Об оценке ошибки приближенных методов отыскания собственных значений эрмитова ядра

И. П. Мысовских (Ленинград)

Говоря о приближенных методах решения интегральных уравнений, мы имеем в виду два основных метода: метод замены ядра на близкое (например, вырожденное) и метод механических квадратур. Если вопрос об оценке ошибки при решении неоднородного уравнения решен удовлетворительно [1], [2], [3], то этого нельзя сказать относительно вопроса об оценке ошибки собственных значений*. Из немногочисленных работ, посвященных оценке ошибки собственных значений, укажем на работу Виландта [4], в которой рассматривается оценка ошибки величин, обратных собственным значениям эрмитова ядра, вычисляемых способом механических квадратур. Однако указанные там априорные оценки сильно завышены.

В настоящей работе указываются апостериорные оценки ошибки, возникающей при приближенном вычислении собственных значений интегрального уравнения Фредгольма второго рода с эрмитовым ядром. В случае метода замены ядра на близкое такая оценка почти непосредственно вытекает из теоремы Г. Вейля, позволяющей сравнивать собственные числа двух вполне непрерывных самосопряженных операторов в пространстве Гильберта (одном и том же). В случае метода механических квадратур нам приходится сравнивать собственные значения двух операторов, определенных в различных пространствах, поэтому непосредственное применение теоремы Вейля здесь невозможно. В работе указывается прием, который позволяет решить задачу об оценке ошибки собственного значения двукратным применением теоремы Вейля. Основная идея этого приема — переход к повторному ядру с индексом два $K_2(s, t)$ — уже применялась мною при оценке ошибки решения неоднородного уравнения способом механических квадратур [3]. Отметим здесь же, что этот прием пригоден не только для эрмитовых ядер. Ядро предполагается эрмитовым лишь для того, чтобы иметь возможность использовать теорему Вейля.

Пусть $K(s, t)$ — эрмитово ядро в квадрате $a \leqslant s,\ t \leqslant b$, $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$, удовлетворяющее условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds dt < +\infty. \tag{1}$$

* Собственным значением ядра $K(s, t)$ или матрицы K, как это принято в теории интегральных уравнений, мы называем те значения параметра λ, при которых однородное уравнение $\varphi - \lambda K\varphi = 0$ имеет отличные от нуля решения.

Способ замены ядра на близкое для вычисления собственных значений ядра $K(s, t)$ сводится к тому, что ядро $K(s, t)$ заменяется ядром $M(s, t)$, собственные значения которого можно найти, при этом разность

$$N(s, t) = K(s, t) - M(s, t)$$

предполагается малой в каком-нибудь смысле. Собственные значения ядра $M(s, t)$ и принимаются за приближенные значения собственных чисел ядра $K(s, t)$.

В частности, в качестве $M(s, t)$ можно брать вырожденнсе ядро

$$M(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s) \beta_i(t). \tag{2}$$

При этом систему функций $\alpha_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно считать линейно независимой. Как известно, в этом случае определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\gamma_{11} & -\lambda\gamma_{12} & \ldots & -\lambda\gamma_{1n} \\ -\lambda\gamma_{21} & 1 - \lambda\gamma_{22} & \ldots & -\lambda\gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda\gamma_{n1} & -\lambda\gamma_{n2} & \ldots & 1 - \lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix},$$

где

$$\gamma_{ik} = \int_a^b \beta_i(t) \alpha_k(t)\, dt,$$

совпадает со знаменателем Фредгольма ядра $M(s, t)$, и, следовательно, совокупность собственных значений ядра $M(s, t)$ совпадает с совокупностью собственных значений матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Отметим еще тот хорошо известный факт, что если ядро $K(s, t)$ — эрмитово и $M_1(s, t)$ таково, что

$$| K(s, t) - M_1(s, t) | \leqslant \eta \quad \text{или} \quad \left\{ \int_a^b \int_a^b | K(s, t) - M_1(s, t) |^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \eta,$$

то эрмитово ядро

$$M(s, t) = \frac{M_1(s, t) + \overline{M_1(t, s)}}{2}$$

удовлетворяет тем же неравенствам

$$| K(s, t) - M(s, t) | \leqslant \eta \quad \text{или} \quad \left\{ \int_a^b \int_a^b | K(s, t) - M(s, t) |^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \eta.$$

Поэтому в последующем мы будем предполагать, что приближающее ядро $M(s, t)$ эрмитово.

Метод механических квадратур для вычисления собственных значений ядра $K(s, t)$ сводится к следующему. Возьмем какую-либо формулу механических квадратур

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k) + \varepsilon; \tag{4}$$

здесь t_k — узлы, A_k — коэффициенты формулы и ε — остаточный член, причем все эти величины зависят от n. Для упрощения записи значок n опускаем. В интегральном уравнении

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

заменим интегральный член квадратурной суммой по формуле (4). Тогда интегральное уравнение заменится соотношением

$$\varphi(s) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\varphi(t_k) + \lambda\varepsilon(s). \tag{5}$$

Считаем, что функции

$$K(s, t_1),\quad K(s, t_2),\ \ldots,\quad K(s, t_n)$$

линейно независимы, так как в противном случае в соотношении (5) под знаком суммы можно было бы уменьшить число слагаемых. Отбрасывая в (5) слагаемсе, содержащее $\varepsilon(s)$, получим приближенное соотношение

$$\varphi(s) \doteq \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\varphi(t_k).$$

Заменяя в последнем соотношении $\varphi(s)$ на $\tilde{\varphi}(s)$, мы получим точное соотношение

$$\tilde{\varphi}(s) = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\tilde{\varphi}(t_k).$$

Положив в этом соотношении $s = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и воспользовавшись обозначениями $\tilde{\varphi}(t_k) = \tilde{\varphi}_k$, $K(t_i, t_k) = K_{ik}$, получим линейную алгебраическую систему

$$\tilde{\varphi}_i = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K_{ik}\tilde{\varphi}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Значения параметра λ, при которых определитель этой системы равен нулю, и принимаются за приближения к собственным значениям ядра $K(s, t)$. Иначе говоря, метод механических квадратур для приближенного вычисления собственных значений ядра $K(s, t)$ сводится к вычислению собственных значений матрицы

$$L = \begin{pmatrix} A_1K_{11} & A_2K_{12} & \ldots & A_nK_{1n} \\ A_1K_{21} & A_2K_{22} & \ldots & A_nK_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1K_{n1} & A_2K_{n2} & \ldots & A_nK_{nn} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $K_{ik} = K(t_i, t_k)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Отметим, что указываемые ниже оценки не учитывают ошибок округления. Иначе говоря, в случае метода замены ядра на близкое мы предполагаем, что собственные значения близкого ядра $M(s, t)$ вычисляются точно, в случае метода механических квадратур предполагается, что элементы матрицы (6) суть точные числа и ее собственные числа вычисляются точно

Приведем формулировку теоремы Вейля (см., например, [5], стр. 258).

Пусть B и $A = B + C$ — вполне непрерывные самосопряженные операторы в пространстве Гильберта. Перенумеруем положительные собственные значения оператора A в порядке неубывания:

$$\lambda_1^{(A)} \leqslant \lambda_2^{(A)} \leqslant \lambda_3^{(A)} \leqslant \ldots .$$

Отрицательные собственные значения перенумеруем отрицательными целыми числами:

$$\lambda_{-1}^{(A)} \geqslant \lambda_{-2}^{(A)} \geqslant \lambda_{-3}^{(A)} \geqslant \ldots .$$

При этом считаем, что собственное значение повторяется в соответствующей последовательности столько раз, какова его кратность. Таким же образом перенумеруем собственные числа оператора B:

$$\lambda_j^{(B)} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{\lambda_j^{(A)}} - \frac{1}{\lambda_j^{(B)}} \right| \leqslant \| C \| \quad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{7}$$

где $\| C \|$ — норма оператора C.

Из неравенства (7) легко получить оценку $| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} |$, если $\| C \|$ достаточно мала. В самом деле,

$$| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | \leqslant | \lambda_j^{(A)} | \cdot | \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \| . \tag{8}$$

Далее, имеем:

$$| \lambda_j^{(A)} | \leqslant | \lambda_j^{(B)} | + | \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | .$$

Подставляя правую часть последнего неравенства вместо $| \lambda_j^{(A)} |$ в (8), получим:

$$| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | \leqslant (| \lambda_j^{(B)} | + | \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} |) \cdot | \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \| .$$

Отсюда, если предположить, что

$$| \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \| < 1, \tag{9}$$

найдем:

$$| \lambda_j^{(A)} - \lambda_j^{(B)} | \leqslant \frac{| \lambda_j^{(B)} |^2 \cdot \| C \|}{1 - | \lambda_j^{(B)} | \cdot \| C \|} . \tag{10}$$

Оценка (10), очевидно, апостериорная. Ее можно применять, если уже вычислены собственные значения оператора B. Оценку (10) можно рассматривать и как априорную, если известна верхняя граница для $| \lambda_j^{(B)} |$.

При вычислении собственных значений эрмитова ядра $K(s, t)$ методом замены ядра на близкое мы имеем соотношение

$$K(s, t) = M(s, t) + N(s, t),$$

причем интеграл

$$N^2 = \int_a^b \int_a^b |N(s, t)|^2 ds dt \tag{11}$$

предполагается малым. Именно, считаем, что

$$|\lambda_j^{(M)}| N < 1.$$

Обозначим собственные значения интегральных операторов с ядрами $K(s, t)$ и $M(s, t)$ через $\lambda_j^{(K)}$ и $\lambda_j^{(M)}$. Так как норма интегрального оператора с ядром $N(s, t)$ не превосходит N, то из (10) получаем:

$$|\lambda_j^k - \lambda_j^{(M)}| \leqslant \frac{|\lambda_j^{(M)}|^2 N}{1 - |\lambda_j^{(M)}| N} \quad (j = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{12}$$

Очевидно, неравенство (12) останется справедливым, если в его правой части вместо $|\lambda_j^{(M)}|$ написать $|\lambda_j^{(K)}|$. Так как для наименьшего по абсолютной величине собственного значения $\lambda_j^{(K)}$ $(j = +1$ или $-1)$ справедлива оценка

$$|\lambda_j^{(K)}| \leqslant \sqrt{\frac{k_2}{k_4}},$$

где

$$k_l = \int_a^b K_l(s, s) ds \quad (l = 1, 2, \ldots),$$

что мы получаем априорную оценку ошибки для наименьшего по абсолютной величине собственного значения ядра $K(s, t)$.

В дальнейшем мы будем пользоваться оценкой (10) и в случае, когда B и $A = B + C$ — эрмитовы матрицы. В этом случае в качестве верхней границы нормы матрицы C можно взять

$$\left\{ \sum_{i,k=1}^{n} |c_{ik}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

где c_{ik} — элементы матрицы C.

Перейдем к способу механических квадратур. Собственные значения ядра $K(s, t)$ будем обозначать через λ_j и собственные значения матрицы L—через $\tilde{\lambda}_j$. Будем считать, что собственные числа λ_j и $\tilde{\lambda}_j$ занумерованы в порядке неубывающих модулей, причем собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. По определению повторного ядра с индексом 2 имеем:

$$K_2(s, t) = \int_a^b K(s, t') K(t', t) dt'.$$

Применяя к интегралу в правой части формулу (4), получим:

$$K_2(s, t) = \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k) K(t_k, t) + \varepsilon(s, t), \tag{14}$$

где $\varepsilon(s, t)$ — остаточный член квадратурной формулы:

$$\varepsilon(s, t) = \int_a^b K(s, t') K(t', t)\, dt' - \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k) K(t_k, t). \tag{15}$$

Величина $\varepsilon(s, t)$, вообще говоря, — малая, и умение ее оценивать является совершенно необходимым. Эта величина уже встречалась при оценке ошибки решения неоднородного интегрального уравнения [3].

Из формулы (14) вытекает, что

$$K_2(s, t) = M(s, t) + \varepsilon(s, t),$$

где $M(s, t)$ — вырожденное эрмитово ядро

$$M(s, t) = \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k) K(t_k, t) \tag{16}$$

и $\varepsilon(s, t)$—малое ядро. Предположим, что коэффициенты $A_k > 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда нетрудно проверить, что эрмитово ядро (16) положительно и, следовательно, положительны все его собственные значения.

Обозначим собственные значения ядра $M(s, t)$ через $\approx{\lambda}_j$ (считаем их занумерованными в порядке неубывания с учетом кратности). Так как собственными значениями ядра $K_2(s, t)$ являются λ_j^2, то из соотношения (14) и теоремы Вейля вытекает:

$$|\lambda_j^2 - \tilde{\tilde{\lambda}}_j| \leqslant \frac{\tilde{\tilde{\lambda}}_j^2 \cdot \|\varepsilon\|}{1 - |\tilde{\tilde{\lambda}}_j| \cdot \|\varepsilon\|}, \tag{17}$$

где через $\|\varepsilon\|$ обозначена норма интегрального оператора с ядром $\varepsilon(s, t)$.

Рассмотрим вырожденное ядро $M(s, t)$, определяемое формулой (16). Пусть $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(t)$ из формулы (2) будут соответственно

$$\alpha_i(s) = \sqrt{A_i}\, K(s, t_i), \quad \beta_i(t) = \sqrt{A_i}\, K(t_i, t).$$

$K(s, t_i)$ можно считать линейно независимыми. Собственные числа $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$ ядра $M(s, t)$ совпадают с собственными значениями матрицы Γ, определяемой формулой (3), причем элементы Γ

$$\gamma_{ik} = \sqrt{A_i}\sqrt{A_k}\int_a^b K(t_i, t) K(t, t_k)\, dt.$$

Применяя к интегралу в правой части формулу (4), получим:

$$\gamma_{ik} = \sqrt{A_i}\sqrt{A_k}\left\{\sum_{l=1}^{n} A_l K_{il} K_{lk} + \varepsilon_{ik}\right\}. \tag{18}$$

Составим элемент i-ой строки и k-го столбца квадрата матрицы L, определяемой формулой (6),

$$\{L^2\}_{ik} = \sum_{l=1}^{n} A_l K_{il} A_k K_{lk}.$$

Введем в рассмотрение диагональную неособенную матрицу

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{A_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{A_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{A_n} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что элемент i-ой строки и k-го столбца матрицы DL^2D^{-1} равен

$$\{DL^2D^{-1}\}_{ik} = \sqrt{A_i}\sqrt{A_k} \sum_{i=1}^{n} A_l K_{il} K_{lk}.$$

Теперь из соотношения (18) видно, что

$$\Gamma = DL^2D^{-1} + E, \tag{19}$$

где введено обозначение

$$E = \begin{pmatrix} A_1\varepsilon_{11} & \sqrt{A_1A_2}\varepsilon_{12} & \dots & \sqrt{A_1A_n}\varepsilon_{1n} \\ \sqrt{A_2A_1}\varepsilon_{21} & A_2\varepsilon_{22} & \dots & \sqrt{A_2A_n}\varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{A_nA_1}\varepsilon_{n1} & \sqrt{A_nA_2}\varepsilon_{n2} & \dots & A_n\varepsilon_{nn} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрицы DL^2D^{-1} и E — эрмитовы, матрица E — малая. Собственные числа матрицы Γ суть $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$, собственные числа DL^2D^{-1} суть $\tilde{\lambda}_j^2$. Воспользовавшись неравенством (10) для матриц, получим:

$$|\tilde{\tilde{\lambda}}_j - \tilde{\lambda}_j^2| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^4 \cdot \|E\|}{1 - \tilde{\lambda}_j^2 \|E\|}, \tag{21}$$

где $\|E\|$ — норма матрицы E. Из неравенства (21) находим:

$$|\tilde{\tilde{\lambda}}_j| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{1 - \tilde{\lambda}_j^2 \|E\|}. \tag{22}$$

В правой части (17) фигурирует абсолютная величина неизвестного собственного значения $\tilde{\tilde{\lambda}}_j$, поэтому мы ее заменим правой частью неравенства (22). Выполняя простые преобразования, получим:

$$|\lambda_j^2 - \tilde{\tilde{\lambda}}_j| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^4 \|\varepsilon\|}{(1 - \tilde{\lambda}_j^2 \|E\|)[1 - \tilde{\lambda}_j^2(\|E\| + \|\varepsilon\|)]}. \tag{23}$$

Из неравенств (21) и (23) находим:

$$|\tilde{\lambda}_j^2-\lambda_j^2| \leqslant |\tilde{\lambda}_j^2-\tilde{\tilde{\lambda}}_j| + |\tilde{\tilde{\lambda}}_j-\lambda_j^2| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^4\,\|E\|}{1-\tilde{\lambda}_j^2\,\|E\|} + \frac{\tilde{\lambda}_j^4\,\|\varepsilon\|}{(1-\tilde{\lambda}_j^2\,\|E\|)\,[1-\tilde{\lambda}_j^2\,(\|E\|+\|\varepsilon\|)]} =$$

$$= \frac{\tilde{\lambda}_j^4\,(\|E\|+\|\varepsilon\|)}{1-\tilde{\lambda}_j^2\,(\|E\|+\|\varepsilon\|)}$$

или

$$|\tilde{\lambda}_j^2-\lambda_j^2| \leqslant \frac{\tilde{\lambda}_j^4\,(\|E\|+\|\varepsilon\|)}{1-\tilde{\lambda}_j^2\,(\|E\|+\|\varepsilon\|)} = \Delta_j. \tag{24}$$

Неравенство (24) имеет место при условии

$$\tilde{\lambda}_j^2\,(\|E\|+\|\varepsilon\|) < 1.$$

Будем считать, что λ_j и $\tilde{\lambda}_j$ одного знака. Из неравенства (24) имеем:

$$|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j| \leqslant \frac{\Delta_j}{|\tilde{\lambda}_j+\lambda_j|}. \tag{25}$$

Воспользовавшись очевидным неравенством

$$|\tilde{\lambda}_j+\lambda_j| \geqslant 2\,|\tilde{\lambda}_j| - |\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|$$

и неравенством (25), получаем:

$$|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j| \leqslant \frac{\Delta_j}{2\,|\tilde{\lambda}_j| - |\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|}.$$

Разрешая последнее неравенство относительно $|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j|$ и предполагая, что

$$\tilde{\lambda}_j^2\,(\|E\|+\|\varepsilon\|) < \frac{1}{2}, \tag{26}$$

получаем:

$$|\tilde{\lambda}_j-\lambda_j| \leqslant \frac{\Delta_j}{|\tilde{\lambda}| + \sqrt{\tilde{\lambda}_j^2-\Delta_j}}, \tag{27}$$

где Δ_j определяется формулой (24).

Оценка (27) — апостериорная. Ее можно применять после того, как найдено собственное значение матрицы L. В оценку входят норма интегрального оператора с малым ядром $\varepsilon(s, t)$, определяемым формулой (15), и норма матрицы E (см. (20)) с малыми элементами. При фактическом выполнении оценок нормы можно заменять их верхними границами: в случае ядра $\varepsilon(s, t)$

$$\|\varepsilon\| \leqslant \left\{\int_a^b\int_a^b |\varepsilon(s, t)|^2 ds dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

в случае матрицы E

$$\| E \| \leqslant \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} A_i A_k \mid \varepsilon_{ik} \mid^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Указанные оценки не учитывают ошибок округления. По этому поводу можно сделать следующее замечание. Ошибку округления в элементах матрицы L (см. (6)) можно легко учесть, если воспользоваться неравенством (10). Что касается ошибки округления, которая возникает при вычислении собственных чисел матрицы L, то она зависит от способа, которым производится это вычисление, и от числа знаков, с которыми ведутся вычисления. Абсолютная величина этой ошибки или ее верхняя граница должна быть прибавлена к той границе ошибки, которая указана в настоящей статье Аналогичное замечание можно сделать и о методе вырожденного ядра.

Можно указать также оценки, зависящие от n, если воспользоваться представлением остаточного члена формулы механических квадратур.

Пример 1. Будем вычислять собственные значения симметрического ядра

$$K(s, t) = st - \frac{s^3 t^3}{6} + \frac{s^5 t^5}{120}, \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant 1,$$

методом замены ядра на близкое. В качестве близкого ядра $M(s, t)$ возьмем

$$M(s, t) = st - \frac{s^3 t^3}{6}, \quad 0 \leqslant s, \ t \leqslant 1.$$

В результате вычислений получим следующие собственные значения ядра $M(s, t)$:

$$\lambda_1^{(M)} = 3{,}18909, \quad \lambda_2^{(M)} = -246{,}94.$$

Найдем верхнюю границу для нормы ядра $N(s, t) = K(s, t) - M(s, t)$:

$$N = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{s^5 t^5}{120} \right)^2 ds dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1320}.$$

Применение неравенства (12) дает:

$$| \lambda_1^{(K)} - \lambda_1^{(M)} | \leqslant 7{,}72 \cdot 10^{-3}, \quad | \lambda_2^{(K)} - \lambda_2^{(M)} | \leqslant 56{,}8. \tag{28}$$

Так как ядро $K(s, t)$ — вырожденное, то его собственные значения можн подсчитать:

$$\lambda_1^{(K)} = 3{,}18406, \quad \lambda_2^{(K)} = -261{,}67.$$

Таким образом,

$$| \lambda_1^{(K)} - \lambda_1^{(M)} | = 5{,}03 \cdot 10^{-3}, \quad | \lambda_2^{(K)} - \lambda_2^{(M)} | = 14{,}73$$

мы видим, что для первого собственного значения оценка ошибки (28) превышает действительную ошибку менее, чем в два раза, для второго собственного значения — примерно в четыре раза.

Пример 2. Рассмотрим симметрическое ядро

$$K(s, t) = \sin(s + t), \quad 0 \leqslant s, \; t \leqslant 1.$$

Вычислим собственные значения этого ядра методом механических квадратур, взяв в качестве квадратурной формулы формулу Гаусса с двумя узлами: $t_1 = 0{,}21132$, $t_2 = 0{,}78868$. Коэффициенты $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$. Мы приходим к задаче о вычислении собственных значений $\widetilde{\lambda}_i$ матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 0{,}20508 & 0{,}42073 \\ 0{,}42073 & 0{,}49999 \end{pmatrix}.$$

В результате вычислений получаем:

$$\widetilde{\lambda}_1 = 1{,}25257, \quad \widetilde{\lambda}_2 = -10{,}7196.$$

Чтобы воспользоваться неравенством (27), необходимо выполнить оценку величины

$$\varepsilon(s, t) = \int_0^1 \sin(s + t')\sin(t' + t)\,dt' - \sum_{k=1}^{2} A_k \sin(s + t_k)\sin(t_k + t).$$

Применим с этой целью выражение остаточного члена формулы Гаусса

$$R_n[f] = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\left\{\frac{1.2\ldots n}{(n+1)\ldots 2n}\right\}^2 \frac{f^{(2n)}(\xi)}{1.2\ldots 2n}, \quad a \leqslant \xi \leqslant b.$$

В нашем случае $n = 2$ и четвертая производная от подынтегральной функции по t' равна

$$f^{(\mathrm{IV})}(t') = -8\cos(2t' + s + t)$$

и, следовательно,

$$|f^{(\mathrm{IV})}(\xi)| \leqslant 8.$$

Имеем:

$$|\varepsilon(s, t)| \leqslant \frac{1}{5}\left\{\frac{1.2}{3.4}\right\}^2 \frac{8}{1.2.3.4} = \frac{1}{540},$$

откуда вытекает, что

$$\|E\| + \|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{270}.$$

Условие (26) выполнено:

$$\widetilde{\lambda}_2^2(\|E\| + \|\varepsilon\|) \leqslant 114{,}9 \cdot \frac{1}{270} = 0{,}426 < \frac{1}{2},$$

и мы можем воспользоваться оценкой (27). По формуле (24) находим:

$$\Delta_1 = 9{,}18 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta_2 = 85{,}4.$$

Из неравенства (27) получаем:

$$|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| \leqslant 3{,}67 \cdot 10^{-3}, \quad |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| \leqslant 5{,}29.$$

Ядро $\sin(s+t)$ — вырожденное, и его собственные значения λ_j $(j = 1, 2)$ суть

$$\lambda_1 = 1{,}25098, \quad \lambda_2 = -10{,}9533;$$

поэтому

$$|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| = 1{,}59 \cdot 10^{-3}, \quad |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| = 0{,}2337.$$

Таким образом, полученная оценка превышает действительную ошибку для первого собственного значения примерно в 2,5 раза, а для второго — в двадцать три раза.

Факт, что оценка получилась грубой, вызван тем, что мы воспользовались завышенной оценкой для $\| E \|$ и $\| \varepsilon \|$. В самом деле, легко подсчитать, что

$$\varepsilon(s, t) = \frac{1}{4}\left[C_1 \sin(s+t) + C_2 \cos(s+t)\right],$$

где

$$C_1 = 1 - \cos 2 - \sin 2t_1 - \sin 2t_2 = 0{,}600 \cdot 10^{-3},$$

$$C_2 = \cos 2t_1 + \cos 2t_2 - \sin 2 = -0{,}385 \cdot 10^{-3},$$

и

$$\left\{\int_0^1 \int_0^1 \varepsilon^2(s, t)\, ds dt\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}924 \cdot 10^{-3}, \quad \left\{\sum_{i,k=1}^{2} A_i A_k \varepsilon_{ik}^2\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}927 \cdot 10^{-3}.$$

Следовательно,

$$\| E \| + \| \varepsilon \| \leqslant 1{,}851 \cdot 10^{-3}.$$

Применение неравенства (27) дает:

$$|\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1| \leqslant 1{,}825 \cdot 10^{-3}, \quad |\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2| \leqslant 1{,}56,$$

и мы видим, что оценка ошибки для первого собственного значения превышает действительную ошибку менее, чем в 1,2 раза, а для второго — менее, чем в 7 раз.

(Поступило в редакцию 27/VII 1957 г.)

Литература

1. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
2. Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи матем. наук, т. III, вып. 6(28) (1948), 89—185.
3. И. П. Мысовских, Об оценке ошибки, возникающей при решении интегрального уравнения способом механических квадратур, Вестник ЛГУ, № 19, серия матем., мех. и астр., вып. 4 (1956), 66—72.
4. H. Wielandt, Error bounds for eigenvalues of symmetric integral equations, Proc. Symposium in appl. Math., Vol. VI: Numerical Analysis, New York, Toronto, London, 1956, 261—282.
5. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, ИЛ, 1954.