Комбинаторная топология незамкнутых множеств. III

К. А. Ситников (Москва)

Изоморфизм двойственности

Оглавление

Введение

В настоящей работе доказывается с помощью первого закона двойственности, установленного мною в [1], целая серия теорем двойственности для произвольных множеств, лежащих в сферических пространствах S^n. Из этих теорем двойственности следует, что все в настоящее время определенные предельные группы нервов бесконечных покрытий данного множества и все предельные группы компактов, содержащихся в данном множестве, дуализируемы. При этом каждая теорема двойственности утверждает изоморфизм или двойственность группы, основанной на бесконечных покрытиях, с группой с компактными носителями. Иначе обстоит дело с группами, основанными на конечных покрытиях: они, как показано в работах П. С. Александрова [3] и [4], не дуализируемы. Недуализируемым оказывается и другое геометрическое свойство множеств: соединимость точек континуумами — континуальная связность (см. фиг. 2 работы [1]). Несмотря на это, группы Бетти с компактными носителями дуализируемы. Отсюда видно, что в случае произвольных множеств между геометрическими и алгебраическими подходами имеется бóльшая разница, чем в случае замкнутых множеств (об этом см. также главу 3 работы [2]).

Доказываемые в настоящей работе теоремы двойственности справедливы для произвольных множеств, лежащих в n-мерных замкнутых многообразиях, удовлетворяющих обычным условиям ацикличности. Если эти условия не выполняются, то, как и в случае замкнутых множеств, вместо теорем двойственности имеют место теоремы расположения (см. [5] и [6]). Для случая, когда объемлющее пространство не есть n-мерное многообразие, законы двойственности для произвольных множеств, по-видимому, не могут быть получены с имеющимися в настоящее время группами Бетти. Причиной этому — то, что произвольное разбиение пространства симметрично, тогда как законы двойственности типа Колмогорова не симметричны по отношению к замкнутому и открытому множествам и имеют дело с неустойчивыми группами (см. главу 3 работы [1]).

Напомним содержание первой теоремы двойственности, доказанной в [1], которая для нас будет основной в настоящей работе.

Первая теорема двойственности. *Пусть M^n — замкнутое, ориентируемое, гомологическое n-мерное многообразие и p, q — неотрицательные целые числа, дающие в сумме $n-1$. Предполагаем, что M^n ациклично в размерностях q и $q+1$ по данной произвольной группе коэффициентов $\mathfrak{A}$. Тогда для любого множества $A \subseteq M^n$ и $B = M^n \setminus A$ группы $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$, взятые по группе коэффициентов $\mathfrak{A}$, изоморфны между собой.*

При этом $\Delta^q B$ есть новая группа, основанная на более сильных, чем обычные вьеторисовские, циклах и гомологиях: под Δ-циклом $z^q = \{z_k^q, x_k^{q+1}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ в B понимается последовательность лежащих на каком-либо компакте $\Psi \subseteq B$ ε_k-циклов z_k^q и ε_k-цепей x_k^{q+1}, $\varepsilon_k \to 0$, причем $\Delta x_k^{q+1} = z_{k+1}^q - z_k^q$. Цикл z^q ограничивает в B, если на некотором компакте Ψ', $\Psi \subseteq \Psi' \subseteq B$, существуют такие ε_k'-цепи y_k^{q+1} и x_k^{q+2}, $\varepsilon_k' \to 0$, что

$$\Delta y_k^{q+1} = z_k^q, \quad \Delta x_k^{q+2} = y_{k+1}^{q+1} - y_k^{q+1} - x_k^{q+1}.$$

В теореме двойственности, сформулированной выше, не предполагается, что группа коэффициентов $\mathfrak{A}$ снабжена какой-либо топологией. Однако, если $\mathfrak{A}$ — бикомпактная топологическая группа, то группа $\Delta^q B$ совпадает со старой вьеторисовской группой $\Delta_c^q B$ с компактными носителями (доказательство см. в [1], стр. 39). Если условие бикомпактности не выполнено, в частности, в важнейшем случае, когда $\mathfrak{A}$ — просто группа целых чисел, группа $\Delta^q B$ существенно отлична от группы $\Delta_c^q B$. Это можно видеть на примере, когда B — соленоид (доказательство см. в [2], стр. 413).

Группа $\nabla^p A$ есть известная ∇-группа, основанная на бесконечных цепях, взятых на нервах открытых звездно-конечных покрытий множества A. Если размерность множества A равна p, то группа $\nabla^p A$ по целочисленной области коэффицентов имеет простой геометрический смысл: ее элементы находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами непрерывных отображений множества A в p-мерную сферу S^p.

Приведем пример, показывающий о сколь сложных множествах могут быть получены результаты с помощью первой теоремы двойственности. Возьмем известное урысоновское разбиение n-мерного пространства на два множества, из которых ни одно не содержит континуума, отличного от точки. Тогда нульмерная группа каждого из этих множеств будет континуальна, так как разные точки суть не гомологичные между собой нульмерные циклы. Но тогда по первой теореме двойственности и $(n-1)$-мерная ∇-группа каждого из этих множеств будет также континуальна. Это означает, что каждое из этих множеств может быть отображено на $(n-1)$-мерную сферу континуальным числом не гомотопных между собой отображений.

С помощью первого закона двойственности можно получить целую серию других теорем двойственности. А именно, в группах $\Delta^q B$ и $\nabla^p A$, между которыми, в силу первого закона двойственности, существует вполне определенный изоморфизм M, можно выделить несколько подгрупп, которые при изоморфизме M переходят друг в друга. Такой оказывается, например, подгруппа H^qB группы Δ^qB, состоящая из тех ее элементов, которые ограничивают в B в виеторисовском смысле. Фактор-группа $\Delta^qB - H^qB$ изоморфна виеторисовской группе Δ^q_cB, которая таким образом оказывается дуализируемой. Вопрос об этом был поставлен П. С. Александровым в 1935 г.

Доказательство этого требует определения проекционной Δ-группы нового типа по бикомпактной области коэффициентов. Для этого рассмотрим на нерве каждого покрытия α множества A p-мерную Δ-группу $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$, основанную на конечных цепях и взятую по бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$, но без всякой топологии, и p-мерную ∇-группу $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$, основанную на бесконечных цепях и взятую по дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$, двойственной $\mathfrak{B}$. В силу скалярного умножения, каждый элемент одной из этих групп является алгебраическим характером другой. В группе $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$ выделяем подгруппу $N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, аннулирующую всю группу $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$, а в группе $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$ — подгруппу $N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$, аннулирующую всю $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$. Тогда группа $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, топологизированная как группа характеров группы $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$, имеет бикомпактное пополнение $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$, двойственное группе $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$. Группы $\overline{\delta}^p(\alpha, \mathfrak{B})$ образуют обратный спектр, бикомпактная предельная группа которого и есть искомая бикомпактная проекционная группа $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$.

Оказывается, что группа $H^q(B; \mathfrak{A})$ состоит из тех элементов группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$, которые имеют нулевой коэффициент зацепления со всей группой $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$. При изоморфизме M между группами $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ и $\nabla^p(A; \mathfrak{A})$ подгруппа $H^q(B; \mathfrak{A})$ переходит в подгруппу $N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$, имеющую нулевое скалярное произведение со всей группой $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$. (Это следует из того, что при изоморфизме M коэффициент зацепления с элементом из $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ переходит в скалярное произведение.) Это утверждение составляет содержание второго закона двойственности.

Дадим более полную картину дуализируемых подгрупп групп Δ^qB и ∇^pA, составляющую содержание изоморфизма двойственности. В Δ-группе Δ^qB множества B, взятой по дискретной или по бикомпактной области коэффициентов, определяются две подгруппы незацепляемости $N^q_\Delta B$ и $N^q_{\Delta c}B$ с элементами проекционной, соответственно Δ-группы дополнительного множества A, взятым по двойственным областям коэффициентов. (В случае дискретной области коэффициентов, как говорилось выше, $N^q_\Delta B = H^qB$.) Определение этих подгрупп, имеющее неинвариантную форму, на самом деле инвариантно. Группы $N_{\Delta c}$ являются ядрами при гомоморфизмах вложения Δ-групп в проекционные. Группа $N^q_\Delta(B; \mathfrak{B})$ в случае бикомпактной области коэффициентов есть группа незацепляемости П. С. Александрова, введенная им в работе [7], где и доказана ее инвариантность.

При изоморфизме M подгруппы незацепляемости $N^q_\Delta B$ и $N^q_{\Delta c}B$ переходят в подгруппы $N^p_\nabla A$ и $N^p_{\nabla c}A$ группы ∇^pA, имеющие нулевые скалярные произведения с проекционной, соответственно Δ-группой. Отсюда следует, что будут дуализируемы и всевозможные фактор-группы, в частности, изоморфизм $\Delta^q(B; \mathfrak{B}) - N^q_\Delta(B; \mathfrak{B}) = \nabla^p(A; \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{B})$ есть лишь иная форма закона двойственности П. С. Александрова [7].

Общий итог. Все рассмотренные четырнадцать групп можно расположить в центрально-симметричную таблицу, в которой слева — группы по бикомпактной области коэффициентов, а справа — по дискретной:

$$\begin{array}{lcl} & & \qquad\qquad\quad \delta^q B \\ & & \qquad\qquad\quad \uparrow \\ N^q_\nabla B \subseteq N^q_{\nabla c}B \subseteq \nabla^q B & \qquad & \overline{\Delta^q B \supseteq N^q_{\Delta c}B} \supseteq H^q B \\ & & \\ N^p_\Delta A \subseteq \underline{N^p_{\Delta c}A \subseteq \Delta^p A} & & \nabla^p A \supseteq N^p_{\nabla c}A \supseteq N^p_\nabla A. \\ \qquad\quad \downarrow & & \\ \qquad\quad \bar\delta^p A & & \end{array}$$

Группы, стоящие по одной вертикали, изоморфны (за исключением групп δ и $\bar\delta$). Кроме того, имеются указанные ниже двойственности (они обозначены вертикальной чертой, а горизонтальная жирная черта обозначает переход к бикомпактному пополнению; топологизируются эти группы как подгруппы групп характеров стоящих справа групп):

$$\bar\delta^p A \mid \nabla^p A - N^p_\nabla A; \qquad \overline{\nabla^q B - N^q_\nabla B} \mid \delta^q B;$$

$$\overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla c} B} \mid \Delta^q B - N^q_{\Delta c} B.$$

Как показывают примеры, в трехмерном пространстве все рассмотренные группы попарно различны между собой.

С помощью доказанных общих теорем двойственности находятся необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество, чтобы виеторисовские Δ-группы (группы Δ_c) этого множества и его дополнения в S^n по любой области коэффициентов были двойственны между собой, т. е. чтобы был справедлив закон двойственности Понтрягина. Все эти множества образуют область двойственности, т. е. совокупность множеств, инвариантную по отношению к топологическим отображениям и к переходу к дополнению во всевозможных S^n. Эта область двойственности содержит все ошкурённые полиэдры.

§ 1. Связь первого закона двойственности с зацеплениями

Пусть имеются две двойственные между собой группы коэффициентов — дискретная группа $\mathfrak{A}$ и бикомпактная $\mathfrak{B}$. Тогда для любого ∇-цикла u^p и любого проекционного цикла $z^p = \{z^p_\alpha\}$ множества A, из которых один (все равно какой) взят по группе коэффициентов $\mathfrak{A}$, а другой — по $\mathfrak{B}$, определено скалярное произведение $u^p \cdot z^p$: если u^p лежит на нерве покрытия α, то $u^p \cdot z^p$ определяется как произведение $u^p \cdot z^p_\alpha$, взятое на нерве α. Легко проверить, что это произведение не меняет своего значения, если заменить какой-либо из циклов u^p, z^p гомологичным ему в A циклом. Поэтому скалярное произведение определено для любых элементов групп $\nabla^p A$ и $\delta^p A$, взятых по двойственным областям коэффициентов.

При доказательстве первого закона двойственности в главе I работы [1] был построен вполне определенный изоморфизм $M = \Gamma \cdot D \cdot I^{-1}$ между группами $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$ по одной и той же области коэффициентов.

Если u^p — какой-либо ∇-цикл множества A и $\mathfrak{z}^p \in \nabla^p A$ — его гомологический класс, то под Mu^p мы будем понимать любой Δ-цикл множества B, содержащийся в гомологическом классе $M\mathfrak{z}^p$.

При этом справедлива следующая

Лемма. *Для любого ∇-цикла u^p и любого проекционного цикла $z^p = \{z^p_\alpha\}$ множества A, взятым по двойственным между собой областям коэффициентов, имеет место равенство*

$$u^p \cdot z^p = \mathfrak{v}\,(Mu^p;\ z^p),$$

где $\mathfrak{v}$ обозначает коэффициент зацепления.

Для доказательства переходим от циклов u^p и z^p к соответствующим им внешним циклам $I^{-1}u^p$ и $I^{-1}z^p = \{z^p_\tau\}$. При этом ∇-цикл $I^{-1}u^p$ лежит на триангуляции τ некоторой окрестности λ множества A. Скалярное произведение $I^{-1}u^p \cdot I^{-1}z^p$ определено (на триангуляции τ) и

$$I^{-1}u^p \cdot I^{-1}z^p = u^p \cdot z^p. \tag{1}$$

В самом деле, мы всегда можем взять в качестве α, служащего для определения скалярного произведения $u^p \cdot z^p$, некоторое каноническое покрытие*, а в качестве τ — триангуляцию канонической окрестности, ретрагирующейся посредством непрерывного отображения f) на нерв α. Тогда один и тот же цикл z^p_τ может рассматриваться и как элемент z^p_α проекционного цикла z^p и как элемент z^p_λ скользящего цикла $I^{-1}z^p$. Что касается ∇-цикла $I^{-1}u^p$, то можно написать $I^{-1}u^p = \overline{f}u^p$, понимая под $\overline{f}$ оператор, сопряженный оператору непрерывного отображения f. Но тогда

$$u^p \cdot z^p_\tau = \overline{f}u^p \cdot z^p_\tau,$$

что и означает равенство (1).

∇-циклу $I^{-1}u^p$ соответствует звездный Δ-цикл $DI^{-1}u^p$, лежащий на комплексе барицентрических звезд триангуляции τ и имеющий с циклом z^p_τ пересечение, равное скалярному произведению $I^{-1}u^p \cdot z^p_\tau$.

Цикл $\Gamma DI^{-1}u^p = \{z^q_k,\ x^{q+1}_k\}$ получается из цикла $DI^{-1}u^p$ следующим образом: берется возрастающая последовательность конечных подкомплексов τ_k.

---

* Определение канонического покрытия и канонической окрестности можго найти в [1], стр. 34.

триангуляции τ и z_k^q определяются как границы кусков w_k цикла $DI^{-1}u^p$, лежащих на комплексах τ_k. Поэтому для достаточно больших k имеем:

$$DI^{-1}u^p \times z_\tau^p = w_k \times z_\tau^p = \mathfrak{v}(z_k^q;\ z_\tau^p)$$

и, следовательно,

$$u^p \cdot z^p = \mathfrak{v}(z_k^q;\ z_\tau^p).$$

Лемма доказана.

§ 2. Формулировка и доказательство второго закона двойственности

1. Определение групп $N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$; двойственность $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A}) \mid \overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$. На каждом покрытии α множества A рассмотрим основанную на бесконечных цепях ∇-группу $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$ по дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$ и основанную на конечных цепях Δ-группу $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ по бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$, но без всякой топологии. В группе $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$ выделим подгруппу $N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, состоящую из элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$; в группе $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ выделим подгруппу $N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, состоящую из элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всеми элементами группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$. Каждый элемент группы $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ есть характер группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, причем разные элементы являются разными характерами. Следовательно, группа $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ лежит в бикомпактной группе характеров $\overline{\delta}^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$. Докажем, что она там всюду плотна. Для этого достаточно доказать, что аннулятор ее замыкания есть нуль. Но мы увидим даже, что для любого отличного от нуля элемента $\xi \in \nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$ можно найти характер $\eta \in \Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N_\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, принимающий на ξ отличное от нуля значение. Это последнее утверждение следует из того, что, раз $\xi \neq 0$, значит для всякого $x \in \xi$ найдется такой элемент $y \in \Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, что $x \cdot y \neq 0$. Обозначая через η класс смежности, содержащий элемент y, видим, что $\xi \cdot \eta = x \cdot y \neq 0$. Утверждение доказано.

В прямом ∇-спектре множества A

$$\{\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A});\ \pi_\beta^\alpha\} \tag{1}$$

подгруппы $N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, в силу включений

$$\pi_\beta^\alpha N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) \subseteq N_\nabla^p(\beta;\ \mathfrak{A}),$$

образует подспектр, предельную группу которого мы и обозначим через $N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$. Можно говорить и о спектре, образованном фактор-группами $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A})$, с проекциями, естественно определяемыми проекциями из (1) (и поэтому обозначенными также через π_β^α). Легко видеть, что предельная группа спектра

$$\{\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A});\ \pi_\beta^\alpha\}$$

есть $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A}) - N_\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$.

Группы $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$, естественно, объединяются в обратный спектр. В самом деле, при $\beta > \alpha$ проекция $\overline{\omega}^\beta_\alpha$ группы $\Delta^p(\beta; \mathfrak{B})$ в группу $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$ есть гомоморфизм, причем

$$\overline{\omega}^\beta_\alpha N^p_\Delta(\beta; \mathfrak{B}) \subseteq N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B}),$$

так что определен и непрерывный гомоморфизм группы $\Delta^p(\beta; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\beta, \mathfrak{B})$ в $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, обозначаемый также через $\overline{\omega}^\beta_\alpha$. Этот гомоморфизм, распространенный по непрерывности на группу $\overline{\delta}^p(\beta; \mathfrak{B})$, дает нам искомую проекцию $\overline{\omega}^\beta_\alpha$ группы $\overline{\delta}^p(\beta; \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$. Предельная группа так определенного спектра

$$\{\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B}); \overline{\omega}^\beta_\alpha\}$$

есть группа $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$. Так как группы $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(\alpha; \mathfrak{B})$ двойственны между собой, а гомоморфизмы π^α_β и $\overline{\omega}^\beta_\alpha$ являются сопряженными, то группы $\nabla^p(A; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ также двойственны между собой.

2. Определение группы $H^q(B; \mathfrak{A})$. Скажем, что сильный Δ-цикл $\{z^q_k, x^{q+1}_k\}$ множества B слабо гомологичен нулю в этом множестве, если на некотором компакте $\Psi \subseteq B$ существуют такие ε_k-цепи y^{q+1}_k, $\varepsilon_k \to 0$, что $\Delta y^{q+1}_k = z^q_k$. Группа $H^q(B; \mathfrak{A})$ определяется как подгруппа группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$, состоящая из тех ее гомологических классов, элементы которых суть Δ-циклы, слабо гомологичные нулю в B.

Каждому Δ-циклу $z^q = \{z^q_k, x^{q+1}_k\}$ соответствует виеторисовский цикл $\{z^q_k\}$, и этим, очевидно, определяется гомоморфное отображение группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ на группу $\Delta^q_c(B; \mathfrak{A})$. Так как ядром этого гомоморфизма является группа $H^q(B; \mathfrak{A})$, то мы имеем изоморфизм:

$$\Delta^q_c(B; \mathfrak{A}) = \Delta^q(B; \mathfrak{A}) - H^q(B; \mathfrak{A}).$$

3. Формулировка второго закона двойственности.

Теорема. *При изоморфизме M, составляющем содержание первого закона двойственности, группа $\nabla^p(A; \mathfrak{A})$ отображается на группу $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ так, что при этом группа $N^p_\nabla(A; \mathfrak{A})$ отображается на группу $H^q(B; \mathfrak{A})$.*

Следовательно, имеем изоморфизм и фактор-групп

$$\nabla^p(A; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{A}) = \Delta^q(B; \mathfrak{A}) - H^q(B; \mathfrak{A}) = \Delta^q_c(B; \mathfrak{A}),$$

а так как

$$\nabla^p(A; \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(A; \mathfrak{A}) \mid \overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}),$$

то

$$\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta^q_c(B; \mathfrak{A}). \text{ *}$$

* Эта двойственность для частного случая, когда B замкнуто, следует из общего закона двойственности П. С. Александрова, так как в этом случае $\Delta^q_c(B; \mathfrak{A}) = \delta^q(B; \mathfrak{A})$. Общий случай может быть получен из этого частного путем предельного перехода по спектру (см. [8]).

Замечание. Элементы группы $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$ суть нити $\zeta^p = \{\zeta^p_\alpha\}$. Среди этих нитей можно различать «истинные» нити, в которых $\zeta^p_\alpha \in \Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha;\ \mathfrak{B})$, и «идеальные», в состав которых входят идеальные элементы групп $\overline{\delta}^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, не содержащиеся в группах $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha;\ \mathfrak{B})$, а предельные для них.

Для каждой истинной нити ζ^p и каждого Δ-цикла z^q, $p+q=n-1$, множества B совершенно естественно определяется коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\zeta^p;\ z^q)$. Пусть теперь ζ^p — идеальная нить, а z^q — по-прежнему Δ-цикл в B по области коэффициентов $\mathfrak{A}$. Существует такое α, что в достаточно малой окрестности $O\zeta^p_\alpha$ элемента ζ^p_α все $\zeta^p_\alpha \in \Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha;\ \mathfrak{B})$, лежащие в этой окрестности, имеют определенные коэффициенты зацепления, мало отличающиеся друг от друга. Поэтому по непрерывности определен коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\zeta^p_\alpha;\ z^q)$. Можно убедиться в том, что этот коэффициент зацепления не зависит от выбора α, поэтому его естественно назвать коэффициентом зацепления $\mathfrak{v}(\zeta^p;\ z^q)$ нити ζ^p с циклом z^q.

При этом определении зацепления двойственность $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B}) \mid \Delta^q_c(B;\ \mathfrak{A})$, содержащаяся во втором законе двойственности, становится двойственностью зацепления, а подгруппа $H^q(B;\ \mathfrak{A})$ группы $\Delta^q(B;\ \mathfrak{A})$ — группой незацепляемости при зацеплении элементов группы $\Delta^q(B;\ \mathfrak{A})$ с элементами группы $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$.

Аналогично можно определить и скалярное произведение элементов группы $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$ с элементами группы $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$. При этом элементы подгруппы $N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{A})$ характеризуются тем, что их скалярное произведение со всеми элементами группы $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$ равно нулю.

Лемма § 1 остается в силе, если в ее формулировке под проекционным циклом понимать идеальный цикл.

4. Доказательство второго закона двойственности. Случай открытого множества A. Доказательство второго закона двойственности начнем со случая, когда A открыто, следовательно, $B = \mathcal{M}^n \setminus A$ замкнуто.

Пусть τ — триангуляция множества A. Для этого случая первый закон двойственности устанавливает изоморфизм M между группами $\nabla^p\tau$ и $\Delta^q B$. Применим лемму § 1 о связи первого закона двойственности с зацеплениями. Она утверждает, что для $\xi \in \nabla^p\tau$ и $\eta \in \Delta^p\tau$ имеет место равенство $\xi \cdot \eta = \mathfrak{v}(M\xi;\ \eta)$. Поэтому при изоморфизме M между $\nabla^p\tau$ и $\Delta^q B$ подгруппа $N_\nabla\tau$ переходит в подгруппу группы $\Delta^q B$, состоящую из элементов, имеющих нулевой коэффициент зацепления со всеми $\eta \in \Delta^p\tau$. Докажем, что эта подгруппа и есть подгруппа $H^q B$, состоящая из классов цикла, слабо гомологичных нулю в B. Действительно, из того, что цикл $M\xi$ имеет нулевой коэффициент зацепления со всеми $\eta \in \Delta^p\tau$, следует, что он гомологичен нулю вне любого конечного подкомплекса τ_k триангуляции τ, так как в противном случае он мог бы быть зацеплен циклом из τ_k. Но, раз $M\xi$ гомологичен нулю в любой окрестности B, значит он слабо гомологичен нулю в B. С другой стороны, если $M\xi \in H^q B$, то он гомологичен нулю в любой окрестности B и, значит, имеет нулевой коэффициент зацепления с любым $\eta \in \Delta^p\tau$. Итак, мы доказали следующее предложение:

Лемма 1. *В случае открытого A при изоморфизме M между группами $\nabla^p B$ и $\Delta^q B$ подгруппа $N^p_\nabla A$ переходит в подгруппу $H^q B$.*

5. Общий случай. Переходим к общему случаю произвольного множества $A \subseteq \mathcal{M}^n$. Пусть α — каноническое покрытие множества A, а $\lambda = \bar{\tau}$ — каноническая окрестность, ретрагирующаяся на нерв α; полагаем $\psi = \mathcal{M}^n \setminus \lambda \subseteq B$. Как уже говорилось в § 1, при естественных изоморфизмах

$$\nabla^p\alpha = \nabla^p\tau,$$

$$\Delta^p\alpha = \Delta^p\tau$$

скалярное произведение сохраняется. Отсюда следует, что при изоморфизме между $\nabla^p\lambda$ и $\nabla^p\alpha$ подгруппа $N^p_\nabla\lambda$ переходит в подгруппу $N^p_\nabla\alpha$. Отсюда и из леммы 1 вытекает следующая

Лемма 2. *При естественном изоморфизме между группами $\nabla^p\alpha$ и $\Delta^q\psi$ осуществляется изоморфизм между подгруппами $N^p_\nabla\alpha$ и $H^q\psi$.*

Возьмем изоморфные спектры, участвующие в спектральном законе двойственности главы 2 работы [1]. Первый спектр

$$\{\nabla^p\alpha;\ \pi^\alpha_\beta\}$$

образуется из групп канонических покрытий α множества A. Второй спектр

$$\{\Delta^q\psi;\ E^\psi_{\psi'}\}$$

образован из компактов ψ, дополнительных к каноническим окрестностям множества A. В этих спектрах выделяем изоморфные, в силу леммы 2, группы $N^p_\nabla\alpha$ и $H^q\psi$, которые, как легко видеть, также образуют два изоморфных спектра. Их предельными группами и являются как раз группы $N^p_\nabla A$ и $H^q B$ которые, таким образом, изоморфны в силу основного изоморфизма M между группами $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$. Теорема доказана.

§ 3. Связь с законом двойственности П. С. Александрова

Определения и теорема настоящего параграфа аналогичны определениям и теореме предыдущего параграфа, только области коэффициентов — бикомпактная и дискретная меняются местами. А именно, в предыдущем параграфе ∇-группы, определенные с помощью покрытий, брались по дискретным областям коэффициентов и была определена бикомпактная проекционная группа $\bar{\delta}$ по бикомпактной области коэффициентов; в настоящем параграфе ∇-группы на покрытиях берутся по бикомпактной, а проекционные группы δ — по дискретной областям коэффициентов. Группы Δ с компактными носителями в предыдущем параграфе рассматривались по дискретной области коэффициентов; в настоящем же параграфе они берутся по бикомпактной области коэффициентов, и, как доказано в работе [1] (стр. 39), они совпадают с группой Δ_c.

1. Определение группы $N^p_\nabla(A, \mathfrak{B})$; двойственность $\nabla^p(A; \mathfrak{B}) — N^p_\nabla(A; \mathfrak{B}) \mid \delta^p(A; \mathfrak{A})$. Эта группа определяется как подгруппа груп-

пы $\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})$, состоящая из тех ее элементов, которые имеют нулевое скалярное произведение со всеми элементами проекционной группы $\delta(A;\mathfrak{A})$. Группу $\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})-N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{B})$ можно топологизировать как подгруппу характеров группы $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$. Тогда по теореме Чогошвили* ее пополнение будет группой характеров группы $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$.

2. Определение группы $N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})$. Это есть группа незацепляемости, введенная П. С. Александровым в его работе [7]. Она определяется как подгруппа группы $\Delta^q(B;\ \mathfrak{B})$, состоящая из тех ее элементов, которые имеют нулевой коэффициент зацепления со всеми элементами группы $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$.

Это определение, имеющее неинвариантную форму, на самом деле инвариантно, т. е. группа $N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})$ есть топологический инвариант множества B. Это известно из работы П. С. Александрова [7] и легко следует из спектрального закона двойственности, доказанного во второй главе работы [1].

3. Теорема. *При изоморфизме M, составляющем содержание первого закона двойственности, группа $\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})$ отображается на группу $\Delta^q(B;\ \mathfrak{B})$ так, что при этом подгруппа $N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{B})$ отображается на подгруппу $N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})$.*

Доказательство сразу следует из леммы § 1 о связи первого закона двойственности с зацеплениями.

Из этой теоремы, очевидно, следует, что и фактор-группы

$$\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})-N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{B}) \text{ и } \Delta^q(B;\ \mathfrak{B})-N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})$$

изоморфны между собой. Этот изоморфизм, как следует из спектрального закона двойственности, оказывается топологическим, если в этих группах ввести естественную топологию при помощи сопряженного спектра. Этот изоморфизм переносится на бикомпактные пополнения этих групп

$$\overline{\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})-N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{B})} \text{ и } \overline{\Delta^q(B;\ \mathfrak{B})-N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})}.$$

Но группа $\overline{\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})-N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{B})}$, а значит и группа $\overline{\Delta}^q(B;\ \mathfrak{B}) =$

---

* Речь идет о следующей теореме Чогошвили:

Пусть дан прямой спектр $\{Y_\alpha;\ \pi^\alpha_\beta\}$ бикомпактных и сопряженный ему обратный спектр $\{X_\alpha;\ \mathfrak{S}^\beta_\alpha\}$ дискретных групп. Обозначим через Y_0 подгруппу алгебраической предельной группы $Y=\varinjlim\{Y_\alpha;\ \pi^\alpha_\beta\}$, состоящую из тех элементов, скалярное произведение которых со всеми элементами группы $X=\varprojlim\{X_\alpha;\ \mathfrak{S}^\beta_\alpha\}$ равно нулю. Тогда фактор-группа $Y'=Y-Y_0$ есть всюду плотная подгруппа группы характеров X^* группы X.

Доказательство теоремы Чогошвили. Пусть группа Y' (будучи, очевидно, некоторым множеством характеров группы X) не является всюду плотным подмножеством группы X^* всех характеров группы X. Тогда аннулятор (в группе X), замыкания множества Y' (в X^*), будучи группой характеров ненулевой фактор-группы, был бы также отличен от нуля. Следовательно, нашлась бы нить $x=\{x_\alpha\}\neq 0$, имеющая нулевое скалярное произведение со всей группой Y'. Но если взять какой-либо элемент x_α, не равный нулю, и к нему подобрать такой элемент $y_\alpha\in Y_\alpha$, что, $x_\alpha\cdot y_\alpha\neq 0$, то определенный этим y_α элемент $y\in Y'$ имеет с x отличное от нуля скалярное произведение. Полученное противоречие доказывает теорему Чогошвили.

$= \overline{\Delta^q(B;\ \mathfrak{B}) - N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})}$, двойственна группе $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$, что и дает нам первую форму закона двойственности П. С. Александрова, а именно двойственность зацепления:

$$\delta^p(A;\ \mathfrak{A}) \mid \overline{\Delta}^q(B;\ \mathfrak{B}).$$

§ 4. Другие подгруппы, соответствующие друг другу при изоморфизме двойственности M

1. Определение групп $N_{\Delta c}$. Каждому Δ-циклу с компактным носителем по дискретной или по бикомпактной области коэффициентов произвольного множества A соответствует проекционный Δ-цикл. Таким образом, определены гомоморфизмы вложения групп $\Delta^p(A; \mathfrak{A})$ и $\Delta^p(A;\ \mathfrak{B})$ в группы $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$ и $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$. Ядра этих гомоморфизмов и обозначаются через $N^p_{\Delta c}(A;\ \mathfrak{A})$ и $N^p_{\Delta c}(A;\ \mathfrak{B})$. Докажем, что они состоят из элементов, имеющих нулевые коэффициенты зацепления со всеми циклами с компактными носителями дополнительного множества B. Действительно, так как при гомоморфизме вложения коэффициент зацепления сохраняется, то всякий элемент группы с компактными носителями, перешедший в нулевой элемент проекционной группы, имеет, как и этот последний, нулевой коэффициент зацепления со всеми циклами дополнения. С другой стороны, если элемент группы с компактными носителями имеет нулевой коэффициент зацепления со всеми циклами с компактными носителями дополнения, то он не может перейти в ненулевой элемент проекционной группы, так как с таким элементом зацеплен ненулевой элемент группы с компактными носителями. Утверждение доказано.

2. Определение групп $N_{\nabla c}$. Группы $N^p_{\nabla c}(A;\ \mathfrak{A})$ и $N^p_{\nabla c}(A;\ \mathfrak{B})$ определяются как подгруппы групп $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$ и $\nabla^p(A;\ \mathfrak{B})$, состоящие из тех элементов, которые имеют нулевые скалярные произведения со всеми элементами группы $\overline{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$, соответственно $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$.

3. Теорема. *При изоморфизме M, составляющем содержание первого закона двойственности, группа $\nabla^p A$ отображается на группу $\Delta^q B$ так, что при этом подгруппа $N^p_{\nabla c} A$ отображается на подгруппу $N^q_{\Delta c} B$.*

Доказательство сразу следует из леммы § 1 о связи первого закона двойственности с зацеплениями.

§ 5. Общий итог: теорема об изоморфизме двойственности

Все рассмотренные четырнадцать групп можно расположить в центрально-симметричную таблицу, в которой слева — группы по бикомпактной области коэффициентов, а справа — по дискретной:

$$\begin{array}{cc}
 & \delta^q B \\
 & \uparrow \\
N^q_\nabla B \subseteq N^q_{\nabla c} B \subseteq \nabla^q B & \overline{\Delta^q B \supseteq N^q_{\Delta c} B} \supseteq H^q B \\
 & \\
N^p_\Delta A \subseteq \overline{N^p_{\Delta c} A \subseteq \Delta^p A} & \nabla^p A \supseteq N^p_{\nabla c} A \supseteq N^p_\nabla A. \\
\downarrow & \\
\overline{\delta}^p A &
\end{array}$$

Группы, стоящие по одной вертикали, изоморфны (за исключением групп δ и $\bar{\delta}$). Кроме того, имеются указанные ниже двойственноси (они обозначены вертикальной чертой, а горизонтальная жирная черта обозначает переход к бикомпактному пополнению; топологизируются эти группы как подгруппы групп характеров стоящих справа групп):

$$\bar{\delta}^p A \mid \nabla^p A - N^p_{\nabla} A, \quad \overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla} B} \mid \delta^q B, \quad \overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla c} B} \mid \Delta^q B - N^q_{\Delta c} B.^*$$

§ 6. Квазиоткрытые и квазизамкнутые множества; области двойственности

Закон двойственности Понтрягина, утверждающий двойственность групп Бетти с компактными носителями открытого и дополнительного к нему замкнутого множества, не может быть распространен на случай произвольных множеств. Полученные нами общие теоремы двойственности позволяют получить необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество, чтобы для него и для его дополнения выполнялась теорема Понтрягина.

1. Квазиоткрытые множества. Назовем множество $A \subseteq S^n$ квазиоткрытым, если группа $\Delta^p_c(A; \mathfrak{A})$ по любой дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$ для любой размерности p двойственна в смысле зацеплений с надлежащим образом топологизированной группой $\Delta^q_c(B; \mathfrak{B})$ дополнительного множества $\mathfrak{B}$.

Это определение, имеющее неинвариантную форму, на самом деле инвариантно, а потому множество A, квазиоткрытое в данном S^n, будет квазиоткрытым и при любом топологическом включении в любое $S^{n'}$.

Инвариантная характеристика квазиоткрытых множеств состоит в следующем: множество A тогда и только тогда квазиоткрыто, когда имеет место двойственность

$$\Delta^p_c(A; \mathfrak{A}) \mid \nabla^p(A; \mathfrak{B})$$

для всех p и всех областей коэффициентов, осуществляемая скалярным умножением; при этом группа $\nabla^p(A; \mathfrak{B})$ берется в надлежащей топологии.

Доказательство этого утверждения сразу следует из первого закона двойственности, в силу которого группа $\nabla^p(A; \mathfrak{B})$ изоморфна группе $\Delta^q(B; \mathfrak{B})$, которая в нашем случае компактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$ совпадает с группой $\Delta^q_c(B; \mathfrak{B})$.

---

* Обозначим через h естественный гомоморфизм вложения группы $\Delta^q(B; \mathfrak{A})$ в $\delta^q(B; \mathfrak{A})$, имеем из последних двух двойственностей:

$$\overline{N^q_{\nabla c}(B; \mathfrak{B}) - N^q_{\nabla}(B; \mathfrak{B})} = \delta^q(B; \mathfrak{A}) - h\Delta^q(B; \mathfrak{A}) = \mathfrak{M}^q(B; \mathfrak{A}),$$

т. е. группа $\mathfrak{M}^q(B; \mathfrak{A})$ дуализируема. Простой пример, построенный Мищенко [9], показывает, что эта группа может быть отлична от нуля. Аналогичное утверждение справедливо и при вложении группы $\Delta^q(B; \mathfrak{B})$ в $\bar{\delta}^q(B; \mathfrak{B})$. Эти результаты были получены П. С. Александровым в [10].

2. Квазизамкнутые множества. Назовем множество $A \subseteq S^n$ квазизамкнутым, если группа $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ по любой бикомпактной области коэффициентов $\mathfrak{B}$ для любой размерности p, взятая в надлежащей топологии, двойственна в смысле зацепления с группой $\Delta_c^q(B; \mathfrak{A})$ дополнительного множества B.

Инвариантная характеристика квазизамкнутых множеств состоит в следующем: естественный гомоморфизм вложения группы $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ есть изоморфизм на всю группу.

Доказательство. По второму закону двойственности имеем:

$$\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{A}).$$

Эта двойственность есть двойственность зацепления. Поэтому требование двойственности зацепления

$$\Delta_c^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{A})$$

эквивалентно тому, чтобы группы $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ и $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$ не только были изоморфны, но чтобы этот изоморфизм осуществлялся тем естественным гомоморфизмом вложения группы $\Delta_c^p(A; \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(A; \mathfrak{B})$, о котором говорилось выше.

3. Области двойственности. Очевидно, что множества квазиоткрытые и квазизамкнутые взаимно дополнительны.

Множества, одновременно квазиоткрытые и квазизамкнутые, составляют максимальную элементарную область двойственности в смысле П. С. Александрова, т. е. совокупность всех множеств во всевозможных S^n, для которых при любых $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ и $p+q=n-1$ имеют место двойственности

$$\Delta_c^p(A; \mathfrak{A}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{B}),$$

$$\Delta_c^p(A; \mathfrak{B}) \mid \Delta_c^q(B; \mathfrak{A})$$

(группы по $\mathfrak{B}$ всегда берутся в надлежащей топологии).

В доказанном выше содержится, таким образом, инвариантная характеристика этой максимальной области двойственности.

Замечание. Несимметричность, имеющаяся в характеристике квазиоткрытых и квазизамкнутых множеств, проистекает от того, что группы Δ и Δ_c связаны друг с другом по-разному в случае бикомпактной и дискретной областей коэффициентов: в первом случае они совпадают, а во втором, для того чтобы получить группу Δ_c, нужно группу Δ профакторизовать по подгруппе H, являющейся аналогом подгруппы незацепляемости в случае дискретной области коэффициентов (вопрос об этом был поставлен в [1], стр. 45). Если определить квазиоткрытые и квазизамкнуые множества с группами Δ, то их характеристики получатся симметричными. Соответствующая этому определению область двойственности построена в [1] (стр. 49).

Содержание настоящей работы кратко изложено в [11] и [12].

(Поступило в редакцию 9/X 1957 г.)

Литература

1. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств. I, Матем. сб., **34** (**76**) (1954), 3—54.
2. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств. II, Матем. сб., **37** (**79**) (1955), 385—434.
3. П. С. Александров, Недуализируемость групп Бетти, основанных на конечных покрытиях, ДАН СССР, т. **105**, № **1** (1955), 5—6.
4. П. С. Александров, Исправление заметки «Недуализируемость групп Бетти, основанных на конечных покрытиях», ДАН СССР, т. **107**, № **3** (1956), 357—358.
5. П. С. Александров, О гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств, Изв. АН СССР, серия матем. т. **6**, № **5** (1942), 227—282.
6. А. Тынянский, О распространении закона двойственности Ситникова на случай множеств, лежащих в многообразиях, не удовлетворяющих условиям ацикличности, Ученые записки МГУ, т. **10** (1959).
7. П. С. Александров, Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств n-мерного пространства, Матем. сб., **21** (**63**) (1947), 161—232.
8. Н. А. Берикашвили, О теоремах двойственности для произвольных множеств, Сообщ. АН ГрузССР, т. **15**, № **7** (1954), 407—414.
9. Е. Ф. Мищенко, О некоторых вопросах комбинаторной топологии незамкнутых множеств, Матем. сб., **32** (**74**) (1953), 219—224.
10. П. С. Александров, О некоторых следствиях второго закона двойственности Ситникова, ДАН СССР, т. **96**, № **5** (1954), 885—889.
11. К. А. Ситников, Новые соотношения двойственности для незамкнутых множеств, ДАН СССР, т. **96**, № 5 (1954), 925—928.
12. К. А. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств, Чехослов. матем. журн., т. **6** (**81**) (1956), 444—449.