К вопросу о последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений

А. Ф. Леонтьев (Москва)

Обозначим через $y_j(z, \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ какие-нибудь линейно независимые решения уравнения

$$\sum_{j=0}^{s} Q_j(z)\, y^{(s-j)}(z) = \lambda^s y, \tag{1}$$

где $Q_j(z)$ — некоторые аналитические функции и λ — параметр (вообще говоря, комплексный). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — какая-нибудь последовательность значений параметра λ. В работе [1] (в ней вместо λ^s в правой части (1) стоит λ, что несущественно) указаны некоторые свойства последовательностей линейных агрегатов

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \sum_{j=1}^{s} a_{kj}^{(n)} y_j(z, \lambda_k) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

($a_{kj}^{(n)}$ — постоянные), составленных из решений $y_j(z, \lambda_k)$, которые равномерно сходятся в круге $|z - z_0| < r$, причем радиус r предполагается большим определенной величины, зависящий от $\{\lambda_n\}$ и коэффициентов $Q_j(z)$. В частности, там показано, что если $Q_j(z)$ — целые функции, причем $Q_0(z)$ нигде не обращается в нуль (в этом случае все $y_j(z, \lambda_k)$ — целые функции), и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\lambda_k} = 0, \tag{3}$$

то из сходимости последовательности (2) в некоторой области следует, что область существования D предельной функции $P(z)$ этой последовательности односвязна. В зависимости от $\{\lambda_k\}$ и $Q_j(z)$ область D может иметь ту или иную форму: она может быть полуплоскостью, полосой, внутренностью эллипса, параболы и т. д.

Рассмотрим, например, уравнение

$$y'' - z^2 y = -(2n + 1)\, y.$$

Ему удовлетворяет функция

$$h_n(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n}(e^{-z^2}),$$

где $H_n(z)$ — полином Чебышева—Эрмита. Возьмем в качестве $y_1(z, \lambda_k)$ функции $h_{n_k}(z)$ $(\lambda_k^2 = -(2n_k+1))$. Доказывается, что если, кроме условия (3), которое в нашем случае принимает вид

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{n_k}} = 0, \tag{3'}$$

выполняется дополнительное условие

$$\sqrt{2n_{k+1}+1} - \sqrt{2n_k+1} > \mu > 0, \tag{4}$$

то из сходимости последовательности

$$P_m(z) = \sum_{k=1}^{p_m} a_k^{(m)} h_{n_k}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

в некоторой области следует, что область существования D предельной функции $P(z)$ представляет собой горизонтальную полосу (без условия (4) можно утверждать на основе предыдущего только то, что D — односвязная область). Более того, при указанных условиях последовательность (5) сама обязательно сходится в некоторой горизонтальной полосе; эта полоса может быть меньше полосы D. Во всей полосе D к $P(z)$ сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k h_{n_k}(z), \tag{6}$$

где $a_k = \lim\limits_{m\to\infty} a_k^{(m)}$. В этом результате, как частный случай, содержится известная теорема Е. Хилла [2] о том, что при условиях (3′) и (4) область сходимости произвольного ряда (6) совпадает с областью существования суммы ряда и представляет собой горизонтальную полосу.

Отмеченные результаты указывают на большую аналогию между последовательностями (5), в частности рядами (6), с одной стороны, и последовательностями полиномов Дирихле, в частности рядами Дирихле, с другой стороны. В самом деле, для последовательностей полиномов Дирихле имеет место, например, следующая теорема ([3], [4]) (будем называть ее в дальнейшем теоремой А):

Если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$ *и последовательность полиномов Дирихле*

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \left(a_k^{(n)} e^{-\lambda_k z} + b_k^{(n)} e^{\lambda_k z}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

(полезно отметить, что функции $e^{\pm \lambda z}$ удовлетворяют уравнению $y'' = \lambda^2 y$) *равномерно сходится внутри области G, содержащей вертикальный замкнутый отрезок длины $2\pi\sigma$, то эта последовательность равномерно сходится внутри некоторой вертикальной полосы (указанный выше отрезок содержится в этой полосе).*

Предельная функция $P(z)$ является регулярной в некоторой вертикальной полосе, причем в каждом замкнутом отрезке граничных вертикальных прямых длины $2\pi\sigma$ у $P(z)$ есть хотя бы одна особая точка.

То, что говорилось относительно последовательности (5), соответствует случаю $\sigma = 0$.

Подмеченная аналогия между свойствами последовательностей (5) и (7) привела к мысли, что теорему А можно перенести в соответствующем виде на последовательность (5) и при $\sigma \neq 0$ и, кроме того, можно отказаться от ограничения (4). Использованный в статье [1] общий метод исследования не позволил (по крайней мере до сих пор) заключить о правильности этого предположения.

В настоящей заметке с помощью другого метода показывается, что ряд результатов относительно последовательностей полиномов Дирихле, в частности отмеченную выше теорему А, действительно можно перенести на последовательности (5); более того, показывается, что эти результаты можно перенести на последовательности линейных агрегатов, образованных из решений уравнения

$$y'' + q_1(z)\,y = \lambda_n^2\,y, \tag{8}$$

где $q_1(z)$ — целая функция.

В основе этого перенесения лежит тесная связь между решениями уравнения (8) и решениями простейшего уравнения

$$y'' = \lambda_n^2\,y \tag{9}$$

(частными решениями уравнения (9) являются функции $e^{\pm\lambda_n z}$). Эта связь выражается формулой (см. монографию Б. Я. Левина [5], стр. 553)

$$f(z) = \varphi(z) + \int_{-z}^{z} K(z, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{10}$$

где $f(z)$ и $\varphi(z)$ — любые решения соответственно уравнений (8) и (9), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям в точке $z = 0$, и $K(z, t)$ — ядро, которое зависит только от $q_1(z)$. Операторы преобразования вида (10) первоначально рассматривались в действительной области (указания на литературу см. в [5]). Б. Я. Левин показал, что если $q_1(z)$ — целая функция, то ядро $K(z, t)$ — целая функция переменных z и t и формула (10) имеет место во всей плоскости комплексного переменного z. По линии применения формулы (10) в комплексной области он же показал, как, исходя из теорем о полноте системы $\{e^{\lambda_n z}\}$ — системы решений уравнения (9) — в комплексной области, можно получить аналогичные теоремы о полноте системы решений уравнения (8). Тем же приемом пользуемся и мы в настоящей заметке.

Итак, рассмотрим оператор

$$F(z) = A(\Phi) = \Phi(z) + \int_{-z}^{z} K(z, t)\,\Phi(t)\,dt.$$

Каждой функции $\Phi(z)$, аналитической в области, симметричной и звездообразной относительно начала (такой области одновременно принадлежат точки z, $-z$ и соединяющий их прямолинейный отрезок), соответствует функция $F(z)$, аналитическая в той же области. Оператор $A(\Phi)$, как легко доказывается известным приемом, обратим, т. е. каждой функции $F(z)$, аналитической в области D, симметричной и звездообразной относительно начала, соответствует единственная функция $\Phi(z)$ такая, что $A(\Phi) = F(z)$.

Оператор, обратный оператору $A(\Phi)$, обозначим через $B(F)$. Отметим, что этот оператор является непрерывным.

Обозначим теперь через $y_n(z)$ и $y_{-n}(z)$ какие-нибудь два линейно независимых решения уравнения

$$y'' + q(z)\,y = \lambda_n^2 y \tag{11}$$

($q(z)$ — целая функция) и рассмотрим последовательность агрегатов

$$Q_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [\alpha_j^{(n)} y_j(z) + \beta_j^{(n)} y_{-j}(z)] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Мы покажем, что если эта последовательность равномерно сходится внутри какой-нибудь области G, симметричной и звездообразной относительно какой-нибудь точки z_0, то внутри той же области равномерно сходится и некоторая последовательность полиномов Дирихле, определенным образом связанная с первой последовательность, и обратно.

Итак, пусть последовательность (12) равномерно сходится внутри области G, симметричной и звездообразной относительно точки z_0. Тогда последовательность

$$Q_n(z + z_0) = \sum_{j=1}^{p_n} [\alpha_j^{(n)} y_j(z + z_0) + \beta_j^{(n)} y_{-j}(z + z_0)] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится внутри области G_1, полученной из G путем сдвига последней на вектор — z_0. Область G_1 симметрична и звездообразна относительно начала, функции $y_j(z + z_0)$ и $y_{-j}(z + z_0)$ суть решения уравнения (8):

$$y'' + q_1(z)\,y = \lambda_j^2 y, \qquad q_1(z) = q(z + z_0).$$

Пусть $\psi_j(z)$ и $\psi_{-j}(z)$ — те (линейно независимые) решения этого уравнения, которые (см. (10)) удовлетворяют условиям

$$\psi_j(z) = A(e^{\lambda_j z}) \qquad \psi_{-j}(z) = A(e^{-\lambda_j z}).$$

Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} y_j(z + z_0) &= a_j \psi_j(z) + b_j \psi_{-j}(z), \\ y_{-j}(z + z_0) &= c_j \psi_j(z) + d_j \psi_{-j}(z) \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

и

$$Q_n(z + z_0) = \sum_{j=1}^{p_n} [(\alpha_j^{(n)} a_j + \beta_j^{(n)} c_j)\,\psi_j(z) + (\alpha_j^{(n)} b_j + \beta_j^{(n)} d_j)\,\psi_{-j}(z)] \tag{13}$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Так как $e^{\lambda_j z} = B(\psi_j)$, $e^{-\lambda_j z} = B(\psi_{-j})$, причем оператор B непрерывен, и последовательность (13) равномерно сходится внутри C_1, то последовательность полиномов Дирихле

$$R_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [(\alpha_j^{(n)} a_j + \beta_j^{(n)} c_j) e^{\lambda_j z} + (\alpha_j^{(n)} b_j + \beta_j^{(n)} d_j) e^{-\lambda_j z}] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится внутри области G_1. Заменяя z на $z - z_0$, получим, что искомая последовательность полиномов Дирихле

$$f_n(z) = \sum_{j=1}^{p_n} [(\alpha_j^{(n)} a_j + \beta_j^{(n)} c_j) e^{-\lambda_j z_0} e^{\lambda_j z} + (\alpha_j^{(n)} b_j + \beta_j^{(n)} d_j) e^{\lambda_j z_0} e^{-\lambda_j z}] \tag{14}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится внутри исходной области G.

Проведя рассуждения в обратном порядке, убедимся, что если последовательность (14) равномерно сходится внутри области G, то внутри этой же области равномерно сходится и последовательность (12). Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Внутри области G, симметричной и звездообразной относительно точки z_0, последовательности* (12) *и* (14) *одновременно равномерно сходятся.*

На основании этой теоремы уже нетрудно распространить на последовательности (12) ряд результатов, установленных относительно последовательностей полиномов Дирихле. Например, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \sigma$ и последовательность* (12) *равномерно сходится внутри области D, содержащей вертикальный замкнутый отрезок длины $2\pi\sigma$. Тогда эта последовательность равномерно сходится внутри некоторой вертикальной полосы $\alpha < \mathcal{R}(z) < \beta$.*

Для доказательства обозначим через z_0 середину отрезка, о котором говорится в формулировке теоремы, и через G — звездообразную и симметричную относительно точки z_0 область, содержащуюся в D и содержащую этот отрезок. По условию внутри G последовательность (12) сходится равномерно. По теореме 1 внутри G равномерно сходится последовательность (14). Последовательность (14), на основании указанной выше теоремы А, сходится тогда равномерно внутри некоторой вертикальной полосы E, содержащей точку z_0. Если D_1 — вертикальная полоса, содержащаяся в E и симметричная относительно точки z_0, то внутри нее, согласно теореме 1, равномерно сходится последовательность (12). Итак, из равномерной сходимости последовательности (12) внутри D вытекает равномерная сходимость этой последовательности внутри некоторой вертикальной полосы. Отсюда, далее, следует, что существует максимальная вертикальная полоса $\alpha < \mathcal{R}(z) < \beta$, внутри которой последовательность (12) сходится равномерно; внутри любой области, содержащей вертикальный замкнутый отрезок границы этой полосы длины $2\pi\sigma$, последовательность уже не сходится равномерно. Теорема доказана полностью.

Опираясь на другие теоремы относительно последовательностей полиномов Дирихле, можно показать, что: 1) предельная функция $Q(z)$ последовательности (12) регулярна в полосе $\alpha_1 < \mathscr{R}(z) < \beta_1$, где $\alpha_1 \leqslant \alpha$, $\beta_1 \geqslant \beta$, причем в каждом отрезке граничных прямых длины $2\pi\sigma$ у $Q(z)$ есть хотя бы одна особая точка; 2) существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_j^{(n)} = \alpha_j$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_j^{(n)} = \beta_j$; 3) если $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \mu > 0$, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} [\alpha_j y_j(z) + \beta_j y_{-j}(z)]$ сходится к $Q(z)$ во всей полосе регулярности $\alpha_1 < \mathscr{R}(z) < \beta_1$, и т. д.

Путем замены в уравнении (8) переменного z на iz получим, что если λ_n — чисто мнимые: $\lambda_n = i \mid \lambda_n \mid$, и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = \sigma$, то из равномерной сходимости последовательности (12) в области D, содержащей горизонтальный отрезок длины $2\pi\sigma$, следует равномерная сходимость этой последовательности в некоторой горизонтальной полосе.

Для функций Чебышева—Эрмита $h_{n_k}(z)$ имеем: $\lambda_k = i\sqrt{2n_k + 1}$, и, следовательно, соответствующий результат формулируется так:

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{2n_k+1}} = \sigma$ *и последовательность*

$$P_m(z) = \sum_{j=1}^{p_m} c_j^{(m)} h_{n_j}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится в области, содержащей горизонтальный отрезок длины $2\pi\sigma$, *то эта последовательность сходится в некоторой горизонтальной полосе* $\alpha < \mathscr{I}(z) < \beta$.

Кроме того, можно отметить, что предельная функция $P(z)$ регулярна в некоторой полосе $\alpha_1 < \mathscr{I}(z) < \beta_1$, причем в каждом отрезке граничных прямых длины $2\pi\sigma$ у $P(z)$ есть хотя бы одна особая точка, что существуют пределы $\lim\limits_{m\to\infty} c_j^{(m)} = c_j$ и что если $\sqrt{2n_{j+1} + 1} - \sqrt{2n_j + 1} > \mu > 0$, то ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j h_{n_j}(z)$ сходится к $P(z)$ во всей полосе регулярности $\alpha_1 < \mathscr{I}(z) < \beta_1$ и т. д.

В заключение рассмотрим вопрос о том, как можно решить уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} D^k F = f(z), \tag{15}$$

где

$$DF = F'' + q(z)F, \quad D^k = D(D^{k-1}),$$

a_{2k} — постоянные коэффициенты и $f(z)$ — некоторая аналитическая функция (другой способ решения уравнения (15), где $f(z) \equiv 0$ и Dy означает левую часть уравнения (1), рассматривался в статье [1]). Пусть $f(z)$ регулярна в области G, симметричной и звездообразной относительно точки z_0. Ради простоты будем считать, что $z_0 = 0$ (к этому случаю всегда можно прийти путем замены z на $z + z_0$). Пусть, далее, $F(z)$ и $\Phi(z)$ — две функции, аналитические в области D, симметричной и звездообразной относительно начала, связанные соотношением

$$F(z) = A(\Phi).$$

Мы имеем, что

$$DF = A(\Phi''). \tag{16}$$

Эта формула в действительной области установлена В. А. Марченко ([6], стр. 400), но она верна, конечно, и в комплексной области. Впрочем, этот факт можно установить и так.

Соотношение (16), как это легко проверить, справедливо для $\Phi = e^{\lambda_n z}$ и $F = \psi_n(z)$. Выберем $\{\lambda_n\}$ так, чтобы система $\{e^{\lambda_n z}\}$ была полной в некоторой окрестности начала. Для этого достаточно положить $\lambda_n = n$. В силу такого выбора, найдется последовательность $\{P_m(z)\}$ агрегатов, составленных из функций системы $\{e^{\lambda_n z}\}$, которая в окрестности начала равномерно сходится к $\Phi(z)$. Пусть

$$Q_m(z) = A(P_m)$$

($Q_m(z)$ — линейные комбинации функций системы $\{\psi_n(z)\}$). Мы имеем:

$$D(Q_m) = A(P''_m).$$

Устремляя m к ∞, в пределе получим: $D(F) = A(\Phi'')$. Это равенство, справедливое в некоторой окрестности начала, выполняется тогда и в области D. Отсюда находим:

$$D^k F = A(\Phi^{(2k)})$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} D^k F = A\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z)\right) = f(z). \tag{17}$$

Каковы должны быть коэффициенты a_{2k} для того, чтобы встречающиеся в (17) ряды сходились? Будем предполагать, что

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

является целой функцией экспоненциального типа, т. е.

$$|L(z)| < e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \qquad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Тогда

$$|a_{2k}| < (\sigma+\varepsilon)^{2k}, \qquad k > N,$$

и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z)$$

равномерно сходится в окрестности начала, если функция $\Phi(z)$ регулярна в круге $|z| < \rho$, $\rho > \sigma$. В силу (17), левая часть уравнения (15) имеет смысл (ряд сходится) в достаточно малой окрестности начала, если $F(z)$ регулярна при $|z| < \rho$, $\rho > \sigma$. По этой причине мы ставим вопрос об отыскании решений уравнения (15), аналитических по крайней мере в круге $|z| < \rho$, $\rho > \sigma$.

Из соотношения (17) находим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z) = B(f), \tag{18}$$

где B — оператор, обратный оператору A. Функция $B(f)$ является аналитической в области G — области, в которой по условию регулярна $f(z)$. Общее решение уравнения (18) складывается из частного решения неоднородного уравнения (18) и общего решения однородного уравнения

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!} \Phi^{(2k)}(z) = 0.$$

В работах [3], [7], [8] указано, как можно найти частное решение неоднородного уравнения. В работах [3], [8], [9], [10] (см. также обзорную статью [11]) изложено, как решается однородное уравнение. Найдя общее решение $\Phi(z)$ уравнения (18), по формуле

$$F(z) = A(\Phi)$$

найдем тогда общее решение исходного уравнения (11).

Таким образом, вопрос о решении уравнения (15) свелся к вопросу о решении уже изученного в достаточной степени уравнения (18).

(Поступило в редакцию 30/IX 1957 г.)

Литература

1. А. Ф. Леонтьев, О последовательностях линейных агрегатов, образованных из решений дифференциальных уравнений, Изв. АН СССР, серия матем., т. **22** (1958), 201—242.
2. E. Hille, Contributions to the theory of Hermitian series, Duke Math. Journ., **5**, N **4** (1939), 875—936.
3. А. Ф. Леонтьев, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. **XXXIX** (1951).
4. I. P. Kahane, Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier, **5** (1953—1954 (1955)), 39—130.
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.
6. В. А. Марченко, Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Моск. Матем. об-ва, **1** (1952), 327—420.
7. H. Muggli, Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Comment. Math. Helv., **11** (1938), 151—179.
8. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1952.
9. I. F. Ritt, On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients, Trans. Amer. Math. Soc., **18** (1917), 27—49.
10. G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et a coefficients constants, Ann. Éc. Norm. Sup., **46** (1929), 25—53.
11. А. Ф. Леонтьев, О свойствах последовательностей линейных агрегатов, сходящихся в области, где порождающая линейные агрегаты система функций не является полной, Успехи матем. наук, т. **XI**, вып. **5(71)** (1956), 26—37.