О метрической размерности точечных множеств *

В. И. Егоров (Москва)

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию понятия метрической размерности, представляющего собой некоторый аналог понятия обычной топологической размерности $\dim M$**.

Метрическая размерность данного точечного множества M есть наименьшее число r такое, что существует сколь угодно малый сдвиг множества M в локально конечный полиэдр размерности r. Метрическую размерность множества M мы будем обозначать через $\operatorname{dm} M$.

Еще в 1926 г. П. С. Александровым была доказана одна из основных теорем теории размерности, так называемая теорема об ε-сдвигах [1]. Эта теорема утверждает, что для всякого компакта Φ эвклидова пространства имеет место равенство $\operatorname{dm}\Phi = \dim\Phi$. К. А. Ситников построил пример множества $M \subset E^3$, для которого $\dim M = 2$, а $\operatorname{dm} M = 1$ [2], решив тем самым проблему, поставленную П. С. Александровым в 1935 г. Таким образом, в случае произвольного $M \subset E^n$ можно только утверждать, что выполняется неравенство $\operatorname{dm} M \leqslant \dim M$. Равенство $\operatorname{dm} M = \dim M$ выполняется также и для множеств $M \subset E^n$, для которых $\dim M = \dim [M]$. (Этот результат весьма сложным путем получен К. А. Ситниковым [2].) Отсюда и из того, что любое точечное множество можно топологически вложить в компакт той же размерности (теорема Гуревича [3]), следует, что метрическая размерность не является топологическим инвариантом. Но метрическая размерность сохраняется при так называемых равномерных гомеоморфизмах, т. е. при взаимно однозначных и в обе стороны равномерно непрерывных отображениях. Это легко вытекает из следующего определения метрической размерности:

Метрической размерностью метрического пространства R называется наименьшее число r такое, что при любом $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие пространства R кратности $r+1$, каждый элемент которого по диаметру меньше ε.

Следует заметить, что это определение пригодно для любых метрических пространств. Ю. М. Смирнов в работе [4] показывает, что аналогичное определение метрической размерности с помощью локально конечных (а для пространств со счетной базой — звездно-конечных) покрытий дает тот же класс метрических пространств, что и приведенное выше определение. Для точечных

---

* Здесь везде под точечными множествами понимаются множества эвклидовых пространств.

** Топологической размерностью множества M называется наименьшее число n такое, что в любое конечное открытое покрытие множества M можно вписать конечное открытое покрытие кратности $n+1$.

множеств Ю. М. Смирновым в той же работе была доказана равносильность этого определения с определением метрической размерности с помощью ε-сдвигов в полиэдры.

Большая часть первого раздела настоящей работы посвящена характеристикам метрической размерности с помощью так называемых лебеговых покрытий *.

Теорема 1. *Пусть* R — *произвольное метрическое пространство;* $\mathrm{dm}\,R \leqslant r$ *в том и только в том случае, если во всякое лебегово покрытие пространства* R *можно вписать открытое покрытие кратности, меньшей или равной* $r+1$.

Этот результат применяется в работе при доказательстве основных теорем. Здесь также доказано, что для определения метрической размерности множества M пространства E^n достаточно открытых покрытий, локально конечных в этом пространстве ** (теорема 2).

Основным результатом второго раздела работы является так называемая теорема о существенных отображениях [5], состоящая в следующем:

Теорема 7. *Пусть* $M \subset E$. *Тогда* $\mathrm{dm}\,M$ *есть наибольшее число* r *такое, что существует равномерно непрерывное существенное отображение множества* M *в* r*-мерный замкнутый симплекс.* (Существенность отображения здесь обычная, т. е. определенная с помощью допустимых непрерывных деформаций.)

Эта теорема выводится из ряда более специальных результатов, формулировка которых требует дополнительных определений.

Следуя Ю. М. Смирнову [6], назовем триангуляцию K равномерной, если эта триангуляция удовлетворяет следующим двум условиям:

1. Длины всех ребер триангуляции K меньше некоторого фиксированного числа l.

2. Расстояние между любыми двумя не имеющими общих вершин симплексами триангуляции K больше некоторого h, где $h > 0$.

Отображение f множества M в триангуляцию K назовем r-существенным, если r — наибольшее число такое, что в триангуляции K найдется r-мерный замкнутый симплекс T^r, на прообразе $f^{-1}(T^r)$ которого отображение f — существенное.

Сформулированная выше теорема о существенных отображениях выводится из следующего предложения:

Для всякого точечного множества M *метрической размерности* r *существует равномерно непрерывное* r*-существенное отображение этого множества в некоторую равномерную триангуляцию, и всякое равномерно непрерывное отображение множества* M *в равномерную триангуляцию будет* r'*-существенным, причем* $r' \leqslant r$ (теоремы 5 и 6).

В той же части работы в качестве следствий из теоремы 7 приведены, в частности, такие результаты:

* Открытое покрытие λ метрического пространства R назовем лебеговым покрытием, если для некоторого $\eta > 0$ существует покрытие пространства R множествами M_γ такое, что покрытие пространства R окрестностями $O(M_\gamma, \eta)$ вписано в покрытие λ.

** См. сноску** на стр. 231.

Теорема 8. *Метрическая размерность точечного множества M есть наименьшее из чисел r таких, что всякое равномерно непрерывное отображение f произвольного (замкнутого) подмножества A множества M в r-мерную сферу можно продолжить до непрерывного отображения в эту сферу всего множества M.*

Теорема 10. *Пусть A_i, B_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ — любые удовлетворяющие условию $\rho(A_i, B_i) > 0$ пары замкнутых подмножеств точечного множества M. Метрическая размерность точечного множества M не превосходит r в том и только в том случае, если существуют замкнутые множества $\Phi_i \subset M$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Φ_i разделяет множества A_i и B_i $(i = 1, \ldots, r+1)$.*
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$.

В третьем и последнем разделе работы строится гомологическая характеристика метрической размерности с помощью так называемых равномерных ∇-циклов *.

Пусть дано метрическое пространство R. Рассмотрим множество всевозможных звездно-конечных покрытий этого пространства. Из этого множества выделим всевозможные подмножества таким образом, чтобы, во-первых, в каждое из выделенных подмножеств вошли покрытия одной кратности и чтобы, во-вторых, каждое подмножество содержало сколь угодно мелкие покрытия. Поставив в соответствие каждому такому подмножеству номер—кратность входящих в него покрытий, выберем подмножество с наименьшим номером. Покрытия пространства R вошедшие в это подмножество, мы будем называть основными.

Пусть A — какое-нибудь множество пространства R. Рассмотрим какой-нибудь равномерный ∇-цикл Z множества A, т. е. какой-нибудь ∇-цикл нерва некоторого лебегова покрытия λ этого множества. Мы будем говорить, что цикл Z можно продолжить на пространство R, если среди основных покрытий пространства R найдется покрытие $\alpha = \{O_i\}$, удовлетворяющее следующим двум требованиям:

1. Множества $O_i \cap A$ составляют покрытие множества A, вписанное в покрытие λ.

2. Проекция Π_α^λ цикла Z в комплекс α продолжаема до ∇-цикла всего комплекса α (в данном случае мы не делаем различия в обозначении покрытий и их нервов).

Теорема 11. *Если метрическая размерность пространства R равна r и A — произвольное множество, входящее в R, то всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все пространство R.*

Здесь же доказано и обратное предложение:

Теорема 13. *Если A — произвольное замкнутое подмножество точечного множества M и всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все множество M, то метрическая размерность множества M меньше или равна r.*

---

* Равномерным ∇-циклом данного множества мы будем называть всякий ∇-цикл, определенный на нерве некоторого лебегова покрытия этого множества.

Доказательство этого предложения опирается на доказанную здесь же теорему, представляющую собой аналог известной теоремы Хопфа и состоящую в следующем:

Теорема 12. *Пусть $A \subset R$ — замкнутое в R множество и* $\dim R = n + 1$. *Для того чтобы равномерно непрерывное отображение f множества A в сферу S^n можно было продолжить до непрерывного отображения в S^n всего пространства R, необходимо и достаточно, чтобы степень отображения f^* можно было также продолжить на все пространство R.*

I. Характеристика метрической размерности с помощью покрытий и сдвигов в полиэдры

Определение 1. *Метрической размерностью пространства R называется неотрицательное число r такое, что при любом числе $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие пространства R кратности $r + 1$, каждый элемент которого имеет диаметр меньше ε, и при некотором $\varepsilon > 0$ всякое открытое ε-покрытие этого пространства имеет кратность, большую или равную $r + 1$.*

§ 1. В настоящем параграфе приводится характеристика метрической размерности с помощью так называемых лебеговых покрытий.

Прежде всего дадим определение лебегова покрытия метрического пространства.

Определение 2. *Открытое покрытие λ метрического пространства R назовем лебеговым покрытием, если для некоторого числа $\eta > 0$ существует покрытие пространства R множествами A_γ такое, что покрытие пространства R окрестностями $O(A_\gamma, \eta)$ вписано в покрытие λ. Число η будем называть лебеговым числом покрытия λ.*

С помощью этого определения сформулируем свойство метрических пространств, эквивалентное свойству, выраженному определением 1.

Теорема 1. *Метрическая размерность пространства R меньше или равна r ($\dim \leqslant r$) в том и только в том случае, если в любое лебегово покрытие этого пространства можно вписать (даже комбинаторно)** открытое покрытие кратности, меньшей или равной $r + 1$.*

Легко видеть, что доказательство достаточности нашего утверждения сводится к доказательству существования лебеговых ε-покрытий, где ε — произвольное положительное число. Пусть дано некоторое положительное число ε. Выберем какое-нибудь положительное число $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, например положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Построим в пространстве R δ-сеть. Для этого, как это обычно делается, выберем в пространстве R какую-нибудь точку x_1. Если x_1 не является δ-сетью, то в R существует точка x_2 такая, что имеет место неравенство $\rho(x_1, x_2) \geqslant \delta$. Если точки x_1 и x_2 не составляют δ-сети пространства R, то в R существует третья точка x_3, удаленная от x_1 и x_2 не меньше чем на δ. Продолжая этот процесс дальше и, если нужно, пользуясь для обозначения

---

* См. стр. 248.

** Пусть покрытие β вписано в покрытие α. Мы будем говорить, что β комбинаторно вписано в α, если каждый элемент покрытия α содержит не более одного элемента покрытия β.

новых точек трансфинитными индексами, мы в конце концов построим интересующую нас δ-сеть пространства R. Сферические окрестности $O\left(x_\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центрами в точках x_γ построенной δ-сети и образуют нужное нам лебегово ε-покрытие пространства R. В самом деле, система окрестностей $O(x_\gamma, \delta)$, в силу нашего построения, является покрытием пространства R, причем при любом γ имеет место включение $O(O(x_\gamma, \delta), \eta) \subseteq O\left(x_\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, где $\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2} - \delta$ *.

Обратно, пусть открытые множества O_γ составляют некоторое лебегово покрытие λ пространства R и пусть η — лебегово число этого покрытия. Выберем открытое покрытие α пространства R кратности, меньшей или равной $r+1$, каждый элемент которого по диаметру меньше η. (По условию теоремы такое покрытие существует.) Легко видеть, что покрытие α вписано в данное лебегово покрытие λ. Определим открытые множества O'_γ следующим образом: для $\gamma = 1$ положим O'_γ равным сумме всех элементов покрытия α, содержащихся в O_1, а для всех последующих γ определим O'_γ как сумму всех элементов покрытия α, включенных в O_γ и не вошедших ни в одно из множеств $O'_{\gamma'}$, где $\gamma' < \gamma$. Легко видеть, что построенные таким образом множества O'_γ составляют покрытие пространства R, комбинаторно вписанное в покрытие λ и той же кратности, что и покрытие α. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что для определения метрической размерности вполне ограниченных пространств достаточно конечных покрытий. В самом деле, само понятие полной ограниченности метрического пространства предусматривает существование в нем конечной δ-сети при сколь угодно малом δ, а следовательно (это вытекает из приведенного выше доказательства теоремы 1), и существование сколь угодно мелких конечных лебеговых покрытий этого пространства. Так как, согласно теореме 1, во всякое лебегово покрытие пространства R при $\operatorname{dm} R \leqslant r$ можно комбинаторно вписать открытое покрытие кратности, меньшей или равной $r+1$, то мы имеем следующее предложение:

Для всякого вполне ограниченного пространства метрической размерности, меньшей или равной r, при любом $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое ε-покрытие кратности, меньшей или равной $r+1$.

Обратное предложение очевидно.

§ 2. В этом параграфе доказывается теорема, позволяющая определять метрическую размерность точечных множеств с помощью открытых покрытий, локально конечных в эвклидовых пространствах, содержащих эти множества **.

---

* Для доказательства достаточности нашего утверждения вполне можно было бы обойтись лебеговыми покрытиями, образованными шаровыми окрестностями всех точек пространства R. Такое же специальное построение лебеговых покрытий понадобится нам при доказательстве следствия, вытекающего из данной теоремы.

** Система множеств $\{A_\gamma\}$ пространства E^n называется **локально конечной в пространстве** E^n, если каждая точка $x \in E^n$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом A_γ. Следует заметить, что, если система множеств $\{A_\gamma\}$ локально конечна в пространстве E^n, то она будет локально конечна и в любом другом эвклидовом пространстве, содержащем эту систему.

Теорема 2. *Пусть множество M включено в пространство E^n. Метрическая размерность множества M меньше или равна r в том и только в том случае, если при любом $\varepsilon > 0$ существует открытое ε-покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n.*

Достаточность условия теоремы очевидна. Докажем его необходимость.

Пусть имеет место неравенство $\mathrm{dm}\, M \leqslant r$. Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется открытое ε-покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n. Для этого, выбрав в пространстве E^n какую-нибудь ортогональную систему координат с осями $Ox_1, \ldots, Ox_n$, рассмотрим плоскости вида $x_i = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} j$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots)$. Эти плоскости разбивают пространство E^n на равные кубы $V_1, V_2, \ldots$, диаметр каждого из которых равен $\frac{\varepsilon}{2}$. Выберем η, удовлетворяющее условию $0 < \eta < \frac{\varepsilon}{4}$, и рассмотрим множества $O_i = O(V_i, \eta)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Легко видеть, что O_i составляют лебегово покрытие пространства E^n, локально конечное в этом пространстве, причем диаметр каждого из множеств O_i меньше ε. Рассмотрим множества $O_i \cap M$. Эти множества, очевидно, составляют лебегово покрытие λ множества M, поэтому, согласно теореме 1, существует открытое покрытие α множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, комбинаторно вписанное в покрытие λ. А так как покрытие λ (по построению) — локально конечное в пространстве E^n, то, поскольку α комбинаторно вписано в λ, тем же свойством будет обладать и покрытие α. Теорема доказана.

Применяя эту теорему к ограниченным точечным множествам, можно легко получить следующий результат:

Пусть M — ограниченное множество пространства E^n. Метрическая размерность множества M меньше или равна r в том и только в том случае, если при любом $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое ε-покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$.

Справедливость этого утверждения следует также из результата предыдущего параграфа.

Из теоремы 2 вытекает также (в этом можно легко убедиться, проводя рассуждения § 1), что *метрическая размерность множества $M \subset E^n$ не превосходит r в том и только в том случае, если во всякое лебегово покрытие множества M можно вписать открытое, локально конечное в пространстве E^n покрытие этого множества кратности, меньшей или равной $r+1$.*

§ 3. В настоящем параграфе приводится характеристика метрической размерности с помощью ε-сдвигов в полиэдры.

Результат предыдущего параграфа позволяет доказать для точечных множеств следующее предложение:

Теорема 3. *Пусть M — множество пространства E^n. Для того чтобы метрическая размерность множества M была меньше или равна r, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал ε-сдвиг* *множества M в локально конечный полиэдр* размерности, меньшей или равной r, лежащий в том же пространстве E^n.*

Докажем прежде необходимость, т. е. покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ и при условии $\mathrm{dm}\, M \leqslant r$ существует ε-сдвиг множества M в локально конечный полиэдр $P \subset E^n$ размерности, меньшей или равной $r+1$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Согласно теореме 2, существует открытое ε-покрытие α множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, локально конечное в пространстве E^n. Пусть множества $O_1, O_2, \ldots$ — элементы этого покрытия. Выбрав по точке в каждом из множеств O_i $(i=1, 2, \ldots)$, реализуем нерв покрытия α в пространстве E^n (при этом, разумеется, может случиться, что среди симплексов этого нерва окажутся вырожденные). Следует заметить, что система вершин реализованного таким образом нерва покрытия α, так же как и система множеств O_i, локально конечна в пространстве E^n, откуда следует, что и сам этот нерв локально конечен в пространстве E^n. Пусть полиэдр P есть тело построенного нерва покрытия α и пусть φ — барицентрическое отображение множества M в этот полиэдр**. Рассмотрим произвольную точку x множества M. Точка x отображением φ переводится в симплекс, вершинами которого служат точки элементов покрытия α, содержащих эту точку. Так как все элементы покрытия α по диаметру меньше ε, то и расстояние между точками x и $\varphi(x)$ также меньше ε, а это и означает, что отображение φ есть ε-сдвиг. Построенный нерв покрытия α, конечно, может не быть триангуляцией полиэдра P, так как в нем могут встречаться как вырожденные, так и пересекающиеся симплексы. Но каждый из этих симплексов можно подразделить на конечное число более мелких симплексов так, чтобы в конце концов получилась триангуляция полиэдра P. Такая триангуляция будет локально конечной в пространстве E^n, так как локально конечным в пространстве E^n является нерв, подразделением которого служит эта триангуляция.

Теперь докажем достаточность. Пусть при любом положительном ε существует ε-сдвиг множества M в локально конечный полиэдр P размерности, меньшей или равной r.

Покажем, что, каково бы ни было $\sigma > 0$, существует открытое покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше σ.

Пусть σ — произвольное положительное число. Тогда, выбрав положительное $\varepsilon < \frac{\sigma}{3}$, рассмотрим ε-сдвиг множества M в локально конечный полиэдр $P \subset E^n$ размерности, меньшей или равной r. Пусть K — локально конечная триангуляция полиэдра P. Не уменьшая общности, можно считать, что ди-

* Здесь локальная конечность полиэдра понимается в следующем смысле:

Пусть P — полиэдр, лежащий в пространстве E^n. Полиэдр P называется локально конечным, если существует триангуляция полиэдра P такая, что система симплексов этой триангуляции локально конечна в пространстве E^n.

** Возможная вырожденность некоторых симплексов не мешает нам пользоваться понятиями тела комплекса и барицентрического отображения, ибо определение центра тяжести точек не предполагает их линейной независимости.

аметр каждого симплекса этой триангуляции меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначив вершины триангуляции K через $e_1, e_2, \ldots$, рассмотрим звезды Oe_i $(i = 1, 2, \ldots)$ всех этих вершин*. Эти звезды составляют открытое локально конечное в пространстве E^n ε-покрытие полиэдра P кратности, меньшей или равной $r+1$ (точнее, кратность этого покрытия на единицу больше размерности полиэдра P). Рассмотрим множества $\varphi^{-1}(Oe_i)$. Диаметр каждого из этих множеств меньше σ, так как для любых двух точек x' и x'' множества $\varphi^{-1}(Oe_i)$ при любом i имеем:

$$\rho(x', x'') \leqslant \rho(x', \varphi(x')) + \rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) + \rho(x'', \varphi(x'')) < 3\varepsilon < \sigma.$$

Кроме того, система множеств $\varphi^{-1}(Oe_i)$ имеет кратность, меньшую или равную $r+1$. Таким образом, мы построили открытое (даже локально конечное в пространстве E^n) покрытие множества M кратности, меньшей или равной $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше σ. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы сразу следует, что *для характеристики метрической размерности ограниченных точечных множеств достаточно рассматривать ε-сдвиги лишь в конечные полиэдры.*

II. Характеристика метрической размерности с помощью равномерно непрерывных отображений

§ 4. В настоящем параграфе определяется понятие так называемой равномерной триангуляции, а также доказывается теорема, устанавливающая свойство равномерной триангуляции, необходимое нам в следующих параграфах.

Определение 3. Следуя Ю. М. Смирнову [6], *назовем триангуляцию K равномерной, если выполняются следующие два условия*:

1. *Длины всех ребер триангуляции K меньше некоторого фиксированного числа l.*

2. *Расстояние между любыми двумя не имеющими общих вершин симплексами триангуляции K больше некоторого $h > 0$.*

Теорема 4. *Если K — равномерная триангуляция полиэдра $\widetilde{K}$, то звезды вершин триангуляции K образуют лебегово покрытие этого полиэдра.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую лемму:

Лемма 1. *Для всех симплексов $T^r \subset E^n$, ребра которых не превосходят некоторого числа l, а высоты** ограничены снизу числом $h > 0$, существует $\varepsilon > 0$, такое, что ε-окрестности граней T_i^{r-1} $(i = 0, 1, \ldots, r)$ симплекса T^r не покрывают этого симплекса.*

---

* Звездой вершины e_i триангуляции K называется сумма всех симплексов этой триангуляции, имеющих точку e_i своей вершиной. В настоящей работе рассматриваются открытые симплексы (за исключением тех мест второго раздела, где применение замкнутых симплексов специально оговаривается), поэтому и звезды Oe_i суть открытые множества полиэдра P.

** Под высотой симплекса понимается расстояние от его вершины до плоскости противоположной грани.

Для доказательства этой леммы рассмотрим произвольный r-мерный симплекс T^r. Разобьем его на $r+1$ пирамид с основаниями T_0^{r-1}, T_1^{r-1}, ..., T_r^{r-1} и общей вершиной s, где T_0^{r-1}, T_1^{r-1}, ..., T_r^{r-1} суть $(r-1)$-мерные грани симплекса T^r, а s — центр вписанного в этот симплекс шара. Пусть ρ — радиус шара, вписанного в симплекс T^r. Обозначив через $V(T^r)$ объем симплекса T^r, а через $V(T_i^{r-1})$ $(i=0, 1, \ldots, r)$ — объем его граней, получим, что объемы образовавшихся в результате нашего разбиения пирамид соответственно равны $\frac{\rho}{r} V(T_i^{r-1})$ $(i=0, 1, \ldots, r)$. Отсюда получаем:

$$V(T^r) = \frac{\rho}{r} \sum_{i=0}^{r} V(T_i^{r-1}).$$

Нетрудно также показать, что для объема симплекса T^r и для объемов его граней имеют место следующие оценки:

$$\frac{h^r}{r!} \leqslant V(T^r) \leqslant \frac{l^r}{r!}, \quad \frac{h^{r-1}}{(r-1)!} \leqslant V(T_i^{r-1}) \leqslant \frac{l^{r-1}}{(r-1)!} \qquad (i=0, 1, \ldots, r),$$

где l — верхняя грань длин ребер симплекса T^r, а h — нижняя грань длин его высот. Пользуясь приведенными оценками, получим:

$$V \leqslant \frac{\rho}{r}(r+1)\frac{l^{r-1}}{(r-1)!},$$

откуда имеем:

$$\frac{\rho}{r}(r+1)\frac{l^{r-1}}{(r-1)!} \geqslant \frac{h^r}{r!}.$$

Таким образом, заключаем, что

$$\rho \geqslant \frac{h^r}{(r+1)\, l^{r-1}}.$$

Выбрав $\varepsilon < \frac{h^r}{(r+1)\, l^{r-1}}$, заметим, что множества $O(T_i^{r-1}, \varepsilon)$ $(i=0, 1, \ldots, r)$, и даже их замыкания, не покрывают симплекса T^r. А отсюда следует сразу, что если l и h — числа из условия леммы и если выбрать $\varepsilon < \min \frac{h^r}{(r+1) l^{r-1}}$, то указанным свойством будет обладать всякий симплекс, удовлетворяющий условию леммы. Лемма доказана.

Применим доказанную лемму к триангуляции K (это можно сделать, так как симплексы триангуляции K, очевидно, удовлетворяют условию этой леммы), т. е. указанным выше способом выберем число ε такое, что ε-окрестности $O(T_i^{r-1}, \varepsilon)$ граней T_i^{r-1} $(i=0, 1, \ldots, r)$ произвольного симплекса T^r триангуляции K не покрывают некоторой окрестности центра шара, вписанного в этот симплекс. Рассмотрим, наряду со звездами Oe_i вершин e_i триангуляции K, их границы U_i, $U_i = [Oe_i] \setminus Oe_i$, и для каждой звезды Oe_i построим открытое множество O_i следующим образом: $O_i = Oe_i \setminus [O(U_i, \varepsilon)]$.

Покажем, что O_i образуют покрытие полиэдра $\widetilde{K}$; для этого предположим противное, т. е. предположим, что в триангуляции K найдется точка x, не принадлежащая ни одному из O_i. Пусть T^r с вершинами $e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ — симплекс триангуляции K, содержащий точку x. Из того, что x не принадлежит ни одному из O_i, следует, что x содержится в каждом из множеств $T^r \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)]$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$. А отсюда вытекает, что множества $T^r \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)$ покрывают симплекс T^r. Поэтому, если T^r — грань симплекса T^n триангуляции K, то множества $T^n \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)]$ будут покрывать симплекс T^n. Но это противоречит выбору ε, так как среди симплексов T^n триангуляции K, содержащих T^r в качестве грани, найдутся такие, которые не являются собственными гранями никаких других симплексов триангуляции K, а для таких симплексов множества $T^n \cap [O(U_{i_j}, \varepsilon)]$ совпадают соответственно с множествами $T^n \cap [O(T_j^{n-1}, \varepsilon)]$, где T_j^{n-1} — противоположные вершинам e_{i_j} грани симплекса T^n. Таким образом, множества O_i действительно образуют покрытие полиэдра $\widetilde{K}$.

Нам остается показать теперь, что существует положительное число η, для которого при любом i имеет место включение $O(O_i, \eta) \subseteq Oe_i$. Существование такого η будет выведено из следующей леммы, доказанной Ю. М. Смирновым [6], которую мы приводим без доказательства.

Лемма 2. *Для любой равномерной триангуляции и любого положительного числа σ найдется положительное η такое, что η-окрестности любых двух не имеющих общих вершин симплексов данной триангуляции не пересекаются, а пересечение η-окрестностей любых двух имеющих общие вершины симплексов этой триангуляции содержится в σ-окрестности их «наибольшей» общей грани.*

Применив лемму 2 к нашему случаю, выберем η таким образом, чтобы пересечение η-окрестностей любых двух симплексов триангуляции K было пусто или содержалось в $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности их «наибольшей» общей грани, в случае если эти симплексы имеют общие вершины. Пусть T — произвольный симплекс триангуляции K. Если симплекс T не имеет общих вершин с симплексами звезды Oe_i, то $O(Oe_i, \eta) \cap O(T, \eta) = \Delta$, откуда $O(Oe_i, \eta) \cap T = \Delta$. Если же T имеет общие вершины с каким-нибудь симплексом T' звезды Oe_i, то для симплексов T и T' имеет место следующее соотношение:

$$O(T, \eta) \cap O(T', \eta) \subset O\left(T'', \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset O\left(U_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где T'' — «наибольшая» общая грань этих симплексов. Отсюда следует, что $O(Oe_i, \eta) \cap T \subset O\left(U_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, и получается нужное нам включение

$$O(O_i, \eta) \subset Oe_i,$$

так как $O\left(U_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap O\left(O_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \Delta$, а $O\left(O_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \supset O(O_i, \eta)$. Таким образом, мы показали, что покрытие полиэдра $\widetilde{K}$ звездами Oe_i есть лебегово покрытие этого полиэдра. Теорема доказана.

§ 5. В этом параграфе приводятся теоремы, устанавливающие связь метрической размерности точечных множеств со свойствами равномерно непрерывных отображений этих множеств в равномерные триангуляции.

Прежде всего дадим следующее

Определение 4. *Пусть f — непрерывное отображение множества M в триангуляцию K полиэдра $\widetilde{K}$. Мы будем говорить, что степень существенности отображения f равна r, если r — наибольшее из чисел p таких, что в триангуляции K существует p-мерный замкнутый симплекс $\overline{T}^p$, на прообразе $f^{-1}(\overline{T}^p)$ которого отображение f существенно*. В случае если степень существенности отображения f равна r, мы будем говорить также, что отображение f r-существенно.*

Имеет место следующее предложение:

Теорема 5. *Если метрическая размерность множества $M \subset E^n$ равна r ($\operatorname{dm} M = r$), то степень существенности любого равномерно непрерывного отображения этого множества в равномерную триангуляцию меньше или равна r.*

Доказательству этой теоремы предпошлем следующую простую лемму:

Лемма 3. *Пусть f — равномерно непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Если λ — лебегово покрытие пространства Y, то лебеговым будет также и покрытие пространства X, составленное прообразами элементов покрытия λ при отображении f.*

В самом деле, пусть η — лебегово число покрытия λ. Выберем $\delta > 0$ таким образом, чтобы для любых точек x' и x'' пространства X, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, было $\rho(y', y'') < \eta$, где $y' = f(x')$ и $y'' = f(x'')$. Пусть α — такое покрытие пространства Y, что для любого элемента A этого покрытия имеет место включение $O(A, \eta) \subset O$, где O — некоторый элемент покрытия λ. Легко видеть, что $O(f^{-1}(A), \delta) \subset f^{-1}(O)$, откуда следует утверждение леммы.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 5.

Пусть f — равномерно непрерывное r'-существенное отображение множества M в равномерную триангулярию K полиэдра $\widetilde{K}$. Покажем, что $r' \leqslant r$. Для этого рассмотрим звезды Oe_i вершин триангуляции K. Согласно утверждению теоремы 4, эти звезды образуют лебегово покрытие полиэдра $\widetilde{K}$, поэтому можно утверждать (см. лемму 3), что множества $f^{-1}(Oe_i)$ составляют лебегово покрытие λ множества M. Следовательно, в покрытие λ (см. конец § 2) можно вписать открытое локально конечное в пространстве E^n покрытие α кратности $s+1$, где $s \leqslant r$. Рассмотрим нерв покрытия α. Пусть $O_j \in \alpha$ содержится в $f^{-1}(Oe_i)$. Отобразив вершину e'_j нерва α, соответствующую

---

* Пусть $\overline{T}$ — замкнутый симплекс и f — непрерывное отображение множества M в этот симплекс. Непрерывная деформация f_t (t меняется от 0 до 1) отображения называется допустимой деформацией, если на множестве $f^{-1}(T)$, где T — граница симплекса $\overline{T}$, эта деформация тождественна. Если ни одна из допустимых деформаций отображения f «не освобождает точек симплекса $\overline{T}$», то отображение f называется существенным.

O_j, в вершину e_i триангуляции K, получим симплициальное отображение g этого нерва в триангуляцию K.

Пусть φ — барицентрическое отображение множества M в тело нерва α. Рассмотрим отображение $f_1 = g\varphi$ множества M в полиэдр $\widetilde{K}$. Нетрудно видеть, что отображения f и f_1 таковы, что если $f(x)$ $(x \in M)$ содержится в некотором симплексе T триангуляции K, то $f_1(x)$ содержится в $\overline{T}$. А это означает, что на каждом из множеств $f^{-1}(T)$, где T — произвольный симплекс триангуляции K, отображения f и f_1 удовлетворяют условию следующей леммы:

Лемма 4. *Пусть f — существенное отображение множества M в замкнутый симплекс $\overline{T}$ и пусть $A \subset M$ — прообраз при этом отображении границы $\dot{T}$ симплекса $\overline{T}$. Если отображение f_1 получено равномерной деформацией f_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ отображения f и если деформация f_t такова, что при любом t имеет место включение $f_t(A) \subset \dot{T}$, то отображение f_1 множества M в симплекс $\overline{T}$ — существенное**.*

Но так как отображение f_1 переводит множество M в r'-мерный остов триангуляции K, то отображение f может быть существенным лишь на прообразах замкнутых симплексов этого остова. Поэтому имеем: $r' \leqslant s \leqslant r$. Теорема 5 доказана.

Покажем теперь, что для любого точечного множества метрической размерности r существует равномерно непрерывное r-существенное отображение в равномерную триангуляцию некоторого полиэдра. Для этого нам понадобится вспомогательное предложение, которое будет применяться также и в следующем параграфе.

Лемма 5. *Пусть на некотором метрическом пространстве R определено семейство неотрицательных равностепенно непрерывных функций φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Если функции φ_i удовлетворяют следующим трем условиям:*

1) *значения каждой из функций φ_i не превосходят некоторого фиксированного числа l;*

2) *какова бы ни была точка $x \in R$, среди функций φ_i имеется функция, значение которой не меньше некоторого не зависящего от выбора точки x числа $h > 0$;*

3) *в любой точке $x \in R$ число отличных от нуля функций φ_i не превышает некоторого фиксированного числа m,*

то функции вида $\dfrac{\varphi_i}{\sum\limits_j \varphi_j}$ также являются равностепенно непрерывными функциями.

Рассмотрим функции φ_i в точках $x' \in R$ и $x'' \in R$. Среди них могут быть такие, которые и в точке x' и в точке x'' отличны от нуля. Обозначим их

* Справедливость этой леммы легко выводится из следующего предложения, доказательство которого приведено в работе К. А. Ситникова [2]:

Пусть f — существенное отображение множества M в замкнутый шар U радиуса 1 и пусть $A = f^{-1}(S)$, где S — граница шара U. Если непрерывное отображение f_1 множества M в шар U таково, что для любой точки $x \in A$ расстояние между точками $f(x)$ и $f_1(x)$ меньше ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, то множество $f_1(M)$ покрывает концентрический шар радиуса $1 - \varepsilon$.

через $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$. Функции же, отличные от нуля в точке x' и равные нулю в точке x'', занумеруем индексами $i'_1, \ldots, i'_p$, а функции, отличные от нуля в точке x'' и равные нулю в точке x', — индексами $i''_1, \ldots, i''_q$. Таким образом, дроби $\dfrac{\varphi_i}{\sum\limits_j \varphi_j}$ в точках x' и x'' будут соответственно иметь вид

$$\frac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')}.$$

Рассмотрим разность $\dfrac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_j \varphi_j(x')} - \dfrac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_j \varphi_j(x'')}$:

$$\frac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_j \varphi_j(x')} - \frac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_j \varphi_j(x'')} =$$

$$= \frac{\varphi_i(x')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')} - \frac{\varphi_i(x'')}{\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')} =$$

$$= \frac{\varphi_i(x') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') - \varphi_i(x'') \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \varphi_i(x') \cdot \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} -$$

$$- \frac{\varphi_i(x'') \cdot \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} =$$

$$= \frac{\varphi_i(x') \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') - \varphi_i(x'') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} +$$

$$+ \frac{\varphi_i(x'') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') - \varphi_i(x'') \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{r} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} +$$

$$+ \frac{\varphi_i(x') \cdot \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'') - \varphi_i(x'') \cdot \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum\limits_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} =$$

$$= \frac{(\varphi_i(x') - \varphi_i(x''))\cdot \sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \varphi_i(x'')\cdot \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{i_k}(x'') - \varphi_{i_k}(x'))}{\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)} +$$

$$+ \frac{\varphi_i(x')\cdot \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'') - \varphi_i(x'')\cdot \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')}{\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x')\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'')\right)}.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Без ограничения общности можно считать (см. условие леммы), что выполняются следующие неравенства:

$$|\varphi_i(x') - \varphi_i(x'')| < \varepsilon,$$

$$|\varphi_{i_k}(x'') - \varphi_{i_k}(x')| < \varepsilon \quad (k=1, \ldots, n), \qquad \varphi_{i''_k}(x') < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, p),$$

$$\varphi_{i''_k}(x'') < \varepsilon \quad (k=1, \ldots, q).$$

Принимая во внимание неравенства

$$n \leqslant m, \quad p \leqslant m, \quad q \leqslant m,$$

$$\varphi_i(x') \leqslant l, \quad \varphi_i(x'') \leqslant l, \quad \varphi_{i_k}(x'') \leqslant l \quad (k=1, \ldots, n),$$

а также неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x') + \sum_{k=1}^{p} \varphi_{i'_k}(x') \geqslant h, \quad \sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k}(x'') + \sum_{k=1}^{q} \varphi_{i''_k}(x'') \geqslant h,$$

получим:

$$\left|\frac{\varphi_i(x')}{\sum_j \varphi_j(x')} - \frac{\varphi_i(x'')}{\sum_j \varphi_j(x'')}\right| < \frac{4ml}{h^2}\varepsilon,$$

откуда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь произвольное множество $M \subset E^n$ метрической размерности r ($\dim M = r$). Выберем ε столь малым, чтобы всякое открытое ε-покрытие множества M имело кратность, большую или равную $r+1$. Протриангулируем пространство E^n таким образом, чтобы получившаяся в результате триангуляция была равномерной, чтобы диаметр каждого ее симплекса был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и чтобы число звезд вершин этой триангуляции, пересекающихся со звездой Oe_i, при любом i было меньше некоторого фиксированного числа m. Это всегда можно сделать, разбивая, например, соответствующим образом на симплексы каждый куб какого-нибудь достаточно мелкого кубильяжа пространства E^n. Диаметры звезд Oe_i построенной триангуляции меньше ε, причем образованное ими покрытие пространства E^n имеет нерв, представленный самой этой триангуляцией. Кроме того, покрытие, составленное звездами Oe_i, есть лебегово покрытие пространства E^n (см. теорему 4). Обозначим через $O_1, O_2, \ldots$ всевозможные непустые множества вида $Oe_i \cap M$. Легко видеть, что множества O_i $(i = 1, 2, \ldots)$ составляют лебегово покрытие λ множества M, обладающее следующими свойствами:

1. Нерв K покрытия λ, представленный частью построенной триангуляции пространства E^n, является равномерной триангуляцией полиэдра $\widetilde{K}$.

2. Всякое открытое покрытие множества M, вписанное в покрытие λ, имеет кратность, большую или равную $r+1$.

3. Для всякого i число элементов покрытия λ, пересекающихся с O_i, меньше m.

Имеет место следующее предложение:

Барицентрическое отображение φ множества M в триангуляцию K полиэдра $\widetilde{K}$ является равномерно непрерывным.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим функции $\rho_i(x) = \rho(x, M \setminus O_i)$ и покажем, что для этих функций имеет место неравенство

$$|\rho_i(x) - \rho_i(x')| \leqslant \rho(x, x') \quad (x \in M,\ x' \in M).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\rho_i(x')$ не превосходит $\rho_i(x)$. Тогда, выбрав из множества $M \setminus O_i$ точку x'', для которой $\rho(x', x'') = \rho_i(x')$, получим неравенство

$$\rho_i(x) - \rho_i(x') \leqslant \rho(x, x'') - \rho(x', x'').$$

Но из аксиомы треугольника вытекает: $\rho(x, x'') - \rho(x', x'') \leqslant \rho(x')$. Следовательно, выполняется и неравенство $\rho_i(x) - \rho_i(x') \leqslant \rho(x, x')$. А это означает, что $\rho_i(x)$ — равностепенно непрерывные функции. Нетрудно также видеть, что в любой точке $x \in M$ число отличных от нуля функций $\rho_i(x)$ не превосходит m и что среди $\rho_i(x)$ найдется такая функция, значение которой в точке x больше или равно $\eta > 0$, где η — лебегово число покрытия λ. А так как при любом i и произвольной точке $x \in M$ выполняется неравенство $\rho_i(x) < \varepsilon$, то, согласно лемме 5, функции $\varphi_i(x) = \frac{\rho_i(x)}{\sum\limits_j \rho_j(x)}$ — равностепенно непрерывные.

Вернемся к барицентрическому отображению φ множества M в полиэдр $\widetilde{K}$. Пусть x' и x'' — произвольные точки множества M, для которых $\rho(x', x'') < \eta$. Тогда в покрытии λ найдется элемент O_i, содержащий обе эти точки; следовательно, их образы $\varphi(x')$ и $\varphi(x'')$ будут содержаться в некоторой звезде Oe триангуляции K. Рассмотрим всевозможные векторы, исходящие из точки e и совпадающие с одномерными симплексами звезды Oe. В силу определенности выбора триангуляции K, число таких векторов меньше m. Обозначим их через $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p$. Пусть барицентрическими функциями, соответствующими концам векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_p$, будут $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_p}$. Тогда, как нетрудно видеть, векторы $\overline{e\varphi(x')}$ и $\overline{e\varphi(x'')}$ с началом в точке e и концами соответственно в точках $\varphi(x')$ и $\varphi(x'')$ можно представить в виде следующих линейных комбинаций: $\overline{e\varphi(x')} = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k}(x')\,\overline{a}_k$, $\overline{e\varphi(x'')} = \sum\limits_{k=1}^{p} \varphi_{i_k}(x'')\,\overline{a}_k$. Отсюда вектор

$\overline{\varphi(x')\varphi(x'')}$ можно выразить в виде $\overline{\varphi(x')\varphi(x'')} = \sum_{k=1}^{p} (\varphi_{i_k}(x'') - \varphi_{i_k}(x')) \cdot \overline{a}_k$.

Имеем:

$$\rho(\varphi(x'),\ \varphi(x'')) \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\varphi_{i_k}(x') - \varphi_{i_k}(x'')| \cdot |\overline{a}_k| < \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{p} |\varphi_{i_k}(x') - \varphi_{i_k}(x'')|,$$

так как $|\overline{a}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(k = 1, \ldots, p)$.

Пусть σ — произвольное положительное число. Существует число $\delta > 0$ такое, что для любых точек $x' \in M$ и $x'' \in M$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$, имеют место неравенства

$$|\varphi_{i_k}(x') - \varphi_{i_k}(x'')| < \frac{\sigma}{\varepsilon m} \quad (k = 1, \ldots, p),$$

выполняющиеся для всех функций $\varphi_i(x)$. А так как можно считать, что $\delta < \eta$, то получаем нужное нам неравенство $\rho(\varphi(x'), \varphi(x'')) < \sigma$. Таким образом, равномерная непрерывность отображения φ доказана.

Пусть степень существенности отображения φ равна s, где (согласно теореме 5) $s \leqslant r$. Продеформируем φ в отображение φ_1, переводящее множество M в s-мерный остов K^s триангуляции K и обладающее следующим свойством: если $\varphi(x)$ (x — произвольная точка множества M) содержится в симплексе T триангуляции K, то $\varphi_1(x)$ содержится в $\overline{T}$, причем для точек $x \in \varphi^{-1}(K^s)$ $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ совпадают. Легко заметить, что прообразы при отображении φ_1 звезд вершин остова K^s составляют открытое покрытие множества M кратности $s + 1$, вписанное в покрытие λ. А это возможно лишь при наличии равенства $s = r$ (см. свойство 2 покрытия λ). Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. *Для всякого множества $M \subset E^n$ метрической размерности r ($\dim M = r$) существует равномерно непрерывное r-существенное отображение в равномерную триангуляцию некоторого полиэдра.*

Легко видеть, что теоремы 5 и 6 полностью характеризуют метрическую размерность точечных множеств.

§ 6. В настоящем параграфе приводится теорема, представляющая собой в некотором смысле аналог известной теоремы о так называемых существенных отображениях *.

Пусть $M \subset E^n$ — множество метрической размерности r ($\dim M = r$) и пусть λ — лебегово покрытие множества M, удовлетворяющее следующим требованиям.

1. Всякое открытое покрытие множества M, вписанное в λ, имеет кратность, большую или равную $r + 1$.

* Подробное доказательство теоремы о существенных отображениях впервые опубликовано П. С. Александровым еще в 1932 г. (см. [5]).

2. Число элементов покрытия λ, пересекающихся с произвольным $O_i \in \lambda$, меньше некоторого фиксированного числа m. (Такие покрытия уже рассматривались в предыдущем параграфе.)

Пусть φ — барицентрическое отображение множества M в тело нерва K покрытия λ. Степень существенности отображения φ равна r (см. доказательство теоремы 6). Обозначив через $\overline{T^r}$ замкнутый симплекс триангуляции K такой, что отображение φ множества $\varphi^{-1}(\overline{T^r})$ в этот симплекс существенно (см. определение 4), и отобразив каждую вершину триангуляции K, не входящую в остов симплекса T^r, в какую-нибудь вершину этого остова, построим симплициальное отображение g триангуляции K в замкнутый симплекс $\overline{T^r}$. Отображение $f = g\varphi$ множества M в симплекс $\overline{T^r}$ существенно, ибо иначе несущественным было бы отображение φ, рассматриваемое на множестве $\varphi^{-1}(\overline{T^r})$. Покажем, что отображение f равномерно непрерывно. Для этого, обозначив через $e_0, e_1, \ldots, e_r$ вершины симплекса T^r и положив $\overline{e_0 e_i} = a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, представим вектор $\overline{e_0 f(x)}$ в виде $\overline{e_0 f(x)} = \sum\limits_{i=1}^{r} b_i(x)\overline{a}_i$, где $b_i(x)$ — соответствующие вершинам e_i нормированные барицентрические координаты точки $f(x)$. Для дальнейшего следует заметить, что $b_i(x)$ можно представить в виде суммы значений в точке x барицентрических функций, соответствующих вершинам триангуляции K, переводимым отображением g в вершину e_i $(i = 1, \ldots, r)$.

Пусть x' и x'' — точки множества M. Оценим расстояние между точками $f(x')$ и $f(x'')$:

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant \sum_{i=1}^{r} |b_i(x') - b_i(x'')| \cdot |\overline{a}_i| \leqslant l \sum_{i=1}^{r} |b_i(x') - b_i(x'')|,$$

где $l = \max|\overline{a}_i|$. Рассмотрим разность $b_i(x') - b_i(x'')$. Если все барицентрические функции обозначить через φ_j $(j = 1, 2)$, то разность $b_i(x') - b_i(x'')$ можно представить в виде $\sum\limits_{k=1}^{r} (\varphi_{j_k}(x') - \varphi_{j_k}(x''))$, где $\varphi_{j_1}(x), \ldots, \varphi_{j_p}(x)$ — функции, вошедшие при нашем представлении коэффициентов $b_i(x)$ в качестве отличных от нуля слагаемых или в $b_i(x')$, или в $b_i(x'')$, или одновременно и в $b_i(x')$ и в $b_i(x'')$.

Заметим, что $p \leqslant 2m$. Пусть число $\delta > 0$ таково, что для любых x' и x'', для которых $\rho(x', x'') < \delta$, при всяком j имеет место неравенство $|\varphi_j(x') - \varphi_j(x'')| < \frac{\sigma}{2m^2 l}$, где σ — произвольное наперед заданное положительное число (см. лемму 5). Тогда

$$|b_i(x') - b_i(x'')| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |\varphi_{j_k}(x') - \varphi_{j_k}(x'')| < 2m \frac{\sigma}{2m^2 l} = \frac{\sigma}{ml}.$$

Следовательно,

$$\rho(f(x'), f(x'')) < lm \frac{\sigma}{ml} = \sigma.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется для любых точек $x' \in M$ и $x'' \in M$ с расстоянием $\rho(x', x'') < \delta$.

Таким образом, доказано, что *для всяких точечных множеств метрической размерности r имеется равномерно непрерывное существенное отображение в r-мерный замкнутый симплекс.*

С другой стороны, так как всякий симплекс со всеми его гранями представляет собой частный случай равномерной триангуляции, то из теоремы 5 следует несущественность всякого равномерно непрерывного отображения множества метрической размерности r в замкнутый симплекс, размерность которого больше r. Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Метрическая размерность точечного множества есть наибольшая из размерностей симплексов, в которые можно равномерно непрерывно и существенно отобразить это множество.*

§ 7. В этом параграфе с помощью теоремы 7 доказываются три теоремы, также характеризующие метрическую размерность точечных множеств.

Теорема 8. *Метрическая размерность точечного множества M есть наименьшее из чисел r, обладающих следующим свойством: всякое равномерно непрерывное отображение f произвольного подмножества A множества M в r-мерную сферу можно продолжить до непрерывного отображения в эту сферу всего множества M.*

Доказательство. Продолжим отображение f до равномерно непрерывного отображения f_1 всего множества M в эвклидово пространство E^{r+1}, содержащее сферу S^r. Такое продолжение возможно в силу следующей леммы:

Лемма 6. *Для всякой ограниченной равномерно непрерывной функции, определенной на множестве метрического пространства, существует равномерно непрерывное продолжение на все пространство.*

Доказательство этого предложения, которое мы здесь не приводим, незначительно отличается от известного доказательства аналогичного утверждения для непрерывных функций*.

Обозначим теперь через U^{r+1} замкнутый шар, ограниченный сферой S^r. Построим отображение g множества $f_1(M)$, тождественное на $f_1(M) \cap U^{r+1}$ и являющееся на остальной части этого множества проекцией в сферу S^r из ее центра. Это отображение, очевидно, равномерно непрерывно, а следовательно, равномерно непрерывно и отображение $f_2 = gf_1$ множества M в замкнутый шар U^{r+1}.

При $\operatorname{dm} M \leqslant r$ согласно теореме 7 отображение f_2 несущественно. А это означает, что существует отображение множества M в сферу S^r, совпадающее с f_2 на множестве $f_2^{-1}(S^r)$, а значит, и с отображением f на множестве $A \subset f_2^{-1}(S^r)$.

Если же $\operatorname{dm} M > r$, то, в соответствии с теоремой 7, имеется существенное равномерно непрерывное отображение f множества M в r-мерный замкну-

* При доказательстве следует иметь в виду, что для любых двух множеств A и B метрического пространства R, находящихся на положительном расстоянии, функция $\dfrac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$, где $x \in R$, равномерно непрерывна, в чем нетрудно убедиться непосредственной оценкой.

тый симплекс $\overline{T^r}$. Нетрудно заметить, что отображение f нельзя продолжить с множества $f^{-1}(\dot{T})$, где $\dot{T}$ — граница симплекса T^r, до непрерывного отображения в $\dot{T}$ всего множества M. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть $f_1, \ldots, f_{r+1}$ — система $r+1$ заданных на точечном множестве M ограниченных и равномерно непрерывных функций и ε — произвольное положительное число. Метрическая размерность множества M не превосходит r в том и только в том случае, если существует система $f'_1, \ldots, f'_{r+1}$ непрерывных не имеющих на M общего нуля функций $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} f_i'^{-1}(0) = 0\right)$, удовлетворяющих соответственно неравенствам $|f_i(x) - f'_i(x)| < \varepsilon$ $(x \in M;\ i = 1, \ldots, r+1)$.*

Предположим сначала, что любые заданные на M ограниченные и равномерно непрерывные функции f_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ можно с любой точностью аппроксимировать непрерывными функциями, не имеющими общего нуля, и покажем, что метрическая размерность множества M не превосходит r. Для этого достаточно показать несущественность всякого равномерно непрерывного отображения множества M в $(r+1)$-мерный замкнутый шар U^{r+1} радиуса 1 с центром в начале координат.

Поставив в соответствие каждой точке $x \in M$ i-ю координату точки $f(x)$ $(i = 1, \ldots, r+1)$, определим на M равномерно непрерывные функции $f_i (i = 1, \ldots, r+1)$. Выберем $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Согласно предположению, существуют непрерывные функции f'_i $(i = 1, \ldots, r+1)$, удовлетворяющие в любой точке $x \in M$ соответственно неравенствам $|f_i(x) - f'_i(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{r+1}}$ и не имеющие общего нуля. Поставив в соответствие точке $x \in M$ точку $f'(x)$ с координатами $f'_i(x)$ $(i = 1, \ldots, r+1)$, построим непрерывное отображение f' множества M в пространство E^{r+1}. Следует заметить, что образ множества M при отображении f' не покрывает начала координат и в любой точке $x \in M$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f'(x)) < \varepsilon$. Отобразив каждую не содержащуюся в U^{r+1} (если такая имеется) точку множества $f'(M)$ в ближайшую к ней точку шара U^{r+1} и оставив на месте остальные точки этого множества, построим отображение g множества $f'(M)$ в шар U^{r+1}. Определим отображение $f'' = gf'$. Это отображение переводит множество M в шар U^{r+1} и (так же как и отображение f') отличается от f меньше чем на ε $(\rho(f(x), f''(x)) < \varepsilon,\ x \in M)$. Отсюда следует, что отображение f несущественно, ибо в противном случае образ множества M при отображении f'' покрывал бы начало координат (см. сноску на стр. 238).

Обратно, пусть ε — произвольное положительное число и f_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ — произвольно заданные на M ограниченные равномерно непрерывные функции (не ограничивая общности, можно считать, что модули этих функций не превосходят единицы). Покажем, что при $\operatorname{dm} M \leqslant r$ существуют непрерывные функции f'_i $(i = 1, \ldots, r+1)$, обладающие следующими двумя свойствами:

1. $|f_i(x) - f'_i(x)| < \varepsilon$ $(x \in M;\ i = 1, \ldots, r+1)$.
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} f_i'^{-1}(0) = 0$.

Для этого, выбрав в пространстве E^{r+1} систему координат с осями Ox_i $(i=1, \ldots, r+1)$, рассмотрим отображение f, ставящее в соответствие каждой точке $x \in M$ точку пространства E^{r+1} с координатами $f_i(x)$ $(i=1, \ldots, r+1)$. Легко видеть, что это отображение равномерно непрерывно и переводит множество M в замкнутый куб, ограниченный плоскостями $x_i=-1$, $x_i=+1$ $(i=1, \ldots, r+1)$. Пусть $V^{r+1} \subset E^{r+1}$ есть $(r+1)$-мерный замкнутый шар с центром в начале координат, диаметр которого меньше ε. Из теоремы 7 легко выводится, что отображение f в шар V^{r+1} множества $f^{-1}(V^{r+1})$ несущественно. Отсюда следует, что существует непрерывное отображение f', переводящее множество $f^{-1}(V^{r+1})$ в границу S^r шара V^{r+1} и совпадающее с f на остальной части множества M. Легко видеть, что, поставив в соответствие точке $x \in M$, i-ю координату точки $f'(x)$, получим искомые функции f'_i. Теорема доказана.

Теорема 10. *Пусть A_i, B_i $(i=1, \ldots, r+1)$ — любые удовлетворяющие условию $\rho(A_i, B_i) > 0$ пары замкнутых подмножеств точечного множества M. Метрическая размерность точечного множества M не превосходит r в том и только в том случае, если существуют замкнутые множества $\Phi_i \subset M$ $(i=1, \ldots, r+1)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. *Φ_i разделяет множества A_i и B_i $(i=1, \ldots, r+1)$.*
2. $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$.

Доказательство. Пусть сначала для пар далеких множеств* $A_i \subset M$ и $B_i \subset M$ существуют разделяющие множества Φ_i, удовлетворяющие условию $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$. Покажем, что метрическая размерность множества M не превосходит r. Для этого рассмотрим на M $r+1$ произвольных равномерно непрерывных функций f_i $(i=1, \ldots, r+1)$, по модулю не превышающих 1. Выбрав произвольно ε, $0 < \varepsilon < 1$, положим, что A_i есть множество всех точек $x \in M$, в которых выполняется неравенство $f_i(x) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. B_i определим, как множество всех точек $x \in M$, удовлетворяющих неравенству $f_i(x) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}$ $(i=1, \ldots, r+1)$. Расстояние между определенными таким образом множествами больше нуля при всех $i=1, \ldots, r+1$ (это следует из равномерной непрерывности функций f_i), откуда, по предположению, следует существование разделяющих A_i и B_i замкнутых множеств Φ_i, удовлетворяющих условию $\bigcap\limits_{i=1}^{r+1} \Phi_i = 0$.

Выбрав каким-либо образом не содержащую точек множества B_i окрестность $O(A_i)$ множества A_i, граница которой принадлежит Φ_i, построим на M функцию f_i следующим образом: на множестве $A_i \cup B_i$ положим

$$f'_i(x) = f_i(x);$$

в точках множества $O(A_i) \setminus A_i$ определим

$$f'_i(x) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\rho(x, \Phi_i)}{\rho(x, \Phi_i) + \rho(x, A_i)};$$

* В соответствии с терминологией теории пространств близости множества A и B далеки, если $\rho(A, B) > 0$.

на остальной же части множества M положим

$$f'_i(x) = -\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\rho(x, \Phi_i)}{\rho(x, \Phi_i) + \rho(x, B_i)}.$$

Легко видеть, что непрерывные функции f'_i $(i = 1, \ldots, r+1)$ не имеют общего нуля и удовлетворяют неравенствам $|f_i(x) - f'_i(x)| < \varepsilon$. А отсюда, согласно теореме 9, следует: $\operatorname{dm} M \leqslant r$.

Обратно, пусть метрическая размерность множества M не превосходит r и $A_i \subset M$, $B_i \subset M$ $(i = 1, \ldots, r+1)$ — произвольная система пар замкнутых далеких множеств. Покажем, что существуют замкнутые не имеющие общих точек множества Φ_i $(i = 1, \ldots, r+1)$, разделяющие соответственно множества A_i и B_i. Для этого рассмотрим на M равномерно непрерывные функции $f_i(x)$, удовлетворяющие условиям:

1. $|f_i(x)| \leqslant 1$.
2. На A_i (соответственно на B_i) $f_i(x) \equiv 1$ (соответственно $f_i(x) \equiv -1$).

Существование таких функций следует из утверждения, содержащегося в сноске на стр. 244. Выберем ε, $0 < \varepsilon < 1$. Согласно теореме 9, на M найдутся не имеющие общего нуля непрерывные функции f'_i, удовлетворяющие соответственно неравенствам $|f_i(x) - f'_i(x)| < \varepsilon$. Нетрудно заметить, что множества $\Phi_i = f_i'^{-1}(0)$ суть искомые множества. Теорема 10 доказана.

III. Гомологическая характеристика метрической размерности *

§ 8. Основным понятием настоящего параграфа является понятие равномерного ∇-цикла, а также понятие продолжаемости равномерного ∇-цикла с подмножества на все пространство.

Определение 5. *Равномерным ∇-циклом данного множества мы будем называть всякий ∇-цикл, определенный на нерве некоторого лебегова покрытия этого множества.*

Пусть дано метрическое пространство R. Рассмотрим множество всевозможных открытых звездно-конечных покрытий этого пространства. Из этого множества выделим всевозможные подмножества таким образом, чтобы в каждое из выделенных подмножеств вошли покрытия одной кратности и чтобы каждое подмножество содержало сколь угодно «мелкие» покрытия. Поставив в соответствие каждому такому подмножеству номер — кратность входящих в него покрытий, выберем подмножество с наименьшим номером. Покрытия пространства R, вошедшие в это подмножество, мы будем называть основными.

Пусть A — какое-нибудь множество пространства R. Рассмотрим какой-нибудь равномерный ∇-цикл Z множества A и покрытие λ — носитель этого цикла. Мы будем говорить, что *цикл Z можно продолжить на простран-*

* Применяемые здесь понятия комбинаторной топологии (∇-цикл, проекция ∇-цикла и др.) следует понимать в обычном смысле (см, например, [10]).

ство R, если среди основных покрытий пространства R найдется покрытие α с элементами O_γ, удовлетворяющее следующим двум требованиям:

1. *Множества $O_\gamma \cap A$ составляют покрытие множества A, вписанное в покрытие λ.*

2. *Проекция $\Pi_\alpha^\lambda Z$ цикла Z продолжаема до ∇-цикла всего комплекса α.* (В данном случае мы не делаем различия в обозначениях покрытий и их нервов, ибо это почти никогда не приводит к недоразумению.)

Теорема 11. *Если метрическая размерность пространства R равна r и A — произвольное множество, включенное в R, то всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все пространство R.*

В самом деле, пусть λ — лебегово покрытие множества A. Возьмем какой-нибудь n-мерный ∇-цикл Z нерва этого покрытия, $n \geqslant r$. Рассмотрим покрытие α пространства R кратности $r+1$, диаметр каждого элемента которого меньше лебегова числа покрытия λ. Множества, являющиеся пересечениями элементов покрытия α с множеством A, составляют покрытие множества A, вписанное в покрытие λ. Следовательно, для ∇-цикла Z существует проекция $\Pi_\alpha^\lambda Z$ в нерв покрытия α; так как нерв покрытия α есть r-мерный комплекс, цепь $\Pi_\alpha^\lambda Z$ является его ∇-циклом. Теорема доказана.

Для доказательства обратного предложения нам потребуется теорема, представляющая собой аналог известной теоремы Хопфа (см., например, [7], стр. 31 или [8], стр. 197). Определим предварительно нужное нам понятие степени отображения.

Пусть S^n — некоторая фиксированная триангуляция n-мерной сферы $\widetilde{S}^n$ и f — непрерывное отображение пространства R в сферу $\widetilde{S}^n$. Обозначим через Oe_i звезды вершин триангуляции S^n и рассмотрим покрытие α пространства R, образованное множествами $f^{-1}(Oe_i)$. Поставив в соответствие каждому элементу $f^{-1}(Oe_i)$ покрытия α вершину e_i триангуляции S^n, получим симплициальное отображение нерва α в триангуляцию S^n. Это симплициальное отображение порождает проекция всякого ∇-цикла триангуляции S^n в комплекс α. Проекцию основного цикла триангуляции S^n мы обозначим через Z_f^n и будем называть ее степенью отображения f пространства R в триангуляцию S^n. Следует заметить, что степень отображения f, если f равномерно непрерывно, есть равномерный ∇-цикл. Это следует из того, что звезды Oe_i образуют лебегово покрытие сферы, и поэтому их прообразы при отображении f также образуют лебегово покрытие (см. лемму 3).

Теорема 12. *Пусть A — замкнутое множество пространства R метрической размерности $n+1$ ($\dim R = n+1$). Для того чтобы равномерно непрерывное отображение f множества A в сферу $\widetilde{S}^n$ можно было продолжить до непрерывного отображения в $\widetilde{S}^n$ всего пространства R, необходимо и достаточно, чтобы степень отображения f можно было также продолжить на все пространство R.*

Докажем прежде достаточность, т. е. докажем, что если равномерный ∇-цикл Z_f^n можно продолжить на все пространство R, то существует отображение F (непрерывное) пространства R в сферу $\widetilde{S}^n$, совпадающее на A с отображением f.

Обозначим через λ носитель цикла Z_f^n (мы, как и раньше, обозначаем покрытие и его нерв одной и той же буквой). Пусть теперь α с элементами O_i — существующее по условию одно из основных покрытий пространства R, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. Множества $O_i \cap A$ образуют покрытие α' множества A, вписанное в покрытие λ;

2. Цепь $\Pi_\alpha^\lambda Z_f^n$ продолжаема до ∇-цикла всего комплекса α.

Так как покрытие α' вписано в покрытие λ, то это порождает симплициальное отображение нерва α' в триангуляцию S^n. Это симплициальное отображение определяет непрерывное отображение g полиэдра $\widetilde{\alpha}'$ в сферу $\widetilde{S}^n$, степенью которого является, очевидно, ∇-цикл $\Pi_{\alpha'}^\lambda Z_f^n$ комплекса α', продолжаемый до ∇-цикла всего комплекса α. Так как размерность полиэдра $\widetilde{\alpha}$ равна $n+1$, то из только что сказанного вытекает, что отображение g находится в условиях известной теоремы Хопфа для полиэдров *. А это означает, что отображение g можно продолжить до отображения G всего $\widetilde{\alpha}$. Обозначим через φ барицентрический сдвиг пространства R в тело нерва α и определим отображение F' пространства R в сферу $\widetilde{S}^n$ равенством: $F'(x) = G\varphi(x)$. Тогда для всякой точки $x \in A$ образы $F'(x)$ и $f(x)$ при отображениях F' и f содержатся в одном симплексе триангуляции S^n. А это означает, что на множестве A существует деформация отображения F' в отображение f. Следовательно, на основании так называемой леммы Борсука ** отображение f можно продолжить с множества A до отображения F всего пространства R. Достаточность доказана.

Докажем теперь необходимость, т. е. покажем, что если отображение f множества A в сферу $\widetilde{S}^n$ можно продолжить до отображения F пространства R, то и степень Z_f^n отображения f можно продолжить на пространство R.

Рассмотрим покрытие α множества A, состоящее из прообразов $f^{-1}(Oe_i)$ при отображении f звезд вершин триангуляции S^n, и покрытие α_1 пространства R, состоящее из прообразов тех же звезд при отображении F. Легко видеть, что множество A высекает из ∇-цикла Z_F^n степень отображения f. Кратность покрытия α_1 меньше или равна $n+1$, поэтому α не является основным покрытием пространства R. Добавляя к покрытию α_1 вписанные

---

* Эта теорема состоит в следующем:

Пусть K — триангуляция (вообще говоря, локально конечная) $(n+1)$-мерного полиэдра $\widetilde{K}$ и пусть g — симплициальное отображение триангуляции $K' \subset K$ в триангулированную n-мерную сферу S^n. Для того чтобы отображение g можно было продолжить до отображения в S^n всего полиэдра $\widetilde{K}$, необходимо и достаточно, чтобы ∇-степень отображения g была продолжаема до ∇-цикла всего комплекса K.

** Эта лемма состоит в следующем:

Пусть F — непрерывное отображение пространства R в сферу S^n. Если g — отображение замкнутого множества $A \subset R$ в ту же сферу, полученное путем непрерывной деформации отображения F на множестве A, то g можно продолжить до непрерывного отображения всего пространства R (гомотопного отображению F). (См. например, [7], стр. 120.)

в какие-либо элементы этого покрытия новые открытые в R множества, мы всегда можем получить основное покрытие β пространства R, вписанное в покрытие α_1. Проекция $\Pi_\beta^{\alpha_1} Z_F^n$ ∇-цикла Z_F^n в нерв этого покрытия и есть искомое продолжение цепи $\Pi_\beta^\alpha Z_f^n$. Теорема доказана.

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема 13. *Если A — произвольное замкнутое подмножество точечного множества M и всякий равномерный ∇-цикл множества A размерности, большей или равной r, можно продолжить на все множество M, то метрическая размерность множества M меньше или равна r.*

Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что при $n \geqslant r$ всякое равномерно непрерывное отображение f какого-либо множества $A \subset M$ в n-мерную сферу $\widetilde{S}^n$ может быть продолжено на все M (см. теорему 8). Но степень Z_f^n отображения f есть равномерный ∇-цикл множества A. Следовательно, по условию теоремы Z_f^n можно продолжить на все множество M. Отсюда и из теоремы 12 следует, что отображение f можно продолжить до непрерывного отображения всего множества M в сферу S^n, что и требовалось доказать.

Заметим, что теоремы 11 и 13 дают полную характеристику метрической размерности точечных множеств.

Пользуюсь случаем выразить мою благодарность Ю. М. Смирнову за помощь, оказанную им мне при написании этой работы.

(Поступило в редакцию 9/X 1957 г.)

Литература

1. П. С. Александров, Gestalt und Lage, Ann. of Math., **30** (1929), 101—187.
2. К. С. Ситников, Комбинаторная топология незамкнутых множеств. II, Матем. сб., **37(79)** (1955), 385—434.
3. W. Hurewicz, Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen, Proc. Acad. Amsterdam, **30** (1927), 425.
4. Ю. М. Смирнов, О метрической размерности в смысле П. С. Александрова, Изв. АН СССР, серия матем., **20** (1956), 679—684.
5. П. С. Александров, Dimensionstheorie, Math. Ann., **106** (1932), 161—248.
6. Ю. М. Смирнов, Геометрия бесконечных равномерных комплексов и δ-размерность точечных множеств, Матем. сб., **40** (82) (1956), 137—156.
7. П. С. Александров, On dimension of normal spaces, Proc. Roy. Soc., **A189** (1947), 11—39.
8. В. Гуревич, Г. Волмен, Теория размерности, ГИИЛ, Москва, 1948.
9. П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.
10. П. С. Александров, Топологические теоремы двойственности. I, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. **XLVIII** (1955).