См. например, [7], стр. 120.)

в какие-либо элементы этого покрытия новые открытые в R множества, мы всегда можем получить основное покрытие β пространства R, вписанное в покрытие α_1. Проекция $\Pi_\beta^{\alpha_1} Z_F^n$ ∇-цикла Z_F^n в нерв этого покрытия и есть искомое продолжение цепи $\Pi_\beta^\alpha Z_f^n$. Теорема доказана.

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 13. *Если A — произвольное замкнутое подмножество точечного множества M и всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все множество M, то метрическая размерность множества M меньше или равна r.*

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что при $n \geqslant r$ всякое равномерно непрерывное отображение f какого-либо множества $A \subset M$ в n-мерную сферу $\widetilde{S}^n$ может быть продолжено на все M (см. теорему 8). Но степень Z_f^n отображения f есть равномерный ∇-цикл множества A. Следовательно, по условию теоремы Z_f^n можно продолжить на все множество M. Отсюда и из теоремы 12 следует, что отображение f можно продолжить до непрерывного отображения всего множества M в сферу S^n, что и требовалось доказать.

Заметим, что теоремы 11 и 13 дают полную характеристику метрической размерности точечных множеств.

Пользуюсь случаем выразить мою благодарность Ю. М. Смирнову за помощь, оказанную им мне при написании этой работы.

(Поступило в редакцию 9/X 1957 г.)

Литература

1. П. С. Александров, Gestalt und Lage, Ann. of Math., **30** (1929), 101—187.
2. К. С. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств. II, Матем. сб., **37**(**79**) (1955), 385—434.
3. W. Hurewicz, Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen, Proc. Acad. Amsterdam, **30** (1927), 425.
4. Ю. М. Смирнов, О метрической размерности в смысле П. С. Александрова, Изв. АН СССР, серия матем., **20** (1956), 679—684.
5. П. С. Александров, Dimensionstheorie, Math. Ann., **106** (1932), 161—248.
6. Ю. М. Смирнов, Геометрия бесконечных равномерных комплексов и δ-размерность точечных множеств, Матем. сб., **40** (82) (1956), 137—156.
7. П. С. Александров, On dimension of normal spaces, Proc. Roy. Soc., **A189** (1947), 11—39.
8. В. Гуревич, Г. Волмен, Теория размерности, ГИИЛ, Москва, 1948.
9. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.
10. П. С. Александров, Топологические теоремы двойственности. I, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. **XLVIII** (1955).

Исправление к статье «Об искажении расстояний при однолистных отображениях замкнутых односвязных областей»

Г. Д. Суворов (Томск)

Заключения в последнем абзаце на странице 166 моей работы «Об искажении расстояний при однолистных отображениях замкнутых односвязных областей» (Матем. сб., **45** (87) (1958), 159—180) не являются вполне обоснованными. Для устранения этого недостатка и сохранения общности результатов работы следует определение 3 (стр. 165) сформулировать так:

Определение 3. Через C_k' обозначим класс отображений $T(z) \equiv f_1(x, y) + if_2(x, y)$ со следующим свойством:

Для любого натурального n отображение $T(z)$ принадлежит классу BL на открытом множестве точек $D_n \subset D$, в которых $|T(z)| < n$ и

$$\iint\limits_{D_n} \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \operatorname{grad}^2 f_i}{\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{2} (f_i)^2\right]^2} dxdy \leqslant K.$$

После этого, начиная с последнего абзаца на стр. 166 до замечания 3 на стр. 167 изложение надо заменить следующим:

Из теоремы 1 и замечания 2 следует, что для почти всех значений t (и всех натуральных n) из некоторого интервала его изменения функции $f_i(x_0 + t\cos\theta,\ y_0 + t\sin\theta)$ $(i = 1,\ 2;\ z_0 = x_0 + iy_0)$ будут абсолютно непрерывны по θ на каждой замкнутой компоненте открытого множества $\Gamma_t^{(n)} \equiv \Gamma_t \cap D_n$. (Заметим, что Γ_t может содержать ∞ только для одного значения t. Это значение мы исключаем из рассмотрения.) Отсюда следует, что для почти всех значений t и всех n линейная мера множества открытых дуг $T(\Gamma_t^{(n)})$ в сферической метрике (r) конечна и дается выражением

$$L_r[T(\Gamma_t^{(n)})] = \int\limits_{\Gamma_t^{(n)}} \frac{\sqrt{E\sin^2\theta - 2F\sin\theta\cos\theta + G\cos^2\theta}\ td\theta}{1 + \sum\limits_{i=1}^{2}\left(\frac{f_i}{2r}\right)^2}, \tag{4}$$

где

$$E = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2, \quad F = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad G = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2.$$

Обозначим еще для краткости:

$$I(T,\ D;\ r) = \iint\limits_{D} \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \operatorname{grad}^2 f_i}{\left[1+\sum\limits_{i=1}^{2}\left(\frac{f_i}{2r}\right)^2\right]^2} dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \operatorname{grad}^2 f_i}{\left[1+\sum\limits_{i=1}^{2}\left(\frac{f_i}{2r}\right)^2\right]^2} dxdy. \tag{5}$$

Предел в (5) существует, в силу определения 3.

Легко доказывается (ср. [3]) следующая

Лемма 3. *При* $0 < \tau_1 < \tau_2 \leqslant \delta_R$

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L_r^2 [T(\Gamma_t^{(n)})] \frac{dt}{t} < 2\pi I(T,\ D;\ r). \tag{$*$}$$

Из неравенства (*), пользуясь леммой Фату, заключаем:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \lim_{n\to\infty} L_r^2 [T(\Gamma_t^{(n)})] \frac{dt}{t} \leqslant 2\pi I(T,\ D;\ r).$$

С другой стороны, из геометрического смысла формулы (4) сразу следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} L_r [T(\Gamma_t^{(n)})] = L_r [T(\Gamma_t)]$ (этот предел, очевидно, конечен для почти всех t), где $L_r [T(\Gamma_t)]$ — линейная мера множества $T(\Gamma_t)$ в сферической метрике (r). Таким образом, мы имеем:

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} L_r^2 [T(\Gamma_t)] \frac{dt}{t} \leqslant 2\pi I(T,\ D;\ r). \tag{6}$$

Нетрудно дать обоснование и точной формулы (4) (стр. 166) для $L_r[T(\Gamma_t)]$, однако эта формула в дальнейшем не используется.

Все остальное в моей работе остается без изменений.

(Поступило в редакцию 19/II 1959 г.)

Поправки к статьям «О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены 2-й степени» и «О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — полиномы»

И. Г. Петровский и Е. М. Ландис (Москва)

I. В нашей статье «О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — многочлены 2-й степени» (Матем. сб., **37** (**79**) (1955), 209—250) необходимо сделать следующие исправления:

1. Стр. 210, строка 14 снизу

Напечатано: $\varphi'(x) \neq \infty$ и $\varphi'(x) \neq 0$ для точек L.

Надо: $\varphi'(x) \neq \infty$ и $\varphi'(x) \neq 0$ для точек L, расположенных в окрестности (x_0, y_0).

2. Стр. 211. Лемма 3 в том виде, как она сформулирована, не доказана. В формулировке этой леммы надо слово *гомология* заменить словом *гомотопия*, сделав при этом такую же замену всюду в статье, где встречается слово «гомология». Тогда приведенное доказательство леммы 3 становится полным. (Можно не заменять в работе гомологию гомотопией. При этом надо формулировать лемму 3 не для всех $\alpha \in D$, а для $\alpha \in D - N$, где N — некоторое множество размерности 22.)

3. Стр. 213, строка 5 снизу

Напечатано: что противоречит лемме 3.

Надо: что противоречит лемме 4.

4. Стр. 213. На строке 4 снизу сказано: «Аналогично из лемм 2 и 3 получаем следующее предложение (лемму 5′)». На самом деле лемма 5′ получается из леммы 2 и леммы 3′, аналогичной лемме 3, которую следует сформулировать так:

Лемма 3′. *Пусть L_1 и L_2 — два цикла, расположенные на решении $y=\varphi(x, \alpha)$ уравнения* (1) *и гомотопные между собой. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\varepsilon' > 0$, что если L_1' — цикл, лежащий на некотором решении $y=\varphi(x, \alpha')$ уравнения, отвечающего точке $\alpha' \in D$, и при этом*

1) $\rho(\alpha, \alpha') < \varepsilon'$,

2) *между точками L_1 и L_1' можно установить такой гомеоморфизм, при котором расстояние (в смысле метрики R_4^*) между соответствующими точками меньше ε',*

то на решении $y = \varphi(x, \alpha')$ существует цикл L_2', гомотопный L_1' и такой, что между точками L_2 и L_2' можно установить гомеоморфизм, при котором расстояние между соответствующими точками меньше ε.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.

5. Стр. 214, строка 7 снизу

Напечатано: $y_1 = Cx^{\lambda}$.

Надо: $y_1 = Cx_1^{\lambda}$.

6. Стр. 228. В доказательстве леммы 10 сказано: «При α, достаточно близком к α_0, $L_i(\alpha)$ не гомологичен нулю (по лемме 3)». Это утверждение непосредственно из леммы 3 не следует. Его доказательство можно провести так (следуя пункту 2, мы будем вести доказательство не для гомологии, а для гомотопии):

Допустим, что найдется последовательность $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n \in \Gamma$, $\alpha_n \to \alpha_0$, такая, что $L_i'(\alpha_n)$ — гомотопный нулю цикл. Для гомотопного нулю цикла $L_i'(\alpha)$ обозначим через $K_i(\alpha)$ ту компактную часть решения $y = \varphi(x, \alpha)$, границей которой является $L_i'(\alpha)$. По лемме 3 для $\alpha \in \Gamma$, расположенных в окрестности α_n, $L_i'(\alpha)$ гомотопен нулю. При этом $K_i(\alpha)$ меняется непрерывно при изменении α в достаточной близости от α_n. Пусть Δ_n — максимальная окрестность α_n на Γ, в которой это имеет место. Покажем, что при достаточно большом n Δ_n содержит α_0, а это приведет нас к противоречию.

Пусть это не так. $L_i'(\alpha_0)$ не содержит точек ветвления решения $y = \varphi(x, \alpha_0)$. Следовательно, при α, достаточно близком к α_0, $L_i'(\alpha)$ также обладает этим свойством. Пусть n столь велико, что это выполнено для α_n и для всех α, расположенных на Γ между α_n и α_0. Пусть α_n' — конец Δ_n, ближайший по Γ к α_0. Обозначим через Δ_n' часть Δ_n между точками α_n и α_n'. При изменении α на Δ_n' точки ветвления решения не проходят через $L_i'(\alpha)$, и, следовательно, число алгебраических точек ветвления на $K_i(\alpha)$ постоянно (если учитывать кратность) при $\alpha \in \Delta_n'$. Далее, удаляя предварительно из D множество, не разделяющее D (N_2), мы можем считать, что при $\alpha \in \Gamma$ для уравнения (1) в окрестностях особых точек имеется разложение вида $y_1 = Cx_1^{\lambda}$. Следовательно, $K_i(\alpha)$ при $\alpha \in \Delta_n'$ равномерно удалены от особых точек уравнения. Поэтому семейство $\{K_i(\alpha)\}_{\alpha \in \Delta_n'}$ компактно в смысле расстояния по поверхности. Но отсюда следует, что $L_i(\alpha_n')$ — гомотопный нулю цикл, и, применяя опять лемму 3, находим, что α_n' не может быть концом Δ_n.

7. Стр. 230. На строке 9 сверху дано определение кратной алгебраической точки: кратной алгебраической точкой назван кратный корень уравнения $\varphi'(x, \alpha) = 0$ или $\frac{1}{\varphi'(x, \alpha)} = 0$. На самом деле в статье используется другое определение: к р а т н о й а л г е б р а и ч е с к о й т о ч к о й называется такой корень уравнения $\varphi'(x, \alpha) = 0$ или $\frac{1}{\varphi'(x, \alpha)} = 0$, в котором меняется кратность при изменении α.

II. В нашей статье «О числе предельных циклов уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, где P и Q — полиномы» (Матем. сб., **43** (85) (1957), 149—168) в соответствии с пунктом 2 также следует всюду слово *гомология* заменить словом *гомотопия*.

На необходимость основных из этих поправок нам указал И. М. Гельфанд, за что мы приносим ему глубокую благодарность.

(Поступило в редакцию 19/III 1959 г.)

Письмо в редакцию

В статье «Об единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков» (Матем. сб., **40** (**82**) (1956), 123—136) по моей вине в таблицах допущены опечатки.

В таблице основных единиц чисто вещественных алгебраических полей третьего порядка на стр. 134 для поля с дискриминантом 697 вместо $4\rho^2-12\rho-7$ должно быть $4\rho^2-12\rho+7$; у поля с дискриминантом 729 q равняется -9, а не -1; для поля с дискриминантом 784 вместо $2\rho^2+3\rho+7$ должно быть $2\rho^2+3\rho-5$; для поля с дискриминантом 961 вместо $\rho^2+3\rho+55$ долж но быть $2\rho^2-8\rho+5$; для поля с дискриминантом 1229 q должно равняться -7 и основными единицами будут ρ^2-7, $6\rho^2-\rho-43$.

В таблице основных единиц чисто вещественных алгебраических полей четвертого порядка на стр. 135 для поля с дискриминантом 2525 q равняется 5, а не -5; для поля с дискриминантом 2624 вместо ρ^2+1 должно быть ρ^2-1; для поля с дискриминантом 4525 вместо $\frac{10\rho^3+19\rho^2-26\rho-36}{3}$ должно быть $\frac{11\rho^3+19\rho^2-26\rho-36}{3}$; для поля с дискриминантом 4913 вместо $\frac{\rho^3+2\rho-1}{2}$ должно быть $\frac{\rho^3+2\rho^2-1}{2}$; для поля с дискриминантом 5225 вместо $\frac{\rho^2-2\rho-1}{2}$ должно быть $\frac{\rho^2-2\rho+1}{2}$; для поля с дискриминантом 5725 q равняется 11, а не -11; для поля с дискриминантом 5744 вместо $-\rho^2+2$ должно быть $-\rho^2+2\rho$.

В таблице основных единиц полей четвертого порядка, для которых $r=2, t=1$, на стр. 136 для поля с дискриминантом -491 вместо $\rho^3-\rho^2+\rho+1$ должно быть $\rho^3-\rho^2+\rho-1$.

Выражаю благодарность проф. Годвину (H. J. Godwin, Uniwersity College of Swansea, Wales, Great Britain), обратившему внимание на ошибки в таблице основных единиц полей третьего порядка.

К. К. Биллевич

(Поступило в редакцию 8/I 1959 г.)