МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

НОВАЯ СЕРИЯ

ТОМ СОРОК ВОСЬМОЙ
ВЫПУСК ТРЕТИЙ
Т. 48 (90) : 3

ИЮЛЬ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959

Об одном классе полиномов, обладающих экстремальными свойствами

В. Л. Покровский (Новосибирск)

1. В современной радиотехнике применяются антенны, состоящие из $n+1$ изотропных излучателей, расположенных на одной прямой на одинаковом расстоянии d друг от друга. Если все эти излучатели дают когерентные электромагнитные колебания, то в волновой зоне (т. е. в точках, удаленных от середины антенны на расстояния $r \gg \lambda$, где λ — длина испускаемых волн) зависимость амплитуды поля от полярного угла ϑ задается функцией $F(\vartheta)$:

$$F(\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} I_k \exp\left(ik\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\vartheta\right), \tag{1}$$

где I_k — комплексная амплитуда тока в k-ом излучателе. Функция $F(\vartheta)$ является полиномом степени n от переменной $z = \exp\left(i\frac{2\pi d}{\lambda}\cos\vartheta\right)$. При изменении ϑ от 0 до π z пробегает значения на дуге $(-\psi, \psi)$ единичной окружности, где $\psi = \frac{2\pi d}{\lambda}$. Полярная диаграмма функции $|F(\vartheta)|$ (так называемая «диаграмма направленности») имеет характерный вид (фиг. 1), так что обычно можно отличить «главный лепесток» («луч») и побочные лепестки. Потребности радиолокации и радиоастрономии привели к задаче ([1] — [5]) — по возможности подавить побочные лепестки и сузить главный.

При заданных n, d, λ и направлении ϑ_0 наибольшей интенсивности излучения этого можно добиться за счет варьирования токов I_k в излучателях Примем максимальную величину амплитуды в побочных лепестках за единицу, максимальную величину амплитуды «луча» обозначим через R и будем считать границами луча те направления ϑ_1, ϑ_2, по которым амплитуда в луче равна единице.

Радиотехническая задача получения оптимально направленных антенн сводится к следующей математической проблеме.

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_n(z_0, R, \psi)$ полиномов $A_n(z)$ степени n, обладающих свойствами:

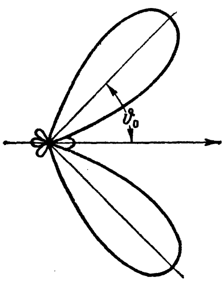
1. На дуге $(-\psi, \psi)$ единичной окружности в комплексной плоскости их модуль принимает наибольшее значение R в точке $z_0 = e^{i\varphi_0}$ $\left(\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda}\cos\vartheta_0\right)$.

2. Существуют точки $z_1 = e^{i\varphi_1}$, $z_2 = e^{i\varphi_2}$ $(\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2)$ на дуге $(-\psi, \psi)$ такие, что $|A_n(z_1)| = |A_n(z_2)| = 1$ и на дугах $(-\psi, \varphi_1)$ и (φ_2, ψ) модуль $A_n(z)$ не превосходит единицы.

3. На дуге (φ_1, φ_2) величина $|A_n(z)|$ не меньше единицы.

Требуется найти полином $A_n^{(0)}(z)$ класса $\mathfrak{A}_n(z_0, R, \psi)$, который минимизирует величину $|z_2 - z_1|$.

Эга проблема является некоторым обобщением задачи Н. И. Ахиезера о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на двух отрезках ([2]; [6]; [7], стр. 303) и сводится к ней в случае $z_0 = 1$.



Фиг. 1

Поскольку в формулировке задачи участвует лишь $|A_n(z)|$ на единичной окружности, мы будем вместо полинома $A_n(z)$ рассматривать функцию

$$z^{-\frac{n}{2}} A_n(z) = \sum_{k=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_k z^k, \tag{2}$$

где суммирование идет только по целым или только по полуцелым значениям индекса k. Для простоты мы обозначим и класс таких функций через $\mathfrak{A}_n(z_0, R, \psi)$.

Интересными для практики являются антенны, у которых равноудаленные от середины токи равны по величине и противоположны по фазе. Таким антеннам соответствуют вещественные на единичной окружности функции вида (2). Этим случаем мы в настоящей статье и ограничимся. Таким образом, к определению класса $\mathfrak{A}_n(z_0, R, \psi)$ следует добавить условие

4. Функции из класса $\mathfrak{A}_n(z_0, R, \psi)$ вещественны на единичной окружности.

Конформное преобразование

$$x = i\frac{1-z}{1+z} \tag{3}$$

переводит дугу $(-\psi, \psi)$ в отрезок $(-a, a)$ $\left(a = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right)$ вещественной оси, точка $z = z_0$ переходит при этом в точку $x = c$, лежащую внутри промежутка $(-a, a)$, точки z_1, z_2 — в некоторые точки α, β того же промежутка. Класс $\mathfrak{A}_n(z_0, R, \psi)$ переходит в класс дробных функций $B_n(x)$ вида

$$B_n(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}, \tag{4}$$

где $P_n(x)$ — полином от x степени не выше n, причем свойства 1, 2, 3, 4 переформулируются совершенно очевидным образом. Этот новый класс обозначим через $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$. Задача состоит в отыскании той функции $B_n^{(0)}(x)$ класса $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$, которая минимизирует разность $\beta - \alpha$. Условимся называть величину $\beta - \alpha$ *шириной луча*.

2. Мы установим некоторые свойства экстремальных функций $B_n^{(0)}(x)$. Назовем *«±»-точками* те значениях x, при которых выполняется равенство $B_n^{(0)}(x) = \pm 1$. Назовем *стационарными* те «±»-точки, в которых производная $\frac{d}{dx} B_n^{(0)}(x)$ обращается в нуль. Точки α, β являются либо обе «+»-точками, либо обе «—»-точками. Будем говорить, что две соседние «+»-

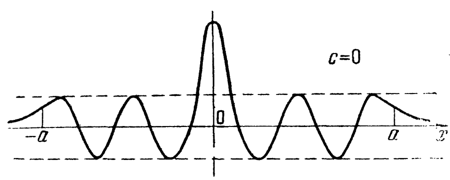
и «—»-точки определяют перегородку (фиг. 2 и следующие). Пользуясь методом Чебышева ([7]; [8], стр. 48) докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Экстремальная функция* $B_n^{(0)}(x)$ *имеет на отрезке* $(-a, a)$ *не менее* $n-1$ *перегородок.*

Доказательство. Пусть рассматриваемое число перегородок равно m. Возьмем по одной внутренней точке на каждой перегородке и обозначим их абсциссы через $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Построим функцию

$$B(x) = B_n^0(x) + \varepsilon\psi(x), \tag{5}$$

где $\psi(x) = \dfrac{(x-c)^2(x-x_1)\ldots(x-x_m)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}$; ε — постоянная, знак которой выбран так, чтобы на отрезке (α, β) величина $\varepsilon\psi(x)$ была отрицательной. Тогда во



Фиг. 2

всех «+»-точках $\varepsilon\psi(x)$ будет отрицательным, а в «—»-точках — положительным. Если выбрать $|\varepsilon|$ достаточно малым, то всюду, где $|B_n^{(0)}| \leqslant 1$, выполняется также условие $|B| < 1$. Заметим, что $B(c) = R$ и $B'(c) = 0$. Точки α' и β', определяющие ширину луча функции $B(x)$, находятся внутри отрезка $[\alpha, \beta]$. Следовательно, $B(x)$ дает меньшую ширину луча, чем $B_n^{(0)}(x)$. Мы избежим противоречий с предположением об экстремальности $B_n^{(0)}(x)$ только при выполнении условия

$$m \geqslant n-1. \tag{6}$$

Теорема доказана.

Отметим два совершенно очевидных свойства функций класса $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$, необходимые нам для дальнейшего.

a) Числитель производной

$$\frac{d}{dx}B_n(x) = \frac{(1+x^2)P_n'(x) - nxP_n(x)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}+1}} = \frac{Q_n(x)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \tag{7}$$

есть полином степени не выше n.

b) В случае четного n

$$B_n(+\infty) = B_n(-\infty); \tag{8}$$

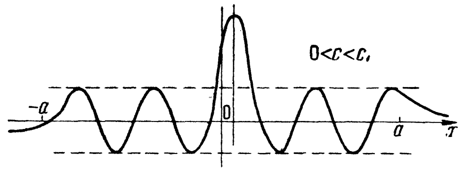
для нечетного n

$$B_n(+\infty) = -B_n(-\infty). \tag{9}$$

Так как число перегородок m не может превосходить n, то возможны случаи $m = n-1$ и $m = n$.

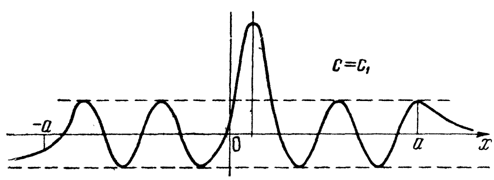
Будем различать три a priori возможных типа функций класса $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$, обладающих на $(-a, a)$ по крайней мере $n-1$ перегородками.

I. Вне отрезка $[-a, a]$ нет ни одной «$\pm$»-точки; вне промежутка (α, β) модуль $B_n(x)$ не превосходит единицы. Такие функции назовем **функциями типа I**. Очевидно, все «$\pm$»-точки функции типа I, за исключением α, β, являются стационарными. Из свойства a) вытекает, что число перегородок m функции типа I равно $n-1$ (фиг. 2, 3, 4).



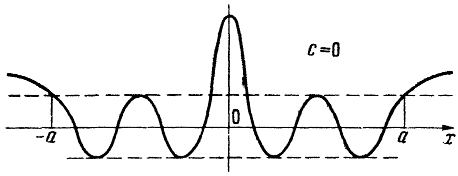
Фиг. 3

II. **Функциями типа II** назовем такие функции, у которых вне отрезка $[-a, a]$ имеется одна «$\pm$»-точка $x = b$. Число стационарных «$\pm$»-точек на промежутке $(-a, a)$ в этом случае не может превосходить $n-2$, так как число корней функции $1 - B_n^2(x)$ не может быть больше $2n$.



Фиг. 4

С другой стороны, ввиду теоремы 1, число стационарных «$\pm$»-точек не меньше $n-3$. Но число стационарных «$\pm$»-точек не может быть равно $n-3$. Действительно, при этом для выполнения теоремы 1 потребовалось бы, чтобы точки $\pm a$ были бы «$\pm$»-точками, и на промежутке $(-a, a)$ на-



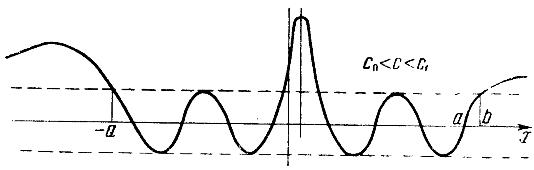
Фиг. 5

ходилось бы $n-1$ корней функции $B_n(x)$. Следовательно, один и только один корень функции $B_n(x)$ должен был бы находиться вне интервала $[-a, a]$. Но это противоречит свойствам a) и b), если учесть, что вне интервала $[-a, a]$ находится только одна «$\pm$»-точка. Следовательно, число стационарных «$\pm$»-точек на отрезке $[-a, a]$ равно $n-2$. Для выполнения теоремы 1 требуется, чтобы либо точка $+a$, либо точка $-a$ была «$\pm$»-точкой. Число перегородок m на отрезке $[-a, a]$ у функции типа II равно $n-1$. Одна перегородка выходит за пределы интервала $[-a, a]$ (фиг. 6, 7, 10, 11).

III. **Функциями типа III** назовем такие, у которых вне отрезка $[-a, a]$ имеются две «$\pm$»-точки ($x = \gamma$, $x = \delta$). Анализ, подобный проведенному для функций типа II, показывает, что в этом случае точки $\pm a$ обе являются «±»-точками, точки γ, δ определяют перегородку, а число перегородок m на отрезке $[-a, a]$ равно $n-1$ (фиг. 8, 9).

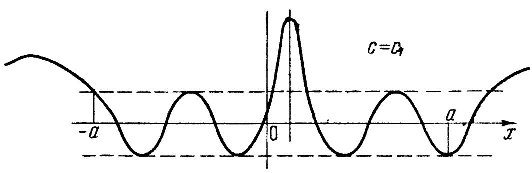
Для удобства дополним наши определения следующими.

Функцию типа I, у которой одной из «±»-точек является $\pm a$, будем называть предельной функцией типа I или предельной функцией типа II (у которой $b = \pm a$) (фиг. 4).



Фиг. 6

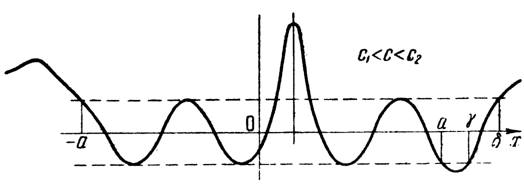
Функцию типа II, у которой $+a$ (или $-a$) является стационарной «± »-точкой, назовем предельной функцией типа II или предельной функцией типа III, у которой $\gamma = a$ (соответственно $\delta = -a$) (фиг. 7, 10).



Фиг. 7

Мы будем спускать слово «предельная» там, где это не вызовет недоразумений.

Описанные здесь функции трех типов исчерпывают все возможные случаи функций класса $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$, обладающих $n-1$ перегородками на отрезке $[-a, a]$.



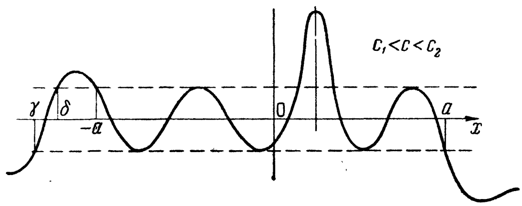
Фиг. 8

У функции класса $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$, имеющей n перегородок на отрезке $[-a, a]$, точки $\pm a$ обе должны являться «±»-точками, причем вне отрезка $[-a, a]$ такая функция по модулю больше единицы (фиг. 5, 12). Мы будем называть такую функцию предельной функцией типа II (у которой $b = \pm a$).

Заметим, что существование определенных выше функций заранее отнюдь не очевидно.

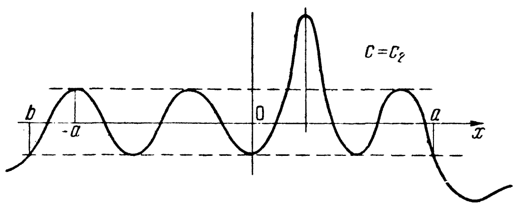
Будем называть закрепленным концом тот конец отрезка $[-a, a]$, который является «±»-точкой. Обозначим через $B_{nr}^{\pm}(x \mid c)$ функцию типа II класса $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ с закрепленным концом $\pm a$ соответственно, у которой число перегородок на отрезке $[-a, \alpha]$ равно r. Функции типа I или III, имеющие r перегородок на отрезке $[-a, \alpha]$, будем обозначать соответственно через $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$, $B_{nr}^{(3)}(x \mid c)$.

Будем обозначать через $x_1, x_2, \ldots$ стационарные «±»-точки функции любого из указанных типов, взятые в порядке возрастания.



Фиг. 9

Теорема 2. *Пусть в классе $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ существует функция вида $B_{nr}^{-}(x \mid c)$, причем $b \neq \pm a$ и $x_{n-2} \neq a$. Тогда для достаточно малых δc в классе $\mathfrak{B}_n(c+\delta c, R, a)$ существует функция вида $B_{nr}^{-}(x \mid c+\delta c)$.*



Фиг. 10

Доказательство. Докажем, что при определенном выборе малых величин $\delta c, \varepsilon, \delta, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-2}$ функция

$$B_{nr}^{-}(x \mid c) + \varepsilon\psi(x), \tag{10}$$

где

$$\psi(x) = \frac{(x+a)(x-c-\delta)(x-x_1-\delta_1)\ldots(x-x_{n-2}-\delta_{n-2})}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}, \tag{11}$$

является функцией типа II, принимающей максимальное на отрезке $[-a, a]$ значение R в точке $x = c + \delta c$.

В самом деле, допустим, что функция (10) является функцией типа $B_{nr}^{-}(x \mid c+\delta c)$, и пусть точки $x_k + \delta x_k$ — ее стационарные «±»-точки. Тогда должны выполняться равенства:

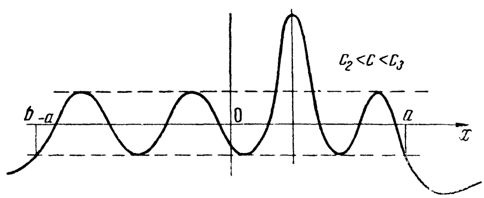
$$\begin{gathered} B_{nr}^{-}(c+\delta c \mid c) + \varepsilon\psi(c+\delta c) = R, \quad B_{nr}^{-}(x_k+\delta x_k \mid c) + \varepsilon\psi(x_k+\delta x_k) = \\ = B_{nr}^{-}(x_k \mid c) = \pm 1, \\ \frac{d}{dx}[B_{nr}^{-}(x \mid c) + \varepsilon\psi(x)]_{x=c+\delta c} = 0, \quad \frac{d}{dx}[B_{nr}^{-}(x \mid c) + \varepsilon\psi(x)]_{x=x_k+\delta x_k} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Обратно, если условия (12) выполняются и точки $x_k + \delta x_k$ лежат внутри отрезка $[-a, a]$, то функция (10) является функцией типа $B_{nr}^{-}(x \mid c+\delta c)$.

Остается, следовательно, доказать, что уравнения (12) имеют решение при достаточно-малом δc. Для этого запишем их в виде

$$F_0 \equiv \frac{d}{dx}\left[B_{nr}^-(x \mid c) + \varepsilon\psi(x)\right]_{x=c+\delta c} = 0, \tag{13}$$

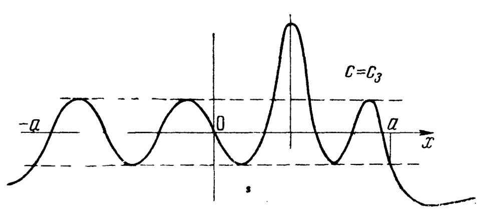
$$\Phi_0 \equiv \frac{B_{nr}^-(c+\delta c \mid c) - B_{nr}^-(c \mid c) + \varepsilon\psi(c+\delta c)}{\delta c} = 0, \tag{14}$$



Фиг. 11

$$F_k \equiv \frac{d}{dx}\left[B_{nr}^-(x \mid c) + \varepsilon\psi(x)\right]_{x=x_k+\delta x_k} = 0, \tag{15}$$

$$\Phi_k \equiv \frac{B_{nr}^-(x_k + \delta x_k \mid c) - B_{nr}^-(x_k \mid c) + \varepsilon\psi(x_k + \delta x_n)}{\delta c} = 0. \tag{16}$$



Фиг. 12

Заметим, что производная $\frac{d}{dx} B_{nr}^-(x \mid c)$ имеет простые корни в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ и в некоторой точке вне отрезка $[-a, a]$, которую мы для удобства обозначим через $-\frac{\mu}{\lambda}$. Отсюда и из формул (7) и (11) вытекает:

$$\psi(x)\big|_{\delta c=\delta=\delta_k=0} = \frac{(x+a)(1+x^2)}{\lambda x + \mu} \frac{d}{dx} B_{nr}^-(x \mid c). \tag{17}$$

Следовательно, коэффициент при ε в уравнении (13) при значениях $\delta c = \delta = \delta_k = 0$ равен

$$\frac{(c+a)(1+c^2)}{(\lambda c + \mu)} \left[\frac{d^2}{dx^2} B_{nr}^-(x \mid c)\right]_{x=c} \neq 0. \tag{18}$$

В том, что $\left[\frac{d^2}{dx^2} B_{nr}^-(x \mid c)\right]_{x=c} \neq 0$, легко убедиться подсчетом числа корней функции $\frac{d}{dx}B_{nr}^{-}(x \mid c)$. Таким образом, ε однозначно определяется как функция δc, δ, δ_k $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$, причем

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\delta} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\delta_k} = 0, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial(\delta c)} = \lim_{\delta c \to 0}\frac{\varepsilon}{\delta c} = -\frac{\lambda c + \mu}{(c+a)(1+c^2)} \neq 0 \quad (\delta c = \delta = \delta_k = 0). \tag{19}$$

Считая теперь ε функцией δc, δ, δ_k, рассмотрим уравнение (14). С помощью соотношений (11) и (19) находим:

$$\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial\delta}\right|_{\delta c = \delta_k = 0} = -\left[\frac{d^2}{dx^2}B_{nr}^{-}(x \mid c)\right]_{x=c} \neq 0. \tag{20}$$

Следовательно, уравнение (14) однозначно определяет δ как функцию δc и δ_k в малой окрестности точки $\delta c = \delta_k = 0$, причем в этой точке $\frac{\partial\delta}{\partial\delta_k} = 0$.

Рассмотрим, далее, систему уравнений (15). Находим:

$$\frac{\partial F_k}{\partial(\delta x_j)} = \left[\frac{d^2}{dx^2}B_{nr}^{-}(x \mid c)\right]\Bigg|_{x=x_j} \cdot \delta_{kj}. \tag{21}$$

Уравнения (15) однозначно определяют δx_k как функции δc, δ_k, причем попрежнему

$$\frac{\partial(\delta x_k)}{\partial\delta_j} = 0,$$

$$\frac{\partial(\delta x_k)}{\partial(\delta c)} = \lim_{\delta c \to 0}\frac{\delta x_k}{\delta c} = \frac{(\lambda c + \mu)(x_k + a)(1 + x_k^2)}{(\lambda x_k + \mu)(c + a)(1 + c^2)} > 0. \tag{22}$$

Наконец, для системы (16) имеем:

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial\delta_j} = \frac{(x_k+a)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n-2})(x_k-c)}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial(\delta c)} \cdot \delta_{kj}. \tag{23}$$

Следовательно, уравнения (16) однозначно определяют δ_k как функцию δc, и теорема доказана.

Если по известной функции вида $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ строится согласно (10) функция $B_{nr}^{-}(x \mid c + \delta c)$, будем говорить, что функция $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ продолжена от c до $c + \delta c$.

Заметим, что предельные функции $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ могут быть продолжены лишь для δc одного знака. Например, если $x_{n-2} = a$ и $\delta c > 0$, то $x_{n-2} + \delta x_{n-2} > a$, и функция (10) имеет всего $n-2$ перегородки на интервале $[-a, a]$. Подобные же рассуждения показывают, что при $b = a$ продолжение возможно лишь для $\delta c > 0$, а при $b = -a$ (как и при $x_{n-2} = a$) — лишь для $\delta c < 0$.

Отметим также, что все производные $\frac{\partial(\delta x_k)}{\partial(\delta c)}$ (см. (22)) положительны.

Следствие. *Все x_k являются монотонно возрастающими функциями c. То же имеет место относительно b.*

Теорема 2 и следствие из нее с естественным изменением формулировки переносятся на функции вида $B_{nr}^{+}(x \mid c)$. Для распространения этой теоремы на функции вида $B_{nr}^{(3)}(x \mid c)$ обозначим через ξ и ζ точки экстремумов, лежащие вне интервала $[-a, a]$.

Теорема 3. *Если класс $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ содержит функцию вида $B_{nr}^{(3)}(x \mid c)$, то для достаточно малых δc существует $B_{nr}^{(3)}(x \mid c+\delta c)$ при выполнении условий $\xi \neq \gamma \neq a$ и $\zeta \neq \delta \neq -a$. При $\xi = \gamma = a$ продолжение возможно для $\delta c > 0$, при $\zeta = \delta = -a$ — для $\delta c < 0$.*

Теорема 4. *Если существует функция вида $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$, то для достаточно малых δc существует и $B_{nr}^{(1)}(x \mid c+\delta c)$, если $x_1 \neq -a$, $x_{n-1} \neq a$. При $x_1 \neq -a$ продолжение возможно для $\delta c > 0$, при $x_{n-1} = a$ — для $\delta c < 0$.*

Доказательства этих теорем мы приводить не будем, так как они в основном аналогичны доказательству теоремы 2.

Следствием теоремы 3 является монотонное возрастание величин γ, δ, ξ, ζ как функций c.

Теорема 5. *Если при некотором значении c существует функция вида $B_{nr}^{\pm}(x \mid c)$, то ее можно продолжить влево (соответственно вправо) до тех значений c, которым соответствуют предельные функции вида $B_{nr}^{\pm}(x \mid c)$.*

Теорема 6. *Если при некотором значении c существует функция вида $B_{nr}^{(3)}(x \mid c)$, то ее можно продолжить влево и вправо до тех значений c, которым соответствуют предельные функции вида $B_{nr}^{(3)}(x \mid c)$.*

Теорема 7. *Функцию вида $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$ можно продолжить вправо и влево до значений c, которым соответствуют предельные функции вида $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$.*

Мы докажем только теорему 6, так как доказательства теорем 5 и 7 совершенно аналогичны доказательству теоремы 6.

Доказательство теоремы 6. Допустим противное, т. е. примем, что нельзя, например, продолжить функцию типа $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ до значения c, которому соответствует $x_{n-2} = a$ или $b = -a$. Тогда найдется значение c_0 такое, что функцию $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ можно продолжить до любого $c < c_0$, но нельзя построить для $c \geqslant c_0$, причем $b \neq -a$, $x_{n-2} < a$ для любого $c < c_0$.

Построим последовательность $\{c_k\}$, сходящуюся к c_0. Из соответствующей последовательности функций $B_{nr}^{-}(x \mid c_k)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Легко видеть, что ее предел является функцией вида $B_{nr}^{-}(x \mid c_0)$. Тем самым показано, что существует функция вида $B_{nr}^{-}(x \mid c_0)$, причем, согласно допущению, $x_{n-2}|_{c=c_0} < a$ и $b|_{c=c_0} \neq -a$. Но в таком случае, согласно теореме 2, можно продолжить функцию $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ до значений $c > c_0$, что противоречит допущению.

Теорема 8. *Каждый класс $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ содержит не более одной функции с $m \geqslant n-1$ и заданным r.*

Доказательство. Пусть существуют в классе $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ две функции с $m \geqslant n-1$ и одним и тем же r. Тогда их графики пересекаются не менее чем в r точках левее c и не менее чем в $n-r-1$ точках правее c.

Учитывая, что в точке c графики касаются, находим, что разность этих двух функций имеет $n+1$ корней и, следовательно, есть тождественный нуль. Теорема доказана.

Не приводя доказательства, которое, как и предыдущее, построено на подсчете числа корней, сформулируем следующее предложение.

Теорема 9. *Не существует двух функций с $m \geqslant n-1$, принадлежащих классам $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ и $\mathfrak{B}_n(c', R, a)$, с одинаковыми r, графики которых имеют хотя бы одну общую точку вне интервала $[-a, a]$.*

Теорема 10. *Пусть в классе $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ существует функция с $m \geqslant n-1$ и заданным r $(0 < r < n)$. Тогда, продолжая эту функцию вправо, мы придем к функциям с r, на единицу большим, причем в процессе продолжения не встретятся функции с меньшими r. Продолжая исходную функцию влево, мы придем к функциям с r, на единицу меньшим, причем в процессе продолжения не встретятся функции с большими r.*

Доказательство. Приведем доказательство для случая продолжения вправо. Пусть, для определенности, существует функция вида $B_{nr}^{-}(x \mid c)$. Обозначим соответствующие ей величины через $b = b_r^{-}(c)$, $x_{n-2} = x_r^{-}(c)$. Аналогичные обозначения мы примем и для других видов функций:

$b = b_r^{+}(c)$, $x_1 = x_r^{+}(c)$ для функции вида $B_{nr}^{+}(x \mid c)$,

$\gamma = \gamma_r(c)$, $\delta = \delta_r(c)$ для функции вида $B_{nr}^{(3)}(x \mid c)$,

$x_{n-1} = \overset{r}{x}(c)$, $x_1 = \underset{r}{x}(c)$ для функции вида $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$.

Согласно теореме 5, функцию вида $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ можно продолжить влево (соответственно вправо) до значения c, которое мы обозначим для удобства через $c_{3(r-\nu)}$, $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$ (соответственно через $c_{3(r-\nu)+1}$). Эти значения, соответствующие предельным функциям типа II, определяются уравнениями

$$b_r^{-}(c_{3(r-\nu)}) = a \tag{24}$$

и соответственно

$$b_r^{-}(c_{3(r-\nu)+1}) = -a \tag{25}$$

или

$$x_r^{-}(c_{3(r-\nu)+1}) = a. \tag{25'}$$

Рассмотрим три возможных случая.

a) В точке $c_{3(r-\nu)+1}$ выполняется равенство (25) и не выполняется (25').

b) В точке $c_{3(r-\nu)+1}$ выполняется (25') и не выполняется (25).

c) В точке $c_{3(r-\nu)+1}$ одновременно выполняются равенства (25) и (25').

В случае a) предельная функция $B_{nr}^{-}(x \mid c_{3(r-\nu)+1})$ совпадает с предельной функцией $B_{nr}^{(1)}(x \mid c_{3(r-\nu)+1})$, у которой $\underset{r}{x}(c) = -a$, но $\overset{r}{x}(c) \neq a$. Функцию вида $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$ можно продолжить вправо от $c_{3(r-\nu)+1}$ до значения $c_{3(r-\nu)+2}$, соответствующего предельной функции вида $B_{nr}^{(1)}(x \mid c)$, которая совпадает с предельной функцией вида $B_{nr}^{+}(x \mid c)$, причем последней функции соответствует $b_r^{+}(c_{3(r-\nu)+2})=a$. Функцию $B_{nr}^{+}(x \mid c)$ можно продолжить вправо от $c_{3(r-\nu)+2}$ до значения $c_{3(r-\nu+1)}$, соответствующего предельной функции вида $B_{nr}^{+}(x \mid c)$, у которой $b_r^{+}(c_{3(r-\nu+1)})=-a$. Предельная функция $B_{nr}^{+}(x \mid c_{3(r-\nu+1)})$ одновременно является предельной функцией вида $B_{n,r+1}^{-}(x \mid c_{3(r-\nu+1)})$. Таким образом, в случае а) мы доказали существование функции с числом перегородок на интервале $[-a, \alpha]$, на единицу большим, чем у исходной функции.

Заметим, что при продолжении функции $B_{nr}^{-}(x \mid c)$ от $c_{3(r-\nu)}$ до $c_{3(r-\nu)+1}$ и функции $B_{nr}^{+}(x \mid c)$ от $c_{3(r-\nu)+2}$ до $c_{3(r-\nu+1)}$ каждая из величин $b_r^{-}(c)$ и $b_r^{+}(c)$ соответственно пробегает все значения вне интервала $[-a, a]$. Нетрудно проследить, что если $b_r^{-}(c)$ является «—»-точкой, то $b_r^{+}(c)$ является «+»-точкой и наоборот. Мы будем говорить, что $b_r^{-}(c)$ и $b_r^{+}(c)$ — разноименные «$\pm$»-точки.

В случае b) предельная функция вида $B_{nr}^{-}(x \mid c_{3(r-\nu)+1})$ совпадает с предельной функцией вида $B_{nr}^{(3)}(x \mid c_{3(r-\nu)+1})$ типа III, у которой $\gamma_r(c_{3(r-\nu)+1})=$ $=a$, $\delta_r(c_{3(r-\nu)+1})=b_r^{-}(c)\neq -a$. Согласно теореме 6, такую функцию можно продолжить вправо до значения $c_{3(r-\nu)+2}$, определяющегося уравнением $\delta_r(c_{3(r-\nu)+2})=-a$. Предельная функция $B_{nr}^{(3)}(x \mid c_{3(r-\nu)+2})$ совпадает с предельной функцией $B_{nr}^{+}(x \mid c_{3(r-\nu)+2})$ типа II, у которой $x_r^{+}(c_{3(r-\nu)+2})=-a$, $b_r^{+}(c_{3(r-\nu)+2})=\gamma_r(c_{3(r-\nu)+2})\neq a$. Функцию вида $B_{nr}^{+}(x \mid c)$ можно продолжить до значения $c_{3(r-\nu+1)}$, при котором предельная функция вида $B_{nr}^{+}(x \mid c_{3(r-\nu+1)})$ совпадает, как и в предыдущем случае, с $B_{n,r+1}^{-}(x \mid c_{3(r-\nu+1)})$, причем $b_r^{+}(c_{3(r-\nu+1)})=-a$.

Заметим, что в случае b), когда c пробегает отрезок $[c_{3(r-\nu)}, c_{3(r-\nu+1)}]$, каждая из двух разноименных пар «$\pm$»-точек $b_r^{-}(c)$, $\delta_r(c)$ и $\gamma_r(c)$, $b_r^{+}(c)$ пробегает все возможные значения вне промежутка $(-a, a)$.

Наконец, рассмотрим случай c). В этом случае предельная функция вида $B_{nr}^{-}(x \mid c_{3(r-\nu)+1})$ совпадает с предельной функцией вида $B_{nr}^{+}(x \mid c_{3(r-\nu)+1})$, у которой $b_r^{+}(c_{3(r-\nu)+1})=a$, $x_r^{+}(c_{3(r-\nu)+1})=-a$. Продолжая функцию $B_{nr}^{+}(x \mid c)$ до значения $c_{3(r-\nu+1)}$ *, определяемого уравнением $b_r^{+}(c_{3(r-\nu+1)})=-a$, мы, как и в предыдущих случаях, придем к предельной функции вида $B_{n,r+1}^{-}(x \mid c_{3(r-\nu+1)})$.

Как и в случае а), каждая, из разноименных «$\pm$»-точек $b_r^{-}(c)$, $b_r^{+}(c)$ пробегает все значения вне промежутка $(-a, a)$, когда c пробегает отрезок $[c_{3(r-\nu)}, c_{3(r-\nu+1)}]$.

Доказательство для случая продолжения влево аналогично. Теорема доказана.

Из теоремы 10 следует, что, продолжая какую-либо функцию с $m\geqslant n-1$, мы получим данное значение r только для значений c, лежащих на отрезке $[c_{3(r-\nu)}, c_{3(r-\nu+1)}]$.

Из замечаний о «$\pm$»-точках, которые мы сделали при доказательстве теоремы 10, вытекает

* Ради единообразия обозначений мы условимся в случае c) считать $c_{3(r-\nu)+2}$ равным $c_{3(r-\nu+1)}$.

Теорема 11. *Когда c пробегает отрезок* $[c_{3(r-\nu)}, c_{3(r-\nu+1)}]$, *найдутся две разноименные «$\pm$»-точки, каждая из которых пройдет все возможные значения вне интервала* $(-a, a)$.

Теорема 12. (Теорема единственности.) *В классе* $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ *существует не более одной функции с* $m \geqslant n-1$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдутся две различные функции в классе $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$, у которых $m \geqslant n-1$. Согласно теореме 8, эти функции имеют различное число перегородок на отрезке $[-a, a]$. Обозначим эти числа через r и r'. Не теряя общности, мы можем считать, что одна из этих функций, скажем первая, является функцией типа II. Действительно, в противном случае, продолжая обе функции вправо (или влево), дойдем, как показывают построения теоремы 10, до функции типа II.

Заметим, что, продолжая, как указано в теореме 2, две исходные функции, мы ни при каком c не можем получить две совпадающие функции, так как иначе, согласно теореме 8, должны совпадать и исходные функции.

Согласно теореме 10, можно продолжить вторую функцию от $c_{3(r'-\nu)}$ до $c_{3(r-\nu+1)}$, причем, в то время как c пробегает отрезок $[c_{3(r-\nu)}, c_{3(r-\nu+1)}]$, согласно теореме 11, некоторые две разноименные «$\pm$»-точки пробегают все значения вне промежутка $(-a, a)$.

Следовательно, найдется такое значение c', что в классе $\mathfrak{B}_n(c', R, a)$ имеется функция с $m \geqslant n-1$, «$\pm$»-точка которой совпадает с значением $b_r(c)$ первой из исходных функций. Но это противоречит теореме 9.

Итак, теорема 12 доказана.

Существование функции, минимизирующей ширину луча, вытекает из того, что класс $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ представляет замкнутое множество.

3. Воспользуемся теперь методом Чебышева ([9], стр. 48) для построения функций рассмотренных трех типов *.

Функция

$$1-(B_n^{(0)})^2 = \frac{(1+x^2)^n - P_n^2(x)}{(1+x^2)^n} \tag{26}$$

имеет двойные нули во всех стационарных «$\pm$»-точках и простые нули в остальных «$\pm$»-точках. Поэтому функция $\sqrt{1-(B_n^{(0)})^2}$ в зависимости от ее типа имеет вид:

$$\sqrt{1-(B_{nr}^{(1)})^2} = \frac{Q_{n-1}(x)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}, \tag{27}$$

$$\sqrt{1-(B_{nr}^{\pm})^2} = \frac{Q_{n-2}(x)\sqrt{(x\mp a)(x-\alpha)(x-\beta)(x-b)}}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}, \tag{27'}$$

$$\sqrt{1-(B_{nr}^{(3)})^2} = \frac{Q_{n-3}(x)\sqrt{(x^2-a^2)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}. \tag{27''}$$

* На этот метод обратил внимание автора Н. И. Ахиезер.

где $Q_{n-k}(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ — полиномы степени $n-k$, имеющие простые нули во всех стационарных «$\pm$»-точках. С другой стороны, производная $\frac{d}{dx} B_n^{(0)}(x)$ имеет простые нули во всех экстремальных «$\pm$»-точках, в точке $x=c$, в случае функций типа II еще один нуль $x=-\frac{\mu}{\lambda}$, а для функций типа III — два нуля: $x=\zeta=-\frac{\mu}{\lambda}$ и $x=\xi$, вне интервала $(-a,\ a)$. Учитывая сказанное и сравнивая формулы (27) и (7), убеждаемся, что имеют место равенства:

$$\frac{(1+x^2)\frac{d}{dx} B_{nr}^{(1)}(x)}{\lambda(x-c)} = \sqrt{\frac{(1-(B_{nr}^{(1)})^2}{(x-\alpha)(x-\beta)}}, \tag{28}$$

$$\frac{(1+x^2)\frac{d}{dx} B_{nr}^{\pm}(x)}{(\lambda x+\mu)(x-c)} = \sqrt{\frac{(1-(B_{nr}^{\pm})^2}{(x\mp a)(x-\alpha)(x-\beta)(x-b)}}, \tag{28'}$$

$$\frac{(1+x^2)\frac{d}{dx} B_{nr}^{(3)}(x)}{(\lambda x+\mu)(x-\xi)(x-c)} = \sqrt{\frac{1-(B_{nr}^{(3)})^2}{(x^2-a^2)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}}; \tag{28''}$$

в (28), (28′), (28″) λ, μ — некоторые постоянные.

Решая дифференциальные уравнения (28), (28′), (28″), получим:

$$\arccos B_{nr}^{(1)}(x \mid c) = \lambda \int\limits_{\alpha}^{x} \frac{(x-c)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}}, \tag{29}$$

$$\arccos B_{nr}^{\pm}(x \mid c) = \int\limits_{\pm a}^{x} \frac{(\lambda x+\mu)(x-c)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(x\mp a)(x-\alpha)(x-\beta)(x-b)}} - r\pi, \tag{29'}$$

$$\arccos B_{nr}^{(3)}(x \mid c) = \int\limits_{-a}^{x} \frac{(\lambda x+\mu)(x-\xi)(x-c)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-a^2)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} - r\pi. \tag{29''}$$

Постоянные интегрирования выбраны так, чтобы α и β были «+»-точками. Неизвестные параметры α, β, γ, δ, λ, μ, ξ, b принципиально определяются из следующих систем уравнений:

для функций типа I

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{ars}\cos B_{nr}^{(1)}(\beta \mid c) = 0,\\ &\arccos B_{nr}^{(1)}(c \mid c) = i \operatorname{Arch} R,\\ &\frac{\lambda(i-c)}{2i\sqrt{(i-\alpha)(i-\beta)}} = i\,\frac{n}{2}; \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

для функций типа II

$$\left.\begin{aligned}&\arccos B_{nr}^{\pm}(\alpha \mid c) = \arccos B_{nr}^{\pm}(\beta \mid c) = 0,\\&\arccos B_{nr}^{\pm}(b \mid c) = \begin{cases}(n-r)\pi & (b>a),\\ -r\pi & (b<-a),\end{cases}\\&\arccos B_{nr}^{\pm}(c \mid c) = i \operatorname{Arch} R,\\&\frac{(i-c)(\lambda i+\mu)}{2i\sqrt{(i\mp a)(i-\alpha)(i-\beta)(i-b)}} = i\,\frac{n}{2};\end{aligned}\right\} \tag{30'}$$

для функций типа III

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{ars}\cos B_{nr}^{(3)}(\alpha \mid c) = \arccos B_{nr}^{(3)}(\beta \mid c) = 0,\\&\arccos B_{nr}^{(3)}(a \mid c) = (n-r-1)\pi,\\&\arccos B_{nr}^{(3)}(\gamma \mid c) = \begin{cases}(n-r-1)\pi & (\gamma>a),\\ -(r+1)\pi & (\gamma<-a),\end{cases}\\&\arccos B_{nr}^{(3)}(\delta \mid c) = \begin{cases}(n-r)\pi & (\delta>a),\\ -r\pi & (\delta<-a),\end{cases}\\&\arccos B_{nr}^{(3)}(c \mid c) = i \operatorname{Arch} R,\\&\frac{(i-c)(i-\xi)(\lambda i+\mu)}{2i\sqrt{(i^2-a^2)(i-\alpha)(i-\beta)(i-\gamma)(i-\delta)}} = i\,\frac{n}{2}.\end{aligned}\right\} \tag{30''}$$

Смысл последнего уравнения каждой из систем состоит в том, что в точках $x = \pm i$, согласно (3), функция $B_n^{(0)}(x)$ имеет особенность вида $\dfrac{1}{(x\pm i)^{\frac{n}{2}}}$.

Заметим, что число уравнений каждой системы на единицу больше числа неизвестных. Мы покажем, однако, что одно из уравнений каждой системы является следствием остальных. В самом деле, рассмотрим, например, интеграл (29′). Согласно (30′) вычет подынтегральной функции в точке $x=i$ равен $-\,i\,\frac{n}{2}$. Поэтому

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda x+\mu)(x-c)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(x+a)(x-\alpha)(x-\beta)(x-b)}} = n\pi. \tag{31}$$

Разобьем I на сумму интегралов:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{b} + \int_{b}^{+\infty}. \tag{32}$$

Но $\int_{-\infty}^{-a}$ и $\int_{b}^{\infty}$ — чисто мнимые величины, а $\int_{\alpha}^{\beta}$, согласно (30′), равен нулю. Отсюда следует:

$$\int_{-a}^{\alpha} + \int_{\beta}^{b} = \int_{-a}^{b} = n\pi, \tag{33}$$

что равносильно уравнению $\arccos B_{nr}^{-}(b \mid c) = (n-r)\pi$.

4. Проведем теперь исследование зависимости экстремальных функций $B_n^{(0)}(x)$ от a и c при заданном R.

Начнем со случая $a=\infty$. Заметим, что функция

$$T_n\left(N\frac{1+cx}{\sqrt{(1+c^2)(1+x^2)}}\right), \tag{34}$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева, при условии

$$T_n(N)=R \tag{35}$$

принадлежит классу $\mathfrak{B}_n(c, R, a)$ и имеет на вещественной оси n или $n-1$ перегородок. По теореме единственности эта функция является решением задачи для рассматриваемого случая. Функция (34) принадлежит типу I.

Переходя к случаю конечного a, выясним прежде всего, когда минимум ширины луча будет осуществляться функциями типа I. Для этого заметим, что функции типа I не зависят от параметра a и потому при любом a записываются в виде

$$B_{nr}^{(1)}(x\mid c)=T_n\left(N\frac{1+cx}{\sqrt{(1+c^2)(1+x^2)}}\right)=T_n\left(N\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right), \tag{34'}$$

где $T_n(N)=R$, $x=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $c=\operatorname{tg}\frac{\varphi_0}{2}$. Обозначим через ψ_k значения $\varphi-\varphi_0$, соответствующие «$\pm$»-точкам функции $B_{nr}^{(1)}(x\mid c)$:

$$N\cos\frac{\psi_k}{2}=\cos\frac{k\pi}{n}\qquad\left(k=-\nu,\ -\nu+1,\ \ldots,\ \nu;\ \nu=\left[\frac{n}{2}\right]\right). \tag{36}$$

Угловое расстояние между соседними «$\pm$»-точками обозначим через Δ_k: $\Delta_k=\psi_k-\psi_{k-1}$. Элементарный анализ показывает, что Δ_k монотонно возрастает с номером k.

Функция типа I осуществляет экстремум лишь в том случае, если все ее «$\pm$»-точки ψ_k находятся на дуге $(-\psi, \psi)$. Так как из окружности исключается дуга, равная $2(\pi-\psi)$, то ясно, что при выполнении неравенства $2(\pi-\psi)>\Delta_\nu$ функция типа I не может давать минимум ширины луча ни при каком c.

Пусть теперь $\Delta_k<2(\pi-\psi)\leqslant\Delta_{k+1}$. Тогда у функций типа I все «$\pm$»-точки находятся на дуге $(-\psi, \psi)$ при значениях $\varphi_0>0$, заключенных в интервалах:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\text{для нечетного } n=2\nu+1 & \text{для четного } n=2\nu \\
\varphi_0\leqslant\psi-\psi_\nu, & \pi-\psi\leqslant\varphi_0\leqslant\psi-\psi_{\nu-1}, \\
2\pi-\psi-\psi_\nu\leqslant\varphi_0\leqslant\psi-\psi_{\nu-1}, & 2\pi-\psi-\psi_{\nu-1}\leqslant\varphi_0\leqslant\psi-\psi_{\nu-2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
2\pi-\psi-\psi_{k+1}\leqslant\varphi_0\leqslant\psi-\psi_k; & 2\pi-\psi-\psi_{k+1}\leqslant\varphi_0\leqslant\psi-\psi_k.
\end{array}\right\} \tag{37}$$

Если выполняется равенство $2(\pi-\psi)=\Delta_{k+1}$, то при $\varphi_0=2\pi-\psi-\psi_{k+1}=\psi-\psi_k$ функция типа I, у которой две «$\pm$»-точки совпадают с $\pm a$, имеет $n-1$ перегородок на интервале $[-a, a]$. Она может быть продолжена вправо лишь как функция типа II.

При значениях $\varphi_0 > \psi - \psi_k$ функции типа I осуществлять экстремум не могут.

В дальнейшем мы рассмотрим для простоты случай $2(\pi - \psi) > \Delta_\nu$ для четного n и случаи $\Delta_{\nu-1} < 2(\pi - \psi) < \Delta_\nu$, $2(\pi - \psi) > \Delta_\nu$ для нечетного n *.

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n. Начнем со случая четного $n = 2\nu$ и со значения $c = 0$. Ввиду того, что интеграл (29) и уравнения (30) не содержат параметра a, функция типа I, если бы она была решением и в этом случае, должна была бы совпадать с функцией (34). Но у этой функции две «$\pm$»-точки — на бесконечности. Следовательно, при конечном a функция типа I имела бы всего $n - 2$ перегородки внутри отрезка $[-a, a]$, что противоречит теореме о числе перегородок.

Ввиду единственности при $c = 0$ функция $B_n^{(0)}(x)$ должна быть четной. Поэтому $B_n^{(0)}(x)$ может быть лишь функцией типа II. Уравнения (30′) при $c = 0$ имеют решение: $\alpha = -\beta$, $b = a$, $r = \nu$, $\lambda = 0$. Выражение (29′) примет вид:

$$\arccos B_{n\nu}(x \mid 0) = \mu \int_{-a}^{x} \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-\alpha^2)}} - \nu\pi. \tag{38}$$

С помощью элементарных преобразований получим:

$$\arccos B_{n\nu}(x \mid 0) = \nu \arccos \frac{2N^2 - (1 + N^2a'^2)(1+x^2)}{(1 - N^2a'^2)(1+x^2)} - \nu\pi, \tag{39}$$

где N определяется условием

$$\frac{2N^2 - N^2a'^2 - 1}{1 - N^2a'^2} = \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\nu}\operatorname{Arch} R\right), \quad a'^2 = \frac{1}{1+a^2}. \tag{40}$$

Переходя к переменной $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, получим полиномы четной степени, наименее уклоняющиеся от нуля на двух отрезках. Ширина луча $2\mid\alpha\mid$ определяется уравнением

$$\mid \alpha \mid = N^4 - 1. \tag{41}$$

При $0 \leqslant c \leqslant c_1$ экстремальными будут функции типа II вида $B_{n\nu}^{-}(x \mid c)$; при $c_1 \leqslant c \leqslant c_2$ экстремальными окажутся функции типа III вида $B_{n\nu}^{(3)}(x \mid c)$; при $c_2 \leqslant c \leqslant c_3$ минимум ширины луча осуществляется функциями вида $B_{n\nu}^{+}(x \mid c)$. На фиг. 5 — 12 схематически показан «цикл» изменения функций $B_{n\nu}$, минимизирующих ширину луча при изменении c от $c_0 = 0$ до c_3. При $c = c_3$ начинается новый цикл, подобный предыдущему, но с $r = \nu + 1$.

---

* Общий случай нетрудно получить, заменив в первых $\nu - k$ «циклах» функции типа III функциями типа I. В случае $2(\pi - \psi) = \Delta_{k+1}$ отрезок $[c_{3(k-\nu-1)}, c_{3(k-\nu)}]$ проходят лишь две функции вида $B_{nk}^{-}(x \mid c)$, $B_{nk}^{+}(x \mid c)$.

Пусть теперь $n = 2\nu + 1$ нечетно. При фиксированном c экстремальными являются функции типа I вида (34), если $a \geqslant a_0(c)$, где $a_0(c)$ — то значение a, при котором одна из точек $\pm a$ становится «$\pm$»-точкой. Легко получить из (34) уравнение для $a_0(c)$:

$$\frac{N}{\sqrt{1+c^2}} \frac{1+ca_0}{\sqrt{1+a_0^2}} = \cos\frac{\nu\pi}{2\nu+1}. \tag{42}$$

При $c = 0$ имеем:

$$a_0 = \sqrt{\frac{N^2}{\cos^2\frac{\nu\pi}{2\nu+1}} - 1}. \tag{43}$$

Если $a > a_0$, то при условии $0 < c < c_0$, где c_0 определяется уравнением $a_0(c_0) = a$, экстремальными являются функции типа I. При $c_0 \leqslant c \leqslant c_1$ экстремальными являются функции вида $B_{n\nu}^{-}(x \mid c)$. При дальнейшем изменении c_0 начинаются описанные выше «циклы» (фиг. 2, 3, 4).

Если $a < a_0$, то при $c = 0$ уравнения (30″) имеют решение, удовлетворяющее условиям: $\alpha = -\beta$, $\gamma = -\delta$, $r = \nu$, $\xi = \frac{\mu}{\lambda}$. Выражение (29″) принимает вид:

$$\arccos B_{n\nu}^{(3)}(x \mid 0) = \lambda \int_{-a}^{x} \frac{x(x^2-\xi^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-\alpha^2)(x^2-\gamma^2)}} - \nu\pi. \tag{44}$$

Производя замену $\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и учитывая, что вычеты равны $i\frac{n}{2}$, приходим к полиному Н. И. Ахиезера $A_n(z;\ a')$, наименее уклоняющемуся от нуля на двух отрезках $(-1, -a')$ и $(a', 1)$ ([2]; [5]; [6]; [7], стр. 303),

$$B_{n\nu}^{(3)}(x \mid 0) = (-1)^\nu A_n(N\zeta;\ Na'), \qquad A_n(N;\ Na') = R, \qquad (a')^2 = \frac{1}{1+a^2},$$

$$A_n(z;\ a') = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}\right]^{\frac{n}{2}} + \left[\frac{H\left(\frac{K}{n}+u\right)}{H\left(\frac{K}{n}-u\right)}\right]^{\frac{n}{2}}\right\}, \quad z = \frac{a'\operatorname{cn} u}{\sqrt{(a')^2-\operatorname{sn}^2 u}}. \tag{45}$$

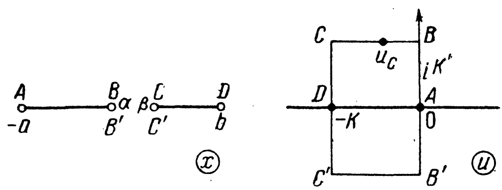
В переменных x это — функция типа III. «Циклы» при изменении c прослеживаются аналогично случаю четного n.

5. В заключение мы покажем, как функции типа II сводятся к эллиптическим функциям. Сделаем в интеграле (29′) замену:

$$\frac{2}{b+a}\left(x - \frac{b-a}{2}\right) = \frac{1-\tilde{\alpha}^2}{2\operatorname{sn}^2 u + \tilde{\alpha} - 1} + \tilde{\alpha}, \tag{46}$$

$$k^2 = \frac{2(\tilde{\beta}-\tilde{\alpha})}{(1-\tilde{\alpha})(1+\tilde{\beta})}, \tag{47}$$

где k — модуль эллиптических функций, $\tilde{\alpha} = \frac{2}{b+a}\left(\alpha - \frac{b-a}{2}\right)$, $\tilde{\beta} = \frac{2}{b+a}\left(\beta - \frac{b-a}{2}\right)$. Хорошо известно (см., например, [10], стр. 196), что преобразование (46) переводит отрезок $[-a, b]$ оси x в контур прямоугольника $BCC'B'$ на плоскости u, как показано на фиг. 13. Воспользовавшись нормальной формой эллиптических интегралов ([10], стр. 108) и связью между функциями $\Theta(u)$ и $H(u)$ (см. [10], стр. 264), приводим выражение (29') к виду:



Фиг. 13

$$\arccos B_{nr}^{-}(x \mid c) = Nu + \mu \ln \frac{H(u-u_0)}{H(u+u_0)} - \bar{\mu} \ln \frac{H(u-\bar{u}_0)}{H(u+\bar{u}_0)}, \tag{48}$$

где N — вещественная, μ — комплексная постоянные; u_0 — значение u, соответствующее $x = i$. Условие периодичности с периодами $2K$, $2iK'$ дает: $N = 0$. Зная, что вычеты интеграла (29') в точках $x = \pm i$ равны $i\frac{n}{2}$, находим:

$$\mu = i\frac{n}{2} = i\nu. \tag{49}$$

Тогда (48) принимает вид:

$$B_{nr}^{-}(x \mid c) = \frac{(-1)^r}{2}\left\{\left[\frac{H(u-u_0)\,H(u-\bar{u}_0)}{H(u+u_0)\,H(u+\bar{u}_0)}\right]^{\nu} + \left[\frac{H(u+u_0)\,H(u+\bar{u}_0)}{H(u-u_0)\,H(u-\bar{u}_0)}\right]^{\nu}\right\}. \tag{50}$$

Уравнение $\arccos B_{nr}^{-}(\alpha \mid c) = 0$ приводится к виду

$$i\nu \ln \frac{H(iK'-u_0)\,H(iK'-\bar{u}_0)}{H(iK'+u_0)\,H(iK'+\bar{u}_0)} = r\pi. \tag{51}$$

С помощью формул приведения для функции $H(u)$ (см. 10], стр. 264) из (50) получаем:

$$\frac{u_0+\bar{u}_0}{2} = \mathcal{R}u_0 = \left(1 - \frac{r}{n}\right)K. \tag{52}$$

Тогда уравнения $\arccos B_{nr}^{-}(\beta \mid c) = 0$ и $\arccos B_{nr}^{-}(b \mid c) = (n-r)\pi$ выполняются автоматически. Уравнение $B_{nr}^{-}(c \mid c) = R$ принимает вид:

$$\frac{H(u_c - u_0)\, H(u_c - \overline{u}_0)}{H(u_c + u_0)\, H(u_c + \overline{u}_0)} = \exp\left(\frac{1}{\nu}\operatorname{Arch} R\right), \tag{53}$$

где u_c — значение u, соответствующее $x = c$. К этим уравнениям нужно добавить условие существования экстремума в точке $x = c$ $(u = u_c)$:

$$\frac{H'(u_c - u_0)}{H(u_c - u_0)} + \frac{H'(u_c - \overline{u}_0)}{H(u_c - \overline{u}_0)} - \frac{H'(u_c + u_0)}{H(u_c + u_0)} - \frac{H'(u_c + \overline{u}_0)}{H(u_c + \overline{u}_0)} = 0. \tag{54}$$

Формулы (46), (50) вместе с уравнениями (47), (52), (53), (54) и уравнениями, определяющими значение u_0 и u_c:

$$\frac{2}{b+a}\left(i - \frac{b-a}{2}\right) = \frac{1-\widetilde{\alpha}^2}{2\operatorname{sn}^2 u_0 + \widetilde{\alpha} - 1} + \widetilde{\alpha}, \tag{55}$$

$$\frac{2}{b+a}\left(c - \frac{b-a}{2}\right) = \frac{1-\widetilde{\alpha}^2}{2\operatorname{sn}^2 u_c + \widetilde{\alpha} - 1} + \widetilde{\alpha}, \tag{56}$$

полностью решают задачу. Заметим, что с помощью существующих таблиц эллиптических функций и известных разложений в ряды задача может быть доведена до численного решения, что важно для практических приложений.

Мы не будем рассматривать здесь задачи о приведении к виду, удобному для вычислений, функций типа III. Эта задача связана с каноническими формами ультраэллиптических интегралов.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить Н. И. Ахиезера за ценные указания, Ю. Б. Румера, А. И. Фета и П. П. Куфарева за плодотворное обсуждение настоящей работы.

(Поступило в редакцию 26/IX 1957 г.)

Литература

1. C. L. Dolph, A Current Distribution for Broadside Arrays which optimizes the Relationship between Beam Width and Side — Lobe Level, Proc. of the Inst. of Radio Eng., **34** (1946), 335—360.
2. В. Л. Покровский, Об оптимальных линейных антеннах, излучающих перпендикулярно оси, ДАН СССР, т. **109**, № **4** (1956), 769—770.
3. В. Л. Покровский, О расчете оптимальных антенн, излучающих вдоль оси, Радиотехника и электроника, **II**, № **4** (1957), 389—394.
4. В. Л. Покровский, Оптимальные линейные антенны, излучающие под заданным углом к оси, Радиотехника и электроника, **II**, № **5** (1957), 559—565.
5. В. Л. Покровский, К теории оптимальных линейных антенн, Радиотехника и электроника, **II**, № **12** (1957), 1550—1551.

6. Н. И. Ахиезер, Ueber einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва (III), т. 3, № 2, (1928).
7. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1949.
8. И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1949.
9. П. Л. Чебышев, О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби, Полное собр. соч, т. 3, Москва — Ленинград, Изд. АН СССР, 1948, стр. 240—255.
10. Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.

Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром

М. Л. Расулов (Львов)

Известно, что одним из основных методов решения смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений в конечных областях является метод Фурье, применяемый преимущественно при решении смешанной задачи, для которой спектральная задача (подходящим образом подобранная граничная задача с параметром) соответствует самосопряженному оператору и, следовательно, имеет полную систему ортогональных собственных функций [10]. Это обстоятельство дает возможность искать решение смешанной задачи в виде ряда по этим собственным функциям с неизвестными коэффициентами, нахождение которых облегчается благодаря ортогональности собственных функций.

Коши впервые указал метод решения смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [5], [6] (см. также [8]), применимый, в отличие от метода Фурье, и в том случае, когда спектральная задача не соответствует самосопряженному оператору.

Смешанную задачу типа (1.1) — (1.3) условимся называть *задачей с неразделяющимися переменными*, если уравнение (1.1) содержит смешанную производную по x и t (t — временное переменное) или граничное условие (1.2) содержит производную по t или, наконец, имеет место и то и другое.

Как замечает Я. Д. Тамаркин в своей книге [16], вычетный метод Коши имеет следующие недостатки:

1. Не видно, как его непосредственно применять к уравнениям с переменными коэффициентами.

2. Отсутствует строгое доказательство сходимости рядов.

К замечаниям Тамаркина можно добавить еще следующее:

3. Не видно, как вычетный метод Коши применять непосредственно к задачам с неразделяющимися переменными (по x и t), даже в случае одного уравнения с постоянными коэффициентами.

Таким образом, метод Коши приводит к двум важным задачам:

А. Установить условия разложимости произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям* граничной задачи с параметром (подобранной подходящим образом для данной смешанной задачи) для линейных диффе-

---

* Говоря о фундаментальных функциях, мы имеем в виду собственные и присоединенные функции рассматриваемой спектральной задачи.

ренциальных уравнений и дать подходящую формулу разложения с помощью интегрального вычета.

Б. Решая соответствующую задачу А, на основании полученной формулы разложения произвольной вектор-функции дать вычетную формулу, представляющую решение поставленной смешанной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

Первый существенный шаг в решении задачи А сделан Биркгофом в его работах [1] и [2]. Во второй из этих работ с помощью результатов, полученных в [1], для задачи типа (5.4) — (5.5) в случае одного уравнения ($n = 1$) доказывается справедливость формулы разложения для достаточно гладкой функции $f(x)$:

$$f(x) = \mathscr{E}_\lambda \lambda^{p-1} \int_a^b G(x, \xi, \lambda^p) f(\xi) d\xi, \tag{a}$$

где $G(x, \xi, \lambda^p)$ — функция Грина и $\mathscr{E}_\lambda$ обозначает полный вычет подынтегральной функции. Идея представления функций в виде (а) принадлежит А. Пуанкаре [11].

Второй существенный шаг в решении задачи А был сделан Тамаркиным ([16], [17]), который доказал формулу (а) для задачи типа (3.4) — (3.5) в случае одного уравнения ($n = 1$) при $m = 1$, $s = 0$, $F_0(x, \Phi, \lambda) = \Phi(x)$.

Следует еще отметить важную работу М. В. Келдыша [7], относящуюся к спектральной теории несамосопряженного операторного уравнения вида

$$y = K_0 y + \lambda K_1 y + \ldots + \lambda^n K_n y + f, \tag{б}$$

рассматриваемого в соответствующем пространстве Гильберта, где K_i — вполне непрерывные операторы, y и f — элементы рассматриваемого пространства.

Смешанные задачи, содержащие в граничных условиях производные по времени, не укладываются в схему М. В. Келдыша, хотя бы потому, что *соответствующие спектральные задачи не приводятся к виду* (б), *где оператор, применяемый к* y, *есть многочлен относительно параметра* λ.

Из работ, относящихся к кругу задачи Б, автору известна работа Гепперта, [4], в которой в сущности дается некоторое обоснование вычетного метода Коши.

Исследование автором задачи Б показало, что формула разложения типа (а) не приспособлена к получению вычетного представления решения смешанной задачи, содержащей в граничных условиях производную искомой функции по времени. Как это видно из метода, применяемого в § 4 настоящей статьи, для этой цели нужно иметь формулу разложения (вектор-функции) типа (3.19). В связи с этим первая попытка обобщения результатов Биркгофа и Тамаркина в нужном направлении была сделана автором в работе [12].

В статье [12] автор при доказательстве теорем 7 и 8 не мог освободиться от ряда весьма ограничительных и излишних условий (см. в [12] условия 1) — 5) на стр. 519). Например, условие 5) работы [12] не выполняется для примера § 4 настоящей статьи.

В связи с примерами смешанных задач, встречающихся в приложениях (см. пример в § 4), настоящая работа имеет целью дать вычетный метод решения одномерных смешанных задач возможно более широкого класса. Для этой цели в § 3 дается новая формула (см. теорему 3) разложения произвольной вектор-функции в ряд по фундаментальным функциям граничной задачи (3.1) — (3.2) с параметром для системы уравнений специального вида. Из (3.19), в частности, получается формула (3.22), обобщающая формулу (а) Биркгофа — Тамаркина на случай системы уравнений.

Метод доказательства теоремы 3, в отличие от метода Биркгофа — Тамаркина, заключается в том, что исследование проблемы разложения для задачи (3.1) — (3.2) сводится к таковой для системы уравнений первого порядка. В связи с этим в § 2 доказывается теорема 2 о справедливости формулы разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром для системы уравнений первого порядка.

В § 4 на основании теоремы 3 доказывается, что достаточно гладкое решение смешанной задачи (1.1) — (1.3) представляется вычетной формулой (4.1) (см. теорему 5). В конце этого параграфа приводится пример, встречающийся в подземной гидромеханике и укладывающийся в схему данного метода.

В § 5 на основании теоремы 4 дается вычетное представление решения смешанной задачи с разделяющимися переменными для системы уравнений с переменными по t коэффициентами (см. теорему 6). Результат этого параграфа показывает, что вычетный метод, в отличие от метода трансформации Лапласа, применим и к уравнениям с переменными по t коэффициентами. Кроме того, как это иллюстрируется на примере в § 5, вычетный метод позволяет построить эффективное решение смешанной задачи, если можно построить функцию Грина соответствующей спектральной задачи и найти ее полюсы.

Соответствующие результаты получены автором для уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами [14], [15]. Для простоты изложения в настоящей работе автор решил ограничиться случаем уравнений с гладкими коэффициентами.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу: найти решение системы

$$\frac{\partial^q u}{\partial t^q} = \sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x)\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l} + f(x,t) \tag{1.1}$$

при граничном условии

$$\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant p-1}} \left\{ P_{kl}\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l}\bigg|_{x=a} + Q_{kl}\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l}\bigg|_{x=b}\right\} = 0 \tag{1.2}$$

и начальных условиях

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \Phi_k(x) \quad (k=0,\ldots,q-1), \tag{1.3}$$

где m, q, p — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие равенству $p = m \cdot q$; $A_{kl}(x)$ — n-мерная квадратная матрица, элементами которой являются функции $A_{ijkl}(x)$; $f(x,t)$, $\Phi_k(x)$, $u(x,t)$ — n-мерные столбцы функций $f_i(x,t)$ $\Phi_{ik}(x)$, $u_i(x,t)$, рассматриваемых на $[a,b]$; P_{kl}, Q_{kl} — постоянные матрицы размера $np \times n$. При $n=1$ в граничных условиях (1.2) будем полагать $mk + l \leqslant p$.

Путем замены

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i} = u^{(i)} \quad (i = 0,1,\ldots,q-1) \tag{1.4}$$

задача (1.1) — (1.3) приводится к задаче нахождения решения системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial t} &= u^{(1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u^{(q-2)}}{\partial t} &= u^{(q-1)}, \\ \frac{\partial u^{(q-1)}}{\partial t} &= \sum_{\substack{k \leqslant q-1 \\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x) \frac{\partial^l u^{(k)}}{\partial x^l} + f(x,t) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

при граничном условии

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1 \\ l\leqslant p-1}} \left\{ P_{kl} \left.\frac{\partial^l u^{(k)}}{\partial x^l}\right|_{x=a} + Q_{kl} \left.\frac{\partial^l u^{(k)}}{\partial x^l}\right|_{x=b} \right\} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{p-1} \left\{ P_{ql} \left.\frac{\partial^{l+1} u^{(q-1)}}{\partial t \partial x^l}\right|_{x=a} + Q_{ql} \left.\frac{\partial^{l+1} u^{(q-1)}}{\partial t \partial x^l}\right|_{x=b} \right\} = 0 \tag{1.6}$$

и начальных условиях

$$u^{(k)}\big|_{t=0} = \Phi_k(x) \quad (k = 0,1,\ldots,q-1). \tag{1.7}$$

§ 2. Теорема разложения в случае граничной задачи для нормальной системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$L_i(y) \equiv \frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,\lambda) y_j = f_i(x) \tag{2.1}$$

при граничных условиях

$$M_i(y) \equiv \sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{ij}(\lambda) y_j(a) + \beta_{ij}(\lambda) y_j(b)\} = 0 \quad (i = 1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

следующих предположениях:

1°. $$a_{ij}(x,\lambda) = \lambda a_{ij}(x) + \sum_{\nu=0}^{Q} a_{ij}^{(\nu)}(x) \lambda^{-\nu},$$

где Q — некоторое натуральное число, функции $a_{ij}(x)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, $a_{ij}^{(0)}(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка, а все остальные функции $a_{ij}^{(\nu)}(x)$ непрерывны на интервале $[a, b]$.

2°. $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — многочлены от λ, причем матрица

$$(\alpha_{ij}(\lambda), \beta_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^{n}$$

при достаточно больших λ имеет ранг n.

3°. При $x \in [a, b]$ корни $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ характеристического уравнения

$$\Phi(\theta) \equiv |a(x) - \theta E| = 0,$$

где $a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ и E — единичная матрица, различны и отличны от нуля; как их аргументы, так и аргументы их разностей не зависят от x.

Из условия 3° следует, что матрица $a(x)$ при $x \in [a, b]$ имеет непрерывную обратную матрицу $a^{-1}(x)$.

В этом параграфе для исследования асимптотического представления матрицы Грина задачи (2.1) — (2.2) и распределения больших нулей характеристического определителя будем пользоваться методом Тамаркина ([16], ([17])

С этой целью рассмотрим множество прямых λ-плоскости, определяемых, согласно условию 3°, уравнениями

$$\mathcal{R}\, \lambda\varphi_i(x) = \mathcal{R}\, \lambda\varphi_j(x)\,^* \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

при разных i, j. Очевидно, этими прямыми комплексная λ-плоскость разбивается на некоторые секторы (Σ_s), в каждом из которых, согласно условию 3° при подходящей нумерации корней характеристического уравнения имеют место неравенства

$$\mathcal{R}\, \lambda\varphi_1(x) \leqslant \mathcal{R}\, \lambda\varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \mathcal{R}\, \lambda\varphi_n(x).$$

Следовательно, в силу теоремы Тамаркина (см. теорему 2 в [16]), при условиях 1°, 3° существует фундаментальная система частных решений однородной системы, соответствующей (2.1), допускающих в секторе (Σ_s) асимптотическое представление

$$y_{ij}(x, \lambda) = e^{\lambda \int\limits_a^x \varphi_j(\xi)\, d\xi} \left\{\eta_{ij}(x) + \frac{E_{ij}(x, \lambda)}{\lambda}\right\}, \qquad (2.3)$$

где $E_{ij}(x, \lambda)$ непрерывны по $x \in [a, b]$ и ограничены в (Σ_s).

Пользуясь рассуждениями Тамаркина [16], можно получить явное представление $\eta_{ij}(x)$. Для этого заметим, что, в силу условий 1° и 3°, существует непрерывная и обратимая матрица $m(x)$, такая, что

$$m^{-1}(x)\, a(x)\, m(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_n(x) \end{Vmatrix}.$$

* $\mathcal{R} z$ обозначает действительную часть комплексной величины z.

С помощью замены $y=m(x)z$ однородную систему, соответствующую системе (2.1), можно привести к виду

$$\frac{dz}{dx}=b(x,\lambda)\,z,$$

где

$$b(x,\lambda)=\lambda b(x)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{-\nu}b^{(\nu)}(x),$$

$b(x)=m^{-1}(x)\,a(x)\,m(x)$, $b^{(\nu)}(x)=m^{-1}(x)\,a^{(\nu)}(x)\,m(x)$, $a^{(\nu)}(x)$ — матрица элементов $a_{ij}^{(\nu)}(x)$. Очевидно, j-й столбец $m_j(x)$ матрицы $m(x)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$(a(x)-\varphi_j(x)\,E)\,m_j(x)=0.$$

Пусть алгебраическое дополнение $b_{pp}^{(j)}(x)$ элемента (p,p) определителя $|a(x)-\varphi_j(x)\,E|$ не обращается в нуль на $[a,b]$. Ясно, что в качестве j-го столбца матрицы $m(x)$ можно взять столбец, составленный из элементов $b_{p1}^{(j)}(x),\ldots,b_{pn}^{(j)}(x)$.

Теперь если z_{ij} искать в виде

$$z_{ij}=e^{\int_a^x\varphi_j(\xi)\,d\xi}\left\{g_{ij}(x)+\frac{g_{ij}^{(1)}(x)}{\lambda}+\frac{E_{ij}(x,\lambda)}{\lambda^2}\right\},$$

то, подставляя это выражение в соответствующую систему для z и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим:

$$(\varphi_i(x)-\varphi_j(x))\,g_{ij}(x)=0,\qquad \frac{dg_{jj}}{dx}-b_{jj}^{(0)}(x)\,g_{jj}=0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$g_{ij}(x)=0 \text{ при } i\neq j,$$

$$g_{jj}(x)=e^{\int_c^x b_{jj}^{(0)}(\xi)\,d\xi},\quad c\in[a,b].$$

Принимая во внимание замену $y=mz$, для функций $\eta_{ij}(x)$ получаем следующее представление:

$$\eta_{ij}(x)=b_{pi}^{(j)}(x)\,e^{\int_c^x b_{jj}^{(0)}(\xi)\,d\xi}\,{}^{*},$$

где, согласно условию 1°, $b_{jj}^{(0)}(x)$ — непрерывная функция.

* Как видно из хода рассуждения, выражение $\eta_{ij}(x)$ от p не зависит, важно только что $b_{pp}^{(j)}(x)\neq 0$.

Легко показать, что матрица $\eta(x) = (\eta_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ имеет непрерывную обратную матрицу $\eta^{-1}(x)$ на $[a, b]$. В противном случае матрица $\eta(x)$ имела бы $k < n$ линейно независимых столбцов $\eta_1(x), \ldots, \eta_k(x)$. Тогда $k+1$-й столбец представлял бы собой линейную комбинацию этих столбцов:

$$\eta_{k+1}(x) = c_1\eta_1(x) + \ldots + c_k\eta_k(x).$$

Так как $a(x)\eta_j = \varphi_j\eta_j$, то $\eta_{k+1}\varphi_{k+1} = \eta_1 c_1\varphi_1 + \ldots + \eta_k c_k\varphi_k$ или

$$\eta_1 c_1(\varphi_1 - \varphi_{k+1}) + \ldots + \eta_k c_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = 0,$$

откуда следует, что $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, т. е. $\eta_{k+1}(x) = 0$. Последнее же противоречит тому, что $b^{(j)}_{k+1\,k+1}(x) \neq 0$.

Непрерывность матрицы $\eta^{-1}(x)$ на $[a, b]$ очевидна.

Обозначим через $G(x, \xi, \lambda)$ матрицу Грина* задачи (2.1) — (2.2). Обычным методом получаем для нее следующее представление:

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{2.4}$$

$$\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g_{ij}(x, \xi, \lambda) & y_{i1}(x, \lambda) & \ldots & y_{in}(x, \lambda) \\ M_1(g)_x & u_{11}(\lambda) & \ldots & u_{1n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_n(g)_x & u_{n1}(\lambda) & & u_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(u_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n, \tag{2.6}$$

где $\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)$ — элементы матрицы $\Delta(x, \xi, \lambda)$,

$$\left.\begin{aligned} g_{ij}(x, \xi, \lambda) &= \pm\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n y_{ik}(x, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) \qquad (+ \text{ при } x > \xi, - \text{ при } x < \xi), \\ z_{jk}(\xi, \lambda) &= \frac{\delta_{jk}(\xi, \lambda)}{\delta(\xi, \lambda)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

$\delta(\xi, \lambda)$ — определитель Вронского фундаментальной системы

$$y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda),$$

$\delta_{ij}(\xi, \lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента с индексом (i, j) в $\delta(\xi, \lambda)$, $M_k(g)_x$ обозначает применение оператора M_k к $g_{1j}, \ldots, g_{nj}$ как к функциям от x, $u_{ij}(\lambda) = M_i(y_{1j}, \ldots, y_{nj})$.

Пусть l_i — наибольший показатель степеней λ с ненулевыми коэффициентами, встречающихся в многочленах $\alpha_{i1}(\lambda), \ldots, \alpha_{in}(\lambda), \beta_{i1}(\lambda), \ldots, \beta_{in}(\lambda)$. Подставляя асимптотические представления (2.3) в (2.2), получим:

$$u_{ij}(\lambda) = \lambda^{l_i}\{[A_{ij}] + [B_{ij}]\, e^{\lambda w_l}\},$$

---

* Очевидно, эта матрица существует при любом λ, не являющемся нулем характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.

где A_{ij}, B_{ij} — постоянные, $w_j = \int\limits_a^b \varphi_j(\xi)\,d\xi$ и вообще $[f(x)]$ означает выражение вида $f(x) + \frac{E(x,\lambda)}{\lambda}$ при условии ограниченности $E(x,\lambda)$ для больших λ. Тогда для определителя $\Delta(\lambda)$ в секторе (Σ_s) получаем асимптотическое представление:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^l \Delta_0(\lambda) \quad (l = l_1 + \ldots + l_n), \tag{2.8}$$

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} [A_{11}] + [B_{11}]e^{\lambda w_1} & \ldots & [A_{1n}] + [B_{1n}]e^{\lambda w_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [A_{n1}] + [B_{n1}]e^{\lambda w_1} & \ldots & [A_{n1}] + [B_{n1}]e^{\lambda w_n} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Очевидно, согласно условию 3°, уравнения

$$\mathcal{R}\lambda w_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

определяют $2\mu \leqslant 2n$ различных лучей d_j в λ-плоскости, лежащих попарно на прямых, проходящих через начало координат. Обозначим через $\alpha_j + \frac{\pi}{2}$ аргумент луча d_j и будем полагать, что

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2\mu} < 2\pi.$$

Пусть d_1', d_2',..., $d_{2\mu}'$ — множество произвольно взятых лучей, отличных от лучей d_j и нумерованных в таком же порядке как и лучи $d_1, \ldots, d_{2\mu}$. Лучами d_j' $(j = 1, \ldots, 2\mu)$ λ-плоскость разбивается на секторы $(T_1), \ldots, (T_{2\mu})$. Рассмотрим один из этих секторов (T_j). Пусть $w_1^{(j)}, \ldots, w_{\nu_j}^{(j)}$ — те из чисел $w_1, \ldots, w_n$, которые лежат на прямой, перпендикулярной лучам $d_j, d_{j+\mu}$. Положим

$$w_k^{(j)} = \mu_k^{(j)} e^{\alpha_j \sqrt{-1}},$$

где

$$\mu_1^{(j)} < \mu_2^{(j)} < \ldots < \mu_{\tau_j}^{(j)} < 0 < \mu_{\tau_j+1}^{(j)} < \ldots < \mu_{\nu_j}^{(j)}.$$

Если все числа $\mu_k^{(j)} > 0$, то положим $\tau_j = 0$, а если все $\mu_k^{(j)} < 0$, то положим $\tau_j = \nu_j$. Остальные числа последовательности $w_1, \ldots, w_n$ можно распределить на две категории. К первой категории отнесем те из них, для которых в секторе (T_j) $\mathcal{R}\lambda w \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$ по лучу d_j, ко второй категории — те, для которых $\mathcal{R}\lambda w \to +\infty$. Допустим, что функции φ_i занумерованы так, что числа w_i располагаются в последовательности

$$w_j', \ldots, w_{\varkappa_j}', \; w_1^{(j)}, \ldots, w_{\nu_j}^{(j)}, \; w_{\nu_j+\varkappa_j+1}'', \ldots, w_n'',$$

где w', w'' обозначают соответственно числа первой и второй категорий.

Совершенно очевидно, что после вынесения $e^{\lambda\Sigma w''}$ (сумма распространяется на все числа w второй категории) за знак определителя (2.9) получаем:

$$\Delta_0(\lambda)=e^{\lambda\Sigma w''}H_j(z), \tag{2.10}$$

$$H_j(z)=[M_1^{(j)}]e^{m_1^{(j)}z}+\ldots+[M_{\sigma_j}^{(j)}]e^{m_{\sigma_j}^{(j)}z}, \tag{2.11}$$

где

$$z=\lambda e^{-\alpha_j\sqrt{-1}},\quad m_1^{(j)}<m_2^{(j)}<\ldots<m_{\sigma_j}^{(j)},$$

$$m_1^{(j)}=\begin{cases}\mu_1^{(j)}+\ldots+\mu_{\tau_j}^{(j)}, & \text{если } \tau_j>0,\\ 0 & \text{если } \tau_j=0,\end{cases}$$

$$m_{\sigma_j}^{(j)}=\begin{cases}\mu_{\tau_j+1}^{(j)}+\ldots+\mu_{\nu_j}^{(j)}, & \text{если } \tau_j<\nu_j,\\ 0 & \text{если } \tau_j=\nu_j,\end{cases}$$

$M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ — определители, составленные соответственно из строк

$$A_{i1}\ \ldots\ A_{i\varkappa_j}\ B_{i\,\varkappa_j+1}\ \ldots\ B_{i\,\varkappa_j+\tau_j}\ A_{i\,\varkappa_j+\tau_j+1}\ \ldots\ A_{i\,\varkappa_j+\nu_j}\ B_{i\,\varkappa_j+\nu_j+1}\ \ldots\ B_{in},$$

$$A_{i1}\ \ldots\ A_{i\,\varkappa_j+\tau_j}\ B_{i\,\varkappa_j+\tau_j+1}\ \ldots\ B_{in}$$

$$\text{при } i=1,\ldots,n.$$

Для показательного многочлена типа (2.11) Тамаркиным доказано следующее утверждение (см. п. п. 21—25 в [17]):

Если числа $M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ отличны от нуля, то при условиях 1° — 3°:

1) Многочлен $H_j(z)$ (см. (2.11)) имеет бесконечное множество корней $z_k^{(j)}$ ($|z_1^{(j)}|\leqslant|z_2^{(j)}|\leqslant\ldots$), заключенных в полосе $(D_h^{(j)})$ конечной ширины h, содержащей положительную часть мнимой оси z-плоскости.

2) В каждом прямоугольнике (Π_h) вида

$$|x|\leqslant\frac{h}{2},\quad y_1\leqslant y\leqslant y_2\quad(z=x+iy) \tag{Π_h}$$

при достаточно больших $|y_1|$, $|y_2|$ число N корней многочлена $H_j(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{2\pi}(m_{\sigma_j}^{(j)}-m_1^{(j)})(y_2-y_1)-\sigma_j\leqslant N\leqslant\frac{1}{2\pi}(m_{\sigma_j}^{(j)}-m_1^{(j)})(y_2-y_1)+\sigma_j.$$

3) Если внутренние части малых кругов радиуса δ с центрами в нулях $H_j(z)$ выбросить из полосы $(D_h^{(j)})$, то в оставшейся части этой полосы при достаточно больших λ имеет место неравенство

$$|H_j(z)|\geqslant N_\delta>0,$$

где N_δ — положительная постоянная, зависящая только от δ.

Из этого утверждения, согласно (2.4) — (2.11), следует

Теорема 1. *Если при условиях* $1^\circ - 3^\circ$ *все числа* $M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 2\mu)$ *отличны от нуля, то характеристический определитель матрицы Грина задачи* (2.1) — (2.2) *имеет бесконечное множество нулей, которые могут быть распределены на* 2μ *групп. Значения, отнесенные к* j*-ой группе, лежат в полосе* $(D_h^{(j)})$ *конечной ширины, границы которой параллельны лучу* d_j *и которая содержит этот луч, и не сближаются по мере удаления от начала координат, причем если из* λ*-плоскости выбросить внутренности малых кругов радиуса* δ *с центрами в этих нулях, то в оставшейся части при достаточно больших* λ *имеет место неравенство*

$$|\Delta_0(\lambda) e^{-\lambda \Sigma w''}| \geqslant N_\delta > 0. \tag{2.12}$$

Для доказательства теоремы разложения предварительно получим асимптотическое представление матрицы Грина задачи (2.1) — (2.2).

Границы секторов (T) и (Σ) делят всю λ-плоскость на секторы (R), каждый из которых лежит одновременно в одном из секторов (Σ) и в одном из секторов (T). Рассмотрим один из этих секторов (R) и допустим, что числа w занумерованы так, что выполняются неравенства

$$\mathscr{R}\lambda w_1 \leqslant \mathscr{R}\lambda w_2 \leqslant \ldots \leqslant \mathscr{R}\lambda w_\tau \leqslant 0 \leqslant \mathscr{R}\lambda w_{\tau+1} \leqslant \ldots \leqslant \mathscr{R}\lambda w_n.$$

Прибавляя к первому столбцу определителя $\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)$ столбцы с номерами $2, 3, \ldots, \tau, \tau+1, \ldots, n$, помноженные соответственно на

$$\frac{1}{2} z_{j1}(\xi, \lambda), \ldots, \frac{1}{2} z_{j\tau}(\xi, \lambda), \quad -\frac{1}{2} z_{j\,\tau+1}(\xi, \lambda), \ldots, -\frac{1}{2} z_{jn}(\xi, \lambda),$$

получим определитель $\Delta_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) = \Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)$. Элементы первого столбца определителя $\Delta_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda)$ обозначим через $g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda), g_1^{(j)}(\xi, \lambda), \ldots, g_n^{(j)}(\xi, \lambda)$. Очевидно,

$$g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\tau} y_{ik}(x, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) & \text{при } x > \xi, \\ -\sum\limits_{k=\tau+1}^{n} y_{ik}(x, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) & \text{при } x < \xi, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$g_p^{(j)}(\xi, \lambda) = \sum_{m=1}^{n} \left\{ \alpha_{pm}(\lambda) \sum_{k=\tau+1}^{n} y_{mk}(a, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) + \beta_{pm}(\lambda) \sum_{k=1}^{\tau} y_{mk}(b, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) \right\} \tag{2.14}$$

Разлагая определитель $\Delta_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda)$, получаем:

$$G_{ij} = \frac{\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} g_p^{(j)}(\xi, \lambda) y_{iq}(x, \lambda) \Delta_{pq}(\lambda), \tag{2.15}$$

где $\Delta_{pq}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента с индексом (p, q) в определителе $\Delta(\lambda), G_{ij}(x, \xi, \lambda)$ — элементы матрицы Грина $G(x, \xi, \lambda)$.

Согласно условию 3° можем положить

$$\varphi_k(x) = \pi_k q_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где π_k — постоянные, $q_k(x)$ — положительные функции на $[a, b]$. Введем обозначения:

$$\int_a^\xi \varphi_k(x)\,dx = \pi_k \xi_k, \quad \int_a^x \varphi_k(x)\,dx = \pi_k \xi_k, \quad \int_a^b \varphi_k(x)\,dx = \pi_k x_{0k}.$$

По определению функций $z_{jk}(\xi, \lambda)$, согласно (2.3), имеем:

$$\sum_{k=1}^n e^{\lambda \pi_k \xi_k} [\eta_{ik}(\xi)]\, z_{jk}(\xi, \lambda) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{2.16}$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера. Из (2.16) легко получить асимптотическую формулу:

$$z_{jk}(\xi, \lambda) = [v_{jk}(\xi)]\, e^{-\lambda \pi_k \xi_k}, \tag{2.17}$$

где матрица $v = (v_{ij}(\xi))_{i,j=1}^n$ — обратная для $\eta = (\eta_{ij}(\xi))_{i,j=1}^n$. Пользуясь формулами (2.3), (2.17) и принимая во внимание введенные обозначения, из (2.13) получаем:

$$g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\tau} e^{\lambda \pi_k (x_k - \xi_k)} \; [\eta_{ik}(x)]\,[v_{jk}(\xi)] & \text{при } x > \xi, \\ -\sum\limits_{k=\tau+1}^{n} e^{\lambda \pi_k (x_k - \xi_k)} \; [\eta_{ik}(x)]\,[v_{jk}(\xi)] & \text{при } x < \xi. \end{cases} \tag{2.18}$$

Точно так же из формулы (2.14) имеем:

$$g_p^{(j)}(\xi, \lambda) = \lambda^{l_p} \sum_{k=1}^n [M_{pk}]\,[v_{jk}(\xi)]\,\omega_k', \tag{2.19}$$

где

$$M_{pk} = \sum_{m=1}^n \{B_{pm}\eta_{mk}(b) - A_{pm}\eta_{mk}(a)\},$$

$$\omega_k = \begin{cases} e^{\lambda \pi_k (x_{0k} - \xi_k)} & \text{при } k = 1, 2, \ldots, \tau, \\ e^{-\lambda \pi_k \xi_k} & \text{при } k = \tau + 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Далее, замечая отсутствие в Δ_{pq} элементов p-й строки и q-го столбца определителя Δ, получаем:

$$\Delta_{pq}(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{l - l_p} e^{\lambda w} E_{pq}(\lambda) & (q = 1, \ldots, \tau), \\ \lambda^{l - l_p} e^{\lambda (w - w_q)}\, E_{pq}(\lambda) & (q = \tau + 1, \ldots, n), \end{cases} \tag{2.20}$$

где $E_{pq}(\lambda)$ ограничены при больших λ, $w = \sum\limits_{k=\tau+1}^{n} w_k$.

Обозначим через $\Omega_{ij}(x, \xi, \lambda)$ второе слагаемое в правой части (2.15). На основании асимптотических формул (2.3), (2.19) и (2.20) получаем:

$$\Omega_{ij}(x, \xi, \lambda) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi)] E_q^{(k)}(\lambda) \omega_k' \omega_q'', \tag{2.21}$$

где

$$\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi) = \eta_{iq}(x) v_{jk}(\xi), \qquad E_q^{(k)}(\lambda) = \sum_{p=1}^{n} \frac{[M_{pk}] E_{pq}(\lambda)}{e^{-\lambda w} \Delta_0(\lambda)},$$

$$\omega_q'' = \begin{cases} e^{\lambda \pi_q x_q} & \text{при } q = 1, \ldots, \tau, \\ e^{-\lambda \pi_q (x_{0q} - x_q)} & \text{при } q = \tau + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

причем, согласно оценке (2.12), если из рассматриваемого сектора (R) выбросить упомянутые выше малые круги, то в оставшейся части (R_δ) функция $E_q^{(k)}(\lambda)$ будет равномерно ограниченной.

В дальнейшем будут использованы следующие известные леммы (см. [16], п. 107):

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}(\lambda, z, x_1, \ldots, x_m) = \mathcal{E}(\lambda, z, x)$ — функция комплексного переменного λ, определенная на полуплоскости $\mathcal{R}(c\lambda) \leqslant 0$ (c — отличная от нуля постоянная) для всех значений z из интервала $(0, Z)$ и для всех значений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из замкнутой области D. Пусть, далее, Γ_ν — последовательность полуокружностей радиуса r_ν ($r_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$) с центром в начале λ-плоскости, лежащих в полуплоскости $\mathcal{R}(c\lambda) \leqslant 0$. Если $\mathcal{E}(\lambda, z, x)$ равномерно стремится к нулю на Γ_ν при $\nu \to \infty$, то интеграл*

$$\int_{\Gamma_\nu} \mathcal{E}(\lambda, z, x) e^{c\lambda z} d\lambda \to 0 \ \textit{при}\ \nu \to \infty$$

равномерно по $x \in D$ и $z \in [\alpha, \beta] \subset (0, Z)$.

Лемма 2. *При условиях леммы 1, если $\mathcal{E}(\lambda, z, x)$ равномерно ограничена на Γ_ν и $\psi(z)$ — произвольная интегрируемая функция, то интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(z) dz \int_{\Gamma_\nu} \mathcal{E}(\lambda, z, x) e^{c\lambda z} \frac{d\lambda}{\lambda} \to 0 \ \textit{при}\ \nu \to \infty$$

равномерно по $x \in D$ и $z \in [\alpha, \beta] \subset (0, Z)$.

Лемма 3. *Если $\psi(z)$ — произвольная интегрируемая функция, то интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(z) e^{c\lambda z} dz \to 0 \ \textit{при}\ |\lambda| \to \infty \ \textit{и}\ \mathcal{R}(c\lambda) \leqslant 0.$$

Теперь легко может быть доказана.

Теорема 2. *Если все числа $M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ ($j = 1, \ldots, 2\mu$) отличны от нуля, то при условиях, 1°, 2°, 3° существует последовательность расширяющихся* *замкнутых контуров* Γ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ λ*-плоскости, таких, что для всякого столбца* $f(x)$, *составленного из функций* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, *для которых*

$$\int_a^b |f_i(x)|^2 \, dx < \infty \quad (i = 1, \ldots, n),$$

интеграл

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_\nu} \left(\int_a^b G(x, \xi, \lambda) [f(\xi)] \, d\xi \right) d\lambda \to A^{-1}(x) f(x),$$

при $\nu \to \infty$, *причем сходимость понимается в смысле* $L_2(a, b)$.

Доказательство. В плоскости λ окружим все собственные числа λ_k задачи (2.1) — (2.2) окружностями c_δ радиуса δ с центрами в собственных числах λ_k. Выберем, далее, последовательность замкнутых контуров Γ_ν, не пересекающих окружностей c_δ и таких, что $\operatorname{mes} \Gamma_\nu = O(r_\nu)$ (r_ν — расстояние от начала λ-плоскости до ближайшей точки Γ_ν) и между контурами Γ_ν и $\Gamma_{\nu+1}$ лежит только одно собственное число. Тогда из (2.15), (2.18), (2.21) будем иметь:

$$\int_{\Gamma_\nu} \left(\int_a^b \sum_{j=1}^n G_{ij}(x, \xi, \lambda) f_j(\xi) \, d\xi \right) d\lambda = I_\nu^{(1)}(f, x) + I_\nu^{(2)}(f, x), \tag{2.22}$$

где

$$I_\nu^{(1)}(f, x) = \sum_{(R)} \int_{\Gamma_\nu \cap R} d\lambda \int_a^x \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\tau e^{\lambda \pi_k (x_k - \xi_k)} [\eta_{ik}(x) v_{jk}(\xi)] f_j(\xi) \right) d\xi -$$

$$- \sum_{(R)} \int_{\Gamma_\nu \cap R} d\lambda \int_x^b \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=\tau+1}^n e^{\lambda \pi_k (x_k - \xi_k)} [\eta_{ik}(x) v_{jk}(\xi)] \right) f_j(\xi) \, d\xi, \tag{2.23}$$

$$I_\nu^{(2)}(f, x) = \sum_{(R)} \int_{\Gamma_\nu \cap R} d\lambda \left(\sum_{q=1}^\tau \mathscr{E}_i^{(q)}(x, \xi, \lambda) e^{\lambda \pi_q x_q} + \sum_{q=\tau+1}^n \mathscr{E}_i^{(q)}(x, \xi, \lambda) e^{-\lambda \pi_q (x_{0q} - x_q)} \right), \tag{2.24}$$

$$\mathscr{E}_i^{(q)}(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^\tau E_q^{(k)}(\lambda) \int_a^b [\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi)] f_j(\xi) e^{-\lambda \pi_k (x_{0k} - \xi_k)} d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=\tau+1}^n E_q^{(k)}(\lambda) \int_a^b [\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi)] f_j(\xi) e^{-\lambda \pi_k \xi_k} d\xi \right), \tag{2.25}$$

где суммы $\sum_{(R)}$ распространяются на все секторы (R), $\Gamma_\lambda \cap R$ обозначает часть контура Γ_ν, лежащую в секторе (R).

Согласно лемме 3,

$$\int_a^b [\omega_{qk}^{(i,j)}(x,\xi)]\, f_j(\xi)\, e^{-\lambda(x_{0k}-\xi_k)\pi_k}\, d\xi \to 0 \text{ при } |\lambda| \to \infty.$$

Тогда, принимая во внимание равномерную ограниченность $E_q^{(k)}(\lambda)$ на контурах Γ_ν, согласно лемме 1, из (2.24) и (2.25) заключаем, что

$$I_\nu^{(2)}(f,x) \to 0 \text{ при } \nu \to \infty, \tag{2.26}$$

причем равномерно внутри интервала (a, b).

Обозначим через $I_\nu^{(0)}$ интеграл, полученный из (2.23), если опустить квадратные скобки. Применяя лемму 2, устанавливаем, что разность

$$I_\nu^{(1)}(f,x) - I_\nu^{(0)}(f,x) \to 0 \text{ при } \nu \to \infty \tag{2.27}$$

равномерно в (a, b). Заметим, что в выражении для $I_\nu^{(0)}(f,x)$ интегрирование по λ может быть выполнено. Тогда при помощи простого рассуждения получим:

$$I_\nu^{(0)} = -2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b \eta_{ik}(x)\, v_{jk}(\xi)\, f_j(\xi)\, \frac{\sin r_\nu |\pi_k| (x_k - \xi_k)}{\pi_k (x_k - \xi_k)}\, d\xi =$$

$$= -2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b \eta_{ik}(x)\, v_{jk}(\xi)\, f_j(\xi)\, \frac{\sin r_\nu |\pi_k| (x_k - \xi_k)}{(x_k - \xi_k)} \cdot \frac{d\xi_k}{\varphi_k(\xi)}. \tag{2.28}$$

По известной формуле из теории трансформации Фурье интеграл в правой части (2.28) для всякой функции $f_j(x) \in L_2(a, b)$ стремится к $\dfrac{\eta_{ik}(x)\, v_{jk}(x)\, f_j(x)}{\varphi_k(x)}$ в смысле метрики $L_2(a, b)$ (см. [10])

Таким образом, согласно (2.26), (2.27) и (2.28) получаем:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_\nu} \left(\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi \right) d\lambda \Rightarrow \eta(x) \begin{Vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varphi_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\varphi_n} \end{Vmatrix} v(x)\, f(x)$$

при $\nu \to \infty$.

Если вспомнить, что $\eta(x)\, v(x) = E$, то с помощью равенства

$$\eta(x) \begin{Vmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n \end{Vmatrix} = A(x)\, \eta(x),$$

которое получится, если подставить $y_{ik}(x, \lambda)$ в однородную систему (2.1) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, выводим:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_\nu} \left(\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi \right) d\lambda \Rightarrow A^{-1}(x)\, f(x) \quad \text{при } \nu \to \infty.$$

Как нетрудно заметить из рассуждений, применяемых для получения этого предельного соотношения, опущение квадратных скобок под знаком интеграла

$$\int\limits_{\Gamma_\nu}\left(\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)\,[f(\xi)]\,d\xi\right)d\lambda$$

дает уклонение, равное интегралу $\int\limits_{\Gamma_\nu}\left(\int\limits_a^b G(x,\xi,\lambda)\frac{E(\xi,\lambda)}{\lambda}\,d\xi\right)d\lambda$, который равномерно стремится к нулю, согласно лемме 2.

Как видно из доказательства теоремы, она имеет место в смысле обычной точечной сходимости, если

$$\int\limits_a^b v_{jk}(\xi)\,f_j(\xi)\,\frac{\sin r_\nu|\pi_k|(x_k-\xi_k)}{\varphi_k(\xi)\,(x_k-\xi_k)}\,d\xi_k\to\frac{v_{jk}(x)}{\varphi_k(x)}\,f_j(x)\ \text{при}\ \nu\to\infty$$

в точечном смысле. Чтобы этого не оговаривать каждый раз, в дальнейшем сходимость встречающихся рядов будет пониматься в смысле метрики L_2.

§ 3. Разложение произвольной функции-столбца в ряд по фундаментальным функциям спектральной задачи

Задачу нахождения решения системы

$$\left.\begin{aligned}
&v^{(1)}-\lambda^m v^{(0)}=\Phi_0(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&v^{(q-1)}-\lambda^m v^{(0)}=\Phi_{q-2}(x),\\
&\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x)\frac{d^l v^{(k)}}{dx^l}-\lambda^m v^{(q-1)}=\Phi_{q-1}(x)
\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

при граничном условии

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ l\leqslant p-1}}\left\{P_{kl}\frac{d^l v^{(k)}}{dx^{(l)}}\bigg|_{x=a}+Q_{kl}\frac{d^l v^{(k)}}{dx^l}\bigg|_{x=b}\right\}+$$

$$+\lambda^m\sum_{l=0}^{p-1}\left\{P_{ql}\frac{d^l v^{(q-1)}}{dx^l}\bigg|_{x=a}+Q_{ql}\frac{d^l v^{(q-1)}}{dx^l}\bigg|_{x=b}\right\}=0\tag{3.2}$$

будем называть спектральной задачей, соответствующей задаче (1.5)—(1.7).

Настоящий параграф в основном посвящен доказательству теоремы 3, на основании которой в следующем параграфе устанавливается, что достаточно гладкое решение задачи (1.1)—(1.3) представляется в виде интегрального вычета (4.1). Из теоремы 3 следует теорема 4, на основании которой в § 5 доказывается, что достаточно гладкое решение смешанной задачи с разделяющимися переменными x и t для системы уравнений с переменными по t коэффициентами представимо в виде интегрального вычета (см. теорему 6).

Метод доказательства теоремы 3 состоит в том, что прежде всего задача (3.1)—(3.2) путем замены неизвестных вектор-функций преобразуется в спектральную задачу для системы уравнений первого порядка, применяя к которой теорему 2, мы получаем вспомогательную формулу разложения

(3.21). Далее, возвращаясь, по формулам (3.15) и (3.10), к первоначальной вектор-функции $v^{(s)}$, мы выводим основную формулу (3.19).

Для осуществления этой схемы доказательства прежде всего зафиксируем s среди чисел $0, 1, \ldots, q-1$ и, выразив все $v^{(k)}$ через $v^{(s)}$, сведем задачу (3.1)—(3.2) к спектральной задаче для неизвестной вектор-функции $v^{(s)}$.

Из первых $q-1$ уравнений системы (3.1) имеем:

$$v^{(k)}=\begin{cases}\lambda^{m(k-s)}\left\{v^{(s)}-(\lambda^{m(s-1)}\Phi_k+\ldots+\lambda^{mk}\Phi_{s-1})\right\} & \text{при } k<s,\\ v^{(s)} & \text{при } k=s,\\ \lambda^{m(k-s)}\left\{v^{(s)}+(\lambda^{m(k-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\lambda^{ms}\Phi_{k-1})\right\} & \text{при } k>s.\end{cases}\tag{3.3}$$

Подставляя $v^{(k)}$ из (3.3) в последнее уравнение системы (3.1) и граничное условие (3.2), приходим к спектральной задаче:

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}}\lambda^{m(k-s)}A_{kl}(x)\frac{d^l v^{(s)}}{dx^l}-\lambda^{m(q-s)}v^{(s)}=F_s(x,\Phi,\lambda^m),\tag{3.4}$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant p-1}}\lambda^{m(k-s)}\left\{P_{kl}\left.\frac{d^l v^{(s)}}{dx^l}\right|_{x=a}+Q_{kl}\left.\frac{d^l v^{(s)}}{dx^l}\right|_{x=b}\right\}=N_s(\Phi,\lambda^m),\tag{3.5}$$

где

$$F_s(x,\Phi,\lambda^m)=\Phi_{q-1}(x)+\sum_{\substack{k<s\\ mk+l\leqslant p}}A_{kl}(x)\frac{d^l}{dx^l}\left\{\lambda^{-m}\Phi_k(x)+\ldots+\lambda^{m(k-s)}\Phi_{s-1}(x)\right\}-$$

$$-\sum_{\substack{q-1\geqslant k>s\\ mk+l\leqslant p}}A_{kl}(x)\frac{d^l}{dx^l}\left\{\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\Phi_{k-1}(x)\right\}+$$

$$+\left\{\lambda^{m(q-s-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\lambda^m\Phi_{q-2}(x)\right\},\tag{3.6}$$

$$N_s(\Phi,\lambda^m)=\sum_{\substack{l\leqslant p-1\\ 1\leqslant k<s}}\left\{P_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\left(\lambda^{-m}\Phi_k(x)+\ldots+\lambda^{-m(s-k)}\Phi_{s-1}(x)\right)\Big|_{x=a}+\right.$$

$$\left.+Q_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\left(\lambda^{-m(s-k)}\Phi_{s-1}(x)+\ldots+\lambda^{-m}\Phi_k(x)\right)\Big|_{x=b}\right\}-$$

$$-\sum_{\substack{l\leqslant p-1\\ s<k<q-2}}\left\{P_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\left(\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\Phi_{k-1}(x)\right)\Big|_{x=a}+\right.$$

$$\left.+Q_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\left(\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\Phi_{k-1}(x)\right)\Big|_{x=b}\right\}-$$

$$-\sum_{l=0}^{p-1}\left\{(P_{q-1\,l}+\lambda^m P_{ql})\frac{d^l}{dx^l}\left(\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\Phi_{q-2}(x)\right)\Big|_{x=a}+\right.$$

$$\left.+(Q_{q-1\,l}+\lambda^m Q_{ql})\frac{d^l}{dx^l}\left(\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x)+\ldots+\lambda^{ms}\Phi_{q-2}(x)\right)\Big|_{x=b}\right\},\tag{3.7}$$

причем при $s = q - 1$ последнее слагаемое в правой части (3.6) отсутствует.

В дальнейшем задачу (3.4)—(3.5) будем называть s-**вспомогательной спектральной задачей**.

Очевидно, при $s = 0$ имеем:

$$F_0(x, \Phi, \lambda^m) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda^{m(q-1-k)} \Phi_k(x) -$$

$$- \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q-1 \\ mk+l \leqslant p}} A_{kl}(x) \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-1)} \Phi_0(x) + \ldots + \Phi_{k-1}(x)), \tag{3.8}$$

$$N_0(\Phi, \lambda^m) = - \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q-2 \\ 0 \leqslant l \leqslant p-1}} \Big\{ P_{kl} \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-1)} \Phi_0(x) + \ldots + \Phi_{k-1}(x)) |_{x=a} +$$

$$+ Q_{kl} \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-1)} \Phi_0(x) + \ldots + \Phi_{k-1}(x)) |_{x=b} \Big\} -$$

$$- \sum_{l=0}^{p-1} \Big\{ (P_{q-1\, l} + \lambda^m P_{ql}) \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(q-2)} \Phi_0(x) + \ldots + \Phi_{q-2}(x)) |_{x=a} +$$

$$+ (Q_{q-1\, l} + \lambda^m Q_{ql}) \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(q-2)} \Phi_0(x) + \ldots + \Phi_{q-2}(x)) |_{x=b} \Big\}. \tag{3.9}$$

Теперь, для того чтобы привести s-вспомогательную спектральную задачу к задаче для системы уравнений первого порядка, сделаем замену

$$\lambda^{-l} \frac{d^l v^{(s)}}{dx^l} = w_l^{(s)} \quad (l = 0, \ldots, p-1;\ s = 0, \ldots, q-1). \tag{3.10}$$

Осуществляя замену (3.10) в формулах (3.4)—(3.5), после очевидных преобразований приходим к спектральной задаче для системы уравнений первого порядка:

$$\frac{dw_k^{(s)}}{dx} = \lambda w_{k+1}^{(s)} \quad (k = 0, \ldots, p-2),$$

$$\sum_{\substack{k \leqslant q-1 \\ l \leqslant p-1 \\ mk+l \leqslant p}} \lambda^{mk+l-p+1} A_{kl}(x) w_l^{(s)} + \frac{dw_{p-1}^{(s)}}{dx} - \lambda A_{0p}^{-1}(x) w_0^{(s)} = \lambda^{ms+1-p} A_{0p}^{-1}(x) F_s(x, \Phi, \lambda^m), \tag{3.11}$$

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant q \\ 0 \leqslant l \leqslant p-1}} \lambda^{mk+l} \{ P_{kl} w_l^{(s)} |_{x=a} + Q_{kl} w_l^{(s)} |_{x=b} \} = \lambda^{ms} N_s(\Phi, \lambda^m). \tag{3.12}$$

Допустим, что выполняются следующие условия:

1. При $x \in [a, b]$ функции $A_{kl}(x)$ непрерывны, при $mk + l = p - 1$ они имеют непрерывные производные первого порядка, при $mk + l = p$ — непрерывные производные второго порядка.

2. Корни $\psi_1(x), \ldots, \psi_{np}(x)$ характеристического уравнения

$$\det(\theta^p A_{0p}(x) + \theta^{p-m} A_{q-1\,m}(x) + \ldots + \theta^m A_{1\,(q-1)m}(x) - E) = 0\,^*$$

при $x \in [a, b]$ различны и отличны от нуля; как их аргументы, так и аргументы их разностей не зависят от x.

3. При достаточно больших λ ранг матрицы

$$\| \alpha_0(\lambda), \ldots, \alpha_{p-1}(\lambda), \quad \beta_0(\lambda), \ldots, \beta_{q-1}(\lambda) \|,$$

где

$$\alpha_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{q} \lambda^{mk+j} P_{kj}, \quad \beta_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{q} \lambda^{mk+j} Q_{kj},$$

равен np.

4. На интервале $[a, b]$ функции $\Phi_{k-1}(x)$ имеют непрерывные производные до порядка $p - mk$ включительно. При больших λ и при любом $s = 0, \ldots, q-1$ имеет место соотношение

$$\lambda^{ms} N_s(\Phi, \lambda^m) = O(\lambda^{-m}).$$

Далее, для того чтобы к задаче (3.11)—(3.12) можно было применять теорему 2, прежде всего следует привести эту задачу к задаче при однородном граничном условии. Учитывая, что при переходе от новых неизвестных вектор-функций к первоначальной в правых частях (3.11)—(3.12) играют роль только главные члены для больших λ, выделим попутно эти члены.

Заметим, что, в силу условия 4, правая часть граничного условия (3.12) при больших λ убывает как λ^{-m}. Поэтому это условие можно записать в виде:

$$\lambda^{ms} N_s(\Phi, \lambda^m) = \lambda^{-m} [R_s], \tag{3.13}$$

где R_s — постоянная матрица, а прямые скобки употребляются в смысле, указанном в § 2.

Как видно далее из выражения $F_s(\Phi, x, \lambda^m)$, при больших λ главным членом для $\lambda^{ms+1-p} F_s(\Phi, x, \lambda^m)$ является $\lambda^{-m+1} A_{0p}^{-1}(x)\Phi_s(x)$. Следовательно, правая часть последнего уравнения системы (3.11) может быть представлена в виде

$$\lambda^{ms+1-p} F_s(\Phi, x, \lambda^m) = \lambda^{-m+1} [A_{0p}^{-1}(x)\Phi_s(x)]. \tag{3.14}$$

В силу условия 3, можно подобрать числовые столбцы $z_l^{(s)}(a, \lambda)$, $z_l^{(s)}(b, \lambda)$, удовлетворяющие граничным условиям (3.12). Согласно (3.13), эти числовые столбцы допускают следующие представления:

$$z_l^{(s)}(a, \lambda) = \lambda^{-m} [C_l^{(s)}], \quad z_l^{(s)}(b, \lambda) = \lambda^{-m} [D_l^{(s)}],$$

* В дальнейшем через E обозначается единичная матрица соответствующего размера.

где $C_l^{(s)}$, $D_l^{(s)}$ — постоянные столбцы. Построенные по этим столбцам функциональные столбцы

$$z_l^{(s)}(x,\lambda)=\lambda^{-m}\left\{[C_l^{(s)}]+\frac{x-a}{b-a}[D_l^{(s)}-C_l^{(s)}]\right\},$$

очевидно, удовлетворяют граничному условию (3.12). Тогда, принимая во внимание (3.14), легко видеть, что, осуществляя в (3.11) — (3.12) замену неизвестной вектор-функции $w_l^{(s)}$

$$y_l^{(s)}=w_l^{(s)}-z_l^{(s)}(x,\lambda), \tag{3.15}$$

приходим к спектральной задаче для системы уравнений первого порядка при однородном граничном условии:

$$\begin{gathered}\frac{dy_l^{(s)}}{dx}-\lambda y_{l+1}^{(s)}=\lambda^{-m+1}\,[z_{l+1\,0}^{(s)}(x)]\ (l=0,\ \ldots,\ p-2),\\ \frac{dy_{p-1}^{(s)}}{dx}-\lambda A_{0p}^{-1}(x)\,y_0^{(s)}+\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ l\leqslant p-1\\ mk+l\leqslant p}}\lambda^{mk+l-p+1}A_{0p}^{-1}(x)\,A_{kl}(x)y_l^{(s)}=\\ =\lambda^{-m+1}[f_s(x)],\end{gathered} \tag{3.16}$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant p-1}}\lambda^{mk+l}\,\{P_{kl}y_l^{(s)}(a)+Q_{kl}y_l^{(s)}(b)\}=0, \tag{3.17}$$

где

$$\begin{gathered}f_s(x)=A_{0p}^{-1}(x)\,\Phi_s(x)+A_{0p}^{-1}(x)\,z_{00}^{(s)}(x)-\\ -A_{0p}^{-1}(x)\,A_{q-1\,m}(x)\,z_{m\,0}^{(s)}(x)+\ldots+A_{1\,(q-1)m}(x)\,z_{(q-1)m\,0}^{(s)}(x)),\\ z_{l\,0}^{(s)}(x)=C_l^{(s)}+\frac{x-a}{b-a}(D_l^{(s)}-C_l^{(s)}).\end{gathered} \tag{3.18}$$

Аналогично тому, как это сделано в § 2, с помощью асимптотического представления независимых решений однородной системы, соответствующей (3.16), для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ матрицы Грина задачи (3.16)—(3.17) при больших λ можно получить асимптотическое представление

$$\Delta(\lambda)=\lambda^l e^{\Sigma\lambda w''}\,\{[M_1^{(j)}]\,e^{m_1^{(j)}z}+\ldots+[M_{n_j}^{(j)}]\,e^{m_{n_j}^{(j)}z}\}$$

в соответствующих секторах (T_j).

В добавление к условиям 1—4 предполагается еще выполненным условие

5. Все числа $M_1^{(j)}$, $M_{n_j}^{(j)}$ $(j=1,\ \ldots,\ 2\mu)$ отличны от нуля.

Теперь, если применить теорему 2 к задаче (3.16)—(3.17), может быть доказана

Теорема 3. *При условиях* 1—5 *настоящего параграфа имеет место формула* *

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{c_\nu}\lambda^{m-1}v^{(s)}(x,\lambda)\,d\lambda=\Phi_s(x)\quad(s=0,\ \ldots,\ q-1),\qquad(3.19)$$

где c_ν — *замкнутый контур* λ-*плоскости, окружающий только один полюс* λ_ν *подынтегральной функции и сумма по* ν *распространяется на все полюсы этой функции, причем равенство* (3.19) *понимается в смысле* $L_2[a,b]$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что при условиях 1—5 для задачи (3.16)—(3.17) выполняются все условия теоремы 2.

В силу условий 1 и 3, условия 1°, 2° теоремы 2 для задачи (3.16)—(3.17), очевидно, выполняются.

Остается показать, что выполняется условие 3°, а это делается с помощью преобразования характеристического уравнения для системы (3.16).

В самом деле, легко видеть, что характеристическое уравнение системы (3.16) имеет вид:

$$\left\|\begin{matrix}-\theta E & E & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\theta E & E & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\theta E & E\\ A_{0p}^{-1}(x) & \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m-1} & & -A_{0p}^{-1}(x)A_{q-1\,m}(x) & \cdots & \cdots & -A_{0p}^{-1}(x)A_{1\,(q-1)m}(x) & \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m-1} & -\theta E\end{matrix}\right\|=0,\qquad(3.20)$$

где нули обозначают нулевые матрицы порядка n.

Если матричные столбцы с номерами $m+1,\ 2m+1,\ \ldots,\ (q-1)m+1,\ qm$ определителя, стоящего в левой части (3.20), помножить соответственно на $\theta^m,\ \theta^{2m},\ \ldots,\ \theta^{(q-1)m},\ \theta^{qm-1}$ и сложить с первым матричным столбцом, то, последовательно применяя теорему Лапласа к полученному определителю, легко привести уравнение (3.20) к виду:

$$\det\left(A_{0p}(x)\,\theta^p+A_{1(q-1)m}(x)\,\theta^{p-m}+\ldots+A_{q-1\ m}(x)\,\theta^m-E\right)=0.$$

Таким образом, согласно условию 2, для задачи (3.16)—(3.17), выполняется условие 3° теоремы 2.

---

* Как видно из доказательства, эта теорема остается справедливой, если $\Phi_{q-1}(x)\in L_2[a,b]$.

Следовательно, применяя теорему 2 к задаче (3.16)—(3.17), получаем:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{\Gamma_\nu}\lambda^{m-1}\begin{Vmatrix} y_0^{(s)} \\ \vdots \\ y_{p-1}^{(s)}\end{Vmatrix} d\lambda \Rightarrow B^{-1}(x)\begin{Vmatrix} z_{10}^{(s)}(x) \\ \vdots \\ z_{p-10}^{(s)}(s) \\ f_s(x)\end{Vmatrix} \quad \text{при } \nu\to\infty,$$

$$B(x)=\begin{Vmatrix} 0 & E & 0 & 0 & \dots & \dots\dots\dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & \dots & \dots\dots\dots & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & \dots\dots\dots & 0 & E \\ A_{0p}^{-1} & \underbrace{0,\dots,0}_{m-1} & A_{0p}^{-1} & A_{q-1\,m} & \dots & -A_{0p}^{-1}A_{1\,(q-1)m} & \underbrace{0,\dots,0}_{m-1} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Далее, непосредственным вычислением можно убедиться в том, что

$$B^{-1}(x)=\begin{Vmatrix} \overbrace{0,\dots,0}^{m-1} & A_{q-1\,m}(x) & \overbrace{0,\dots,0}^{m-1} & A_{q-2\,2m}(x) & \dots & A_{1\,(q-1)m}(x) & \overbrace{0,\dots,0}^{m-1} & A_{0p}(x) \\ E\;0 & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & 0 \\ 0\;E\;0 & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & 0 \\ 0\;\cdot\;\cdot & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ 0\;\cdot\;\cdot & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & 0\;E & 0 \end{Vmatrix}.$$

Поэтому, принимая во внимание (3.18), получаем:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Gamma_\nu}\lambda^{m-1}\begin{Vmatrix} y_0^{(s)} \\ \vdots \\ y_{p-1}^{(s)}\end{Vmatrix} d\lambda \to \begin{Vmatrix} \Phi_s(x)+z_{00}^{(s)}(x) \\ z_{10}^{(s)}(x) \\ \vdots \\ z_{p-1\,0}^{(s)}(x)\end{Vmatrix} \quad \text{при } \nu\to\infty. \tag{3.21}$$

Наконец, возвращаясь по формулам (3.15) и (3.10) к $v^{(s)}$, из (3.21) получаем формулу (3.19)*, которую и нужно было установить.

Полагая, в частности, $\Phi_k(x)=0$ при $k=0,\ 1,\ \dots,\ p-2$, из (3.19) выводим формулу:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{C_\nu}\lambda^{m(s+1)-1}d\lambda\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\,\Phi_{q-1}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при } s<q-1, \\ \Phi_{q-1}(x) & \text{при } s=q-1, \end{cases} \tag{3.22}$$

* Предел последовательности интегралов по расширяющимся контурам, очевидно, дает сумму вычетов по всем полюсам функции $\lambda^{m-1}v^{(s)}(x,\lambda)$.

справедливую, согласно подстрочному примечанию к теореме 3, для $\Phi_{q-1}(x) \in L_2[a, b]$, где $G(x, \xi, \lambda)$ — матрица Грина 0-вспомогательной спектральной задачи.

Таким образом, из теоремы 3, в частности, следует

Теорема 4. *При условиях* 1, 2, 3 *и* 5 *любая вектор-функция* $\Phi_{q-1}(x) \in L_2[a, b]$ *может быть разложена по формуле* (3.22) *в ряд по фундаментальным функциям* 0-*вспомогательной спектральной задачи.*

Для целей следующего параграфа необходимо записать решение спектральной задачи (3.1)—(3.2) в более компактном виде.

Пусть $V_{0i}(x, \lambda)$ $(i = 1, \ldots, p)$ — квадратные матрицы независимых решений однородной системы 0-вспомогательной спектральной задачи. Известно (см. [9]), что общее решение упомянутой однородной системы имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{p} V_{0k}(x, \lambda)\, b_k,$$

где b_k — столбцы произвольных постоянных. Подставляя это выражение в граничное условие 0-вспомогательной спектральной задачи, для определения столбца постоянных получаем матричное уравнение

$$A(\lambda) \begin{Vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{Vmatrix} = N_0(\Phi, \lambda^m),$$

где $A(\lambda)$ состоит из p матричных ячеек

$$\sum_{\substack{k \leqslant q \\ l \leqslant p-1}} \lambda^{mk} \left(P_{kl} V_{0s}(x, \lambda)\big|_{x=a} + Q_{kl} V_{0s}(x, \lambda)\big|_{x=b}\right) \quad (s = 1, \ldots, p)$$

размера $np \times n$, расположенных по горизонтали.

Определяя из последнего уравнения столбец постоянных и подставляя в общее решение, получаем вектор-функцию

$$\Delta_0(x, \Phi, \lambda) = \sum_{k=1}^{p} V_{0k}(x, \lambda)\, A^{-1}(\lambda)\, N_0(\Phi, \lambda^m)\, ^*,$$

удовлетворяющую однородной системе 0-вспомогательной спектральной задачи и неоднородному граничному условию.

Пусть, далее, $A^{-1}(\lambda)$ состоит из p матричных ячеек $(A^{-1}(\lambda))_s$ $(s = 1, \ldots, p)$ размера $n \times np$. Тогда, записывая $F_0(x, \Phi, \lambda^m)$, $N_0(\Phi, \lambda^m)$ в матричной форме, нетрудно убедиться в том, что решение $v^{(0)}(x, \lambda)$ 0-вспомогательной спектральной задачи представляется в виде:

$$v^{(0)}(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, l\left(\xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \Phi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} V_{0s}(x, \lambda) \left\{\alpha_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) \Phi(x)\big|_{x=a} + \beta_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) \Phi(x)\big|_{x=b}\right\}, \tag{3.23}$$

* Очевидно, матрица $A^{-1}(\lambda)$ существует при всяком λ, не являющемся нулем характеристического определителя $\Delta(\lambda) = \det A(\lambda)$.

где $G(x, \xi, \lambda)$ — матрица Грина, $l\left(\xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)$ — матрица, состоящая из матричных ячеек

$$l_s\left(\xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) = \lambda^{m(q-s)}E - \sum_{\substack{s \leqslant k \leqslant q-1 \\ mk+l \leqslant p}} \lambda^{m(k-s)} A_{kl}(\xi) \frac{d^l}{d\xi^l} \quad (s = 1, \ldots, q-1),$$

$l_q = E$, расположенных по горизонтали; $\alpha_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right)$, $\beta_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right)$ — матрицы, состоящие соответственно из матричных ячеек

$$\alpha_{sk}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right), \ \beta_{sk}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, q-1; \ \alpha_{s\,q-1} = \beta_{s\,q-1} = 0),$$

расположенных также по горизонтали,

$$\alpha_{si}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) = (A^{-1}(\lambda))_s \left\{ \sum_{\substack{i+1 \leqslant k \leqslant q-1 \\ l \leqslant p-1}} \lambda^{m(k-1-i)} P_{kl} \frac{d^l}{dx^l} + \sum_{l=0}^{p-1} \lambda^{m(q-1-i)} P_{ql} \frac{d^l}{dx^l} \right\}, \tag{3.24}$$

$$\beta_{si}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) = (A^{-1}(\lambda))_s \left\{ \sum_{\substack{i+1 \leqslant k \leqslant q-1 \\ l \leqslant p-1}} \lambda^{m(k-1-i)} Q_{kl} \frac{d^l}{dx^l} + \sum_{l=0}^{p-1} \lambda^{m(q-1-i)} Q_{ql} \frac{d^l}{dx^l} \right\}$$

$$(i = 0, \ldots, q-2),$$

$$\alpha_{s\,q-1} = \beta_{s\,q-1} = 0,$$

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{q-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда, принимая во внимание соотношение $v^{(k)} = \lambda^{mk} v^{(0)} + \lambda^{m(k-1)}\Phi_0 + \ldots$ $\ldots + \Phi_{k-1}$, получаемое из (3.3) при $s = 0$, легко видеть, что решение

$$v(x, \lambda) = \left\| \begin{matrix} v^{(0)} \\ \vdots \\ v^{(q-1)} \end{matrix} \right\|$$

спектральной задачи (3.1)—(3.2) может быть представлено в виде:

$$v(x, \lambda) = \int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \Phi(\xi)\, d\xi + \Delta(x, \Phi, \lambda) + P(\lambda)\Phi(x), \tag{3.25}$$

где $K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)$ состоит из матричных ячеек

$$K_{ij}\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) = \lambda^{(i-1)m} G(x, \xi, \lambda) \left(\lambda^{m(q-j)}E - \sum_{\substack{j \leqslant k \leqslant q-1 \\ mk+l \leqslant p}} \lambda^{m(k-j)} A_{kl}(\xi) \frac{d^l}{d\xi^l} \right),$$

при $i = 1, 2, \ldots, q$; $j = 1, 2, \ldots, q-1$,

$$K_{iq} = \lambda^{m(i-1)}E,$$

$$\Delta(\Phi, x, \lambda) = \left\| \begin{matrix} \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \\ \lambda^m \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{m(q-1)} \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \end{matrix} \right\|,$$

$$P(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^m E & E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{m(q-2)}E & \lambda^{m(q-3)}E & \lambda^{m(q-4)}E & \cdots & E & 0 \end{matrix} \right\|;$$

нули обозначают нулевые матричные ячейки соответствующего размера. Как видно из (3.24), $\Delta(x, \Phi, \lambda)$ и $P(\lambda)\Phi(x)$ фактически не зависят от $\Phi_{q-1}(x)$.

§ 4. Вычетная формула, представляющая решение задачи (1.1)—(1.3)

В этом параграфе сохраняются обозначения §§ 1 — 3.

Теорема 5. *Пусть при условиях* 1, 2, 3, 5 § 3 *граничное условие* (1.2) *не содержит производной по времени порядка* q (*т. е.* P_{ql}, $Q_{ql} = 0$ *при* $l = 0, \ldots, p-1$) *и задача* (1.1)—(1.3) *для* $f(x,t) \in L_2\left(\int_a^b |f_k(x,t)|^2 dx < \infty\right.$ *при каждом* t *из интервала изменения* $\left.t\right)$, $\int_0^T \int_a^b |f_k(x,t)|\, dx\, dt < \infty$ *имеет решение* $u(x,t)$, *удовлетворяющее условию* 4 *теоремы* 3 *и обладающее свойствами:*

1. u, $\frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{q-1}u}{\partial t^{q-1}}$ *на интервале* $[a, b]$ *имеют производные по* x *до порядка* p, *причем производные до порядка* $p-1$ *абсолютно непрерывны по* x, *а производная порядка* p *принадлежит* $L_2[a, b]$.

2. *Производная по* t *от* $\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k \partial x^l}$ $(k = 0, \ldots, q-1,\ l = 0, 1, \ldots, p-1)$ *суммируема в двумерной области* $0 \leqslant t \leqslant T$, $a \leqslant x \leqslant b$; *сами производные* $\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k \partial x^l}$ $(k = 0, 1, \ldots, q-1;\ l = 0, \ldots, p-1)$ *абсолютно непрерывны по* t *в интервале* $[0, T]$.

Тогда это решение представимо в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{c_\nu} \lambda^{m-1} e^{\lambda^m t}\, d\lambda \left\{ \int_a^b G(x, \xi, \lambda) \left(F_0(\xi, \Phi, \lambda^m) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^t e^{-\lambda^m \tau} f(\xi, \tau)\, d\tau \right) d\xi + \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \right\}, \tag{4.1}$$

где $F_0(\xi, \Phi, \lambda^m)$ *определяется формулой* (3.8), *а* $\Delta_0(x, \Phi, \lambda)$ *есть решение 0-вспомогательной спектральной задачи, соответствующей однородной системе.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы прежде всего введем обозначения:

$$z = \left\| \begin{matrix} u^{(0)} \\ \vdots \\ u^{(q-1)} \end{matrix} \right\|, \quad F(x, t) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x, t) \end{matrix} \right\|,$$

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \begin{matrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & E \\ \sum\limits_{l=0}^{p} A_{0l}(x)\dfrac{\partial^l}{\partial x^l} & \sum\limits_{l=0}^{p-m} A_{1l}(x)\dfrac{\partial^l}{\partial x^l} & \sum\limits_{l=0}^{p-2m} A_{2l}(x)\dfrac{\partial^l}{\partial x^l} \cdots & & \sum\limits_{l=0}^{m} A_{q-1\,l}(x)\dfrac{\partial^l}{\partial x^l} \end{matrix} \right\|,$$

где нули обозначают матричные ячейки порядка n.

Легко видеть, что $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор, соответствующий правой части системы (1.5). Тогда, принимая во внимание условие теоремы ($P_{ql} = Q_{ql} = 0$), в этих обозначениях задачу (1.5)—(1.7) можно записать в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) z + F(x, t), \tag{4.2}$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left\{ (P_{0l}, \ldots, P_{q-1\,l}) \frac{\partial^l z}{\partial x^l}\bigg|_{x=a} + (Q_{0l}, \ldots, Q_{q-1\,l}) \frac{\partial^l z}{\partial x^l}\bigg|_{x=b} \right\} = 0, \tag{4.3}$$

$$z(x, 0) = \Phi(x). \tag{4.4}$$

Точно так же соответствующая спектральная задача (3.1) — (3.2) примет вид:

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) v - \lambda^m v = \Phi(x), \tag{4.5}$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left\{ (P_{0l}, \ldots, P_{q-1\,l}) \frac{\partial^l v}{\partial x^l}\bigg|_{x=a} + (Q_{0l}, \ldots, Q_{q-1\,l}) \frac{d^l v}{dx^l}\bigg|_{x=b} \right\} = 0. \tag{4.6}$$

Для решения v спектральной задачи (4.5)—(4.6) в § 3 была получена формула (3.25). Согласно этой формуле, для любой вектор-функции v, принадлежащей области определения дифференциального оператора, определяемого задачей (4.5)—(4.6), имеет место тождество

$$v(x)=\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}\right)\left(L\left(\xi, \frac{d}{d\xi}\right)-\lambda^m E\right)v(\xi)\,d\xi+$$

$$+P(\lambda)\left(L\left(x, \frac{d}{dx}\right)-\lambda^m E\right)v(x)+\Delta\left(x, \left(L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^m E\right)\Phi(x), \lambda\right). \quad (4.7)$$

Пусть теперь λ_ν^m — полюс порядка $\varkappa_\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots$) вектор-функции $v(x, \lambda)$, определяемой формулой (3.25).

Обозначим через $F_{k\nu}(x)$ интеграл

$$K_{k\nu}(F)=F_{k\nu}(x)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}\right)F(\xi)\,d\xi+\Delta(x, F, \lambda)\right\}, \quad (4.8)$$

определяемый для любой достаточно гладкой вектор-функции $F(x)$ на $[a, b]$, где c_ν — замкнутый контур, окружающий только один полюс λ_ν вектор-функции $\lambda^{m-1}v(x, \lambda)$.

Пусть $u^{(0)}=u(x, t)$ — решение задачи (1.1)—(1.3), обладающее приведенными в формулировке теоремы свойствами 1 и 2. Тогда, очевидно, $z(x, t)$ есть решение задачи (4.2)—(4.4), обладающее соответствующими свойствами.

Следовательно, применяя оператор $K_{k\nu}$ к обеим частям (4.2), получаем (возможность применения оператора $K_{k\nu}$ обеспечивается условиями 1 и 2):

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)\frac{\partial}{\partial t}z(\xi, t)\,d\xi+\Delta\left(x, \frac{\partial}{\partial t}z, \lambda\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)L\left(\xi, \frac{d}{d\xi}\right)z(\xi, t)\,d\xi+\right.$$

$$\left.+\Delta\left(x, L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)z, \lambda\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)F(\xi, t)\,d\xi+\Delta(x, F, \lambda)\right\}.$$

В силу того, что все столбцовые компоненты $F(x, t)$, кроме последнего столбца, равны нулю, имеем: $\Delta(x, F, \lambda)=0$. В самом деле, как показывают формулы (3.24), $\Delta(x, F, \lambda)$ от последней столбцовой компоненты не зависит.

Далее, как это видно из формул (3.23) и (3.25), зависимость $\Delta\left(x, \frac{\partial z}{\partial t}, \lambda\right)$ от $\frac{\partial z}{\partial t}$ линейна и, следовательно, в силу условия 2 теоремы, дифференцирование по t может быть вынесено за знак интеграла. Тогда, если принять во внимание аналитичность $P(\lambda)$ во всей λ-плоскости, последнее тождество может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)z(\xi,t)\,d\xi+\Delta(x,z,\lambda)\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)\left(L\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)-\lambda^{m}E\right)z(\xi,t)+\right.$$

$$\left.+P(\lambda)\left(L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^{m}E\right)z(x,t)+\Delta\left(x,\left(L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^{m}E\right)z,\lambda\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+2)-1}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)z(\xi,t)\,d\xi+\Delta(x,z,\lambda)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)F(\xi,t)\,d\xi.$$

Согласно (4.7), при обозначении (4.8) последнее тождество примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}z_{k\nu}(x,t)=z_{k+1\,\nu}(x,t)+F_{k\nu}(x,t). \qquad (4.9)$$

Таким же образом, применяя оператор $K_{k\nu}$ к обеим частям начального условия (4.4), получаем:

$$z_{k\nu}(x,0)=\Phi_{k\nu}(x). \qquad (4.10)$$

Из тождества

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m-1}(\lambda^{m}-\lambda_\nu^{m})^{\varkappa_\nu}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)z(\xi,t)\,d\xi+\Delta(x,\xi,\lambda)\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\varkappa_\nu}\binom{\varkappa_\nu}{k}(-\lambda_\nu^{m})^{\varkappa_\nu-k}z_{k+1\,\nu}(x,t)=0,$$

очевидно, можно выразить $z_{\varkappa_\nu\nu}(x,t)$ через

$$z_{0\nu}(x,t),\ z_{1\nu}(x,t),\ \ldots,\ z_{\varkappa_\nu-1\,\nu}(x,t). \qquad (4.11)$$

Следовательно, (4.11) есть решение задачи Коши, получаемой из (4.9)—(4.10) при $k=0,\ldots,\varkappa_\nu-1$. Принимая во внимание условия теоремы, нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$z_{k\nu0}(x,t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)\left(\Phi(\xi)\,e^{\lambda^{m}t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{0}^{t}e^{\lambda^{m}(t-\tau)}F(\xi,\tau)\,d\tau\right)d\xi+e^{\lambda^{m}t}\Delta(x,\Phi,\lambda)\right\} \qquad (4.12)$$

является решением задачи Коши, получаемой из (4.9) — (4.10) при $k = 0, 1, \ldots, \varkappa_\nu - 1$. В силу единственности решения задачи Коши заключаем, что

$$z_{k\nu 0}(x, t) = z_{k\nu}(x, t) \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa_\nu - 1; \ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Применяя теорему 3 к решению $z(x, t)$ задачи (4.2)—(4.4), согласно (4.12) и (4.13) получаем:

$$z(x, t) = \sum_\nu z_{0\nu}(x, t) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_\nu \int_{c_\nu} \lambda^{m-1} d\lambda \left\{ \int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \left(\Phi(\xi) e^{\lambda^m t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t e^{\lambda^m (t-\tau)} F(\xi, \tau)\, d\tau \right) d\xi + e^{\lambda^m t} \Delta(x, \Phi, \lambda) \right\}. \tag{4.14}$$

Теперь для завершения доказательства теоремы заметим, что, согласно введенным обозначениям, $u(x, t) = u^{(0)}(x, t)$ — первая столбцовая компонента вектор-функции $z(x, t)$, для получения которой из (4.14) достаточно выделить первую столбцовую компоненту подынтегрального выражения. А для этого, очевидно, первую строку матрицы $K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)$ следует применить к столбцу

$$\Phi(\xi) e^{\lambda^m t} + \int_0^t e^{\lambda^m (t-\tau)} F(\xi, \tau)\, d\tau,$$

записывая его через столбцовые компоненты

$$\Phi_k(\xi) e^{\lambda^m t} + \int_0^t e^{\lambda^m (t-\tau)} F_k(\xi, \tau)\, d\tau \quad (k = 0, \ldots, q-1)$$

и принимая во внимание, что $F_k(\xi) = 0$ при $k = 0, \ldots, q-2$ и $\Delta(x, F, \lambda)$ есть столбец, состоящий из элементов $\Delta_0, \lambda^m \Delta_0, \ldots, \lambda^{m(q-1)} \Delta_0$.

Таким образом, выделяя $u^{(0)}$, из (4.14) получаем формулу (4.1), которую и нужно было вывести.

Примечание 1. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что формула (4.1) дает формальное решение задачи (1.1)—(1.3) для более общего случая, когда $P_{ql}, Q_{ql} \neq 0$. Но в этом общем случае, как видно из (1.5)—(1.7), замена (1.4) не приводит к задаче с разделяющимися переменными x и t, и поэтому метод доказательства теоремы 5 не позволяет доказать такую теорему для этого общего случая ($P_{ql}, Q_{ql} \neq 0$).

Примечание 2. При условии достаточной гладкости данных задачи (1.1)—(1.3), пользуясь методом работы [13], для широкого класса задач можно доказать, что функция, определяемая формулой (4.1), является решением задачи (1.1)—(1.3).

Пример. В подземной гидромеханике в связи с исследованием гидродинамических параметров пласта возникает смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \delta c^2 \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

при граничных условиях

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{x=a} = 0, \quad u(b, t) = \beta\,*$$

и начальных условиях

$$u(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi_1(x),$$

где δ, c, α, β — постоянные.

Ввиду малости величины $\frac{1}{c^2}$ в книге И. А. Чарного ([18], стр. 118—132) решается соответствующая смешанная задача для уравнения теплопроводности.

Нетрудно убедиться в том, что если $\Phi_0''(x)$, $\Phi_1(x)$ непрерывны на интервале $[a, b]$ и $\Phi_0(b) = 0$, то для этой задачи все условия теоремы 5 выполняются. Поэтому достаточно гладкое решение $u(x, t)$ этой задачи представляется формулой (4.1), причем $m = 1$, $p = q = 2$, $F_0(x, \Phi, \lambda) = (\lambda + \delta c^2)\Phi_0(x) + \Phi_1(x)$, $G(x, \xi, \lambda)$, $\Delta(x, \Phi, \lambda)$ выражаются через функции Бесселя.

§ 5. Вычетная формула, представляющая решение смешанной задачи с разделяющимися переменными для системы уравнений с переменными по t коэффициентами

В этом параграфе показывается, что вычетный метод, в отличие от метода трансформации Лапласа, применим также и к смешанным задачам для уравнений с переменными по t коэффициентами. Результаты этого параграфа обобщают соответствующие результаты работы [12] на случай системы уравнений.

Рассмотрим смешанную задачу: найти решение системы

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x, t), \tag{5.1}$$

при граничном условии

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left\{ \alpha_j \left. \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right|_{x=a} + \beta_j \left. \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right|_{x=b} \right\} = 0 \tag{5.2}$$

и начальных условиях

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \Phi_k(x), \tag{5.3}$$

где

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{k=0}^{q} B_k(t) \frac{\partial^{q-k}}{\partial t^{q-k}},$$

* Очевидно, можно полагать $\beta = 0$.

$B_k(t)$ — n-мерные квадратные матрицы, составленные из непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций от t ($\det B_0(t) \neq 0$ на этом интервале);

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=0}^{p} A_k(x) \frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}},$$

$A_k(x)$ — n-мерные квадратные матрицы, составленные из непрерывных на $[a, b]$ функций от x, причем $\det A_0(x) \neq 0$ на этом интервале; α_j, β_j — постоянные матрицы размера $np \times n$; $f(x, t)$, $\Phi_k(x)$ — вектор-функции соответствующего размера.

Задачу нахождения решения системы

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) v - \lambda^p v = f(x) \tag{5.4}$$

при граничном условии

$$\sum_{j=0}^{p-1} \left\{ \alpha_j \frac{d^j v}{dx^j}\bigg|_{x=a} + \beta_j \frac{d^j v}{dx^j}\bigg|_{x=b} \right\} = 0 \tag{5.5}$$

назовем *спектральной задачей, соответствующей задаче* (5.1)—(5.3).

Сначала займемся решением следующей задачи Коши:

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) Y - \mu Y = f(\xi, t) \quad (\mu = \lambda^p), \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^k Y}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \Phi_k(\xi). \tag{5.7}$$

Известно (см. [9]), что теория систем дифференциальных уравнений вида (5.4) аналогична теории одного линейного уравнения.

Пусть $Y_1(t, \mu), \ldots, Y_q(t, \mu)$ — система независимых решений ($Y_k(t, \mu)$ — квадратные матрицы порядка n) однородной системы, соответствующей системе (5.6), удовлетворяющих начальным условиям

$$\frac{\partial^k Y_j}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \begin{cases} E & \text{при } k = j-1, \\ 0 & \text{при } k \neq j-1. \end{cases}$$

Обозначим через $\delta(t, \lambda)$ определитель

$$\delta(t, \lambda) = \begin{vmatrix} Y_1^{(q-1)}(t, \mu) & \ldots & Y_q^{(q-1)}(t, \mu) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_1(t, \mu) & \ldots & Y_q(t, \mu) \end{vmatrix}.$$

Пусть $Z_\nu(t, \mu)$ обозначает матрицу, полученную транспонированием матрицы, оставленной из алгебраических дополнений элементов матрицы $Y_\nu(t, \mu)$

$\nu=1, \ldots, q$) в определителе $\delta(t, \mu)$. Тогда решение задачи (5.6)—(5.7) представляется формулой:

$$Y(t, \lambda)=\sum_{k=1}^{q} Y_k(t, \mu) \Phi_k(\xi)+\int_0^t K(t, \tau, \mu) f(\xi, \tau) d\tau,$$

где

$$K(t, \tau, \lambda)=\sum_{k=1}^{q} \frac{Y_k(t, \mu) Z_k(t, \mu)}{\delta(t, \mu)} B_0^{-1}(\tau).$$

Теперь легко может быть доказана

Теорема 6. *Пусть условия теоремы* 4 *выполнены для спектральной задачи* (5.4)—(5.5)*, *оператор* $M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ *перестановочен с матрицей Грина* $G(x, \xi, \mu)$ *спектральной задачи* (5.4)—(5.5) *и задача* (5.1)—(5.3) *для* $f(x, t) \in L_2$,

$$\int_0^T \int_a^b \mid f_k(x, t) \mid dx\, dt<\infty \quad (k=1, \ldots, n)$$

имеет решение $u(x, t)$, *обладающее свойствами*:

1. $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}$ *абсолютно непрерывны по* t *в* $[0, T]$ *при* $a<x<b$ *и ограничены в области* $a<x<b$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

2. $\frac{\partial^q u}{\partial t^q}$ *абсолютно интегрируема по области* $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

3. *На отрезке* $[a, b]$ $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}$ *абсолютно непрерывны при* $t \in[0, T]$ *и* $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}$ *суммируема.*

Тогда $u(x, t)$ *представимо формулой*:

$$u(x, t)=-\frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{c_\nu} d\mu \int_a^b G(x, \xi, \mu)\left\{Y_k(t, \mu) \Phi_k(\xi)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t K(t, \tau, \mu) f(\xi, \tau) d\tau\right\} d\xi, \tag{5.8}$$

где c_ν — *замкнутый контур, окружающий только один полюс* μ_ν — *матрицы Грина* $G(x, \xi, \mu)$ *и сумма по* ν *распространена на все полюсы этой матрицы.*

* Для задачи (5.4)—(5.5) в частном случае, когда все полюсы матрицы Грина суть простые нули характеристического определителя, теорема разложения доказывается в [9].

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение, обладающее перечисленными в формулировке теоремы свойствами. Тогда, аналогично тому как это мы делали в ходе доказательства теоремы 5, принимая во внимание условия теоремы и применяя оператор

$$K_{k\nu}(F) \equiv F_{k\nu}(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{c_\nu} \mu^k \int\limits_a^b G(x, \xi, \mu) F(\xi) d\xi$$

к обеим частям (5.1)—(5.3), приходим к тождествам:

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_{k\nu}(x, t) = u_{k+1\,\nu}(x, t) + f_{k\nu}(x, t), \tag{5.9}$$

$$u_{k\nu}(x, 0) = \Phi_{k\nu}(x). \tag{5.10}$$

Принимая во внимание условия теоремы и (5.6), (5.7), непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что функция

$$u_{k\nu 0}(x, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{c_\nu} \lambda^k d\lambda \int\limits_a^b G(x, \xi, \lambda) \Big\{ \sum_{k=1}^{q} Y_k(t, \lambda) \Phi_k(\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^t K(t, \tau, \lambda) f(\xi, \tau) d\tau \Big\} d\xi$$

является решением задачи (5.9)—(5.10). Из последнего тождества, применяя теорему 4, получаем формулу (5.8), которую и нужно было вывести.

Из теорем 5 и 6 следует, что решения задач (1.1)—(1.3) и (5.1)—(5.3) обладающие свойствами, перечисленными в формулировках этих теорем, единственны.

Пример. Пусть имеем смешанную задачу:

$$p_0(t) \frac{\partial u}{\partial t} + p_1(t) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0} - 2 \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=1} = 0 \quad (k = 0, 1),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

с достаточно гладкими $p_i(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$.

Ввиду того, что коэффициенты $p_i(t)$ зависят от t, к этой задаче метод трансформации Лапласа непосредственно не применим. Что касается обычного метода Фурье, то он не применим, так как соответствующая спектральная задача — не самосопряженная.

Изложенный в этом параграфе метод позволяет эффективно построить решение этой задачи:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\,x}\int_0^1 \{17\,\mathrm{ch}(-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi +$$

$$+ 3\,\mathrm{sh}(-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi\}\, T(t,\xi,-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})x}\int_0^1 \{11\,\mathrm{ch}(\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi +$$

$$+ 3\,\mathrm{sh}(\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi\}\, T(t,\xi,\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\,d\xi,$$

где

$$T(t,\xi,\lambda) = \varphi(\xi)\exp\left\{\int_0^t \frac{\lambda - p_1(\tau)}{p_0(\tau)}\,d\tau\right\} +$$

$$+\int_0^t \frac{f(\xi,\tau)}{p_0(\tau)}\exp\left\{\int_\tau^t \frac{\lambda - p_1(\tau_1)}{p_0(\tau_1)}\,d\tau_1\right\}d\tau.$$

(Поступило в редакцию 27/XI 1956 г.)

Литература

1. G. D. Birkhoff, On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations, containing a parameter, Trans. Amer. Math. Soc., **9** (1908), 219—231.
2. G. D. Birkhoff, Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **9** (1908), 373—395.
3. G. D. Birkhoff, R. E. Langer, The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts and Sciences, **58** (1923), 51—128.
4. H. Geppert, Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden, Math. Zeitschr., **20** (1924), 29—94.
5. A. L. Cauchy, Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique, Paris, 1827.
6. A. L. Cauchy, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy (II), v. VII, Paris, 1827.
7. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, т. **77**, № **1** (1951), 11—14.
8. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
9. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
10. А. И. Плеснер, Спектральная теория линейных операторов. I, Успехи матем. наук, вып. **IX** (1941), 3—125.
11. H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rend. Pal., **8** (1894), 57—156.

12. М. Л. Расулов, Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений, Матем. сб., **30 (72)** (1952), 509—528.
13. М. Л. Расулов, Об одной задаче подземной гидромеханики, Научные записки Львовского политехн. ин-та, вып. **38**, серия физ.-мат., № **2** (1956), 66—89.
14. М. Л. Расулов, Об одной формуле разложения произвольной функции, ДАН СССР, т. **119**, № **3** (1958), 450—453.
15. М. Л. Расулов, Вычетный метод решения смешанных задач и некоторые с ним связанные формулы разложения, ДАН СССР, т. **120**, № **1** (1958), 33—36.
16. Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды, Петроград, 1917.
17. J. Tamarkin, Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitschr., **27** (1928), 1—54.
18. И. А. Чарный, Подземная гидромеханика, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.

О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной

А. Б. Васильева (Москва)

Изучению предельных свойств решения задачи с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, т. е. уравнений, вырождающихся при значении параметра, равном нулю, посвящен целый ряд работ (например, [1]—[10] и другие), в которых рассматривались различные типы уравнений и изучались различные предельные свойства решений.

Одной из первых работ этого направления была работа А. Н. Тихонова [1], в которой рассматривалась система

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{dz}{dt} &= F(z, x, t), \\ \frac{dx}{dt} &= f(z, x, t), \\ z\big|_{t=0} = z^0, &\quad x\big|_{t=0} = x^0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр. Полагая в (1) $\mu = 0$, получим вырожденную систему уравнений

$$0 = F(z, x, t), \tag{2_1}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(z, x, t). \tag{2_2}$$

Естественно поставить вопрос: при каких условиях решение $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ системы (1) будет при $\mu \to 0$ стремиться к некоторому решению $z(t)$, $x(t)$ вырожденной системы (2)? Чтобы определить однозначно это решение, надо задать начальное условие для $x(t)$ и указать способ выбора корня $z = \varphi(x, t)$ уравнения (2_1) в случае, если это уравнение имеет несколько корней. В работе [1] содержится ответ на поставленный вопрос. Приведем здесь некоторые определения и результаты этой работы, необходимые для дальнейшего.

Назовем корень $z = \varphi(x, t)$ уравнения (2_1) *устойчивым в некоторой области* D *пространства* (x, t), если $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(x, t), x, t) < 0$ для точек (x, t) из $\overline{D}$. Назовем *областью влияния устойчивого корня* $z = \varphi(x, t)$ совокупность точек (z^0, x^0, t^0), для которых $\operatorname{sign} F(z, x^0, t^0) = \operatorname{sign} F(z^0, x^0, t^0)$ для всех z в промежутке $z^0 \gtrless z \gtrless \varphi(x^0, t^0)$, т. е. $F(z, x^0, t^0) > 0$ при $z^0 < \varphi(x^0, t^0)$ и $F(z, x^0, t^0) < 0$ при $z > \varphi(x^0, t^0)$.

В работе [1] доказана следующая

Теорема. *Если начальная точка* $(z^0, x^0, 0)$, *определяющая рассматриваемое решение системы* (1), *лежит в области влияния некоторого устойчи-*

вого корня $z=\varphi(x, t)$ уравнения (2_1), то при $\mu\to 0$ имеют место предельные равенства

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\mu\to 0} z(t, \mu)=\bar z(t)=\varphi(\bar x(t), t) \quad 0<t\leqslant T,\\
&\lim_{\mu\to 0} x(t, \mu)=\bar x(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где $\bar z(t)$, $\bar x(t)$ — решение вырожденной системы (2), соответствующее устойчивому корню $z=\varphi(x, t)$ и удовлетворяющее начальному условию $\bar x|_{t=0}=x^0$; T — некоторая величина, не зависящая от μ.

В более поздней работе [2] сделано то же самое для систем более общего вида.

Настоящая работа посвящена изучению предельных свойств производных по μ от решения системы (1), в основном доказательству того факта, что этим производным также соответствуют вполне определенные предельные функции при $\mu\to 0$. Эта задача была частично решена раньше (см. [3], где рассматривались производные первого порядка). Изучение производных по μ от решения системы (1) дает возможность построить асимптотические формулы для этого решения с ошибкой любого порядка малости по параметру μ.

Первые производные по μ от решения системы (1) z_μ, x_μ удовлетворяют системе уравнений, получающейся дифференцированием (1):

$$
\begin{aligned}
&\mu\frac{d}{dt}z_\mu+\frac{d}{dt}z=F_z(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,z_\mu+F_x(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,x_\mu,\\
&\frac{d}{dt}x_\mu=f_z(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,z_\mu+f_x(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,x_\mu,\\
&z_\mu|_{t=0}=0, \quad x_\mu|_{t=0}=0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Соответствующая вырожденная система имеет вид

$$
0=F_z(\bar z, \bar x, t)\bar z_\mu+F_x(\bar z, \bar x, t)\bar x_\mu-\frac{d}{dt}\bar z, \tag{5_1}
$$

$$
\frac{d}{dt}\bar x_\mu=f_z(\bar z, \bar x, t)\bar z_\mu+f_x(\bar z, \bar x, t)\,\bar x_\mu. \tag{5_2}
$$

В работе [4] показано, что

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\mu\to 0} z_\mu=\bar z_\mu,\\
&\lim_{\mu\to 0} x_\mu=\bar x_\mu
\end{aligned}
\quad 0<t\leqslant T, \tag{6}
$$

где $\bar z_\mu$, $\bar x_\mu$ — решение вырожденной системы (4) (о выборе корня уравнения (5_1) здесь вопрос не возникает, так как этот корень — единственный и устойчивый), удовлетворяющее специальному начальному условию:

$$
\bar x_\mu|_{t=0}=\bar x_\mu^0=\int_0^\infty [f(z_0(\tau), x^0, 0)-f(\varphi(x^0, 0), x^0, 0)]\,d\tau. \tag{7}
$$

Здесь $z_0(\tau)$ — решение уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz_0}{d\tau}=F(z_0, x^0, 0),\\
&z_0|_{\tau=0}=z^0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

В предельном переходе (6), в отличие от (3), новым моментом является то, что если начальные значения x и $\bar{x}$ совпадают ($x|_{t=0}=\bar{x}|_{t=0}=x^0$), то начальные значения $\dot{x}_\mu$ и $\bar{x}_\mu$ различны, так как $\bar{x}_\mu^0$, вообще говоря, нулю не равно. Можно сказать, что функция x_μ при $\mu \to 0$ имеет в пределе скачок в начальной точке $t=0$, напоминающий, хотя и не вполне аналогичный, скачок функции $z(t, \mu)$ в той же начальной точке.

При изучении производных по μ n-го порядка от решения $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ системы (1) будем предполагать, что функция F обладает непрерывными частными производными до $n+1$-го порядка включительно, а функция f — таковыми же до n-го порядка включительно. Производные z_{μ^n}, x_{μ^n} удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\mu \frac{d}{dt} z_{\mu^n} - n \frac{d}{dt} z_{\mu^{n-1}} = F_{\mu^n} = F_n(z, x, t, z_\mu, x_\mu, \ldots, z_{\mu^n}, x_{\mu^n}),\\
&\frac{d}{dt} x_{\mu^n} = f_{\mu^n} = f_n(z, x, t, z_\mu, x_\mu, \ldots, z_{\mu^n}, x_{\mu^n}),\\
&z_{\mu^n}|_{t=0} = 0, \quad x_{\mu^n}|_{t=0} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где F_n, f_n — некоторые функции от $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$, их производных до n-го порядка и t. Заметим, что группа производных порядка n входит линейно; $z, x, \ldots, z_{\mu^{n-1}}, x_{\mu^{n-1}}$ считаются известными функциями t, μ.

Отправляясь от предельных функций $\bar{z}_\mu$, $\bar{x}_\mu$, существование которых было доказано в [4], можно построить вырожденную систему для производных второго порядка и показать, что для производных второго порядка имеют место предельные равенства, аналогичные (7), причем значение $\bar{x}_{\mu^2}^0$ выражается формулой, аналогичной (8) (имеет место скачок функции x_{μ^2} в точке $t=0$). Процесс можно продолжить. Считая, наконец, известными предельные функции для $z, x, \ldots, z_{\mu^{n-1}}, x_{\mu^{n-1}}$, можно построить вырожденную систему уравнений для производных n-го порядка

$$\begin{aligned}
&0 = F_n(\bar{z}, \bar{x}, t, \bar{z}_\mu, \bar{x}_\mu, \ldots, \bar{z}_{\mu^n}, \bar{x}_{\mu^n}) - n\frac{d}{dt}\bar{z}_{\mu^{n-1}},\\
&\frac{d}{dt}\bar{x}_{\mu^n} = f_n(\bar{z}, \bar{x}, t, \bar{z}_\mu, \bar{x}_\mu, \ldots, \bar{z}_{\mu^n}, \bar{x}_{\mu^n})
\end{aligned} \tag{10}$$

и обнаружить существование предельного перехода, аналогичного (7), также и для производных n-го порядка. Чтобы написать формулу для скачка x_{μ^n} при $t=0$, рассмотрим вспомогательную систему уравнений, получаемую из (1) заменой $\frac{t}{\mu} = \tau$:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dz}{d\tau} = F(z, x, \mu\tau),\\
&\frac{dx}{d\tau} = \mu f(z, x, \mu\tau),\\
&z|_{\tau=0} = z^0, \quad x|_{\tau=0} = x^0.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Назовем **формальными степенными рядами** для z и x ряды

$$\begin{aligned}
z &= z_0(\tau) + \mu z_1(\tau) + \ldots,\\
x &= x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \ldots,
\end{aligned} \tag{12}$$

коэффициенты которых определяются в результате подстановки (12) в (11). При подстановке рядов в правые части (11) последние должны приводиться также к форме степенных рядов, например, F нужно представить в виде $F=F_0+\mu F_1+\ldots,$ где

$$F_i=F_i(z_0, x_0,\ldots, z_i, x_i)=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial\mu^i}F(z_0+\mu z_1+\ldots, x_0+\mu x_1+\ldots, \mu\tau)\right]_{\mu=0}.$$

Ниже (§ 2) будет показано, что условие устойчивости и условия гладкости, наложенные на F и f, позволяют фактически определить по крайней мере n членов каждого ряда (12), а это уже дает возможность получить n членов разложения функции $f(z, x, \mu\tau)$. Обозначим n — 1-ый член этого разложения через $f_{n-1}(\tau)$.

Формулируем теперь основную теорему, которая будет доказана в настоящей работе.

Теорема. *Предельные значения* $\bar{z}_{\mu^n}, \bar{x}_{\mu^n}$ *производных n-го порядка по параметру* μ *от решения* $z(t, \mu), x(t, \mu)$ *системы* (1) *существуют и удовлетворяют вырожденной системе* (10) *при начальном условии*

$$\bar{x}_{\mu^n}|_{t=0}=\bar{x}^0_{\mu^n}=(-1)^n\int_0^\infty \tau^n f^{(n)}_{n-1}(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Заметим, что для $n=1$ формула (13) совпадает с (7). Действительно, согласно (13) для $n=1$

$$\bar{x}^0_\mu=-\int_0^\infty \tau f_0'(\tau)\,d\tau=-\tau[f_0(\tau)-f_0(\infty)]\big|_0^\infty+\int_0^\infty[f_0(\tau)-f_0(\infty)]\,d\tau=$$

$$=\int_0^\infty[f(z_0(\tau), x^0, 0)-f(\varphi(x^0, 0), x^0, 0)]\,d\tau.$$

Нижеследующее изложение разбивается на несколько параграфов: § 1 — сводка некоторых специальных обозначений, применяемых в настоящей работе, и вспомогательных теорем, доказанных в предыдущих работах; § 2 — новые вспомогательные теоремы и оценки; § 3 — доказательство основной теоремы.

§ 1

В настоящей статье будут приняты некоторые специальные обозначения и сокращения. Частично они использовались в предыдущей статье [4].

Все постоянные, не зависящие от μ, обозначаются одной и той же буквой C.

Равенство $f=[\Phi_k]$, относящееся к функции f, зависящей от μ (может быть, через $z(t, \mu), x(t, \mu)$, их производные и т. д.), означает, что $|f|<\Phi_k$, где под Φ_k подразумевается сумма конечного числа слагаемых вида $C\frac{t^\alpha}{\mu^\beta}$ $(\alpha-\beta=k,\ \alpha>0)$.

В дальнейшем будем пользоваться некоторыми простейшими свойствами Φ_k:

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)}\ \Phi_k\Phi_l=\Phi_{k+l},\\ &\text{б)}\ \frac{\Phi_k}{\mu}=\Phi_{k-1},\\ &\text{в)}\ \Phi_k t=\Phi_{k+1},\\ &\text{г)}\ \int_0^t\Phi_k\,dt=\Phi_{k+1},\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

д) для $t<1$ $\Phi_k+\Phi_{k+1}=\Phi_k$ (или $<\Phi_k$), так как от замены множителя t в каждом слагаемом Φ_{k+1} единицей Φ_{k+1} обращается в Φ_k, которое, очевидно, больше прежнего Φ_{k+1}.

Выше были введены в рассмотрение формальные ряды (12)

$$z=z_0(\tau)+\mu z_1(\tau)+\ldots \tag{1.2}$$

(аналогично для x).

Обозначим $\mu^i z_i(\tau)$ через $\overset{(i)}{z}$. Частичную сумму ряда (1.2) номера n обозначим через $(z)_n$:

$$(z)_n=\overset{(0)}{z}+\overset{(1)}{z}+\ldots+\overset{(n)}{z}.$$

Предполагая, что функции $z_i(\tau)$, $x_i(\tau)$ можно определить (это будет сделано в § 2 для $i\leqslant n$, как уже указывалось выше), отметим некоторые используемые в дальнейшем свойства $\overset{(i)}{z}$ и $(z)_i$. Условимся применять равенство $f=O_k$ для обозначения того, что порядок малости величины $f(\tau,\mu)$ (τ и μ — независимые переменные) относительно μ есть k. Например, $\overset{(n)}{z}=O_n$. Для производной по μ от этой функции, рассматриваемой как сложная функция μ, будем иметь, учитывая, что $\frac{d}{d\mu}=\frac{\partial}{\partial\mu}-\frac{\tau}{\mu}\frac{\partial}{\partial\tau}$:

$$\overset{(n)}{z}_\mu=(\mu^n z_n(\tau))_\mu=n\,\mu^{n-1}z_n+\mu^n z_n'\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)=O_{n-1},$$

и для производной k-го порядка:

$$\overset{(n)}{z}_{\mu^k}=O_{n-k}.$$

Наконец, равенство $f=S_k$ будет означать, что член наиболее высокого порядка малости по μ в выражении f есть O_k, а равенство $f=I_k$ будет означать, что член наинизшего порядка малости по μ в выражении для f есть O_k. Очевидно,

$$(z)_n=S_n,\quad (z)_n=I_0;$$

$$(z)_{n\mu^k}=S_{n-k},\quad (z)_{n\mu^k}=I_{-k}.$$

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют z_i, x_i; $\overset{(i)}{z}$, $\overset{(i)}{x}$. При составлении уравнений для z_i, x_i надо ряды (12) подставить в правые части (11) и полученные выражения представить также в виде рядов

$$F=F_0+\mu F_1+\ldots,$$

$$f=f_0+\mu f_1+\ldots.$$

Коэффициенты F_i, f_i являются функциями коэффициентов рядов (12) и τ:

$$F_i=F_i(\tau,z_0,x_0,\ldots,z_i,x_i)=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial\mu^i}F(z_0+\mu z_1+\ldots,x_0+\mu x_1+\ldots,\mu\tau)\right]_{\mu=0}.$$

Отметим, что z_i, x_i входят линейно с множителями $F_z(z_0, x_0, 0) = F_{z0}$ и $F_x(z_0, x_0, 0) = F_{x0}$ соответственно. Будем употреблять обозначения:

$$F_i(\tau, z_i, x_i) = F_i(\tau, z_0(\tau), x_0(\tau), \ldots, z_{i-1}(\tau), x_{i-1}(\tau), z_i, x_i),$$
$$F_i(\tau) = F_i(\tau, z_0(\tau), x_0(\tau), \ldots, z_i(\tau), x_i(\tau)).$$

F_i без указания аргументов будем употреблять во всех случаях, если по смыслу ясно, с какими аргументами имеем дело.

Уравнения, которым удовлетворяют z_0, x_0, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_0}{d\tau} = F(z_0, x_0, 0), \\ &\frac{dx_0}{d\tau} = 0, \\ &z_0\,|_{\tau=0} = z^0, \quad x_0\,|_{\tau=0} = x^0. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Для z_p, x_p $(p = 1, 2, \ldots)$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_p}{d\tau} = F_p(\tau, z_p, x_p), \\ &\frac{dx_p}{d\tau} = f_{p-1}(\tau), \\ &z_p\,|_{\tau=0} = 0 \quad x_p\,|_{\tau=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Заметим, что начальные значения производных по τ любого порядка от функций z_p, x_p представляют собой некоторые постоянные, не зависящие от μ.

$\overset{(0)}{z}$, $\overset{(0)}{x}$ совпадают с z_0, x_0. Функции $\overset{(p)}{z}$, $\overset{(p)}{x}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют уравнениям (за независимое переменное удобно взять t)

$$\mu \frac{d}{dt}\overset{(p)}{z} = \overset{(p)}{F}(t, \overset{(p)}{z}, \overset{(p)}{x}), \tag{1.5'}$$

$$\frac{d}{dt}\overset{(p)}{x} = \overset{(p-1)}{f}(t). \tag{1.5''}$$

Для $p = 1$ эти уравнения выписаны в п. 1 § 2. Начальные условия для этих функций, так же как и для z_p, x_p,— нулевые, за исключением $\overset{(0)}{z}$, $\overset{(0)}{x}$, совпадающих с z_0, x_0. Заметим, что производные по μ любого порядка от $\overset{(p)}{z}$, $\overset{(p)}{x}$, z_p, x_p удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Для $(z)_p$, $(x)_p$ имеет место система уравнений

$$\mu \frac{d}{dt}(z)_p = (F)_p, \qquad \frac{d}{dt}(x)_p = (f)_{p-1}. \tag{1.6}$$

Остановимся, наконец, на двух вспомогательных теоремах, доказанных раньше [4], которые будут существенно использованы в настоящей работе.

Для оценки решения линейного однородного уравнения $\mu \frac{du}{dt} = F_z u$ (а следовательно, и соответствующего неоднородного) употребляется неравенство

$$e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t} F_z(z(t,\mu), x(t,\mu), t)\,dt} < e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}} \quad (\varkappa > 0), \tag{1.7}$$

вытекающее из условия устойчивости $F_z(\varphi(x, t), x, t) < 0$. Аргументами F_z могут быть, кроме $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$, t, также $z_0(\tau)$, x^0, 0 и т. п. (см. [4], гл. I, лемма 1).

Для оценки решения линейной системы вида *

$$\mu \frac{du}{dt} = F_z u + F_x v + \varphi,$$

$$\frac{dv}{dt} = f_z u + f_x v + \psi$$

служит

Лемма ([4], гл. I, лемма 2). *Любое решение системы*

$$\mu \frac{du}{dt} = F_z u + \mu F_x v,$$

$$\mu \frac{dv}{dt} = f_z u + \mu f_x v,$$

ограниченное по модулю при $t = 0$, *ограниченно по модулю на всем отрезке* $0 \leqslant t \leqslant T$.

В настоящей работе будет, как и в [4], употребляться символ $A \cong B$ для обозначения того, что разность $A - B$ бесконечно мала при $\mu \to 0$. То же будет обозначать запись $A - B = \varepsilon(\mu) = \varepsilon$.

§ 2

1. Исследуем функции $\overset{(p)}{z}(t, \mu)$, $\overset{(p)}{x}(t, \mu)$ и их производные по μ.

$\overset{(p)}{z}, \overset{(p)}{x}$ удовлетворяют уравнениям (1.5). Выпишем эти уравнения сначала для номеров $p = 0, 1$. Для $p = 0$ система уравнений получается из (1.3) заменой $\tau = \frac{t}{\mu}$, так как $\overset{(0)}{z} = z_0$, $\overset{(0)}{x} = x_0$,

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{d\overset{(0)}{z}}{dt} &= F(\overset{(0)}{z}, \overset{(0)}{x}, 0), \\ \frac{d\overset{(0)}{x}}{dt} &= 0, \\ \overset{(0)}{z}\Big|_{t=0} = z^0, &\quad \overset{(0)}{x}\Big|_{t=0} = x^0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Отсюда видно, что $\overset{(0)}{x} \equiv x^0$, поэтому (2.1) принимает вид

$$\mu \frac{d\overset{(0)}{z}}{dt} = F(\overset{(0)}{z}, x^0, 0), \tag{2.2}$$

откуда можно заключить, что $\overset{(0)}{z}(t, \mu)$ существует и, в силу условия устойчивости, имеет пределом при $\mu \to 0$ постоянную $\varphi(x^0, 0)$ **.

---

* Точнее, для оценки функций v, для u этого не достаточно и надо привлекать еще лемму 1.

** Этот факт был использован еще в [4]. Уравнение (2.2), если за независимое переменное выбрать τ, совпадает с (8). В работе [2] с помощью уравнения (8) было дано другое, отличное от принятого здесь, определение устойчивого корня, обобщающееся на случай, когда μ является множителем при производной в нескольких уравнениях.

При $p=1$

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{d}{dt}\overset{(1)}{z} &= F_{z0}\overset{(1)}{z}+F_{x0}\overset{(1)}{x}+F_{t0}t,\\ \frac{d}{dt}\overset{(1)}{x} &= f_0,\\ \overset{(1)}{z}\big|_{t=0} &= 0,\quad \overset{(1)}{x}\big|_{t=0}=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Решение этой системы уравнений существует и, в силу условия устойчивости, при $\mu\to 0$ стремится к решению соответствующей вырожденной системы.

Выясним структуру правых частей системы (1.5) в общем случае. Так как $\overset{(p)}{F}=\frac{\mu^p}{p!}\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F(z,x,\tau\mu)\right]_{\mu=0}$, то задача сводится к выяснению структуры $\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F(z,x,\tau\mu)\right]_{\mu=0}$. Предположим, что

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial\mu^{p-1}}F(z,x,\tau\mu)=\sum\Phi_{\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1},\beta_1,\dots,\beta_{p-1},\gamma}\,z_\mu^{\alpha_1}\dots z_{\mu^{p-1}}^{\alpha_{p-1}}\,x_\mu^{\beta_1}\dots x_{\mu^{p-1}}^{\beta_{p-1}}\,\tau^\gamma. \tag{2.4}$$

Суммирование ведется по всем $\alpha_1,\dots,\gamma$, причем $\alpha_1+2\alpha_2+\dots+(p-1)\alpha_{p-1}+\beta_1+2\beta_2+\dots+(p-1)\beta_{p-1}+\gamma=p-1$. Φ — некоторые функции от $z,x,\tau\mu$. Заметим, что член, содержащий $z_{\mu^{p-1}}$, имеет вид $F_z(z,x,\tau\mu)\,z_{\mu^{p-1}}$ ($\alpha_{p-1}=1$, все остальные α,β и γ равны нулю). Дифференцируя (2.4), будем иметь:

$$\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F=\sum\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\Phi_{\alpha_1,\dots,\gamma}\,z_\mu^{\alpha_1}\dots\tau^\gamma+\Phi_{\alpha_1,\dots,\gamma}\,\alpha_1 z_\mu^{\alpha_1-1}z_{\mu^2}^{\alpha_2+1}z_{\mu^3}^{\alpha_3}\dots\tau^\gamma+\dots\right).$$

Под знаком суммы во втором слагаемом (аналогично в последующих)

$$(\alpha_1-1)+2(\alpha_2+1)+\dots+\gamma=p.$$

Первое слагаемое распадается на три согласно тому, что $\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}z_\mu+\frac{\partial\Phi}{\partial x}x_\mu+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tau$, и, таким образом, показатели будут удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} &(\alpha_1+1)+2\alpha_2+\dots+\gamma=p,\\ &\alpha_1+\dots+(\beta_1+1)+\dots+\gamma=p,\\ &\alpha_1+\dots\qquad\qquad+(\gamma+1)=p. \end{aligned}$$

Это и доказывает справедливость формулы (2.4) для любого p. Учитывая теперь, что $\overset{(p)}{z}=\frac{\mu^p}{p!}\left(\frac{\partial^p z}{\partial\mu^p}\right)_{\mu=0}$, получим для $\overset{(p)}{F}$:

$$\overset{(p)}{F}=\sum\Phi_{\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta_1,\dots,\beta_p,\gamma}\,\overset{(1)}{z}{}^{\alpha_1}\dots\overset{(p)}{z}{}^{\alpha_p}\,\overset{(1)}{x}{}^{\beta_1}\dots\overset{(p)}{x}{}^{\beta_p}\,\tau^\gamma, \tag{2.5}$$

где $\Phi_{\alpha_1,\dots,\gamma}$ — некоторые функции от $\overset{(0)}{z},\overset{(0)}{x},0$. Суммирование ведется по всем $\alpha_1,\dots,\gamma$ таким, что $\alpha_1+2\alpha_2+\dots+p\alpha_p+\beta_1+\dots+p\beta_p+\gamma=p$. Член, содержащий $\overset{(p)}{z}$, имеет вид $F_{z0}\overset{(p)}{z}$.

Напишем теперь систему уравнений для производных $\overset{(p)}{z}_{\mu r}$, $\overset{(p)}{x}_{\mu r}$. Эта система получается дифференцированием соответствующее число раз системы (1.5):

$$\mu \frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu r} + r\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu r-1} = \overset{(p)}{F}_{\mu r}, \qquad \frac{d}{dt}\overset{(p)}{x}_{\mu r} = \overset{(p-1)}{f}_{\mu r}. \tag{2.6}$$

Выясним структуру правых частей. $\overset{(p)}{F}_{\mu r}$ имеет вид:

$$\overset{(p)}{F}_{\mu r} = \sum \Phi\, \overset{(0)}{z}_{\mu}^{\alpha_{01}} \ldots \overset{(0)}{z}_{\mu r}^{\alpha_{0r}}\, \overset{(1)}{z}^{\alpha_{10}}\, \overset{(1)}{z}_{\mu}^{\alpha_{11}} \cdots \overset{(1)}{z}_{\mu r}^{\alpha_{1r}} \ldots \overset{(p)}{x}^{\beta_{p0}}\, \overset{(p)}{x}_{\mu}^{\beta_{p1}} \ldots \overset{(p)}{x}_{\mu r}^{\beta_{pr}}\, t^{\gamma}. \tag{2.7}$$

Φ — некоторые ограничение функции, зависящие от $\overset{(0)}{z}, \overset{(0)}{x}, 0$. Суммирование ведется таким образом, что

$$0(\alpha_{01} + \ldots + \alpha_{0r}) + 1\cdot(\alpha_{10} + \ldots + \alpha_{1r}) + \ldots + p(\beta_{p0} + \ldots + \beta_{pr}) + \gamma = p, \tag{2.8'}$$

$$1\cdot\alpha_{01} + \ldots + r\alpha_{0r} + 0\cdot\alpha_{10} + \ldots + r\alpha_{1r} + \ldots + 0\cdot\beta_{p0} + \ldots + r\beta_{pr} = r. \tag{2.8''}$$

Легко убедиться в справедливости формулы (2.7) для любого p и $r = 1$. Действительно, из (2.5) получаем:

$$\overset{(p)}{F}_{\mu} = \sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\overset{(0)}{z}_{\mu}\overset{(1)}{z}^{\alpha_1}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_p} t^{\gamma} + \Phi\alpha_1\overset{(1)}{z}^{\alpha_1-1}\overset{(1)}{z}_{\mu}\overset{(2)}{z}^{\alpha_2}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_p} t^{\gamma} + \ldots + \Phi\overset{(1)}{z}^{\alpha_1}\cdots\beta_p\overset{(p)}{x}^{\beta_p-1}\overset{(p)}{x}_{\mu} t^{\gamma}\right),$$

$$\alpha_1 + \ldots + p\alpha_p + \beta_1 + \ldots + p\beta_p + \gamma = p.$$

Переписывая эту сумму в виде

$$\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\overset{(0)}{z}_{\mu}^{1}\overset{(1)}{z}^{\alpha_1}\overset{(1)}{z}_{\mu}^{0}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_1}\overset{(p)}{x}_{\mu}^{0} t^{\gamma} + \Phi\alpha_1\overset{(0)}{z}_{\mu}^{0}\overset{(1)}{z}^{\alpha_1-1}\overset{(1)}{z}_{\mu}^{1}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_p}\overset{(p)}{x}_{\mu}^{0} t^{\gamma} + \ldots\right),$$

убеждаемся, что в первом слагаемом

$$1(\alpha_{10} + \alpha_{11}) + \ldots + p(\beta_{p0} + \beta_{p1}) + \gamma = 1(\alpha_1 + 0) + \ldots + p(\beta_p + 0) + \gamma = p,$$

$$\alpha_{01} + \alpha_{11} + \ldots + \beta_{p1} = 1 + 0 + \ldots + 0 = 1,$$

во втором

$$1(\alpha_{10} + \alpha_{11}) + \ldots + p(\beta_{p0} + \beta_{p1}) + \gamma = 1[(\alpha_1 - 1) + 1] + 2(\alpha_2 + 0) + \ldots$$

$$\ldots + p(\beta_p + 0) + \gamma = p,$$

$$\alpha_{01} + \alpha_{11} + \ldots + \beta_{p1} = 0 + 1 + \ldots + 0 = 1$$

и так далее. Поэтому сумму можно записать в виде

$$\sum\Phi\overset{(0)}{z}_{\mu}^{\alpha_{01}}\overset{(1)}{z}^{\alpha_{10}}\overset{(1)}{z}_{\mu}^{\alpha_{11}}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_{p0}}\overset{(p)}{x}_{\mu}^{\beta_{p1}} t^{\gamma},$$

$$1(\alpha_{10} + \alpha_{11}) + \ldots + p(\beta_{p0} + \beta_{p1}) + \gamma = p,$$

$$\alpha_{01} + \alpha_{11} + \ldots + \beta_{p1} = 1,$$

что и требуется. В справедливости формулы (2.7) для $r>1$ нетрудно убедиться методом индукции, аналогично тому как это было сделано для (2.4). Соответствующие рассуждения мы опускаем.

Лемма 1. *В промежутке* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *имеют место следующие неравенства*:

$$\left|\overset{(p)}{z}_{\mu l}\right| < \Phi_{p-l}, \qquad \left|\overset{(p)}{x}_{\mu l}\right| < \Phi_{p-l}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции. Нетрудно непосредственно получить оценки (2.9) для $p=0$ и $l=1$.

Дифференцируя (2.1) по μ, получим: $\mu \frac{d}{dt}\overset{(0)}{z}_\mu = F_{z0}\overset{(0)}{z}_\mu - \frac{d\overset{(0)}{z}}{dt}$. Очевидно, $\frac{d\overset{(0)}{z}}{dt} = \Phi_{-1}$, поэтому $z_\mu = \int_0^t \Phi_{-1}\frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu}d\tau = \Phi_{-1}$. Далее, согласно формуле (2.7)

$$\mu\frac{d}{dt}\overset{(0)}{z}_{\mu l} - \frac{d}{dt}\overset{(0)}{z}_{\mu l-1} = \overset{(0)}{F}_{\mu l} = \sum \Phi \overset{(0)}{z}_\mu{}^{\alpha_{01}} \cdots \overset{(0)}{z}_{\mu r}{}^{\alpha_{0r}} \qquad (1\cdot\alpha_{01}+\ldots+r\,\alpha_{0r}=r), \tag{2.10}$$

причем слагаемое в правой части, содержащее $z_{\mu l}$, имеет вид $F_z\,(\overset{(0)}{z}, x^0, 0)\overset{(0)}{z}_{\mu l} = F_{z0}\overset{(0)}{z}_{\mu l}$. Отсюда, предполагая, что $\overset{(0)}{z}_{\mu k} < \Phi_{-k}$ $(k=0, 1,\ldots, l-1)$, получим:

$$\mu\frac{d}{dt}\overset{(0)}{z}_{\mu l} = F_{z0}\overset{(0)}{z}_{\mu l} + \Phi_{-l}$$

и, следовательно,

$$\overset{(0)}{z}_{\mu l} = \int_0^t \Phi_{-l}\frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu}d\tau = \Phi_{-l}.$$

Оценка $\overset{(0)}{x}_{\mu l} < \Phi_{-l}$ не имеет смысла, так как $\overset{(0)}{x}_{\mu l} \equiv 0$, впрочем, ею нигде не приходится пользоваться.

Предположим теперь, что

$$\left|\overset{(k)}{z}_{\mu l}\right| < \Phi_{k-l}, \qquad \left|\overset{(k)}{x}_{\mu l}\right| < \Phi_{k-l} \tag{2.9'}$$

$(k=0,1,\ldots, p-1;\ l$ — любое). В этом предположении докажем, что

$$\left|\overset{(p)}{z}\right| < \Phi_p, \qquad \left|\overset{(p)}{x}\right| < \Phi_p. \tag{2.9''}$$

Затем, предполагая справедливыми оценки

$$\left|\overset{(p)}{z}_{\mu l}\right| < \Phi_{p-l}, \quad \left|\overset{(p)}{x}_{\mu l}\right| < \Phi_{p-l} \qquad (l=1,2,\ldots, r), \tag{2.9'''}$$

докажем справедливость таких же оценок для $l=r+1$.

Рассмотрим систему уравнений (1.5). Пользуясь выражением (2.5) для $\overset{(p)}{F}$, аналогичным выражением для $\overset{(p-1)}{f}$ и оценками (2.9′) для $\overset{(k)}{z}_{\mu^l}$ ($k=0,1,\ldots, p-1$; $l = 0,1,\ldots$), получим следующие оценки для правой части (1.5″):

$$|\overset{(p-1)}{f}| < \sum C\, \Phi_{\alpha_1} \cdots \Phi_{(p-1)\,\alpha_{p-1}} \Phi_{\beta_1} \cdots \Phi_{(p-1)\,\beta_{p-1}} t^{\gamma} =$$

$$= \Phi_{\alpha_1+\ldots+(p-1)\,\alpha_{p-1}+\beta_1+\ldots+(p-1)\,\beta_{p-1}+\gamma} = \Phi_{p-1}.$$

Интегрируя по t, получим:

$$|\overset{(p)}{x}| < \Phi_p.$$

Пользуясь этой оценкой и (2.5), получим ту же оценку для правой части (1.5′), из которой выделен член $F_{z0}\overset{(p)}{z}$, т. е.

$$\mu \frac{d}{dt} \overset{(p)}{z} = F_{z0} \overset{(p)}{z} + \Phi_p,$$

и, следовательно,

$$|\overset{(p)}{z}| < \int_0^t \Phi_p \frac{e^{-\frac{\varkappa (t-\tau)}{\mu}}}{\mu} d\tau = \Phi_p.$$

Неравенства (2.9″), таким образом, доказаны.

Предполагая теперь выполненными неравенства (2.9‴), рассмотрим систему

$$\mu \frac{d}{dt} \overset{(p)}{z}_{\mu^{r+1}} + (r+1) \frac{d}{dt} \overset{(p)}{z}_{\mu^r} = \overset{(p)}{F}_{\mu^{r+1}}, \tag{2.11′}$$

$$\frac{d}{dt} \overset{(p)}{x}_{\mu^{r+1}} = \overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}. \tag{2.11″}$$

Пользуясь формулой, аналогичной (2.7), для $\overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}$, будем иметь:

$$|\overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}| < \sum C\, \Phi^{\alpha_{01}}_{-1} \cdots \Phi^{\alpha_{0\,r+1}}_{-(r+1)}\; \Phi^{\alpha_{10}}_{1} \cdots \Phi^{\alpha_{1r+1}}_{1-(r+1)} \cdots \Phi^{\beta_{p-1\,r+1}}_{p-1-(r+1)} t^{\gamma} = \sum \Phi_{\alpha},$$

где

$$\alpha = (-\alpha_{01} - \ldots - (r+1)\,\alpha_{0\,r+1}) + (\alpha_{10} + \ldots + [1-(r+1)]\,\alpha_{1\,r+1}) + \ldots$$

$$\ldots + (p-1)\,\beta_{p-1\,0} + \ldots + [p-1-(r+1)]\,\beta_{p-1\,r+1} + \gamma. \tag{2.12}$$

Соответствующей перегруппировкой слагаемых в (2.12) нетрудно вычислить, используя (2.8), $\alpha = p - r - 2$. Таким образом,

$$|\overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}| < \Phi_{p-r-2},$$

и, следовательно,

$$|\overset{(p)}{x}_{\mu^{r+1}}| < \Phi_{p-r-1} = \Phi_{p-(r+1)}. \tag{2.13}$$

Пользуясь этим, произведем теперь оценку правой части (2.11′) без учета слагаемого $F_{z0} \overset{(p)}{z}_{\mu r+1}$ и получим ее, очевидно, тоже в виде $\Phi_{p-(r+1)}$. Кроме того, пользуясь (2.9‴), можно написать неравенства

$$\left|\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu l}\right| < \Phi_{p-l-1} \quad (l=1, 2, \ldots, r),$$

учитывая которые, будем иметь:

$$\mu \frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu r+1} = F_{z0}\overset{(p)}{z}_{\mu r+1} + \Phi_{p-(r+1)},$$

а следовательно,

$$|\overset{(p)}{z}_{\mu r+1}| < \int\limits_0^t \Phi_{p-(r+1)} \frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu} d\tau = \Phi_{p-(r+1)}, \tag{2.14}$$

что и доказывает вместе с (2.13) справедливость (2.9‴) для $l=r+1$.

В заключение заметим, что изменение номеров p, l, участвующих в формулировке леммы 1, лимитировано только степенью гладкости F и f. В предположениях относительно этих функций, указанных во введении, можно считать справедливой лемму для p, $l = 0, 1, 2, \ldots, n$.

2. В настоящем пункте будут получены оценки для производных по τ от $z_p(\tau)$, $x_p(\tau)$. Эти производные $z_{p\tau^r} = \frac{d^r}{d\tau^r} z_p(\tau)$, $x_{p\tau^r} = \frac{d^r}{d\tau^r} x_p(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{d\tau} z_{p\tau^r} = F_{p\tau^r},$$
$$\frac{d}{d\tau} x_{p\tau^r} = f_{p-1\,\tau^r}.$$

Начальные значения для $z_{p\tau^r}$, $x_{p\tau^r}$ представляют собой некоторые постоянные. Выясним структуру $F_{p\tau^r}$. Пользуясь формулой (2.5) и учитывая, что $\overset{(p)}{F} = \mu^p F_p$, будем иметь:

$$F_p(\tau) = \sum \Phi_{\alpha_1 \ldots \beta_p \gamma} z_1^{\alpha_1} \ldots z_p^{\alpha_p} x_1^{\beta_1} \ldots x_p^{\beta_p} \tau^\gamma \tag{2.15}$$
$$(\alpha_1 + \ldots + p\alpha_p + \beta_1 + \ldots + p\beta_p + \gamma = p).$$

Напишем выражение для производной от этой функции по τ. Рассмотрим сумму (ср. с (2.7))

$$\sum \Phi z_{0\tau}^{\alpha_{01}} \ldots z_{0\tau^r}^{\alpha_{0r}} z_1^{\alpha_{10}} z_{1\tau}^{\alpha_{11}} \ldots z_{1\tau^r}^{\alpha_{1r}} \ldots x_{p\tau^r}^{\beta_{pr}} \tau^\gamma, \tag{2.16}$$

где показатели подчиняются требованию (2.8), и обозначим ее через $V_{p,r}$. Дифференцируя $V_{p,r}$ по τ, нетрудно убедиться, что производная представляет собой сумму двух функций подобного же типа, но с другими индексами. Действительно,

$$\frac{d}{dt} V_{p,r} = \sum \tau^\gamma \frac{d}{dt}\left(\Phi z_{0\tau}^{\alpha_{01}} \ldots x_{p\tau^r}^{\beta_{pr}}\right) + \sum \Phi z_{0\tau}^{\alpha_{01}} \ldots x_{p\tau^r}^{\beta_{pr}} \gamma \tau^{\gamma-1} =$$
$$= V_{p,r+1} + V_{p-1,r}. \tag{2.17}$$

Если $p=0$, то формула видоизменяется, правая часть ее содержит лишь первый член. Действительно, при $p=0$ $V_{0r}=\sum \Phi z_{0\tau}^{\alpha_{01}} \dots z_{0\tau^r}^{\alpha_{0r}}$ не содержит τ явно, и поэтому при дифференцировании появляется только член $V_{0,r+1}$. Возвращаясь к $F_{p\tau^r}$, предположим, что

$$F_{p\tau^r}=V_{p,r}+V_{p-1,\,r+1}+\dots+V_{p-r,\,0} \tag{2.18}$$

(если $p<r$, то формула обрывается на члене $V_{0,0}$). Доказательство формулы (2.18) для $F_{p\tau^{r+1}}$ после установления правил дифференцирования $V_{p,r}$ не требует пояснений.

Условимся обозначать через $M(\tau)$ любой многочлен относительно τ.

Лемма 2. *На полупрямой $0\leqslant\tau<\infty$ имеют место следующие неравенства*:

$$\left.\begin{array}{l}
|z_0|<M(\tau), \quad |z_{0\tau^r}|<M(\tau)e^{-\varkappa\tau} \quad (r=1,2,\dots),\\
|z_1|<M(\tau), \quad |z_{1\tau}|<M(\tau), \quad |z_{1\tau^r}|<M(\tau)e^{-\varkappa\tau} \quad (r=2,3,\dots),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
|z_{p\tau^r}|<M(\tau) \quad (r=0,1,\dots,p),\\
|z_{p\tau^r}|<M(\tau)e^{-\varkappa\tau} \quad (r=p+1,\,p+2,\dots).
\end{array}\right\} \tag{2.19}$$

Аналогичные неравенства имеют место для $x_{p\tau^r}$.

Доказательство. Для первых номеров эти оценки легко получить непосредственно. Обратимся к системе (1.3). Очевидно, $|x_0|=|x^0|<M(\tau)$ и $|z_0(\tau)|<C<M(\tau)$. Производная $z_{0\tau}$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{d\tau}z_{0\tau}=F_{z0}z_{0\tau}$, причем $z_{0\tau}|_{\tau=0}=F(z^0,x^0,0)=C$. Отсюда нетрудно получить неравенство $|z_{0\tau}|<Ce^{-\varkappa\tau}$, т. е.

$$|z_{0\tau}|<M(\tau)e^{-\varkappa\tau}.$$

Для $z_{0\tau^r}$ справедливо уравнение (ср. с (2.10))

$$\frac{d}{d\tau}z_{0\tau^r}=F_{z0}z_{0\tau^r}+\sum\Phi z_{0\tau}^{\alpha_1}\dots z_{0\tau^{r-1}}^{\alpha_{r-1}} \qquad (\alpha_1+2\alpha_2+\dots+(r-1)\alpha_{r-1}=r),$$

откуда, предполагая, что $|z_{0\tau}|<Me^{-\varkappa\tau},\dots,|z_{0\tau^{r-1}}|<Me^{-\varkappa\tau}$, будем иметь:

$$|z_{0\tau^r}|<Ce^{-\varkappa\tau}+\int_0^\tau M(\tau_1)e^{-r\varkappa\tau_1}e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)}d\tau_1=M(\tau)e^{-\varkappa\tau}.$$

Предположим теперь, что неравенства (2.19) имеют место для некоторого номера p. Найдем оценки для z_{p+1}, x_{p+1}. Так как $\frac{d}{d\tau}x_{p+1}=f_p$, то пользуясь формулой для f_p, аналогичной (2.15), получим: $|f_p|<M(\tau)$, а следовательно,

$$|x_{p+1}|<M(\tau). \tag{2.20}$$

Пользуясь теперь уравнением $\frac{d}{d\tau} z_{p+1} = F_{p+1}$ и формулой (2.15), получим, что правая часть этого уравнения (не считая члена $F_{z0}\, z_{p+1}$) также оценивается $M(\tau)$ и, следовательно,

$$|z_{p+1}| < C e^{-\varkappa\tau} + \int_0^\tau M(\tau_1)\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 = M(\tau). \tag{2.21}$$

Предположим теперь, что оценки (2.19) имеют место для $p+1$ и производных порядка $0, 1, \ldots, r < p+1$. Имеем:

$$x_{p+1\,\tau^{r+1}} = \frac{d}{d\tau} x_{p+1\,\tau^r} = f_{p\tau^r} = V_{p,r} + \ldots + V_{p-r,\,0}. \tag{2.22}$$

Используя формулу (2.16) и учитывая (2.19), нетрудно видеть, что каждое слагаемое в выражении для $V_{p,r}$ имеет оценку либо $M(\tau)$, либо $M(\tau)e^{-\varkappa\tau}$. Важно подчеркнуть, что если только $p \geqslant r$ (то же, что $r < p+1$), то, вообще говоря, присутствует слагаемое с оценкой $M(\tau)$, например, слагаемые $f_{z0}\, z_{p\tau^r}$, $f_{x0}\, x_{p\tau^r}$, и, следовательно, $|f_{p\tau^r}| < M(\tau)$, а вместе с тем и

$$|x_{p+1\,\tau^{r+1}}| < M(\tau).$$

Далее,

$$\frac{d}{d\tau} z_{p+1\,\tau^{r+1}} = F_{p+1\,\tau^{r+1}} = V_{p+1,\,\tau^{r+1}} + \ldots + V_{p-r,\,0} + F_{z0}\, z_{p+1\,\tau^{r+1}} \tag{2.23}$$

(выделяем справа член, содержащий неизвестное $z_{p+1\,\tau^{r+1}}$, как уже не раз делали выше). В правой части уравнения (2.23) также, вообще говоря, присутствует член, имеющий оценку $M(\tau)$ (например, $F_{x0}\, x_{p+1\,\tau^{r+1}}$). Следовательно,

$$|z_{p+1\,\tau^{r+1}}| < Ce^{-\varkappa\tau} + \int_0^\tau M(\tau_1)\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 = M(\tau).$$

Если же предположить, что оценки (2.19) имеют место для $p+1$ и производных порядка $0, 1, \ldots, r = p+1$, то дальнейшие рассуждения существенно меняются. Действительно, тогда

$$x_{p+1\,\tau^{r+1}} = x_{p+1\,\tau^{p+2}} = f_{p\tau^{p+1}} = V_{p,\,p+1} + \ldots + V_{0,1}. \tag{2.24}$$

Убедимся, что $V_{p,r}$, где $r > p$, содержит только такие члены, которые имеют оценку $M(\tau)e^{-\varkappa\tau}$. В самом деле, обращаясь к (2.16), замечаем, что в каждой группе сомножителей с одинаковым первым нижним индексом обязательно присутствует производная, порядок которой выше значения этого индекса, т. е. сомножитель, имеющий по (2.19) оценку $M(\tau)e^{-\varkappa\tau}$. В противном случае имело бы место противоречие требованию (2.8). Действительно, противное означает наличие в сумме (2.16) слагаемого вида

$$\Phi_i^* z_1^{\alpha_{10}} z_{1\tau}^{\alpha_{11}} z_2^{\alpha_{20}} z_{2\tau}^{\alpha_{21}} z_{2\tau^2}^{\alpha_{22}} \ldots x_p^{\beta_{p0}} \ldots x_{p\tau^p}^{\beta_{pp}} \tau^\gamma.$$

Левая часть равенства — условия на показатели (2.8′) — имеет в этом случае вид:

$$0\cdot\alpha_{10} + 1\cdot\alpha_{11} + 0\cdot\alpha_{20} + 1\cdot\alpha_{21} + 2\alpha_{22} + \ldots + 0\,\beta_{p0} + \ldots + p\,\beta_{pp} = r, \tag{2.25}$$

а левая часть (2.8″) — вид

$$1(\alpha_{10}+\alpha_{11})+2(\alpha_{20}+\alpha_{21}+\alpha_{22})+\ldots+p(\beta_{p0}+\ldots+\beta_{pp})+\gamma=p. \qquad (2.26)$$

Сравнивая (2.25) с (2.26), замечаем, что левая часть (2.26) содержит те же слагаемые, что и левая часть (2.25), плюс еще некоторые, которые не могут быть отрицательными. Отсюда $p \geqslant r$, а предполагалось, что $p < r$.

Таким образом, из (2.24) получаем:

$$|x_{p+1\,\tau^{p+2}}| < M(\tau)\,e^{-\varkappa\tau},$$

а так как

$$\frac{d}{d\tau} z_{p+1\,\tau^{p+2}} = F_{p+1\,\tau^{p+2}} = F_{z0}\, z_{p+1\,\tau^{p+2}} + V_{p+1,\,p+2} + \ldots + V_{0,1},$$

то

$$|z_{p+1\,\tau^{p+2}}| < Ce^{-\varkappa\tau} + \int\limits_1^{\tau} M(\tau_1)\, e^{-\varkappa\tau_1} e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)} d\tau_1 = M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau}.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что переход от r к $r+1$ при $r > p+1$ дает для $z_{p+1\,\tau^{r+1}}$, $x_{p+1\,\tau^{r+1}}$ также оценки типа $M(\tau)\,e^{-\varkappa\tau}$. Таким образом, лемма 2 может считаться доказанной. Как и в предыдущей лемме, пределы изменения p и r зависят от степени гладкости функций F и f. Наложенными выше условиями на F, f гарантирована справедливость леммы для $p, r = 0, 1, \ldots, n$.

Заметим, что одновременно с (2.19) проведенные рассуждения дают возможность установить аналогичные оценки для произвольной достаточно гладкой функции $F(z, x, t)$:

$$\begin{aligned} &|F_{p\tau^r}| < M(\tau) && (r = 0, 1, \ldots, p), \\ &|F_{p\tau^r}| < M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau} && (r = p+1, \ldots). \end{aligned} \qquad (2.27)$$

3. В настоящем пункте будут получены оценки для разностей $z-(z)_n$, $x-(x)_n$ и их производных по μ. Введем обозначения:

$$z_{\mu^k} - (z)_{n\mu^k} = \Delta_{nk}, \quad x_{\mu^k} - (x)_{n\mu^k} = \delta_{nk}.$$

Лемма 3. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\begin{aligned} &|\Delta_{nk}| < \Phi_{n-k+1}, \\ &|\delta_{nk}| < \Phi_{n-k+1} \qquad (k \leqslant n), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Доказательство. Докажем сначала (2.28) для $k=0$, т. е. оценим разности $z-(z)_n$, $x-(x)_n$, а также $F-(F)_n$, где F — некоторая функция аргументов z, x, t.

Для $n = k = 0$ оценки получаются непосредственно. Действительно, $x-(x)_0 = x - x^0$, а $|x - x^0| < ct$, т. е. $x - x^0 = \Phi_1$. В то же время

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, x, t),$$

$$\mu \frac{d(z)_0}{dt} = F((z)_0, x^0, 0),$$

откуда

$$\mu \frac{d}{dt}[z-(z)_0] = \frac{\partial F^*}{\partial z}[z-(z)_0] + \frac{\partial F^*}{\partial x}(x-x^0) + \frac{\partial F^*}{\partial t}t$$

и, следовательно,

$$z-(z)_0 = \int\limits_0^t \frac{\Phi_1}{\mu} e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}} d\tau = \Phi_1\ {}^*.$$

Предположим, что неравенства (2.28) имеют место для $k=0$ и некоторого n, а также для всех номеров, предшествующих n. Докажем справедливость этих неравенств для $n+1$. Имеем:

$$\mu \frac{d}{dt}[z-(z)_{n+1}] = F-(F)_{n+1},$$

$$\frac{d}{dt}[x-(x)_{n+1}] = f-(f)_n.$$

Представим разность $F-(F)_{n+1}$ (и аналогично $f-(f)_n$) следующим образом

$$[F(z,x,t) - F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t)] + [F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t) - (F)_{n+1}] = \Delta_1+\Delta_2.$$

Рассмотрим

$$\Delta_2 = F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t) - (F)_{n+1} = [F]_{n+1} - (F)_{n+1}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F_{n+1} = p!\,F_p = \left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F(z_0+\mu z_1+\ldots, x_0+\mu x_1+\ldots, t)\right]_{\mu=0},$$

причем дифференцирование производится формально, так как аргументами F являются ряды (12). Что касается $[F]_{n+1} = F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t)$, то, так как ее аргументами являются уже не ряды, а многочлены, имеет место фактическое тождество $p!\,F_p = \left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}[F]_{n+1}\right]_{\mu=0}$. Таким образом, имеем:

$$\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}(F)_{n+1}\right]_{\mu=0} = \left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}[F]_{n+1}\right]_{\mu=0} \qquad (p=0,1,\ldots,n+1),$$

откуда следует:

$$\Delta_2 = [F]_{n+1}-(F)_{n+1} = \frac{\partial^{n+2}}{\partial\mu^{n+2}}\left\{[F]_{n+1}-(F)_{n+1}\right\}_{\mu=\mu^*}\frac{\mu^{n+2}}{(n+2)!} = \left\{\frac{\partial^{n+2}}{\partial\mu^{n+2}}[F]_{n+1}\right\}_{\mu=\mu^*}\frac{\mu^{n+2}}{(n+2)!},$$

а отсюда

$$|\Delta_2| < \Phi_{n+2}.$$

Представляя теперь Δ_1 в виде $\Delta_1 = \frac{\partial F^*}{\partial z}[z-(z)_{n+1}] + \frac{\partial F}{\partial x}[x-(x)_{n+1}]$, получим:

$$\mu\frac{d}{dt}[z-(z)_{n+1}] = \frac{\partial F^*}{\partial z}[z-(z)_{n+1}] + \frac{\partial F^*}{\partial x}[x-(x)_{n+1}] + \Delta_2, \tag{2.29}$$

* Эта оценка была необходима для исследования первых производных z_μ, x_μ и была получена еще в [4].

где $|\Delta_2| < \Phi_{n+2}$, и аналогично

$$\frac{d}{dt}[x-(x)_{n+1}] = \frac{\partial f^*}{\partial z}[z-(z)_n] + \frac{\partial f^*}{\partial x}[x-(x)_n] + \delta_2, \tag{2.30}$$

где $|\delta_2| < \Phi_{n+1}$. Пользуясь (2.28) для $k=0$ и n, получим из (2.30):

$$\frac{d}{dt}[x-(x)_{n+1}] = \Phi_{n+1},$$

откуда

$$x-(x)_{n+1} = \Phi_{n+2},$$

а тогда из (2.29) будем иметь:

$$z-(z)_{n+1} = \int_0^t \frac{\Phi_{n+2}}{\mu} e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}} d\tau = \Phi_{n+2},$$

что и доказывает лемму 3 для $k=0$.

Заметим, что попутно получено неравенство

$$|F-(F)_n| < \Phi_{n+1}, \tag{2.31}$$

где F — произвольная достаточно гладкая функция аргументов $z(t,\mu), x(t,\mu), t$.

Сравним теперь производные $z_{\mu k}$, $x_{\mu k}$ с производными того же порядка от $(z)_n$, $(x)_n$. $z_{\mu k}$, $x_{\mu k}$ удовлетворяют системе (9), которую можно записать следующим образом:

$$\mu\frac{d}{dt}z_{\mu k} - k\frac{d}{dt}z_{\mu k-1} = F_{\mu k} = \sum \Phi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k} z_\mu^{\alpha_1}\cdots z_{\mu k}^{\alpha_k} x_\mu^{\beta_1}\cdots x_{\mu k}^{\beta_k}, \tag{2.32'}$$

$$\frac{d}{dt}x_{\mu k} = f_{\mu k} = \sum \Psi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k} z_\mu^{\alpha_1}\cdots z_{\mu k}^{\alpha_k} x_\mu^{\beta_1}\cdots x_{\mu k}^{\beta_k}, \tag{2.32''}$$

где (ср. с (2.5)) $\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_k}$ — некоторая функция от $z(t,\mu)$, $x(t,\mu)$, t. Суммирование ведется по всем $\alpha_1,\ldots,\beta_k$, таким, что $\alpha_1+\ldots+k\alpha_k+\beta_1+\ldots+k\beta_k=k$. Член, содержащий $z_{\mu k}$ в (2.32′), имеет вид $F_z z_{\mu k}$ ($\alpha_k=1$, $\alpha_1=\ldots$ $\ldots=\alpha_{k-1}=\beta_1=\ldots=\beta_k=0$). Структура $\Psi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k}$ аналогична.

Уравнения для $(z)_{n\mu k}$, $(x)_{n\mu k}$ получим, дифференцируя k раз систему (1.6). При этом заметим следующее. Если между двумя формальными рядами по μ с коэффициентами, зависящими от τ, f_1 и f_2, имеет место формальное тождество (в смысле равенства коэффициентов при одинаковых степенях) $f_1=f_2$, то имеют место также формальные тождества $\frac{df_1}{d\tau}=\frac{df_2}{d\tau}$, $\frac{\partial f_1}{\partial\mu}=\frac{\partial f_2}{\partial\mu}$. Если же рассматривать τ как функцию μ, $\tau=\frac{t}{\mu}$ (t от μ не зависит), то имеет место также и тождество $\frac{df_1}{d\mu}=\frac{df_2}{d\mu}$. Далее, если степенные ряды f_1, f_2 и т. д. формально удовлетворяют уравнению $F_1(f_1,f_2,\ldots)=F_2(f_1,f_2,\ldots)$, то $f_1, f_2,\ldots$ удовлетворяют также уравнению, получающемуся из него дифференцированием по μ (как частным образом, так и через $\tau=\frac{t}{\mu}\Big)$.

Напишем, например, уравнения для $(z)_{n\mu}$, $(x)_{n\mu}$. Так как

$$\mu\frac{d}{dt}z_\mu + \frac{d}{dt}z = F_\mu, \quad \frac{d}{dt}x_\mu = f_\mu$$

и так как $(z)_{n\mu}=I_{-1}=S_{n-1}$, $\frac{d}{d\tau}(z)_{n\mu}=\mu\frac{d}{dt}(z)_{n\mu}=I_{-1}=S_{n-1}$, $\frac{d}{dt}(z)_n=$ $=\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\tau}(z)_n=I_{-1}=S_{n-1}$, а $\frac{d}{dt}(x)_{n\mu}=S_{n-2}$, то

$$\mu\frac{d}{dt}(z)_{n\mu}+\frac{d}{dt}(z)_n=(F_\mu)_{n-1},$$

$$\frac{d}{dt}(x)_n=(f_\mu)_{n-2}.$$

Аналогично будем иметь для $(z)_{n\mu k}$, $(x)_{n\mu k}$:

$$\begin{aligned}&\mu\frac{d}{dt}(z)_{n\mu k}+k\frac{d}{dt}(z)_{n\mu k-1}=(F_{\mu k})_{n-k},\\&\frac{d}{dt}(x)_{n\mu k}=(f_{\mu k})_{n-(k+1)}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Сравним $(F_{\mu k})_p$ $(p\leqslant n)$ с выражением

$$[F_{\mu k}]_n=(\Phi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k})_n\,(z)_{n\mu}^{\alpha_1}\cdots(z)_{n\mu k}^{\alpha_k}\,(x)_{n\mu}^{\beta_1}\cdots(x)_{n\mu k}^{\beta_k},$$

которое, очевидно, содержит все те же слагаемые, что $(F_{\mu k})_p$, и еще некото рые дополнительные слагаемые, порядок которых формально выше p. Таким образом, разность

$$D_p=(F_{\mu k})_p-[F_{\mu k}]_n\tag{2.34}$$

имеет порядок формально выше p. Нетрудно получить и фактическую оценку D_p. Действительно, D_p содержит члены вида

$$\overset{(q)}{\Phi}\,\overset{(q_1)}{z_\mu}{}^{\gamma_1}\cdots\overset{(q_k)}{z_{\mu k}}{}^{\gamma_k}\,\overset{(r_1)}{x_\mu}{}^{\delta_1}\cdots\overset{(r_k)}{x_{\mu k}}{}^{\delta_k},$$

где

$$q+\gamma_1(q_1-1)+\ldots+\gamma_k(q_k-k)+\delta_1(r_1-1)+\ldots+\delta_k(r_k-k)>p.\tag{2.35}$$

Пользуясь теперь леммой 1 (формулой (2.9)) и неравенством $|\overset{(q)}{\Phi}|<\Phi_q$, получим, что каждый член D_p оценивается величиной

$$\Phi_q\cdot\Phi_{\gamma_1(q_1-1)}\cdots\Phi_{\delta_k(r_k-k)}=\Phi_{q+\gamma_1(q_1-1)+\ldots+\delta_k(r_k-k)}=\Phi_s,$$

где $s>p$ по (2.35), и, следовательно,

$$D_p=\Phi_s\quad(s>p)\ \text{или}\ D_p=\Phi_{p+1}.\tag{2.36}$$

Вводя аналогично величину

$$d_p=(f_{\mu k})_p-[f_{\mu k}]_n,\tag{2.37}$$

получим:

$$d_p=\Phi_s\quad(s>p)\ \text{или}\ d_p=\Phi_{p+1}.\tag{2.38}$$

Систему уравнений для Δ_{nk}, δ_{nk} можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mu \frac{d}{dt}\Delta_{nk} + k\frac{d}{dt}\Delta_{n\,k-1} = F_{\mu k} - [F_{\mu k}]_n - D_{n-k}, \\ &\frac{d}{dt}\delta_{nk} = f_{\mu k} - [f_{\mu k}]_n - d_{n-(k+1)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Для $k=0$ лемма 3 была доказана выше. Предположим, что она доказана для $\Delta_{n0},\ldots,\Delta_{n\,k-1}$, $\delta_{n0},\ldots,\delta_{n\,k-1}$ и что паралелльно с этим получены оценки $\frac{d}{dt}\Delta_{n0} = \Phi_n$, $\frac{d}{dt}\delta_{n0} = \Phi_n,\ldots$; $\frac{d}{dt}\Delta_{n\,k-1} = \Phi_{n-(k-1)}$, $\frac{d}{dt}\delta_{nk} = \Phi_{n-(k-1)}$ (для $k=0$ это легко видеть из (2.29), (2.30)). Получим оценки для Δ_{nk}, δ_{nk}.

Обращаясь к системе (2.39), исследуем разность

$$F_{\mu k} - [F_{\mu k}]_n = \sum\left[\Phi z_{\mu}^{\alpha_1}\ldots x_{\mu k}^{\beta_k} - (\Phi)_n (z)_{n\mu}^{\alpha_1}\ldots (x)_{n\mu k}^{\beta_k}\right] =$$

$$= \sum\{[\Phi - (\Phi)_n]\,(z)_{n\mu}^{\alpha_1}\ldots (x)_{n\mu k}^{\beta_k} + \Phi\Delta z_{\mu}^{\alpha_1}(z)_{n\mu_2}^{\alpha_2}\ldots (x)_{n\mu k}^{\beta_k} + \ldots + \Phi z_{\mu}^{\alpha_1}\ldots x_{\mu k-1}^{\beta_{k-1}}\Delta x_{\mu k}^{\beta_k}\}. \tag{2.40}$$

Выделим из этой суммы слагаемые, содержащие $\Delta z_{\mu k}^{\alpha_k}$, $\Delta x_{\mu k}^{\beta_k}$ и имеющие вид ($\alpha_k = \beta_k = 1$)

$$F_z\,\Delta_{nk} + F_x\,\delta_{nk}. \tag{2.41}$$

Остальные слагаемые нетрудно оценить. Именно, $|\Delta z_{\mu l}^{\alpha_l}| = |z_{\mu l}^{\alpha_l} - (z)_{n\mu l}^{\alpha_l}| < C\,|(z)_{n\mu l}^{\alpha_l - 1}|\,|\Delta_{nl}|$, но согласно лемме 1 $(z)_{n\mu l} = \Phi_{-l}$, $(x)_{n\mu l} = \Phi_{-l}$, а Δ_{nl}, $\delta_{nl} = \Phi_{n-l+1}$ по предположению, поэтому получаем оценку для любого слагаемого (2.40), исключая (2.41), в виде $\Phi_{n-(k-1)}$. Аналогично оценивается разность $f_{\mu k} - [f_{\mu k}]_n$. Кроме того, по предположению $\frac{d}{dt}\Delta_{n\,k-1} = \Phi_{n-(k-1)}$. Учитывая, наконец, (2.36), (2.38), можем написать:

$$\mu\frac{d}{dt}\Delta_{nk} = F_z\,\Delta_{nk} + F_x\,\delta_{nk} + \Phi_{n-(k-1)}, \tag{2.41'}$$

$$\frac{d}{dt}\delta_{nk} = f_z\,\Delta_{nk} + f_x\,\delta_{nk} + \Phi_{n-k}. \tag{2.41''}$$

Воспользовавшись леммой 2 из [4], будем иметь: $\delta_{nk} = \Phi_{n-(k-1)}$, а следовательно, из (2.41′) получим:

$$\Delta_{nk} = \int_0^t \frac{\Phi_{n-(k-1)}}{\mu} e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}\,d\tau = \Phi_{n-(k-1)},$$

что и доказывает лемму*.

При $k = n$ имеем, в частности:

$$\begin{aligned} &|\Delta_{nn}| < \Phi_1, \\ &|\delta_{nn}| < \Phi_1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

---

* Соответствующие оценки для производных $\frac{d}{dt}\delta_{nk}$, $\frac{d}{dt}\Delta_{nk}$, необходимые для логической завершенности доказательства, получаются из (2.41) очевидным образом.

Неравенства (2.42) означают, что в промежутке изменения t $(0, -A\mu\ln\mu)$ производные z_{μ^n}, x_{μ^n} отличаются бесконечно мало от величин $(z)_{n\mu^n}$, $(x)_{n\mu^k}$, так как в этом промежутке

$$\Phi_1=\sum C\frac{t^{k+1}}{\mu^k}<\sum C\frac{A^{k+1}|\ln\mu|^{k+1}\mu^{k+1}}{\mu^k}\to 0. \tag{2.43}$$

4. Исследуем функции $(z)_n$, $(x)_n$ и их производные по μ n-го порядка. Имеем (см. (1.6)):

$$\frac{d}{dt}(x)_n=(f)_{n-1}, \tag{2.44}$$

где

$$(f)_{n-1}=f_0(\tau)+\mu f_1(\tau)+\ldots+\mu^{n-1}f_{n-1}(\tau).$$

Продифференцируем тождество (2.44) n раз по μ. В правой части будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(f)_{n-1}=-\frac{\tau}{\mu}f_0'+\left[f_1+\mu f_1'\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\right]+\ldots+\mu^{n-2}[(n-1)f_{n-1}-\tau f_{n-1}']=$$

$$=\frac{1}{\mu}f_{01}(\tau)+f_{11}(\tau)+\ldots+\mu^{n-2}f_{n-1\,1}(\tau),\ ^*$$

. . . .

$$\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}(f)_{n-1}=\frac{1}{\mu^n}f_{0n}(\tau)+\ldots+\frac{1}{\mu}f_{n-1\,n}(\tau).$$

Нетрудно доказать методом индукции, что

$$f_{in}=\frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}}(\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}\qquad (i<n). \tag{2.45}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(x)_{n\mu^n}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}}(\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}$$

и, следовательно,

$$(x)_{n\mu^n}=\int_0^t\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}}(\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}\,dt=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\mu^{n-i-1}}\int_0^\tau(\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}\,d\tau=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^n}{\mu^{n-i-1}}(\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-2)}\Bigg|_0^\tau+(-1)^n\int_0^\tau\tau^n f_{n-1}^{(n)}\,d\tau. \tag{2.46}$$

На основании (2.27) может быть установлена сходимость входящего сюда интеграла при $\tau\to\infty$. Из тех же оценок (2.27) следует, что при $\tau=-A\ln\mu$ $(\mu\to 0)$, где A — достаточно большая постоянная, внеинтегральный член формулы (2.46) бесконечно мал.

Для $(z)_{n\mu^n}$ имеем:

$$(z)_{n\mu^n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}},(\tau^n z_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}+\overset{(n)}{(z)}_{\mu^n}.$$

* $'$ означает производную по τ.

Сумма, входящая сюда, бесконечна мала в точке $t = A\mu \ln \mu$ (по тем же, причинам, что и сумма в (2.46)), а $\overset{(n)}{(z)}_{\mu^n} = \Phi_0$ согласно (2.9). Следовательно, при $t = -A\mu \ln \mu$

$$\overset{(n)}{(z)}_{\mu^n} < C\,|\ln \mu|^{\alpha},$$

α — некоторое положительное число.

Таким образом, принимая во внимание (2.42) и (2.43), убеждаемся в том, что доказана

Лемма 4. *При $\mu \to 0$ в точке $t = t^* = -A^*\mu \ln \mu$, где A^* — достаточно большая постоянная,*

$$\begin{aligned} &|z_{\mu^n}| < C\,|\ln \mu|^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \\ &|x_{\mu^n}| \cong (-1)^n \int_0^{\infty} \tau^n f_{n-1}^{(n)}(\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.47}$$

§ 3

Докажем основную теорему, сформулированную во введении.

z_{μ^n}, x_{μ^n} удовлетворяют системе уравнений (9), которую запишем в виде

$$\mu \frac{d}{dt} z_{\mu^n} + n \frac{d}{dt} z_{\mu^{n-1}} = F_z z_{\mu^n} + F_x x_{\mu^n} + G_n, \tag{3.1'}$$

$$\frac{d}{dt} x_{\mu^n} = f_z z_{\mu^n} + f_x x_{\mu^n} + g_n, \tag{3.1''}$$

$$z_{\mu^n}|_{t=0} = 0, \quad x_{\mu^n}|_{t=0} = 0. \tag{3.1'''}$$

G_n, g_n представляют собой некоторые функции от $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$, t, z_μ, x_μ, ..., $z_{\mu^{n-1}}$, $x_{\mu^{n-1}}$. Полагая в G_n, g_n и в F_z, f_z, F_x, f_x аргументы равными их вырожденным значениям (эти значения можно определить, выписывая последовательно системы уравнений для z_μ, x_μ, z_{μ^2}, x_{μ^2} и т. д.), получим вырожденную систему

$$0 = \overline{F}_z \overline{z}_{\mu^n} + \overline{F}_x \overline{x}_{\mu^n} + \overline{G}_n - n \frac{d}{dt} \overline{z}_{\mu^{n-1}}, \tag{3.2'}$$

$$\frac{d}{dt} \overline{x}_{\mu^n} = \overline{f}_z \overline{z}_{\mu^n} + \overline{f}_x \overline{x}_{\mu^n} + \overline{g}_n, \tag{3.2''}$$

$$\overline{x}_{\mu^n}|_{t=0} = \overline{x}^0_{\mu^n} = (-1)^n \int_0^{\infty} \tau^n f_{n-1}^{(n)}(\tau)\, d\tau. \tag{3.2'''}$$

Очевидно, вырожденное значение $\overline{z}_{\mu^n}$ существует и имеет непрерывные производные по t в силу условий гладкости, наложенных на f и F.

Доказательство теоремы проведем методом индукции.

Предположим, что

$$
\begin{aligned}
&z_{\mu^k} \cong \bar{z}_{\mu^k} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),\\
&x_{\mu^k} \cong \bar{x}_{\mu^k} \quad (t \geqslant t_{k0} = -A_{k0}\mu \ln \mu)
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

и что аналогичные соотношения имеют место для производных по t порядка p от этих же функций:

$$
\begin{aligned}
&z_{\mu^k{}_t{}^p} \cong \bar{z}_{\mu^k{}_t{}^p},\\
&x_{\mu^k{}_t{}^p} \cong \bar{x}_{\mu^k{}_t{}^p} \quad (t \geqslant t_{kp} = -A_{kp}\mu \ln \mu).
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

A_{kp}, вообще говоря, зависит от p, но для любого фиксированного p может быть выбрано одинаковым для производных всех порядков $1,\ 2,\ \ldots,\ p$.

Вводя обозначения $\Delta_n = z_{\mu^n} - \bar{z}_{\mu^n}$ и $\delta_n = x_{\mu^n} - \bar{x}_{\mu^n}$ и вычитая (3.2) из (3.1), получаем для этих функций следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{d}{dt}\Delta_n = {} & F_z\Delta_n + F_x\delta_n + (F_z - \bar{F}_z)\bar{z}_{\mu^n} + (F_x - \bar{F}_x)\bar{x}_{\mu^n} + (G_n - \bar{G}_n) - \\
& - n(z_{\mu^{n-1}{}_t} - \bar{z}_{\mu^{n-1}{}_t}) + \mu \frac{d}{dt}\bar{z}_{\mu^n},\\
\frac{d}{dt}\delta_n = {} & f_z\Delta_n + f_x\delta_n + (f_z - \bar{f}_z)\bar{z}_{\mu^n} + (f_x - \bar{f}_x)\bar{x}_{\mu^n} + (g_n - \bar{g}_n).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Начальные условия для этой системы зададим в точке $t = \bar{t} = -\bar{A}\mu \ln \mu$, где $\bar{A} = \max(A^*,\ A_{00},\ \ldots,\ A_{n-1\,0},\ A_{n-1\,1})$. Согласно (2.47) и (3.2'''), они будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_n|_{t=\bar{t}} < C|\ln \mu|^{\alpha},\\
&\delta_n|_{t=\bar{t}} \cong 0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Свободные члены этой линейной системы, согласно предположениям (3.3), (3.4), бесконечно малы. Пользуясь леммами 1 и 2 из [4] (см. § 1), получим, что при $t \geqslant \bar{t} - A'\mu \ln \mu$, т. е. при $t \geqslant t_{n0} = -A_{n0}\mu \ln \mu$ $(A_{n0} = \bar{A} + A')$,

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n = \varepsilon,\\
&\delta_n = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Чтобы доказательство можно было считать завершенным, надо доказать, что аналогичные (3.7) равенства имеют место для $z_{\mu^n{}_t{}^p}$, $x_{\mu^n{}_t{}^p}$. Прежде всего из (3.1'') видно, если принять во внимание (3.7), что при $t \geqslant t_{n0}$ $x_{\mu^n{}_t}$ близко к своему предельному значению $\bar{x}_{\mu^n{}_t}$. Дифференцируя теперь (3.1') по t, получим:

$$
\mu \frac{d}{dt} z_{\mu^n{}_t} = F_z z_{\mu^n{}_t} + H_n, \tag{3.8}
$$

где H_n — функция, зависящая от z, x, $\ldots$, $z_{\mu^{n-1}}$, $x_{\mu^{n-1}}$, x_{μ^n} и их производных по t (от x_{μ^n} входит первая производная). Начальные условия для (3.8) имеют вид:

$$|z_{\mu^n t}|_{t=t_{n0}} < \frac{C}{\mu}.$$

В силу предположений (3.3) и (3.4) и того, что $x_{\mu^n t}$ близко к своему предельному значению для $t \geqslant t_{n0}$, свободный член линейного уравнення (3.8) как угодно близок к своему предельному значению для $t \geqslant t_{n0}$. Поэтому, сравнивая (3.8) с соответствующим вырожденным уравнением, аналогично тому как это было сделано с системой (3.1), докажем, что

$$z_{\mu^n t} - \bar{z}_{\mu^n t} = \varepsilon$$

для $t \geqslant t_{n1} = t_{n0} - A''\mu \ln \mu = -A_{n1}\mu \ln \mu$. Переходя от $p-1$ к p, можно доказать, что

$$z_{\mu^n t^p} - \bar{z}_{\mu^n t^p} = \varepsilon, \quad t \geqslant t_{np} = -A_{np}\mu \ln \mu,$$

$$x_{\mu^n t^p} - \bar{x}_{\mu^n t^p} = \varepsilon, \quad t \geqslant t_{n\,p-1} = -A_{n\,p-1}\mu \ln \mu.$$

Так как для $n=0$, $p=1, 2, \ldots$ и для $n=1$, $p=0$ (3.3), (3.4) были получены в [4], то можно считать, что основная теорема доказана.

Отметим в заключение, что фактическим повторением всех приведенных здесь рассуждений может быть доказана аналогичная теорема для систем, в которых μ является множителем при производной в нескольких уравнениях:

$$\mu \frac{d}{dt} z_j = F_j(z_l, x_k, t) \quad (j, l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dt} x_i = f_i(z_l, x_k, t) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$z_j|_{t=0} = z_j^0, \quad x_i|_{t=0} = x_i^0.$$

Именно, при условии устойчивости, использованном в [5], имеют место при $\mu \to 0$ предельные равенства:

$$\lim_{\mu\to 0} z_{j\mu^n} = \bar{z}_{j\mu^n},$$

$$\lim_{\mu\to 0} x_{i\mu^n} = \bar{x}_{i\mu^n},$$

где $\bar{z}_{j\mu^n}$, $\bar{x}_{i\mu^n}$ — решение вырожденной системы уравнений, соответствующей системе уравнений для $z_{j\mu^n}$, $x_{i\mu^n}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{x}_{i\mu^n}|_{t=0} = \bar{x}^0_{i\mu^n} = (-1)^n \int_0^\infty \tau^n f_{i\,n-1}^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

(Поступило в редакцию 11/X 1957 г.)

(Поступило в редакцию 11/X 1957 г.)

Литература

1. А. Н. Тихонов, О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Матем. сб., **22** (**64**) (1948), 193—204.
2. А. Н. Тихонов, Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем. сб., **31** (**73**) (1952), 575—586.
3. А. Б. Васильева, О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, Матем. сб., **28** (**70**) (1951), 131—146.
4. А. Б. Васильева, О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сб., **31** (**73**) (1952), 587—644.
5. А. Б. Васильева, О дифференцировании решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, Вестник МГУ, № 3 (1954), 29—39.
6. В. М. Волосов, К теории нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при старшей производной, Матем. сб., **31** (**73**) (1952), 645—686.
7. В. М. Волосов, Квазилинейные дифференциальные уравнения высших порядков, содержащие малый параметр, Матем. сб., **36** (**78**) (1955), 501—554.
8. И. С. Градштейн, Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных, Матем. сб., **27** (**69**) (1950), 47—68.
9. И. С. Градштейн, Применение теории устойчивости Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, ДАН СССР, т. **81**, № **6** (1951), 285—286.
10. Е. Ф. Мищенко и Л. С. Понтрягин, Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, ДАН СССР, т. **102**, № **5** (1955), 889—891.

О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел*

А. А. Андронов и Е. А. Леонтович (Горький)

В настоящей работе дается дополнительное рассмотрение двух известных [4] случаев рождения предельных циклов при переходе от системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{D}$$

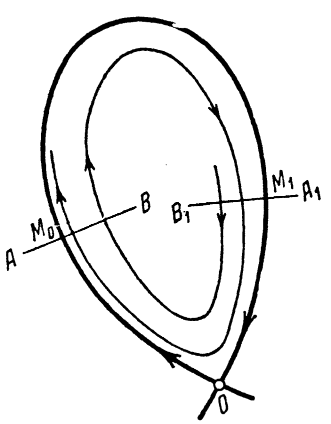
класса N или аналитического класса к сколь угодно близкой «измененной» системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p(x, y) = \tilde{P}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q(x, y) = \tilde{Q}(x, y) \end{aligned} \tag{$\tilde{\text{D}}$}$$

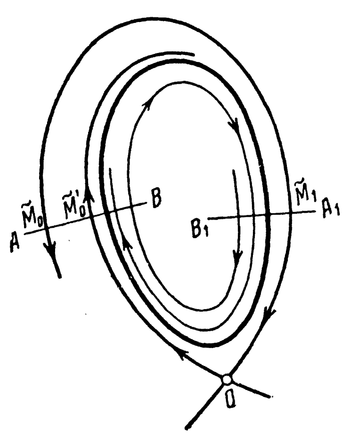
того же класса.

Именно, рассматриваются следующие случаи:

1) Рождение предельного цикла из сепаратрисы, образующей петлю (т. е. из траектории, стремящейся к одному и тому же седлу и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$) (см. фиг. 1 и 2).



Фиг. 1

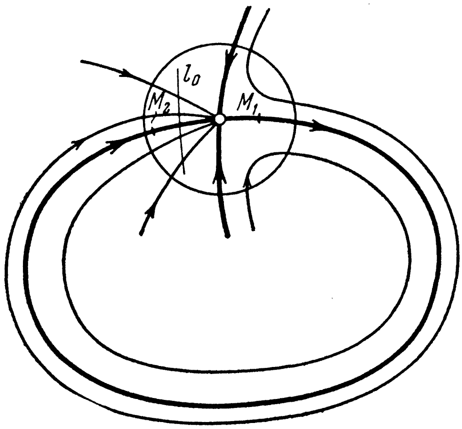


Фиг. 2

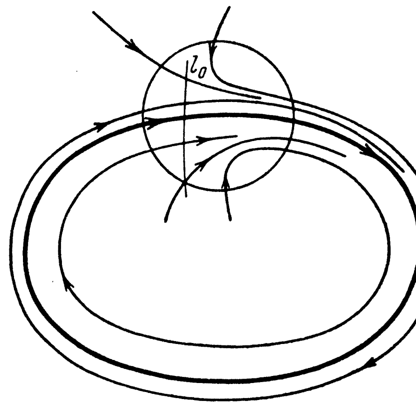
2) Рождение предельного цикла из сепаратрисы сложного состояния равновесия типа «седло-узел», стремящейся к седло-узлу и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$, но являющейся сепаратрисой только при $t \to +\infty$ или только при $t \to -\infty$ (фиг. 3 и 4).

* Эта работа выполнена в 1937 г., но до настоящего времени не была напечатана. Результаты работы используются в [1], [2], [3] и [11].

В настоящей работе устанавливаются в случае 1) некоторые достаточные условия для устойчивости (соответственно неустойчивости) петли, являющиеся одновременно необходимыми условиями того, что от петли сепаратрисы рождается единственный устойчивый (соответственно неустойчивый) предельный цикл (см. §§ 1, 2, 3 гл. II). Для случая 2) устанавливаются, что в этом случае всегда появляется только один предельный цикл (см. гл. II, § 4)



Фиг. 3



Фиг. 4

Использованные в настоящей статье результаты работы [4] сформулированы в виде двух теорем (приведенных без доказательств): теоремы II и теоремы VI главы II.

Отметим, что случай 1) при выведенных в настоящей работе условиях, случай 2), а также случай рождения предельных циклов из двойного предельного цикла и из фокуса первой степени негрубости (т. е. сложного фокуса, у которого $\alpha_3 \neq 0$; см. [5]) исчерпывают все основные случаи рождения предельных циклов, т. е. все случаи, которые возможны, при условии, что система (D) является «системой первой степени негрубости» см. [1]).

В настоящей статье используется терминология, введенная в работе [5]. Будем предполагать, что система (D) и измененная система ($\widetilde{D}$) определены в ограниченной области G и являются в этой области системами класса N или аналитического класса.

Глава I

В настоящей главе приводятся вспомогательные, в основном известные, факты и предложения в удобной для дальнейшего форме.

§ 1

Приведем без доказательств ряд элементарных лемм, касающихся дуг без контакта.

Пусть l — дуга без контакта для траекторий системы (D);

$$x = g(u), \quad y = h(u) \tag{1}$$

— ее параметрические уравнения; M_0 — отличная от концов точка дуги l, соответствующая в уравнениях (1) значению $u = u_0$.

Пусть

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

— решение, соответствующее траектории L, проходящей через точку M_0, при котором точке M_0 соответствует значение $t=t_0$. Предположим, что у траектории L, кроме точки M_0, нет больше общих точек с дугой l и что

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} \dot{\varphi}(t_0) & \dot{\psi}(t_0) \\ g'(u_0) & h'(u_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Тогда мы будем говорить, что часть дуги l, точкам которой соответствуют значения $u>u_0$, лежит по положительную сторону траектории L, а часть дуги l, точкам которой соответствуют значения $u<u_0$, лежит по отрицательную сторону траектории L.

Имеет место следующая элементарная лемма, доказательства которой мы не приводим.

Лемма I. (См. [6].) *При любых* $\varepsilon>0$ *и* $\Delta>0$ *существует* $\delta=\delta(\varepsilon, \Delta)>0$ *такое, что всякая траектория системы* (D), *при* $t=t_0$ *проходящая через* δ*-окрестность точки* M_0 *дуги* l (*отличной от концов этой дуги*), *не выходя из* ε*-окрестности точки* M_0, *при значении* t_0', $|t_0'-t_0|<\Delta$, *пересекает дугу* l.

Рассмотрим две гладкие дуги l_1 и l_2, не имеющие друг с другом общих точек и являющиеся дугами без контакта для траекторий системы (D). Предположим, что траектория L системы (D), соответствующая решению

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

при значении $t=t_1$ пересекает дугу l_1 в точке M_1, а при некотором значении $t=t_2>t_1$ пересекает дугу l_2 в точке M_2, причем у траектории L при значениях t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, кроме точки M_1, больше нет общих точек с дугой l_1 и, кроме точки M_2, больше нет общих точек с дугой l_2, и точки M_1 и M_2 отличны от концов дуг l_1 и l_2.

Имеет место следующая лемма, доказательство которой опускается (оно непосредственно вытекает из леммы I и теоремы о непрерывной зависимости от начальных значений).

Лемма II. *При любом* $\varepsilon>0$ *и любом* $\Delta>0$ $(\Delta<|t_2-t_1|)$ *можно указать* $\delta>0$ *такое, что всякая траектория* L', *при* $t=t_1$ *проходящая через точку дуги* l_1, *лежащую в* δ*-окрестности точки* M_1, *при некотором значении* $t=t_2'$, $|t_2'-t_2|<\Delta$, *не выходя из* ε*-окрестности дуги* M_1M_2 *траектории* L, *пересечет дугу* l_2, *причем при значениях* t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2'$, *траектория* L' *не имеет больше общих точек с дугами* l_1 *и* l_2.

Пусть

$$x=g_1(u), \quad y=h_1(u)$$

— параметрические уравнения дуги без контакта l_1;

$$x=g_2(\overline{u}), \quad y=h_2(\overline{u})$$

— параметрические уравнения дуги l_2; u_0 — значение параметра u, соответствующее точке M_1; $\overline{u}_0$ — значение параметра u, соответствующее точке M_2.

Для упрощения дальнейших рассмотрений мы предположим, что функции $g_1(u)$, $h_1(u)$, $g_2(\overline{u})$, $h_2(\overline{u})$ в параметрических уравнениях дуг без контакта l_1 и l_2 имеют непрерывные производные до второго порядка и что детерминанты

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(t_1) & \dot{\psi}(t_1) \\ g_1'(u_0) & h_1'(u_0) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(t_2) & \dot{\psi}(t_2) \\ g_2'(\overline{u}_0) & h_2'(\overline{u}_0) \end{vmatrix}$$

имеют одинаковые знаки.

В силу леммы II, всякая траектория, при $t = t_1$ пересекающая дугу l_1 в точке, которой соответствует значение u, достаточно близкое к значению u_0 ($|u - u_0| \leqslant \alpha$, где $\alpha > 0$ — надлежащим образом выбранная величина), пересекает при некотором значении $t_2'(u)$ дугу l_2 в точке, соответствующей значению

$$\overline{u} = F(u),$$

сколь угодно близкому к $\overline{u}_0$. При этом $\overline{u}_0 = F(u_0)$. Как известно (см. [7]), функция

$$\overline{u} = F(u)$$

является «функцией соответствия» между дугами l_1 и l_2. (Для определенности мы всегда будем предполагать, что $t_2 > t_1$.)

В дальнейшем рассматривается функция последования и используется выражение для производной от нее при значении параметра, соответствующем точке дуги без контакта, через которую проходит незамкнутая траектория*. Чтобы получить это выражение для производной от функции последования, найдем сначала выражение для производной от функции соответствия. Именно, докажем следующую лемму:

Лемма III. *Выражение для производной от функции соответствия имеет вид*:

$$F'(u_0) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} e^{\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P_x'(\varphi(t), \psi(t)) + Q_y'(\varphi(t), \psi(t))\right] dt}. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся некоторой вспомогательной криволинейной системой координат, введенной в окрестности дуги M_1M_2 траектории L. (Все дальнейшее рассмотрение полностью аналогично проведенному в [5].)

Без ограничения общности мы можем предполагать, что

$$\overline{u}_0 = u_0 = 0.$$

Пусть

$$x = \varphi_1(s, n), \quad y = \psi_1(s, n) \tag{3}$$

— функции, определенные при всех значениях s, $t_1 \leqslant s \leqslant t_2$, $|n| < u^* > 0$, и обладающие следующими свойствами:

* Выражение для производной от функции последования при значении n, соответствующем точке, через которую проходит замкнутая траектория, дано в [5].

1) При всех указанных значениях s и n они непрерывны, имеют непрерывные частные производные по n до второго порядка и смешанные производные, в которых дифференцирование по s входит не более одного раза, до второго порядка (или являются аналитическими в случае, когда система (D) аналитического класса).

2) $$\varphi_1(s, 0) = \varphi(s), \quad \psi_1(s, 0) = \psi(s),$$

т. е. при $n = 0$ уравнения (3) являются параметрическими уравнениями части траектории L, соответствующей значениям t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

3) $$\varphi_1(t_1, n) = g_1(n), \quad \varphi_1(t_2, n) = g_2(n),$$
$$\psi_1(t_1, n) = h_1(n), \quad \psi_1(t_2, n) = h_2(n),$$

т. е. при $s = t_1$ и $s = t_2$ уравнения (3) соответственно являются заданными параметрическими уравнениями дуг без контакта l_1 и l_2.

4) Функциональный детерминант

$$\Delta(s, n) = \begin{vmatrix} \varphi'_{1s}(s, n) & \psi'_{1s}(s, n) \\ \varphi'_{1n}(s, n) & \psi'_{1n}(s, n) \end{vmatrix}$$

при $n = 0$ не обращается в нуль ни для одного значения s,

$$t_1 \leqslant s \leqslant t_2.$$

Функции

$$x = \varphi_1(s, n), \quad y = \psi_1(s, n),$$

обладающие указанными свойствами, всегда существуют.*

* Одно из возможных построений этих функций может быть проведено следующим образом:

Положим

$$g_1^*(u) = g_1(u) - \varphi(t_1), \quad h_1^*(u) = h_1(u) - \psi(t_1),$$

и

$$g_2^*(u) = g_2(u) - \varphi(t_2), \quad h_2^*(u) = h_2(u) - \psi(t_2).$$

Очевидно,

$$g_1^*(0) = h_1^*(0) = g_2^*(0) = h_2^*(0) = 0.$$

Кроме того, введем обозначения:

$$k_1(u) = \dot{\varphi}(t_1)\, h_1^*(u) - \dot{\psi}(t_1)\, g_1^*(u),$$
$$l_1(u) = \dot{\varphi}(t_1)\, g_1^*(u) + \dot{\psi}(t_1)\, h_1^*(u)$$

и

$$k_2(u) = \dot{\varphi}(t_2)\, h_2^*(u) - \dot{\psi}(t_2)\, g_2^*(u),$$
$$l_2(u) = \dot{\varphi}(t_2)\, g_2^*(u) + \dot{\psi}(t_2)\, h_2^*(u).$$

Нетрудно видеть, что

$$k_1(0) = l_1(0) = k_2(0) = l_2(0) = 0,$$
$$k'_1(0) = \Delta_1, \quad k'_2(0) = \Delta_2.$$

В случае, когда дуги без контакта l_1 и l_2 являются нормалями к траектории L, функции $\varphi_1(s, n)$, $\psi_1(s, n)$ могут быть выбраны следующим образом:

$$x = \varphi(s) + n\dot{\psi}(s), \quad y = \psi(s) - n\dot{\varphi}(s).$$

Введем функции

$$k(u, s) = k_1(u)\frac{s - t_2}{t_1 - t_2} + k_2(u)\frac{s - t_1}{t_2 - t_1}$$

и

$$l(u, s) = l_1(u)\frac{s - t_2}{t_1 - t_2} + l_2(u)\frac{s - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Мы имеем, очевидно:

$$k(0, s) = l(0, s) = 0. \tag{4}$$

Пусть, далее,

$$\alpha(u, s) = -\frac{k(u, s)\dot{\psi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} + \frac{l(u, s)\dot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)},$$

$$\beta(u, s) = \frac{k(u, s)\dot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} + \frac{l(u, s)\dot{\psi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)}.$$

В силу (4),

$$\alpha(0, s) = \beta(0, s) = 0.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\alpha'_s(u, s) = \frac{-k_1(u) - k_2(u)}{t_2 - t_1}\,\frac{\dot{\psi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} + \frac{l_1(u) - l_2(u)}{t_1 - t_2}\,\frac{\dot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)}$$

и аналогичное выражение для $\beta'_s(u, s)$. Очевидно,

$$\alpha'_s(0, s) = \beta'_s(0, s) = 0. \tag{5}$$

Мы имеем также:

$$\alpha'_u(u, s) = -\frac{k'_u(u, s)\dot{\psi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} + \frac{l'_u(u, s)\dot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)}$$

и аналогичное выражение для $\beta'_u(u, s)$.

Рассмотрим теперь функции

$$x = \varphi(s) + \alpha(u, s) = \varphi_1(s, u), \quad y = \psi(s) + \beta(u, s) = \psi_1(s, u). \tag{6}$$

Принимая во внимание выражения для $\alpha(u, s)$ и $\beta(u, s)$, нетрудно видеть, что условия 1) и 2) выполняются. Кроме того, выполняется также и условие 3). Действительно, рассмотрим детерминант

$$\Delta(u, s) = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(s) + \alpha'_s(u, s) & \alpha'_u(u, s) \\ \dot{\psi}(s) + \beta'_s(u, s) & \beta'_u(u, s) \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, принимая во внимание (4) и (5), что

$$\Delta(0, s) = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(s) & -\left(\Delta_1\frac{s - t_2}{t_1 - t_2} + \Delta_2\frac{s - t_1}{t_2 - t_1}\right)\frac{\dot{\psi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} + \frac{l_u(u, s)\dot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} \\ \dot{\psi}(s) & \left(\Delta_1\frac{s - t_2}{t_1 - t_2} + \Delta_2\frac{s - t_1}{t_2 - t_1}\right)\frac{\dot{\varphi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} + \frac{l'_u(u, s)\dot{\psi}(s)}{\dot{\varphi}^2(s) + \dot{\psi}^2(s)} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_1\frac{s - t_2}{t_1 - t_2} + \Delta_2\frac{s - t_1}{t_2 - t_1},$$

т. е. $\Delta(0, s)$ ни при одном значении s не обращается в нуль. Таким образом, для функций (6) выполняются все условия 1) — 4).

Нетрудно видеть, что, в силу условий 1) — 4), существует $u^* > 0$ такое, что при всех s и n,

$$t_1 \leqslant s \leqslant t_2, \quad |n| < u^* \quad (u^* < u^0), \tag{7}$$

функции (3) дают взаимно однозначное и непрерывное отображение прямоугольника плоскости s, n, определенного неравенствами (7), на некоторую замкнутую область плоскости x, y, содержащую дугу M_1M_2 траектории L.

Переходя в системе (D) в окрестности дуги M_1M_2 траектории L к переменным s и n, мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{P(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n} - Q(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1n}}{\varphi'_{1s}\psi'_{1n} - \psi'_{1s}\varphi'_{1n}}, \\ \frac{dn}{dt} &= -\frac{P(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1s} - Q(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n}}{\varphi'_{1s}\psi'_{1n} - \psi'_{1s}\varphi'_{1n}}. \end{aligned} \tag{8}$$

При этом для всех s, $t_1 \leqslant s \leqslant t_2$, и при всех n, $|n| < u^*$,

$$\varphi'_{1s}\psi'_{1n} - \psi'_{1s}\varphi'_{1n} \neq 0.$$

Нетрудно, кроме того, видеть (ср. [5], стр. 208), что при всех s, $t_1 \leqslant s \leqslant t_2$

$$P(\varphi_1(s, 0), \psi_1(s, 0))\psi'_{1n}(s, 0) - Q(\varphi_1(s, 0), \psi_1(s, 0))\varphi'_{1n}(s, 0) =$$

$$= \varphi'_{1s}(s, 0)\psi'_{1n}(s, 0) - \psi'_{1s}(s, 0)\varphi'_{1n}(s, 0) \neq 0.$$

Разделив второе из уравнений (8) на первое, мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dn}{ds} = -\frac{P(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1s} - Q(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1s}}{P(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n} - Q(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1n}} = G(s, n), \tag{9}$$

правая часть которого определена и непрерывна при всех значениях s, $t_1 \leqslant s \leqslant t_2$, и n, $|n| < u^{**} > 0$, $u^{**} \leqslant u^*$, и при всех этих значениях s и n имеет непрерывные частные производные. Кроме того, нетрудно видеть, что

$$G(s, 0) = P(\varphi_1(s, 0), \psi_1(s, 0))\psi'_{1s}(s, 0) - Q(\varphi_1(s, 0), \psi_1(s, 0))\varphi'_{1s}(s, 0) = 0,$$

т. е. $n = 0$ есть решение уравнения (9).

Пусть

$$n = f(s, t_1, u) \quad (f(t_1, t_1, u) \equiv u) \tag{10}$$

— решение уравнения (9), соответствующее начальным значениям t_1, u. В силу того, что $n = 0$ является решением уравнения (9),

$$f(s, t_1, 0) = 0.$$

Решение (10) является уравнением в криволинейных координатах дуг траекторий системы (D), заключенных между дугами без контакта l_1 и l_2.

Производная по u от функции

$$n = f(s, t_1, u)$$

удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d}{ds} f'_u(s, t_1, u) = \frac{\partial G(s, f)}{\partial f} \cdot f'_u(s, t_1, u).$$

Отсюда

$$f'_u(s, t_1, u) = e^{\int\limits_{t_1}^{s} \frac{dG}{df} ds}. \tag{11}$$

Мы получим, очевидно, функцию соответствия, полагая в (10) $s = t_2$. Таким образом,

$$\bar{u} = F(u) = f(t_2, t_1, u).$$

Производную от функции соответствия при $u = 0$ мы получим, следовательно, если в выражении (11) положим $u = n = 0$ и $s = t_2$. При этом

$$\frac{\partial G(s, n)}{\partial n} = \frac{\left[P'_x(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1n} + P'_y(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n}\right]\psi'_{1s} - \left[Q'_x(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1n} + Q'_y(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n}\right]\psi'_{1s}}{P(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n} - Q(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1n}} +$$

$$+ \frac{P(\varphi_1, \psi_1)\psi''_{1sn} - Q(\varphi_1, \psi_1)\varphi''_{1sn}}{P(\varphi_1, \psi_1)\psi'_{1n} - Q(\varphi_1, \psi_1)\varphi'_{1n}}.$$

Используя очевидные тождества

$$P(\varphi(s), \psi(s)) \equiv \dot{\varphi}(s), \quad Q(\varphi(s), \psi(s)) \equiv \dot{\psi}(s),$$

$$P'_x(\varphi(s), \psi(s))\dot{\varphi}(s) + P'_y(\varphi(s), \psi(s))\dot{\psi}(s) \equiv \ddot{\varphi}(s),$$

$$Q'_x(\varphi(s), \psi(s))\dot{\varphi}(s) + Q'_y(\varphi(s), \psi(s))\dot{\psi}(s) \equiv \ddot{\psi}(s)$$

и полагая $n = 0$, нетрудно получить следующее выражение для $\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_{n=0}$:

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_{n=0} = P'_x(\varphi(s), \psi(s)) + Q'_y(\varphi(s), \psi(s)) - \frac{d}{ds}\lg\left[\dot{\varphi}\psi'_{1n} - \dot{\psi}\varphi'_{1n}\right]_{n=0}.$$

Мы получим, таким образом:

$$F'(0) = f'_u(t_2, t_1, 0) =$$

$$= \frac{\dot{\psi}(t_2)\varphi'_{1n}(t_2, 0) - \dot{\varphi}(t_2)\psi'_{1n}(t_2, 0)}{\dot{\psi}(t_1)\varphi'_{1n}(t_1, 0) - \dot{\varphi}(t_1)\psi'_{1n}(t_1, 0)} e^{\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[P'_x(\varphi(s), \psi(s)) + Q'_y(\varphi(s), \psi(s))\right] dt}.$$

* В настоящей работе используется только первая производная от функции соответствия. Очевидно, в случае, когда система (D) является системой класса N, при предположении, что функции в параметрических уравнениях дуг без контакта имеют непрерывные производные до порядка $N+1$, совершенно аналогично могут быть найдены выражения (ср. [5]) для второй, третьей и т. д. производной от функции соответствия.

В силу свойства 3) функций $\varphi_1(s, n)$ и $\psi_1(s, n)$, мы, очевидно, имеем:

$$\varphi'_{1n}(t_1, 0) = g'_1(0), \quad \varphi'_{1n}(t_2, 0) = g'_2(0),$$

$$\psi'_{1n}(t_1, 0) = h'_1(0), \quad \psi'_{1n}(t_2, 0) = h'_2(0),$$

и, следовательно, окончательно получаем:

$$F'(0) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} e^{\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P'_x(\varphi(s), \psi(s)) + Q'_y(\varphi(s), \psi(s))\right] ds}. \tag{12}$$

Мы предположили выше, что

$$u_0 = \overline{u}_0 = 0.$$

Нетрудно видеть, однако, что и при отсутствии этого предположения, выражение для производной от функции последования имеет такой же вид.

Таким образом, лемма доказана.

Замечание I. Величина производной от функции соответствия $F'(u_0)$, очевидно, не зависит от выбора решения, соответствующего рассматриваемой траектории L (т. е. не зависит от выбора начального значения t_1).

Замечание II. Производная от функции соответствия, очевидно, всегда положительна. Геометрически этот факт означает, что всякая траектория, пересекающая часть дуги l_1, лежащую по положительную (соответственно отрицательную) сторону траектории L, пересекает часть дуги l_2, также лежащую по положительную (соответственно отрицательную) сторону траектории L.

Предположим теперь, что на некоторой дуге без контакта l, параметрические уравнения которой

$$x = g(u), \quad y = h(u)$$

(функции $g(u)$ и $h(u)$ имеют непрерывные производные до второго порядка), определена функция последования

$$\overline{u} = f(u). \tag{13}$$

Пусть при некотором значении u_0 мы имеем:

$$\overline{u}_0 = f(u_0) \neq u_0. \tag{14}$$

Пусть M_0 — точка дуги l (отличная от ее концов), соответствующая значению $u = u_0$, L — траектория, проходящая через точку M_0, и

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

— соответствующее ей решение, при котором точке M_0 соответствует значение $t = t_0$. По самому смыслу функции последования траектория L пересекает дугу l еще раз при некотором значении $T > t_0$ в точке $\overline{M}_0$, в силу (14) соответствующей значению $u = \overline{u}_0$. При этом, по предположению (см. (14)), $u_0 \neq \overline{u}_0$, т. е. точки M_0 и $\overline{M}_0$ различны, и значит траектория L не замкнута.

Пусть

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \dot\varphi(t_0) & \dot\psi(t_0) \\ g'(u_0) & h'(u_0) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot\varphi(T) & \dot\psi(T) \\ g'(\overline{u}_0) & h'(\overline{u}_0) \end{vmatrix}$$

и пусть x_0, y_0 — координаты точки M_0, а $\overline{x_0}$, $\overline{y_0}$ — координаты точки $\overline{M}_0$. Очевидно,

$$\dot\varphi(t_0) = P(x_0, y_0), \quad \dot\psi(t_0) = Q(x_0, y_0),$$

$$\dot\varphi(T) = P(\overline{x}_0, \overline{y}_0), \quad \dot\psi(T) = Q(\overline{x}_0, \overline{y}_0).$$

Введем следующее, удобное для дальнейшего, обозначение:

$$\begin{vmatrix} \dot\varphi(t) & \dot\psi(t) \\ g'(u) & h'(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \\ g'(u) & h'(u) \end{vmatrix} = \Delta(x, y, u);$$

здесь

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Мы имеем, очевидно:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot\varphi(t_0) & \dot\psi(t_0) \\ g'(u_0) & h'(u_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(x_0\, y_0) & Q(x_0, y_0) \\ g'(u_0) & h'(u_0) \end{vmatrix} = \Delta(x_0, y_0, u_0)$$

и

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot\varphi(T) & \dot\psi(T) \\ g'(\overline{u}_0) & h'(\overline{u}_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(\overline{x}, \overline{y}_0) & Q(\overline{x}_0, \overline{y}_0) \\ g'(\overline{u}_0) & h'(\overline{u}_0) \end{vmatrix} = \Delta(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{u}_0).$$

Лемма IV. *Выражение для производной от функции последования в точке дуги без контакта l, через которую проходит незамкнутая траектория L_0, имеет вид*:

$$f'(u_0) = \frac{\Delta(\overline{x_0}, \overline{y_0}, \overline{u_0})}{\Delta(x_0, y_0, u_0)} e^{\int\limits_{t_0}^{T} \left[P'_x(\varphi(s), \psi(s)) + Q'_y(\varphi(s), \psi(s))\right] ds}.$$

Доказательство. Так как, по предположению, точки M_0 и $\overline{M}_0$ различны, то функцию последования $\overline{u} = f(u)$ в достаточно малой окрестности точки M_0 можно рассматривать как функцию соответствия между двумя дугами l' и l'' без общих точек, являющихся частями дуги l: одна из этих дуг (l') содержит точку M_0, другая (l'') — точку $\overline{M}_0$. Если ввести на дуге l' новые переменные

$$n = u - u_0,$$

а на дуге l'' новые переменные

$$\overline{n} = \overline{u} - \overline{u}_0,$$

то параметрическими уравнениями дуг l' и l'' будут:

$$\left.\begin{aligned} x &= g(n+u_0), \\ y &= h(n+u_0), \end{aligned}\right\} \qquad (l')$$

$$\left.\begin{aligned} x &= g(\bar{n}+\bar{u}_0), \\ y &= h(\bar{n}+\bar{u}_0), \end{aligned}\right\} \qquad (l'')$$

и функцией соответствия между этими дугами будет

$$\bar{n} = \bar{u}_0 + f(n+u_0).$$

Очевидно, производная от этой функции соответствия совпадает с производной от функции последования в точке M_0:

$$\left(\frac{d\bar{n}}{dn}\right)_{n=0} = f'(u_0),$$

и, в силу (12), мы имеем, принимая во внимание введенные выше для Δ_1 и Δ_2 выражения:

$$f'(u_0) = \frac{\Delta(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{u}_0)}{\Delta(x_0, y_0, u_0)} e^{\int\limits_{t_0}^{T} \left[P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)\right] ds}\,{}^{*},$$

что и доказывает лемму.

Предположим теперь, что, наряду с дугой без контакта l, на которой определена функция последования (13), рассматривается дуга без контакта l^*, параметрические уравнения которой

$$x = g^*(v), \quad y = h^*(v)$$

(функции $g^*(v)$ и $h^*(v)$ имеют непрерывные производные до второго порядка). Предположим, кроме того, что траектория L, пересекающая при $t = t_0$ дугу без контакта l в точке M_0, соответствующей значению $u = u_0$, пересекает дугу без контакта l^* при некотором значении $t_0^* > t_0$ (или $t_0^* < t_0$) в некоторой точке N_0, отличной от концов дуги l^* и соответствующей значению v_0, причем при значениях t между t_0 и t_0^* у траектории L нет больше общих точек ни с дугой l, ни с дугой l^*.

Нетрудно видеть, на основании леммы II, что на дуге l^* в окрестности точки N_0 тоже может быть определена функция последования

$$\bar{v} = f^*(v),$$

а между дугами l и l^* — функция соответствия

$$v = \gamma(u)$$

или, что то же,

$$\bar{v} = \gamma(\bar{u}).$$

* Выражение для производной от функции последования в точке, через которую проходит замкнутая траектория, очевидно, получается из этого выражения, если положить $\bar{u}_0 = u_0, \bar{x}_0 = x_0, \bar{y}_0 = y_0$.

При этом

$$v_0 = \gamma(u_0), \quad \bar{v}_0 = \gamma(\bar{u}_0).$$

Мы имеем, очевидно:

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dv}\right)_{v=v_0} = f^{*\prime}(v_0) = \frac{\gamma'(\bar{u}_0)}{\gamma'(u_0)}\left(\frac{d\bar{u}}{du}\right)_{u=u_0} = \frac{\gamma'(\bar{u}_0)}{\gamma'(u_0)}\cdot f'(u_0). \tag{15}$$

Это элементарное соотношение между производными от функции последования на различных дугах без контакта используется в дальнейшем*.

Приведем без доказательств еще следующую элементарную лемму:

Лемма V. *Если*

$$\bar{u} = f(u)$$

— функция последования на дуге без контакта l, определенная при всех значениях u, $a \leqslant u \leqslant b$, и при всех этих значениях u

$$f'(u) < 1 \quad (f'(u) > 1),$$

то существует не более одной замкнутой траектории, пересекающей часть дуги l, соответствующей значениям u, $a \leqslant u \leqslant b$, и в случае, когда такая замкнутая траектория существует, она является грубым устойчивым (соответственно неустойчивым) предельным циклом.

§ 2

Рассмотрим теперь, наряду с системой (D), измененную систему $(\widetilde{D})$ класса N или аналитического класса. Напомним, что, в согласии с терминологией статьи [5], система $(\widetilde{D})$ называется δ-близкой к системе (D) в области G, если в области G справедливы неравенства

$$|\widetilde{P}(x, y) - P(x, y)| < \delta, \quad |\widetilde{Q}(x, y) - Q(x, y)| < \delta,$$
$$|\widetilde{P}'_x(x, y) - P'_x(x, y)| < \delta, \quad |\widetilde{P}'_y(x, y) - P'_y(x, y)| < \delta,$$
$$|\widetilde{Q}'_x(x, y) - Q'_x(x, y)| < \delta, \quad |\widetilde{Q}'_y(x, y) - Q'_y(x, y)| < \delta.$$

В основе всего дальнейшего лежит «теорема о непрерывной зависимости решения и производных решения по начальным значениям от начальных значений и изменения правых частей», формулировку которой мы не приводим (эта теорема сформулирована, например, в [5]). В дальнейшем мы будем эту теорему называть «теоремой I*».

Приведем без доказательства несколько элементарных лемм.

---

* Отметим, что в случае, когда $\bar{u}_0 = u_0$ и, следовательно, $\bar{v}_0 = v_0$, т. е. когда соответствующая траектория является замкнутой, мы, очевидно, имеем:

$$f^{*\prime}(v_0) = f'(u_0),$$

т. е. величина производной от функции последования в этом случае не меняется от выбора дуги без контакта, а также, очевидно, от замены параметра u новым параметром

$$v = \gamma(u),$$

где $\gamma(u)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную производную.

Пусть l — дуга без контакта для траекторий системы (D) и M_0 — точка этой дуги, отличная от ее концов. Очевидно, существует $\delta_0 > 0$ такое, что дуга l является дугой без контакта для всякой измененной системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D).

Лемма VI. *При любом $\varepsilon > 0$ и любом $\Delta > 0$ существуют $\eta > 0$ и $\delta > 0$ $(\delta < \delta_0)$ такие, что дуга l является дугой без контакта для всякой системы $(\widetilde{D})$, δ-близкой к системе (D), и всякая траектория такой системы $(\widetilde{D})$, при $t = t_0$ проходящая через точку η-окрестности точки M_0, при некотором значении t_0', $|t_0' - t_0| < \Delta$, не выходя до этого из ε-окрестности точки M_0, пересекает дугу l.*

Пусть теперь дуги l_1 и l_2, не имеющие общих точек, являются дугами без контакта для траекторий системы (D) и пусть траектория L этой системы при $t = t_1$ пересекает дугу l_1 в отличной от концов этой дуги точке M_1, а при некотором значении $t = t_2 > t_1$ пересекает дугу l_2 в отличной от концов этой дуги точке M_2. Пусть, кроме того, при всех t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, у траектории L больше нет общих точек с дугами l_1 и l_2.

Пусть $\delta_0 > 0$ таково, что обе дуги l_1 и l_2 остаются дугами без контакта для любой системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D). Тогда из теоремы I* о непрерывной зависимости от начальных значений и изменения правых частей и леммы VI вытекает следующая

Лемма VII. *При любых $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$ существуют $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon, \Delta) < \delta_0$ и $\eta > 0$ $(\eta = \eta(\varepsilon, \Delta))$ такие, что всякая траектория $\widetilde{L}$ любой системы $(\widetilde{D})$, δ-близкой к системе (D), проходящая при $t = t_1$ через точку дуги l_1, лежащую в η-окрестности точки M_1, пересекает при некотором значении t_2', удовлетворяющем неравенству $|t_2' - t_2| < \Delta$, дугу l_2, причем часть этой траектории соответствующая значениям t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, не имеет общих точек с дугами l_1 и l_2 и лежит целиком в ε-окрестности части траектории L, соответствующей значениям t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.*

В силу леммы VII, при сделанных относительно дуг l_1 и l_2 предположениях у системы (D) существует функция соответствия между этими дугами. Пусть

$$\bar{u} = F(u)$$

— эта функция соответствия, и пусть она определена при всех значениях параметра u на дуге l_1,

$$a \leqslant u \leqslant b,$$

причем значения

$$\bar{a} = F(a) \quad \text{и} \quad \bar{b} = F(b)$$

соответствуют точкам дуги l_2, отличным от ее концов. Пусть по-прежнему $\delta_0 > 0$ таково, что дуги l_1 и l_2 остаются дугами без контакта для траекторий всякой системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D).

На основании леммы VII и теоремы I* нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы:

Лемма VIII. *При любом* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ $(\delta < \delta_0)$ *такое, что у всякой системы* $(\widetilde{\mathrm{D}})$, δ*-близкой к системе* (D), *существует функция соответствия между дугами* l_1 *и* l_2

$$\bar{u} = \widetilde{F}(u),$$

определенная при значениях u,

$$a \leqslant u \leqslant b,$$

и при всех этих значениях u *выполняются неравенства*

$$|\widetilde{F}(u) - F(u)| < \varepsilon, \quad |\widetilde{F}'(u) - F'(u)| < \varepsilon.$$

Полностью аналогичная лемма справедлива и для функции последования. Именно, пусть у системы (D) на дуге l при всех значениях параметра u на этой дуге,

$$a \leqslant u \leqslant b,$$

определена функция последования

$$\bar{u} = f(u),$$

причем значения

$$\bar{a} = f(a) \quad \text{и} \quad \bar{b} = f(b)$$

соответствуют точкам дуги l, отличным от концов этой дуги. Пусть $\delta_0 > 0$ таково, что дуга l остается дугой без контакта для траектории всякой измененной системы $(\widetilde{\mathrm{D}})$, δ_0-близкой к системе (D). Имеет место

Лемма IX. *При любом* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, *такое, что у всякой системы* $(\widetilde{\mathrm{D}})$, δ*-близкой к системе* (D), *на дуге* l *при значениях* u, $a \leqslant u \leqslant b$, *определена функция последования*

$$\bar{u} = \tilde{f}(u),$$

при этом выполняются неравенства

$$|\tilde{f}(u) - f(u)| < \varepsilon, \quad |\tilde{f}'(u) - f'(u)| < \varepsilon.$$

§ 3

Пусть в области G у системы (D) существует состояние равновесия O типа седла, и пусть x_0, y_0 — координаты седла O. Будем называть ω-сепаратрисой (α-сепаратрисой) седла положительную (соответственно отрицательную) полутраекторию, стремящуюся к седлу O.

Сепаратрисой седла O будем называть траекторию, у которой либо положительная полутраектория является ω-сепаратрисой седла O, либо отрицательная полутраектория является α-сепаратрисой седла O.

Приведем без доказательств ряд элементарных лемм, касающихся седел и их сепаратрис (см. [4]).

Лемма X. *Если* O — *седло системы* (D), *то*:

а) *Существуют* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что у всякой системы* $(\widetilde{D})$, δ_0*-близкой к системе* (D), *в* ε_0*-окрестности седла* O *системы* (D) *существует одно и только одно состояние равновесия* $\widetilde{O}$ *и при этом типа седла.*

б) *При всяком* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *существует* $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, *такое, что у всякой измененной системы* $(\widetilde{D})$, δ*-близкой к системе* (D), *седло* $\widetilde{O}$ *лежит в* ε*-окрестности седла* O *системы* (D).

Замечание. Предположим, что рассматривается система, правые части которой суть непрерывные функции параметра μ, т. е. система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \mu),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y, \mu), \qquad (\widetilde{D}_\mu)$$

причем при $\mu = \mu_0$ мы получаем исходную систему (D). Тогда, в силу леммы X, существует $\alpha > 0$ такое, что при всех μ, $|\mu - \mu_0| \leqslant \alpha$, у системы $(\widetilde{D}_\mu)$ существует седло $O(\mu)$ и координаты $x_0(\mu)$ и $y_0(\mu)$ этого седла — непрерывные функции μ, такие, что $x_0(\mu_0) = x_0$, $y_0(\mu_0) = y_0$.

Следующая лемма формулируется для ω-сепаратрисы; полностью аналогичная лемма, очевидно, справедлива и для α-сепаратрисы.

Пусть L^+ — ω-сепаратриса седла O системы (D), M_0 — точка на ней и l — дуга без контакта, проведенная через точку M_0 и имеющая эту точку своей внутренней точкой. Пусть

$$x = g(u), \quad y = h(u)$$

— параметрические уравнения дуги l, и пусть точка M_0 соответствует значению $u = u_0$.

В силу леммы X, у всякой измененной системы $(\widetilde{D})$, достаточно близкой к системе (D), будет существовать седло $\widetilde{O}$, сколь угодно близкое к седлу O. При этом справедлива следующая лемма, доказательство которой опускается (см. [4]):

Лемма XI. *При любом* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta > 0$ *такое, что у всякой системы* $(\widetilde{D})$, δ*-близкой к системе* (D),

а) *существует* ω*-сепаратриса седла* $\widetilde{O}$ — $\widetilde{L}^+$, *пересекающая дугу без контакта* l *в точке* $\widetilde{M}_0$, *лежащей в* ε*-окрестности точки* M_0 *и соответствующей значению* $\widetilde{u}_0$, $|\widetilde{u}_0 - u_0| < \varepsilon$;

б) *если на сепаратрисах* L^+ *и* $\widetilde{L}^+$ *выбраны движения, при которых точкам* M_0 *и* $\widetilde{M}_0$ *соответствует одно и то же значение* $t = t_0$, *то всякая точка* $\widetilde{L}^+$, *соответствующая любому* $t > t_0$, *лежит в* ε*-окрестности точки* L^+, *соответствующей тому же значению* t.

Замечание. Предположим, что рассматривается система, правые части которой суть непрерывные функции μ, т. е. система $(\widetilde{D}_\mu)$, причем при значении $\mu = \mu_0$ мы получаем исходную систему (D). Тогда, в силу леммы XI, при всех μ, $|\mu - \mu_0| \leqslant \alpha$, где α — надлежащим образом выбранная положительная величина, существует седло $O(\mu)$ системы (D_μ) (см. замечание к предыдущей лемме) и ω-сепаратриса $\widetilde{L}_\mu^+$ этого седла, пересекающая дугу l в точке $\widetilde{M}_0(\mu)$, причем значение $\widetilde{u}_0(\mu)$, соответствующее точке $\widetilde{M}_0(\mu)$ является непрерывной функцией μ.

В дальнейшем угол θ $(0 \leqslant \theta < \pi)$ между двумя векторами $\vec{N}$ и $\vec{K}$ (порядок векторов не безразличен!) будем считать положительным, если направление вектора $\vec{N}$ может быть получено из направления вектора $\vec{K}$ вращением на угол θ против часовой стрелки.

Рассмотрим один частный случай измененной системы, именно, рассмотрим измененную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + \mu Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) - \mu P(x, y), \qquad (D_\mu^0)$$

где μ — параметр. Нетрудно видеть, что в каждой точке области G угол между направлением векторного поля, заданного системой (D), и направлением поля, заданного системой (D_μ^0) (порядок не безразличен), будет положительным, если

$$\mu > 0,$$

и отрицательным, если

$$\mu < 0.$$

Пусть L^+ — сепаратриса седла O системы (D) и l — дуга без контакта, имеющая общую точку M_0 (и только одну) с сепаратрисой L^+, отличную от концов дуги l и соответствующую в параметрических уравнениях

$$x = g(u), \quad y = h(u)$$

дуги l значению $u = u_0$. Предположим, кроме того, что на дуге l положительное направление выбрано в сторону возрастания u и что при этом угол между дугой l и сепаратрисой L^+ в точке M_0 положителен.

Нетрудно видеть, что для всех измененных систем вида (D_μ^0) начало координат является седлом. Кроме того, в силу леммы XI, при всех достаточно малых μ существует сепаратриса $\widetilde{L}_\mu^+$ системы (D_μ^0), пересекающая дугу l в некоторой точке $\widetilde{M}_0(\mu)$. Обозначим через $\widetilde{u}_0(\mu)$ значение u, соответствующее точке $\widetilde{M}_0(\mu)$. Имеет место лемма, элементарное доказательство которой мы опускаем.

Лемма XII. *Если* $\mu > 0$, *то*

$$\widetilde{u}_0(\mu) < u_0,$$

а если $\mu < 0$, *то*

$$\widetilde{u}_0(\mu) > u_0.$$

Полностью аналогичная лемма (с очевидными изменениями) справедлива и для α-сепаратрисы системы (D_μ^0).

Рассмотрим окружность C с центром в седле O, не содержащую, кроме O, ни внутри соответствующего круга, ни на C, больше ни одного состояния равновесия. Пусть L_1^+ и L_2^- — ω- и α-сепаратрисы седла O системы (D), причем предположим, что у них имеются лежащие вне окружности C точки. Пусть M_1 и M_2 — последние их общие точки с окружностью C (так что на частях M_1O и M_2O полутраекторий L_1^+ и L_2^- не лежит уже больше ни одной точки окружности C). Части M_1O и M_2O сепаратрис L_1^+ и L_2^- делят область внутри окружности C на два криволинейных сектора, в одном из которых лежат две другие сепаратрисы седла O.

Обозначим через g_C тот из секторов, в котором не лежат две другие сепаратрисы седла O. Пусть A и B — отличные от M_1 и M_2 точки на частях M_1O и M_2O сепаратрис L_1^+ и L_1^- и λ_1, λ_2 — дуги без контакта (без общих точек), проведенные через точки A и B.

Лемма XIII (Бендиксона [8]). *Существуют части AA_1 и BB_1 дуг без контакта λ_1 и λ_2, все точки которых, кроме концов A и B, соответственно лежат в секторе g_C, и притом такие, что всякая траектория системы* (D), *при $t = t_1$ проходящая через отличную от A точку M дуги AA_1, при некотором значении $t_2 > t_1$ (не выходя из g_C при значениях t, $t_1 < t < t_2$, и не пересекая дуг λ_1 и λ_2) пересекает дугу λ_2 в некоторой отличной от B точке N и при этом:*

а) *траектория, проходящая через точку A_1 дуги AA_1, пересекает дугу BB_1 в точке B_1,*

б) *точка N стремится к точке B, когда точка M стремится к точке A,*

в) *при любом $T > 0$ существует точка M^* дуги AA_1 такая, что для всякой траектории, при $t = t_1$ пересекающей часть M^*A дуги AA_1, выполняется неравенство*

$$|t_2 - t_1| > T.$$

Сохраняя обозначения, введенные в последней лемме, рассмотрим измененную систему ($\widetilde{\text{D}}$).

Из теоремы I* (о непрерывной зависимости решения от начальных условий и изменения правых частей) и предыдущих лемм, очевидно, следует, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, такие, что, какую бы систему ($\widetilde{\text{D}}$), δ_0-близкую к системе (D), мы ни взяли,

1) в ε_0-окрестности седла O системы (D) существует одно и только одно состояние равновесия системы ($\widetilde{\text{D}}$) — седло $\widetilde{O}$;

2) дуги λ_1 и λ_2 являются дугами без контакта для траекторий системы ($\widetilde{\text{D}}$);

3) существуют сепаратрисы седла $\widetilde{O}$ системы ($\widetilde{\text{D}}$) — $\widetilde{L}_1^+$ и $\widetilde{L}_2^-$, пересекающие дуги λ_1 и λ_2 соответственно в точках $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, причем точка $\widetilde{A}$ лежит на дуге λ_1 по ту же сторону от точки A_1, что и точка A, а точка $\widetilde{B}$ лежит на дуге λ_2 по ту же сторону от точки B_1, что и точка B;

4) траектория системы ($\widetilde{\text{D}}$), проходящая через точку A_1, пересекает дугу λ_2 в некоторой точке $\widetilde{B}_1$, причем точка $\widetilde{B}_1$ лежит на дуге λ_2 по ту же сторону от точки $\widetilde{B}$, что и точка B_1.

Нетрудно убедится в справедливости следующих двух лемм.

Лемма XIV. *При любом $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$) можно указать $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$) такое, что у всякой системы* ($\widetilde{\text{D}}$), *δ-близкой к системе* (D),

а) *точка $\widetilde{A}$ лежит в ε-окрестности точки A, точка $\widetilde{B}$ — в ε-окрестности точки B и точка $\widetilde{B}_1$ — в ε-окрестности точки B_1;*

б) *траектория системы* ($\widetilde{\mathrm{D}}$), *проходящая при* $t = t_1$ *через какую-нибудь точку* M *дуги* $\widetilde{A}A_1$, *при* $t = \widetilde{t}_2 > t_1$ *пересекает дугу* λ_2 *в точке* N, *и, когда точка* M *стремится к точке* $\widetilde{A}$, *точка* N *стремится к точке* $\widetilde{B}$.

Лемма XV. *Пусть при заданном* $T > 0$ M^* — *такая точка дуги* λ_1, *что для всякой траектории системы* (D), *пересекающей часть* M^*A *дуги* λ_1, *выполняется неравенство*

$$|t_1 - t_2| > T.$$

Тогда существует $\delta > 0$ ($\delta < \delta_0$) *такое, что у любой измененной системы* ($\widetilde{\mathrm{D}}$), δ-*близкой к системе* (D), *точка* $\widetilde{A}$ *на дуге* λ_1 *лежит по ту же сторону от точки* M^*, *что и точка* A, *и для всякой траектории системы* ($\widetilde{\mathrm{D}}$), *пересекающей часть* $M^*\widetilde{A}$ *дуги* λ_1, *справедливо неравенство*

$$|t_1 - \widetilde{t}_2| > T.$$

В дальнейшем существенную роль будет играть выражение $P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$, где x_0, y_0 — координаты рассматриваемого седла O системы (D).

Приведем лемму, из которой следует, что равенство или неравенство нулю выражения $P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$ в состоянии равновесия O инвариантно относительно выбора координат. Именно, предположим, что мы переходим от координат x, y к новым координатам ξ, η:

$$\xi = \Phi(x, y), \qquad \eta = \Psi(x, y);$$

здесь Φ, Ψ — непрерывные в области G функции с непрерывными частными производными не менее чем до второго порядка, причем существуют однозначные обратные функции

$$x = \Phi^{-1}(\xi, \eta), \qquad y = \Psi^{-1}(\xi, \eta);$$

кроме того, во всех точках области G

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \\ \Psi'_x(x, y) & \Psi'_y(x, y) \end{vmatrix} > 0.$$

После перехода в системе (D) к новым координатам ξ, η мы получаем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi'_x(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) P(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) + \Phi'_y(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) Q(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) = P^*(\xi, \eta),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \Psi'_x(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) P(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) + \Psi'_y(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) Q(\Phi^{-1}, \Psi^{-1}) = Q^*(\xi, \eta),$$

и при этом новыми координатами состояния равновесия $O(x_0, y_0)$ системы (D) будут, очевидно,

$$\xi_0 = \Phi(x_0, y_0), \qquad \eta_0 = \Psi(x_0, y_0).$$

Справедлива следующая

Лемма XVI. *Имеет место соотношение*

$$P^{*\prime}_{\xi}(\xi_0, \eta_0) + Q^{*\prime}_{\eta}(\xi_0, \eta_0) = J(x_0, y_0)[P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)].$$

Доказательство. Найдем выражение для

$$P_{\xi}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) + Q_{\eta}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0).$$

Мы имеем:

$$P_{\xi}^{*\prime}(\xi, \eta) = \Phi'_x(x, y)\left[P'_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + P'_y \frac{\partial y}{\partial \xi}\right] + \Phi'_y(x, y)\left[Q'_x \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q'_y \frac{\partial y}{\partial \xi}\right] +$$

$$+ P(x, y)\left[\Phi''_{xx} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \Phi''_{xy} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right] + Q(x, y)\left[\Phi''_{xy} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \Phi''_{yy} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right],$$

$$Q_{\eta}^{*\prime}(\xi, \eta) = \Psi'_x(x, y)\left[P'_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + P'_y \frac{\partial y}{\partial \eta}\right] + \Psi'_y(x, y)\left[Q'_x \frac{\partial x}{\partial \eta} + Q'_y \frac{\partial y}{\partial \eta}\right] +$$

$$+ P(x, y)\left[\Psi''_{xx} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \Psi''_{xy} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right] + Q(x, y)\left[\Psi''_{xy} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \Psi''_{yy} \frac{\partial y}{\partial \eta}\right].$$

Подставляя сюда выражения для $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \eta}$, найденные из соотношений

$$1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad 1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

и принимая во внимание, что $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, после элементарных преобразований получаем соотношение

$$P_{\xi}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) + Q_{\eta}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) = J(x_0, y_0)[P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)].$$

Следствие. *Если в состоянии равновесия* $O(x_0, y_0)$

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0$$

$$(\textit{или } P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0,$$

$$\textit{или } P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0),$$

то после преобразования переменных

$$P_{\xi}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) + Q_{\eta}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) > 0$$

$$(\textit{или } P_{\xi}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) + Q_{\eta}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) < 0,$$

$$\textit{или } P_{\xi}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) + Q_{\eta}^{*\prime}(\xi_0, \eta_0) = 0).$$

Глава II

§ 1

Предположим, что у системы (D) существует седло O и одна из сепаратрис этого седла L_0 «образует петлю», т. е. является траекторией и при $t \to +\infty$, и при $t \to -\infty$, стремящейся к седлу (см. [4])*. Обозначим через

* Система (D), очевидно, является тогда негрубой системой.

C_0 простую замкнутую кривую, образованную траекторией L_0 и точкой O. Кривую C_0 мы будем называть «петлей сепаратрисы L_0» или иногда просто «петлей». Две другие сепаратрисы седла O L_1^+ и L_2^- лежат либо обе внутри кривой C_0, либо обе вне этой кривой. Всюду в дальнейшем будем для определенности предполагать, что эти сепаратрисы лежат вне кривой C_0 (в случае, когда они лежат внутри кривой C_0, все рассуждения полностью аналогичны).

Пусть

$$x = \varphi_0(t), \quad y = \psi_0(t)$$

— какое-нибудь решение, соответствующее сепаратрисе L_0, и пусть M_0 и M_1 — точки на сепаратрисе L_0, соответствующие значениям t_0 и t_1, причем для определенности предположим, что $t_1 > t_0$. Проведем через точки M_0 и M_1 дуги без контакта l_0 и l_1, содержащие соответственно точки M_0 и M_1 внутри и не имеющие друг с другом общих точек. Очевидно, имеет место лемма, доказательство которой, в силу его элементарности, не приводится.

Лемма I. *Сепаратриса, образующая петлю, может иметь со всякой дугой без контакта только одну общую точку.*

Пусть M_0B — часть дуги l_0, все точки которой, кроме конца M_0, являющегося точкой сепаратрисы L_0, лежат внутри кривой C_0; M_0A — часть дуги l_0, все точки которой, кроме конца M_0, лежат вне кривой C_0. Аналогично, пусть M_1B_1 — часть дуги l_1, кроме конца M_1, лежащая внутри кривой C_0, и M_1A_1 — часть дуги l_1, кроме конца M_1, лежащая вне кривой C_0.

Имеет место следующая лемма, непосредственно вытекающая из лемм II и XIII главы I.

Лемма II. *При любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякая траектория L, при $t = t_0$ проходящая через отличную от M_0 точку M дуги M_0B, лежащую в δ-окрестности точки M_0, при некотором значении $T > t_0$, не выходя при значениях t, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, из ε-окрестности петли, образованной траекторией L_0 (т. е. из ε-окрестности кривой C_0), пересекает дугу l_0 еще раз в некоторой точке $\overline{M}$ (отличной от точки M или совпадающей с ней).*

Замечание. В силу леммы II главы I, задавая вместе с $\varepsilon > 0$ произвольную величину $\Delta > 0$, всегда можно взять $\delta > 0$ столь малым, чтобы траектория L_0 при некотором значении t_1' $|t_1' - t_1| < \Delta$ $(t_0 < t_1' < T)$, пересекала дугу M_1B_1.

Приведем еще следующую лемму:

Лемма III. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при сколь угодно малом $\delta > 0$ всякая траектория, при $t = t_0$ пересекающая дугу M_0A (все точки которой, кроме точки M_0, лежат вне кривой C_0) в отличной от M_0 точке, выходит из ε_0-окрестности петли (т. е. из ε_0-окрестности кривой C_0) и при возрастании и при убывании t.*

Доказательство. Рассмотрим ω-сепаратрису L_1^+ и α-сепаратрису L_2^- седла O, лежащие вне кривой C_0. Пусть N_1 и N_2 — точки на сепаратрисах L_1^+ и L_2^-, и λ_1, λ_2 — дуги без контакта, проведенные через каждую из этих точек, содержащие соответственно точку N_1 и N_2 внутри. В силу леммы XIII, траектории, пересекающие дугу M_0A, все точки которой, кроме точки

M_0, лежат вне кривой C_0, в достаточно близкой к точке M_0, но отличной от M_0, точке, при возрастании t пересекают дугу λ_2, а при убывании t — дугу λ_1. Всегда можно взять $\varepsilon_0 > 0$ таким, чтобы ε_0-окрестность петли (т. е. кривой C_0) не содержала дуг без контакта λ_1 и λ_2. Отсюда, очевидно, следует утверждение леммы.

Вернемся к рассмотрению дуги M_0B, лежащей внутри кривой C_0. В силу леммы II настоящей главы, всякая траектория, при $t = t_0$ пересекающая эту дугу в точке M, достаточно близкой к M_0, при некотором значении $T > t_0$ пересекает эту дугу еще раз в точке $\overline{M}$ («последующей» для M), и, когда точка M стремится к точке M_0, точка $\overline{M}$ тоже стремится к M_0. Так как дуги M_0B и M_1B_1, очевидно, могут играть роль дуг AA_1 и BB_1 леммы XIII главы I, то имеет место лемма, непосредственно вытекающая из лемм II и XIII главы I.

Лемма IV. *Когда точка M на дуге M_0B стремится к точке M_0 (лежащей на сепаратрисе), то значение T параметра t, соответствующее точке $\overline{M}$, неограниченно возрастает.*

Будем говорить, что траектория L стремится к петле L_0 при $t \to +\infty$ (соответственно при $t \to -\infty$), если ее ω-предельное (соответственно α-предельное) множество состоит из траектории L_0 и состояния равновесия O.

Имеет место следующая лемма, доказательство которой мы опускаем (оно проводится при помощи элементарных рассуждений, опирающихся на лемму II настоящей главы).

Лемма V. *Если среди траекторий, пересекающих дугу M_0B в достаточно близких к точке M_0, но отличных от M_0, точках, нет замкнутых траекторий, то либо все эти траектории стремятся к петле при $t \to +\infty$, либо все эти траектории стремятся к петле при $t \to -\infty$.*

Когда все траектории, пересекающие дугу M_0B в отличных от M_0 и достаточно близких к M_0 точках, стремятся к петле при $t \to +\infty$, мы будем говорить, что петля устойчива, а когда они стремятся к петле при $t \to -\infty$, мы будем говорить, что петля неустойчива.

В силу леммы II настоящей главы, на некоторой части дуги M_0B, имеющей одним из концов точку M_0, если исключить точку M_0, может быть определена функция последования. Без ограничения общности мы можем предполагать, что функция последования определена на всей дуге M_0B, за исключением точки M_0 (в противном случае мы взяли бы в качестве точки B более близкую к M_0 точку). Кроме того, мы будем предполагать, что функции (ср. § 1, гл. I)

$$x = g_0(u), \quad y = h_0(u)$$

в параметрических уравнениях дуги l_0 во всяком случае имеют непрерывные производные второго порядка.

Если, в частности, в качестве дуги l_0 взять отрезок нормали к траектории L_0 в точке M_0, то за функции $g_0(u)$ и $h_0(u)$ могут быть взяты функции

$$g_0(u) = \varphi_0(t_0) + \dot{\psi}_0(t_0)\,u,$$

$$h_0(u) = \psi_0(t_0) - \dot{\varphi}_0(t_0)\,u.$$

Предположим, что при введенном на дуге l_0 параметре u точке M_0 соответствует значение u_0, точке B — значение $b > u_0$ и точке A — значение $a < u_0$.

Пусть

$$\bar{u} = f(u)$$

— функция последования на дуге M_0B, очевидно, определенная при всех значениях u,

$$u_0 < u \leqslant b.$$

(При рассмотрении функции последования мы всегда будем предполагать для определенности, что «последующая точка» соответствует значению t, большему, чем предыдущая точка.)

В дальнейшем мы будем также рассматривать функцию

$$\Phi(u) = f(u) - u.$$

В силу леммы II настоящей главы, при $u \to u_0$

$$\Phi(u) \to 0.$$

Если существуют замкнутые траектории, пересекающие дугу M_0B, то всякой такой траектории, очевидно, соответствует значение u^*, при котором

$$\Phi(u^*) = 0.$$

Если существует значение $u_1 < b$ такое, что при всех u, $u_0 < u \leqslant u_1$,

$$\Phi(u) \neq 0$$

(т. е. нет замкнутых траекторий, пересекающих дугу M_0B в точках, соответствующих значениям u, $u_0 < u \leqslant u_1$), то петля устойчива или неустойчива в зависимости от знака выражения

$$\Phi(u) = f(u) - u.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать предел, к которому стремится производная от функции последования $f'(u)$, когда $u \to u_0$.

Будем обозначать через

$$x = \varphi_M(t), \quad y = \psi_M(t)$$

решение, соответствующее траектории L, проходящей через какую-нибудь точку M дуги M_0B. Будем, как и выше, предполагать, что при выбранном решении точке M соответствует значение $t = t_0$, а точке $\overline{M}$ (последующей для M) — значение $T > t_0$.

Обозначим через ξ, η координаты точки M; через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ — координаты точки $\overline{M}$ и через ξ_0, η_0 — координаты точки M_0. Будем обозначать значение параметра на дуге l_0, соответствующее точке M, через u, а соответствующее точке $\overline{M}$ — через $\bar{u}$.

Кроме того, обозначим через x_0, y_0 координаты седла O и рассмотрим величину

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Имеет место следующая

Лемма VI. *Когда $u \to u_0$, т. е. точка M на дуге l_0 стремится к точке $\overline{M}$, то*

$$f'(u) \to +\infty,$$

если

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0,$$

и

$$f'(u) \to 0,$$

если

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0.$$

Доказательство. В силу леммы IV главы I, мы имеем:

$$f'(u) = \frac{\Delta(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{u})}{\Delta(\xi, \eta, u)} e^{\int\limits_{t_0}^{T} [P'_x(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q'_y(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt},$$

где

$$\Delta(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{u}) = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(T) & \dot{\psi}(T) \\ g'_0(\overline{u}) & h'_0(\overline{u}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(\overline{\xi}, \overline{\eta}) & Q(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \\ g'_0(\overline{u}) & h'_0(\overline{u}) \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta(\xi, \eta, u) = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(t_0) & \dot{\psi}(t_0) \\ g'_0(u) & h'_0(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P(\xi, \eta) & Q(\xi, \eta) \\ g'_0(u) & h'_0(u) \end{vmatrix}.$$

Когда $u \to u_0$, очевидно,

$$\Delta(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{u}) \to \Delta(\xi_0, \eta_0, u_0)$$

и

$$\Delta(\xi, \eta, u) \to \Delta(\xi_0, \eta_0, u_0)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta(\overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{u})}{\Delta(\xi, \eta, u)} \to 1.$$

Посмотрим теперь, к какому пределу стремится выражение

$$e^{\int\limits_{t_0}^{T} [P'_x(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q'_y(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt},$$

когда точка M стремится к точке M_0. Для этого рассмотрим предел, к которому стремится интеграл

$$\int\limits_{t_0}^{T} [P'_x(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q'_y(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt,$$

когда $M \to M_0$.

Введем обозначение:

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = \lambda.$$

Предположим сначала, что

$$\lambda > 0.$$

Всегда можно взять окружность σ с центром в точке O столь малого радиуса, чтобы во всех точках $R(x, y)$ внутри этой окружности выполнялось неравенство

$$P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) > \frac{\lambda}{2}. \tag{16}$$

Принимая во внимание формулу (15) § 1 гл. I, мы всегда можем считать, что точки M_0 и M_1 и дуги l_0 и l_1 взяты так, что соответствующая значениям t, $t \leqslant t_0$, часть M_0O и соответствующая значениям $t \geqslant t_1$ часть M_1O сепаратрисы L_0, а также дуги l_0 и l_1, целиком лежат внутри окружности σ. Мы имеем, очевидно:

$$\int_{t_0}^{T} [P'_x + Q'_y]\,dt = \int_{t_0}^{t'_1} [P'_x + Q'_y]\,dt + \int_{t'_1}^{T} [P'_x + Q'_y]\,dt; \tag{17}$$

здесь t'_1 — значение t, соответствующее точке пересечения с дугой M_1B_1 траектории L, при $t = t_0$ проходящей через точку M дуги l_0. Когда точка M стремится к точке M_0, то, очевидно (см. лемму II главы I), $t'_1 \to t_1$ и

$$\int_{t_0}^{t'_1} [P'_x(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q'_y(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\,dt \to$$

$$\to \int_{t_0}^{t_1} [P'_x(\varphi_0(t), \psi_0(t)) + Q'_y(\varphi_0(t), \psi_0(t))]\,dt$$

($x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$ — решение, соответствующее сепаратрисе L_0, на котором точка M_0 соответствует значению $t = t_0$). Таким образом, первый из интегралов в правой части (17) стремится к конечному пределу. Рассмотрим второй из этих интегралов, т. е.

$$\int_{t'_1}^{T} [P'_x(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q'_y(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\,dt.$$

В силу леммы II и леммы XIII главы I, когда точка M достаточно близка к точке M_0, траектория L пересекает при $t = t'_1$ дугу l_1 в точке, сколь угодно близкой к точке M_1, и все точки этой траектории, соответствующие значениям $t, t_1' \leqslant t \leqslant T$, т. е. точки с координатами

$$\varphi_M(t),\ \psi_M(t)$$

при значениях $t, t'_1 < t < T$, лежат целиком внутри окружности σ. А тогда мы будем иметь, в силу (16):

$$P'_x(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q'_y(\varphi_M(t), \psi_M(t)) > \frac{\lambda}{2}, \quad t'_1 \leqslant t \leqslant T,$$

и

$$\int_{t_1'}^{T} [P_x'(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q_y'(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt > \frac{\lambda}{2}(T - t_1').$$

Но, в силу леммы II и леммы XV главы I, когда точка M стремится к M_0, то $t_1' \to t_1$, а $T \to +\infty$, и, следовательно, когда точка M стремится к M_0,

$$\int_{t_1'}^{T} [P_x'(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q_y'(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt \to +\infty.$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$e^{\int_{t_0}^{T} [P_x'(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q_y'(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt} \to +\infty.$$

Совершенно аналогично мы покажем, что в случае $\lambda < 0$

$$\int_{t_0}^{T} [P_x'(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q_y'(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt \to -\infty,$$

когда точка M стремится к точке M_0, и, следовательно,

$$e^{\int_{t_0}^{T} [P_x'(\varphi_M(t), \psi_M(t)) + Q_y'(\varphi_M(t), \psi_M(t))]\, dt} \to 0.$$

Отсюда, очевидно, вытекает справедливость утверждения леммы.

Теорема I. *Если*

$$\lambda = P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) > 0,$$

то петля неустойчива; если

$$\lambda = P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) < 0,$$

то петля устойчива.

Доказательств. Предположим сначала, что

$$\lambda > 0.$$

Будем рассматривать функцию

$$\Phi(u) = f(u) - u.$$

Имеем:

$$\lim_{u \to u_0} \Phi(u) = 0. \tag{18}$$

Так как, в силу предыдущей леммы, при $u \to u_0$

$$f'(u) \to +\infty,$$

то существует u_1 такое, что при всех $u, u_0 < u \leqslant u_1$,

$$f'(u) > \alpha > 1$$

и, значит,

$$\Phi'(u) = f'(u) - 1 > 0. \tag{19}$$

Из (18) и (19), очевидно, следует, что при всех u, $u_0 < u \leqslant u_1$,

$$\Phi(u) > 0,$$

т. е. петля неустойчива.

В случае, когда $\lambda < 0$,

$$f'(u) \to 0 \text{ при } u \to u_0,$$

и, следовательно, существует u_1 такое, что при всех u, $u_0 < u \leqslant u_1$,

$$f'(u) < 1,$$

т. е.

$$\Phi'(u) < 0. \tag{20}$$

Из (18) и (20), очевидно, следует, что при всех u, $u_0 < u \leqslant u_1$,

$$\Phi(u) < 0,$$

т. е. петля устойчива. Теорема доказана.

Элементарные примеры показывают, что если

$$\lambda = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0,$$

то возможен как случай, когда все траектории, проходящие через точки внутри петли, достаточно близкие к петле, замкнуты, так и случай, когда петля устойчива или неустойчива.

Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = 2y = P_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = 2x - 3x^2 = Q_1(x, y). \tag{D$_1$}$$

Общий интеграл этой системы

$$x^3 - x^2 + y^2 = C.$$

При $C = 0$ мы, очевидно, получаем лемнискату Бернулли. Петлю лемнискаты образует сепаратриса L_0 седла $O(0, 0)$ системы (D$_1$), лежащего в начале координат. Мы имеем в рассматриваемом случае

$$P'_{1x}(0, 0) + Q'_{1y}(0, 0) = 0,$$

и все траектории внутри петли, очевидно, замкнуты.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2y + \mu(x^3 - x^2 + y^2)(2x - 3x^2) = P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 3x^2 - \mu(x^3 - x^2 + y^2)\,2y = Q_2(x, y). \end{aligned} \tag{D$_2$}$$

Лемниската Бернулли, очевидно, будет интегральной кривой и этой системы, т. е. L_0 является сепаратрисой, образующей петлю и у системы (D$_2$). Кроме того, для этой системы мы имеем также:

$$P'_{2x}(0, 0) + Q'_{2y}(0, 0) = 0.$$

Нетрудно видеть, что замкнутые траектории системы (D_1) внутри петли L_0 являются циклами без контакта для траекторий системы (D_2) и что петля сепаратрисы L_0 в системе (D_2) устойчива, когда $\mu > 0$, и неустойчива, когда $\mu < 0$.*

§ 2

Предполагая, как и выше, что у системы (D) существует сепаратриса L_0 седла O, образующая петлю, будем, наряду с системой (D), рассматривать измененную систему ($\widetilde{D}$).

Сохраним все обозначения предыдущего параграфа. Пусть M_0 и M_1 — точки сепаратрисы L_0, соответствующие значениям $t = t_0$ и $t = t_1$, $t_0 < t_1$, l_0 и l_1 — дуги без контакта, проведенные через эти точки, u — параметр на дуге l_0 и т. д. Пусть L_0^+ — положительная полутраектория траектории L_0, (т. е. ω-сепаратриса седла O), точками которой являются M_0 и M_1 (так что точки L_0^+ соответствуют значениям $t \geqslant t_0^*$, где $t_0^* < t_0$), а L_0^- — отрицательная полутраектория траектории L_0 (т. е. α-сепаратриса седла O), точками которой являются M_0 и M_1 (так что точки L_0^- соответствуют значениям $t \leqslant t_1^*$, где $t_1^* > t_1$).

В силу лемм X и XI главы I, существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой измененной системы ($\widetilde{D}$), δ_0-близкой к системе (D), а) в ε_0-окрестности седла O существует только одно состояние равновесия — седло $\widetilde{O}$; б) существуют ω-сепаратриса $\widetilde{L}_0^+$ и α-сепаратриса $\widetilde{L}_0'^-$ седла $\widetilde{O}$, пересекающие дугу l_0 соответственно в точках $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_0'$, лежащих между точками A и B этой дуги; в) ω-и α-сепаратрисы $\widetilde{L}_0^+$ и $\widetilde{L}_0'^-$ пересекают дугу l_1 соответственно в точках $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_1'$, лежащих между точками A_1 и B_1 дуги l_1.

Кроме того, в силу леммы XI главы I, при любом положительном $\varepsilon < \varepsilon_0$, существует $\delta < \delta_0$ такое, что у всякой системы ($\widetilde{D}$), δ-близкой к системе (D), седло $\widetilde{O}$ лежит в ε-окрестности седла O, всякая точка полутраектории $\widetilde{L}_0^+$ — в ε-окрестности точки полутраектории L_0^+, соответствующей тому же значению параметра t, и всякая точка полутраектории $\widetilde{L}_0'^-$ — в ε-окрестности точки полутраектории L_0^-, соответствующей тому же значению параметра t; при этом точки $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_0'$ лежат в ε-окрестности точки M_0, а точки $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_1'$ — в ε-окрестности точки M_1.

Обозначим через $\widetilde{u}_0$ и $\widetilde{u}_0'$ значения u, соответствующие точкам $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_0'$ ($a < \widetilde{u}_0 < b$, $a < \widetilde{u}_0' < b$). Очевидно, в зависимости от рассматриваемой измененной системы возможны следующие случаи:

1) Точки $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_0'$ различны, т. е.

$$\widetilde{u}_0 \neq \widetilde{u}_0'.$$

2) Точки $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_0'$ совпадают, т. е.

$$\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}_0'.$$

---

* Случай, когда $P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0) = 0$, рассмотрен в [9].

В первом случае, в силу леммы I гл. II, у системы ($\widetilde{\mathrm{D}}$) не существует сепаратрисы, образующей петлю, полутраекториями которой являются полутраектории $\widetilde{L}_0^+$ и $\widetilde{L}_0'^-$. Мы будем говорить в этом случае, что при переходе от системы (D) к рассматриваемой системе ($\widetilde{\mathrm{D}}$) **петля нарушается**. Очевидно, всегда существуют измененные системы, сколь угодно близкие к системе (D), например, система (см. лемму XII главы I)

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + \mu Q(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) - \mu P(x, y),$$

при переходе к которым петля нарушается. Именно, при $\mu > 0$ $\widetilde{u}_0 < \widetilde{u}_0'$, а при $\mu < 0$ $\widetilde{u}_0 > \widetilde{u}_0'$.

Если точки $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_0'$ совпадают, то у рассматриваемой системы ($\widetilde{\mathrm{D}}$) существует сепаратриса $\widetilde{L}_0$, образующая петлю, полутраекториями которой являются полутраектории $\widetilde{L}_0^+$ и $\widetilde{L}_0'^-$ (так что в этом случае $\widetilde{L}_0'^-$ является полутраекторией $\widetilde{L}_0^-$).

Пусть, как и в § 1, у системы (D) во всех точках дуги M_0B, кроме точки M_0, определена функция последования. Имеют место следующие леммы, непосредственно вытекающие из лемм XI и XIV главы I.

Лемма VII. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для траекторий любой системы ($\widetilde{\mathrm{D}}$), δ_0-близкой к системе* (D), *дуга l_0 остается дугой без контакта и всякая траектория системы* ($\widetilde{\mathrm{D}}$), *при $t = t_0$ пересекающая часть $\widetilde{M}_0B$ дуги l_0 (как в случае, когда $\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}_0'$, так и в случае, когда $\widetilde{u}_0 \neq \widetilde{u}_0'$), при некотором значении $T > t_0$ пересекает часть $\widetilde{M}_0'B$ этой дуги.*

Лемма VIII. *Существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что в случае, когда $\widetilde{u}_0' < \widetilde{u}_0$ ($\widetilde{u}_0' > \widetilde{u}_0$), все траектории системы* ($\widetilde{\mathrm{D}}$), *δ_0-близкой к системе* (D), *пересекающие часть $\widetilde{M}_0'\widetilde{M}_0$ дуги l_0, при убывании (возрастании) t выходят из ε_0-окрестности петли L_0 системы* (D).

Лемма IX. *При любом $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, и $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, существует $\eta > 0$ такое, что у любой системы* ($\widetilde{\mathrm{D}}$), *δ-близкой к системе* (D), *всякая траектория, при $t = t_0$ пересекающая часть $\widetilde{M}_0B$ дуги l_0 в точке, отличной от $\widetilde{M}_0$ и лежащей на расстоянии, меньшем η, от точки $\widetilde{M}_0$, при некотором значении $\widetilde{T} > t_0$ пересекает часть $\widetilde{M}_0'B$ дуги l_0, причем при значениях t, $t_0 < t < \widetilde{T}$, эта траектория не выходит из ε-окрестности частей $\widetilde{M}_0\widetilde{O}$ и $\widetilde{M}_0'\widetilde{O}$ полутраекторий $\widetilde{L}_0^+$ и $\widetilde{L}_0'^-$.*

Замечание. Принимая во внимание лемму II главы I (а также замечание II к лемме III главы I), нетрудно видеть, что, задавая вместе с $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ произвольное $\Delta > 0$, всегда можно $\eta > 0$ взять таким, чтобы всякая траектория рассматриваемой системы ($\widetilde{\mathrm{D}}$), при $t = t_0$ пересекающая часть $\widetilde{M}_0B$ дуги l_0, лежащую в η-окрестности точки $\widetilde{M}_0$, при некотором значении t_1', $|t_1' - t_1| < \Delta$, пересекала часть $\widetilde{M}_1B$ дуги l_1.

Результаты работы [4], касающиеся «рождения» предельного цикла от сепаратрисы, могут быть сформулированы в виде следующей теоремы, которую мы приведем здесь без доказательства. (Доказательство ее может быть получено путем рассмотрения функции последования на дуге l_0 и использования леммы II и леммы XIII главы I.)

Теорема II. *Пусть петля, образованная сепаратрисой L_0 системы* (D), *устойчива (неустойчива) и пусть при любом $\delta > 0$ существует δ-близкая к системе* (D) *измененная система* (D^*) *(того же класса, что и система* (D)), *для которой*

$$\tilde{u}_0 < \tilde{u}'_0 \quad (\tilde{u}_0 > \tilde{u}'_0).$$

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ можно взять такое $\delta' > 0$, чтобы у всякой системы (D^*), *δ'-близкой к системе* (D), *существовала хотя бы одна замкнутая траектория (предельный цикл), пересекающая дугу без контакта l_0 в точке M^*, соответствующей значению u^*,*

$$\tilde{u}'_0 < u^* < b \quad (\tilde{u}_0 < u^* < b),$$

и эта замкнутая траектория целиком лежала в ε-окрестности петли, образованной сепаратрисой L_0 системы (D).

Принимая во внимание лемму XII главы I, мы непосредственно из теоремы I получаем следующую теорему:

Теорема III. *Пусть у системы* (D) *существует петля, образованная сепаратрисой L_0 седла O, и эта петля устойчива (неустойчива). Тогда при любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует δ-близкая к системе* (D) *измененная система* ($\tilde{D}$), *у которой в ε-окрестности петли, образованной сепаратрисой L_0, лежит, по крайней мере, одна замкнутая траектория L_0^*.*

Замечание. Принимая во внимание лемму VI главы I, нетрудно видеть, что, когда $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ достаточно малы, замкнутая траектория, существование которой утверждается в настоящей теореме, непременно пересекает дугу l_0 в точке M^*, лежащей в ε-окрестности точки M_0. При этом точка M^* лежит на части $\tilde{M}_0B$, если $\tilde{u}'_0 < u_0$, и на части $\tilde{M}'_0B$, если $u_0 < \tilde{u}'_0$ (и, в силу леммы VIII настоящей главы, M^* заведомо не может лежать на дуге l_0 между точками $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}'_0$, когда эти точки различны).

Мы будем говорить, что замкнутая траектория L_0^* системы ($\tilde{D}$) рождается из петли, образованной сепаратрисой L_0 системы (D) (см. фиг. 1 и 2).

Из теорем I и II, очевидно, следует, что в случае, когда в седле $O(x_0, y_0)$

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0, \tag{21}$$

всегда существуют сколь угодно близкие к системе (D) измененные системы у которых от петли, образованной сепаратрисой L_0, рождается хотя бы одна замкнутая траектория. В следующей теореме мы покажем, что при условии, (18) от петли, образованной сепаратрисой L_0, может родиться не более одной замкнутой траектории (предельного цикла).

Докажем сначала одно вспомогательное предложение.

Лемма X. *При любом $C > 0$ найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что в том случае, когда у системы* ($\tilde{D}$), *δ-близкой к системе* (D), *существует предельный цикл, лежащий в ε-окрестности петли, образованной сепаратрисой L_0, период τ этого предельного цикла больше, чем C.*

Доказательство. Наряду с дугой без контакта l_0, проведенной через соответствующую значению $t=t_0$ точку M_0 сепаратрисы L_0 системы (D), рассмотрим, как и выше, дугу l_1, проведенную через соответствующую значению $t=t_1$ точку M_1 сепаратрисы L_0.

В силу замечания к теореме II, при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ замкнутая траектория L_0^* системы $(\widetilde{\mathrm{D}})$, δ-близкой к системе (D), лежащая в ε-окрестности петли L_0, в случае, когда такая траектория существует, непременно пересекает дугу l_0.

Пусть M^* — точка пересечения траектории L_0^* с дугой l_0 и пусть эта точка соответствует значению $t=t_0$. В силу замечания к лемме IX главы II, при достаточно малых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ траектория L_0^* непременно пересекает также и дугу l_1 при некотором значении $t=t_1^*>t_0$ в точке M_1^*, лежащей на части $\widetilde{M}_1B_1$ дуги l_1 (при этом t_1^* сколь угодно близко к t_1, когда ε и δ достаточно малы). Далее, при некотором значении $t=T_1>t_1^*$ траектория L_0^* снова пересечет дугу l_0, очевидно, в точке M^*.

Мы имеем, таким образом:

$$T_1=t_0+\tau \quad (\tau \text{ — период на } L_0^*).$$

Но при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ точка M^* сколь угодно близка к точке M_0 (и, следовательно, к точкам $\widetilde{M}_0$ и $\widetilde{M}_1'$), а точка M_1^* сколь угодно близка к точке M_1. Тогда, в силу леммы XIII главы I, значение T_1 сколь угодно велико. Следовательно, всегда можно взять $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ столь малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau=T_1-t_0>C.$$

Лемма доказана.

Теорема IV. *В случае когда*

$$P'_x(x_0, y_0)+Q'_y(x_0, y_0)\neq 0,$$

существуют $\varepsilon_0>0$ *и* $\delta_0>0$ *такие, что у всякой системы* $(\widetilde{\mathrm{D}})$, δ_0-*близкой к системе* (D), *в* ε_0-*окрестности петли* L_0 *лежит не более одного предельного цикла, и при этом устойчивого, если*

$$P'_x(x_0, y_0)+Q'_y(x_0, y_0)<0,$$

и неустойчивого, если

$$P'_x(x_0, y_0)+Q'_y(x_0, y_0)>0.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что

$$P'_x(x_0, y_0)+Q'_y(x_0, y_0)=\lambda>0 \tag{22}$$

(в случае, когда $\lambda<0$, рассуждение полностью аналогично).

Так как, в силу теоремы I, в этом случае петля системы неустойчива, то существует $\varepsilon_0>0$ такое, что в ε_0-окрестности петли не лежит ни одной замкнутой траектории системы (D). Кроме того, в силу (22), δ_0 можно всегда взять таким, чтобы во всех точках $R(x, y)$ внутри окрестности σ_0 радиуса ε_0 с центром в точке O выполнялось неравенство

$$P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) > \frac{\lambda}{2}.$$

Пусть

$$x = \varphi_0(t), \quad y = \psi_0(t)$$

— решение, соответствующее сепаратрисе L_0 системы (D), и, как и выше, M_0 — точка L_0, соответствующая значению $t = t_0$, а M_1 — точка L_0, соответствующая значению $t = t_1$. Пусть точки M_0 и M_1 взяты так, что соответствующая значениям $t \leqslant t_0$ часть M_0O сепаратрисы L_0 и соответствующая значениям $t \geqslant t_1$ часть M_1O сепаратрисы L_0 целиком лежат внутри окружности σ_0. Кроме того, предположим, что дуги без контакта l_0 и l_1, проведенные через точки M_0 и M_1 соответственно, тоже целиком лежат внутри окружности σ_0. Как и раньше, пусть M_0B и M_1B_1 — части дуг l_0 и l_1 соответственно, целиком, кроме концов M_0 и M_1, лежащие внутри петли L_0.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [P'_x(\varphi_0(t), \psi_0(t)) + Q'_y(\varphi_0(t), \psi_0(t))]\, dt.$$

Пусть $\varkappa > 0$ таково, что

$$|I| < \varkappa.$$

Будем теперь, наряду с данной системой (D), рассматривать измененные системы $(\widetilde{D})$.

Всегда можно взять $\delta_0 > 0$ таким, чтобы для всякой системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D), во всех точках $R(x, y)$ внутри окружности σ_0 выполнялось неравенство

$$\widetilde{P}'_x(x, y) + \widetilde{Q}'_y(x, y) > \frac{\lambda}{4}. \tag{23}$$

При заданном сколь угодно большом $C > 0$ всегда можно взять $\delta_0 > 0$, кроме того, еще таким, чтобы в случае, когда у системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D), существуют замкнутые траектории, лежащие в ε_0-окрестности петли L_0, для всякой такой замкнутой траектории выполнялись следующие условия:

1) Период τ на всякой такой замкнутой траектории L_0^* больше C, $\tau > C$ (см. лемму X настоящей главы).

2) Всякая такая замкнутая траектория пересекает дугу l_0 в точке M^* (см. замечание к теореме II), а дугу l_1 — в точке M_1^* (см. лемму VII гл. I), и при этом, если

$$x = \varphi^*(t), \quad y = \psi^*(t) \tag{24}$$

— соответствующее замкнутой траектории L_0^* решение, при котором точке M^* соответствует значение t_0, а точке M_1^* соответствует значение t_1^* ($|t_1^* - t_0| < \tau$), то имеет место неравенство

$$\left| \int_{t_0}^{t_1^*} [\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t), \psi^*(t)) + \widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t), \psi^*(t))]\, dt \right| < 2\varkappa \tag{25}$$

(см. теорему I* и лемму VII гл. I).

3) Точки траектории L_0^*, соответствующие в решении (24) значениям t, $t_1^* \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, целиком лежат внутри окружности σ_0 (см. лемму IX гл. II).

При сделанном выборе δ_0 рассмотрим, в том случае, когда у системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D), существует замкнутая траектория L_0^*, лежащая в ε_0-окрестности петли L_0, характеристический показатель h такой замкнутой траектории. Мы имеем:

$$h = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} [\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t), \psi^*(t)) + \widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t), \psi^*(t)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{\tau} \left\{ \int_{t_0}^{t_1^*} [\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t), \psi^*(t)) + \widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t), \psi^*(t))]\, dt + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1^*}^{t_0+\tau} [\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t), \psi^*(t)) + \widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t), \psi^*(t))]\, dt \right\}.$$

Так как, в силу 3), точки замкнутой траектории L_0^* при значениях t, $t_1^* \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$, лежат внутри окружности σ_0, то мы имеем при всех t, $t_1^* \leqslant t \leqslant t_0 + \tau$ (см. (23)):

$$\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t), \psi^*(t)) + \widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t), \psi^*(t)) > \frac{\lambda}{4}$$

и, следовательно,

$$\int_{t_1^*}^{t_0+\tau} [\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t), \psi^*(t)) + \widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t), \psi^*(t))]\, dt > \frac{\lambda}{4}[t_0 + \tau - t_1^*] > \frac{\lambda}{4}[C - t_1^*].$$

Таким образом, мы во всяком случае имеем, принимая во внимание (25):

$$h > \frac{1}{\tau}\left[\frac{\lambda}{4}(C - t_1^*) - 2\varkappa\right].$$

При достаточно большом C (и, следовательно, надлежащим образом выбранном δ_0) мы, очевидно, будем иметь:

$$h > 0,$$

т. е. всякая замкнутая траектория системы $(\tilde{D})$, лежащая в ε_0-окрестности петли L_0, является неустойчивым предельным циклом. Как нетрудно видеть, отсюда, на основании леммы III главы I, следует, что существует единственная замкнутая траектория, лежащая в ε_0-окрестности петли L_0,— неустойчивый предельный цикл.

В случае, когда

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0,$$

доказательство полностью аналогично.

Таким образом, теорема доказана.*

Следствие I. *Пусть у системы* (D) *сепаратриса* L_0 *седла* $O(x_0, y_0)$ *образует петлю и при этом в седле* O

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ *и* $\delta_0 > 0$ *такие, что в случае, когда у системы* $(\tilde{D})$, δ_0-*близкой к системе* (D), *в* ε_0-*окрестности петли лежит сепаратриса* $\tilde{L}_0$ *седла* $\tilde{O}$, *образующая петлю, в* ε_0-*окрестности петли* L_0 *не лежит уже ни одной замкнутой траектории системы* $(\tilde{D})$.

Следствие II. *Если у системы* (D) *сепаратриса седла* $O(x_0, y_0)$ *образует петлю и при этом*

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0 \quad (< 0),$$

то существуют $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ *такие, что у всякой системы* $(\tilde{D})$, δ_0-*близкой к системе* (D), *у которой* $\tilde{u}_0 < \tilde{u}'_0$ $(\tilde{u}_0 > \tilde{u}'_0)$, *в* ε_0-*окрестности петли* L_0 *не лежит ни одной замкнутой траектории.*

§ 3

Рассмотрим теперь случай, когда, как и раньше, у системы (D) существует сепаратриса L_0 седла O, образующая петлю, но при этом

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0.$$

---

* Предположим, что у рассматриваемой системы (D) существует замкнутый контур γ, составленный из сепаратрис седел и из самих седел, причем в состав γ входит более одного седла. Пусть

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

— координаты этих седел.

Рассуждениями, полностью аналогичными проведенным в тексте, можно установить, что в случае, когда

$$P'_x(x_i, y_i) + Q'_y(x_i, y_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

«контур γ устойчив», а в случае, когда $P'_x(x_i, y_i) + Q'_y(x_i, y_i) > 0$, «контур γ неустойчив», причем в первом случае от контура γ может рождаться единственный устойчивый предельный цикл, а во втором — единственный неустойчивый предельный цикл

Предположим, кроме того, что петля устойчива или неустойчива (т. е. не существует замкнутых траекторий, сколь угодно близких к петле). Покажем, что тогда при любых сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно указать δ-близкую к системе (D) измененную систему $(\widetilde{D})$, у которой в ε-окрестности петли существует не менее двух замкнутых траекторий.

Лемма XI. *Если у системы* (D)

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = 0,$$

то при любых $\varepsilon > 0$ *и* $\delta > 0$ *существует система* $(\widetilde{D})$, *δ-близкая к системе* (D), *у которой в ε-окрестности седла O находится седло $\widetilde{O}(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$, в котором $\widetilde{P}'_x(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) + \widetilde{Q}'_y(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) > 0$ (или < 0), и при этом существует образующая петлю сепаратриса $\widetilde{L}_0$ седла $\widetilde{O}$, целиком лежащая в ε-окрестности сепаратрисы L_0 системы* (D).

Доказательство. Мы всегда можем предполагать, что седло O системы (D) лежит в начале координат и что в окрестности начала система (D) приведена к каноническому виду. Принимая во внимание, что, по условию, $P'_x(0, 0) + Q'_y(0, 0) = 0$, мы будем, очевидно, иметь:

$$\frac{dx}{dt} = \nu x + P_2(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -\nu y + Q_2(x, y), \tag{D}$$

где

$$P_2(0, 0) = Q_2(0, 0) = P'_{2x}(0, 0) = Q'_{2x}(0, 0) = P'_{2y}(0, 0) = Q'_{2y}(0, 0) = 0.$$

Пусть, кроме того, как и выше, l_0 — дуга без контакта, проведенная через какую-нибудь точку M_0 сепаратрисы L_0, образующей петлю, и u — параметр на этой дуге. При этом точке M_0 соответствует значение $u = u_0$ и точкам дуги l_0, лежащим внутри петли, соответствуют значения $u > u_0$.

Рассмотрим теперь измененную систему вида

$$\frac{dx}{dt} = \nu x + P_2(x, y) = P_\alpha(x, y) \ (= P(x, y)), \quad \frac{dy}{dt} = -(\nu + \alpha)y + Q_2(x, y) = Q_\alpha(x, y), \tag{D_α}$$

для которой, очевидно,

$$P'_{\alpha x}(0, 0) + Q'_{\alpha y}(0, 0) = \alpha.$$

Кроме того, рассмотрим систему, получающуюся из системы (D_α) «поворотом поля», т. е. систему

$$\frac{dx}{dt} = P_\alpha(x, y) + \mu Q_\alpha(x, y) = \nu x + P_2(x, y) - \mu[(\nu + \alpha)y - Q_2(x, y)] = P_{\alpha\mu}(x, y), \tag{$D_{\alpha\mu}$}$$

$$\frac{dy}{dt} = Q_\alpha(x, y) - \mu P_\alpha(x, y) = -(\nu + \alpha)y + Q_2(x, y) - \mu[\nu x + P_2(x, y)] = Q_{\alpha\mu}(x, y).$$

Для системы ($D_{\alpha\mu}$) мы имеем при всех μ:

$$P'_{\alpha\mu x}(0,0)+Q'_{\alpha\mu y}(0,0)=\alpha, \tag{26}$$

т. е. выражение $P'_{\alpha\mu x}(0,0)+Q'_{\alpha\mu y}(0,0)$ при $\alpha>0$ положительно, а при $\alpha<0$ отрицательно.

Будем для определенности считать, что $\alpha>0$. (Совершенно аналогично может быть рассмотрен случай $\alpha<0$.) При любом $\delta>0$, очевидно, α и μ можно взять столь малыми, чтобы система ($D_{\alpha\mu}$) была δ-близкой к системе (D).

Пусть, как и выше, L_0^+ и L_0^- — полутраектории, выделенные из сепаратрисы L_0 и содержащие точку M_0. При любом $\varepsilon>0$ существуют $\alpha_0>0$ и $\mu_0>0$ такие, что при всех $|\alpha|<\alpha_0$ и $|\mu|<\mu_0$ у системы ($D_{\alpha\mu}$) существуют сепаратрисы $L^+_{0\alpha\mu}$ и $L'^-_{0\alpha\mu}$, лежащие в ε-окрестности L_0^+ и L_0^- соответственно, и эти сепаратрисы пересекают дугу l_0 в точках $\widetilde{M}_0(\alpha,\mu)$ и $\widetilde{M}'_0(\alpha,\mu)$. Обозначим через $\widetilde{u}_0(\alpha,\mu)$ значение параметра u, соответствующее точке $\widetilde{M}_0(\alpha,\mu)$, и через $\widetilde{u}'_0(\alpha,\mu)$ — значение параметра u, соответствующее точке $\widetilde{M}'_0(\alpha,\mu)$.

Предположим сначала, что $\mu=0$, т. е. рассмотрим систему (D_α). Возможны два случая:

1) При любых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ существует α^* такое, что система (D_{α^*})

$$\frac{dx}{dt}=\nu x+P_2(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=-(\nu+\alpha^*)y+Q_2(x,y)$$

δ-близка к системе (D), и при этом

$$\widetilde{u}_0(\alpha^*,0)=\widetilde{u}'_0(\alpha^*,0),$$

т. е. сепаратрисы $L^+_{0\alpha^*0}$ и $L^-_{0\alpha^*0}$ системы (D_{α^*}) сливаются в одну сепаратрису образующую петлю, лежащую в ε-окрестности петли L_0.

В этом случае утверждение леммы, очевидно, доказано.

2) При всех α, $0<\alpha<\alpha_0$ либо $\widetilde{u}_0(\alpha,0)>\widetilde{u}'_0(\alpha,0)$, либо $\widetilde{u}_0(\alpha,0)\wedge<\widetilde{u}'_0(\alpha,0)$ (если существуют как сколь угодно малые значения α, при которых $\widetilde{u}_0(\alpha,0)>\widetilde{u}'_0(\alpha,0)$, так и сколь угодно малые значения α, при которых $\widetilde{u}_0(\alpha,0)<\widetilde{u}'_0(\alpha,0)$, то существуют и сколь угодно малые значения α, при которых $\widetilde{u}_0(\alpha,0)=\widetilde{u}'_0(\alpha,0)$, т. е. имеет место случай 1)).

Для определенности предположим, что

$$\widetilde{u}_0(\alpha,0)>\widetilde{u}'_0(\alpha,0).$$

Рассмотрим теперь систему ($D_{\alpha\mu}$) при $\alpha=0$. (Эта система, очевидно, получается из системы (D) поворотом поля на постоянный угол, тангенс которого равен μ.)

В силу леммы XII, при $\mu>0$ мы будем иметь:

$$\widetilde{u}_0(0,\mu)<\widetilde{u}'_0(0,\mu).$$

Пусть при заданном $\delta>0$ $\alpha_1>0$ и $\mu_1>0$, $\mu_1<\mu_0$, таковы, что при всех $\alpha<\alpha_1$ и $\mu<\mu_1$ система $(D_{\alpha\mu})$ δ-близка к системе (D). Пусть $\alpha'<\alpha_1$ — какое-нибудь фиксированное значение. Так как, по предположению, при $\mu=0$ мы имеем

$$\widetilde{u}_0(\alpha', 0)>\widetilde{u}_0'(\alpha', 0),$$

то всегда можно указать столь малое μ^*, чтобы мы имели также

$$\widetilde{u}_0(\alpha', \mu^*)>\widetilde{u}_0'(\alpha', \mu^*).$$

Но

$$\widetilde{u}_0(0, \mu^*)<\widetilde{u}_0'(0, \mu^*).$$

А тогда (см. замечание к лемме XI главы I) существует, очевидно, $\alpha^*>0$ такое, что

$$\widetilde{u}_0(\alpha^*, \mu^*)=\widetilde{u}_0'(\alpha^*, \mu^*),$$

т. е. у системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\nu x+P_2(x, y)-\mu^*[(\nu+\alpha^*)y+Q_2(x, y)],\\ \frac{dy}{dt}&=-(\nu+\alpha^*)y+Q_2(x, y)-\mu^*[\nu x+P_2(x, y)]\end{aligned} \tag{$D_{\alpha^*\mu^*}$}$$

существует сепаратриса L_0^*, образующая петлю. Так как у системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$, кроме того (см. (26)),

$$P'_{\alpha^*\mu^*x}(0, 0)+Q'_{\alpha^*\mu^*y}(0, 0)=\alpha^*,$$

то утверждение леммы доказано.

Теорема V. *Если в седле* $O(0, 0)$ *системы* (D)

$$P'_x(0, 0)+Q'_y(0, 0)=0$$

и петля, образованная сепаратрисой L_0, *устойчива* (*неустойчива*), *то при любых* $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ *существует измененная система* $(\widetilde{D})$, *δ-близкая к системе* (D), *у которой в ε-окрестности петли L_0 находится не менее двух замкнутых траекторий* (*предельных циклов*).

Доказательство. Предположим для определенности, что петля системы (D) неустойчива. Рассмотрим на части дуги l_0, все точки которой, кроме точки M_0, лежат внутри петли L_0, функцию последования

$$\bar{u}=f(u),$$

построенную для траекторий системы (D). Так как, по предположению, петля системы (D) неустойчива, то на некоторой части M_0B дуги l_0, соответствующей значениям u, $u_0<u\leqslant b$, мы будем иметь:

$$\Phi(u)=f(u)-u>0$$

и, в частности,

$$\Phi(b)>0. \tag{27}$$

Рассмотрим систему $(D_{\alpha^*\mu^*})$ предыдущей леммы, у которой существует сепаратриса L_0^* седла $O(0, 0)$, образующая петлю. В силу леммы XI главы I и леммы XI настоящей главы, при заданных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют столь малые по абсолютной величине α^* и μ^*, что выполняются условия:

1) Система $(D_{\alpha^*\mu^*})$ $\frac{\delta}{2}$-близка к системе (D).

2) Петля, образованная сепаратрисой L_0^*, лежит целиком в ε-окрестности траектории L_0.

3) Сепаратриса L_0^* пересекает дугу l_0 в точке M_0^*, соответствующей значению $\widetilde{u}_0^*$ и лежащей по ту же сторону от точки B, что и точка M_0, и все траектории системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$, пересекающие при $t = t_0$ часть M_0^*B дуги l_0, при $t > t_0$ пересекают ее еще раз.

В силу 3), на части M_0^*B дуги l_0, т. е. при значениях

$$u_0^* < u \leqslant b,$$

определена функция последования

$$\bar{u} = f^*(u),$$

построенная для траекторий системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$. При этом α^* и μ^* всегда можно взять столь малыми, чтобы, наряду с неравенством (27), выполнялось также неравенство

$$\Phi^*(b) = f^*(b) - b > 0. \tag{28}$$

Всегда можно взять $\alpha^* > 0$. Тогда петля системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$ неустойчива (см. теорему I). Поэтому всегда существует значение u_1, $u_0^* < u_1 < b$, такое, что

$$\Phi^*(u_1) < 0. \tag{29}$$

Из (28) и (29), очевидно, следует, что существует хотя бы одно значение u_1^*, $u_1 < u_1^* < b$, такое, что

$$\Phi^*(u_1^*) = 0,$$

т. е. у системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$ существует хотя бы одна замкнутая траектория, пересекающая часть M_0^*B дуги l_0 в точке M_1^*, соответствующей значению u_1^* параметра u.

Таким образом, рассматриваемая система $(D_{\alpha^*\mu^*})$ является системой, $\frac{\delta}{2}$-близкой к системе (D), у которой существует сепаратриса L_0^*, целиком лежащая в ε-окрестности петли L_0, и, кроме того, целиком лежащая в этой ε-окрестности замкнутая траектория.

Так как петля L_0^* неустойчива, то существует $\varepsilon' > 0$ такое, что в ε'-окрестности петли L_0^* и на границе этой окрестности не лежат точки ни одной замкнутой траектории, содержащейся внутри этой петли. В силу леммы IX главы I, всегда существует $\delta' > 0$, $\delta' < \frac{\delta}{2}$, такое, что у всякой системы $(\widetilde{D})$, δ'-близкой к системе $(D_{\alpha^*\mu^*})$, функция последования

$$\bar{u} = \widetilde{f}(u)$$

определена во всяком случае при значениях u,

$$u_1 \leqslant u \leqslant b,$$

и при этом имеют место неравенства (ср. (28) и (29))

$$\widetilde{\Phi}(b) = \widetilde{f}(b) - b > 0,$$

$$\widetilde{\Phi}(u_1) < 0,$$

т. е. у системы $(\widetilde{D})$ существует, по крайней мере, одна замкнутая траектория, пересекающая дугу l_0 при некотором значении $\widetilde{u}_1$,

$$u_1 < \widetilde{u}_1 < b \quad (\widetilde{\Phi}(\widetilde{u}_1) = 0).$$

Очевидно, $\delta' > 0$ можно взять столь малым, чтобы эта траектория лежала вне ε'-окрестности петли L_0^* системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$. С другой стороны, в силу теоремы III, примененной к системе $(D_{\alpha^*\mu^*})$, всегда можно указать систему $(\widetilde{\widetilde{D}})$, δ'-близкую к системе $(D_{\alpha^*\mu^*})$, у которой существует замкнутая траектория $\widetilde{L}$, целиком лежащая в ε'-окрестности петли L_0^* системы $(D_{\alpha^*\mu^*})$. Очевидно, такая система $(\widetilde{D})$ будет обладать не менее, чем двумя, замкнутыми траекториями, лежащими в ε-окрестности петли L_0 системы (D). Кроме того, эта система, очевидно, будет δ-близкой к системе (D),

Таким образом, теорема доказана.

§ 4

Пусть у системы (D) существует двукратное (см. [1], [4] и [10]) состояние равновесия $O(x_0, y_0)$ типа седло-узел, у которого один из корней характеристического уравнения равен нулю, а другой отличен от нуля. Мы имеем таким образом:

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Предполагая, что состояние равновесия O находится в начале координат (т. е. $x_0 = y_0 = 0$), в этом случае, как известно (см. [8]), систему (D) можно привести в окрестности начала к виду

$$\frac{dx}{dt} = X_2(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = y - kx + Y_2(x, y),$$

где

$$X_2(0, 0) = Y_2(0, 0) = X'_{2x}(0, 0) = Y'_{2x}(0, 0) = X'_{2y}(0, 0) = Y'_{2y}(0, 0) = 0$$

и

$$X_2(1, k) \neq 0. \tag{30}$$

(Условие (30) является очевидно условием двукратности состояния равновесия.) Как известно [8], у такого состояния равновесия существует одна узловая область и две смежные седловые области и, следовательно, три сепаратрисы. (Такое состояние равновесия и называется с е д л о-у з е л.)

Как известно ([4], [10]) в этом случае существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой измененной системы $(\tilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D), в ε_0-окрестности состояния равновесия O системы (D) может находиться:

1) или одно двукратное состояние равновесия того же типа — седло-узел,
2) или два (грубых) состояния равновесия — седло и узел,
3) или ни одного состояния равновесия.

Предположим для определенности, что траектория узловой области рассматриваемого седла-узла O стремится к O при $t \to +\infty$. Тогда у состояния равновесия O существует одна α-сепаратриса L_0^- и две ω-сепаратрисы L_1^+ и L_2^+. Предположим, как и в работе [4], что траектория L_0, из которой выделена сепаратриса L_0^-, при $t \to +\infty$ стремится к тому же состоянию равновесия O (т. е. выходит из седла-узла и возвращается в него же). При этом, как и в работе [4], предположим, что сепаратриса L_0^- не является полутраекторией, выделенной из той же траектории, что и сепаратрисы L_1^+ или L_2^+ (или иначе, что сепаратриса L_0^- не сливается, образуя вместе одну траекторию, ни с сепаратрисой L_1^+, ни с сепаратрисой L_2^+).*

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ — указанные выше величины. Результаты работы [4] могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

Т е о р е м а VI. *При любом* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, *существует* $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, *такое, что у всякой измененной системы* $(\tilde{D})$, *δ-близкой к системе* (D), *у которой в ε-окрестности точки O нет ни одного состояния равновесия системы* $(\tilde{D})$, *существует, по крайней мере, одна замкнутая траектория, лежащая в ε-окрестности сепаратрисы L_0.*

З а м е ч а н и е. Если M_0 — какая-нибудь точка сепаратрисы L_0 и l_0 — дуга без контакта, проведенная через точку M_0 и содержащая ее внутри то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ всякая замкнутая траектория L_0^* системы $(\tilde{D})$, δ-близкой к системе (D), лежащая в ε-окрестности сепаратрисы L_0, непременно пересекает дугу без контакта l_0 (см. леммы VI и VII главы I).

---

* Нетрудно видеть, что доказанная ниже теорема VII справедлива также и в том случае, когда α-сепаратриса L_0^- сливается с ω-сепаратрисой L_1^+ или L_2^+, образуя вместе одну траекторию. Легко видеть, что теорема, аналогичная теореме VI, справедлива также в случае, когда L_0 является сепаратрисой любого четнократного (см. [10]) состояния равновесия $O(x_0, y_0)$, у которого

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0, \quad P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Мы не рассматриваем эти случаи, так как одной из целей настоящей работы является, как было сказано во введении, выделение основных случаев рождения предельных циклов, т. е. случаев, когда система (D) является системой «первой степени негрубости» [1].

Мы будем говорить, что замкнутая траектория L_0^* рождается из сепаратрисы L_0 седло-узла O (см. фиг. 3 и 4).

Теорема VII. *Всегда можно указать $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что у всякой системы $(\tilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D), в ε_0-окрестности сепаратрисы L_0 существует не более одного предельного цикла, и при этом устойчивого в случае, когда в седло-узле*

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) < 0,$$

и неустойчивого в случае, когда в седло-узле

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) > 0.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что в седло-узле

$$P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0) = \lambda > 0.$$

Рассмотрим окружность σ_0 с центром в точке O столь малого радиуса, чтобы во всех точках $R(x, y)$ внутри этой окружности было

$$P'_x(x, y) + Q'_y(x, y) > \frac{\lambda}{2}.$$

Пусть $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$ — решение, соответствующее траектории L_0. Так как траектория L_0 стремится к состоянию равновесия O и при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, то существуют значения t_1 и t_2, $t_1 < t_2$, такие, что точки траектории L_0, соответствующие значениям $t < t_1$ и значениям $t > t_2$, лежат внутри окружности σ_0.

Обозначим через M_1 точку траектории L_0, соответствующую значению $t = t_1$, и через M_2 — точку траектории L_0, соответствующую значению $t = t_2$.

Рассмотрим выражение

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [P'_x(\varphi_0(t), \psi_0(t)) + Q'_y(\varphi_0(t), \psi_0(t))]\, dt.$$

Очевидно, существует $\varkappa > 0$ такое, что

$$|I| < \varkappa.$$

Пусть $C > 0$ — любое заданное число, M_0 — точка траектории L_0, соответствующая значению $t_2 + C$, и l_0 — дуга без контакта, проведенная через точку M_0 и содержащая эту точку внутри.

Нетрудно видеть, принимая во внимание теорему I* и лемму VI главы I, что при заданном сколь угодно большом $C > 0$ всегда можно указать $\varepsilon_0 > 0$, ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(C)$) и $\delta_0 > 0$ ($\delta_0 = \delta_0(C)$) такие, чтобы для всякой системы $(\tilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D), выполнялись условия:

1) Во всех точках $R(x, y)$ внутри окружности σ_0 выполняется неравенство

$$\tilde{P}'_x(x, y) + \tilde{Q}'_y(x, y) > \frac{\lambda}{4}.$$

2) Всякая замкнутая траектория L_0^* системы $(\tilde{D})$, лежащая в ε_0-окрестности траектории L_0, пересекает дугу без контакта l_0.

3) Если $x=\varphi^*(t)$, $y=\psi^*(t)$ — решение, соответствующее какой-нибудь замкнутой траектории L_0^* системы $(\widetilde{D})$ лежащей в ε_0-окрестности L_0 и пересекающей дугу l_0, на котором точке пересечения с дугой l_0 соответствует значение t_2+C, и τ — период этого решения, то $t_2+C<t_1+\tau$.

4) При всех значениях $t, t_2\leqslant t\leqslant t_1+\tau$, точки траектории L_0^* лежат внутри окружности σ_0.

5) $$\left|\int_{t_1}^{t_2}[\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t),\psi^*(t))+\widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t),\psi^*(t))]\,dt\right|<2\varkappa.$$

Рассмотрим при сделанном выборе величин $\varepsilon_0>0$ и $\delta_0>0$ характеристический показатель h замкнутой траектории L_0^* (системы $(\widetilde{D})$, δ_0-близкой к системе (D)) лежащей в ε_0-окрестности сепаратрисы L_0. Мы имеем:

$$h=\frac{1}{\tau}\int_{t_1}^{t_1+\tau}[\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t),\psi^*(t))+\widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t),\psi^*(t))]\,dt=$$
$$=\frac{1}{\tau}\left\{\int_{t_1}^{t_2}[\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t),\psi^*(t))+\widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t),\psi^*(t))]\,dt+\right.$$
$$\left.+\int_{t_2}^{t_1+\tau}[\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t),\psi^*(t))+\widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t),\psi^*(t))]\,dt\right\}.$$

Но из условий 1), 3) и 4), очевидно, следует:

$$\int_{t_2}^{t_1+\tau}[\widetilde{P}'_x(\varphi^*(t),\psi^*(t))+\widetilde{Q}'_y(\varphi^*(t),\psi^*(t))]\,dt>\frac{\lambda}{4}C.$$

Принимая во внимание условие 5), нетрудно видеть, что величина C и соответствующие величины $\varepsilon_0(C)$ и $\delta_0(C)$ всегда можно взять такими, чтобы мы имели

$$h>0.$$

Таким образом, теорема доказана.

(Поступило в редакцию 15/X 1957 г.)

Литература

1. А. Андронов и Е. Леонтович, К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории, ДАН СССР, т. 21, № 9 (1938), 427—430.
2. Н. Н. Баутин, Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл, ЖТФ, т. IX, вып. 7 (1939), 601—611.
3. Г. В. Аронович, Устойчивость колебаний горизонта в уравнительном резервуаре с сопротивлением, Сборник памяти А. А. Андронова, Изд. АН СССР, 1955, 93—108.
4. А. Андронов и Е. Леонтович, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра, Ученые записки ГГУ, вып. 6 (1939), 3—24.

5. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла, Матем. сб., **40** (82) (1956), 179—224.
6. E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930.
7. H. Dulac, Sur les cycles limites, Bull. Soc. Math. de France, **51** (1923), 45—188.
8. I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math., **24** (1901), 1—88.
9. Е. Леонтович, О рождении предельных циклов от сепаратрисы, ДАН СССР, т. 28, № **4** (1951), 641—644.
10. Н. А. Губарь, Характеристика сложных особых точек системы двух дифференциальных уравнений при помощи грубых особых точек близких систем, Матем. сб., **40** (82) (1956), 23—56.
11. Л. Н. Белюстина, К динамике симметричного полета самолета, Изв. АН СССР, ОТН, № **11** (1956), 3—27.

Некоторые примеры неномографируемых функций

М. А. Крейнес, И. А. Вайнштейн, Н. Д. Айзенштат (Москва)

В этой статье рассматриваются функции, номографируемые на сетке, и функции, номографируемые в прямоугольнике с помощью непрерывных функций, и строятся примеры неномографируемых функций (см. [1]). Ниже иногда рассматриваются не сами номограммы, а образы, им двойственные; это облегчает изложение.

§ 1. Функции, номографируемые на сетке

На некоторой плоскости sOt рассмотрим прямоугольник R_{st} $(\bar{s} \leqslant s \leqslant \bar{\bar{s}}, \bar{t} \leqslant t \leqslant \bar{\bar{t}})$ с вершинами A, B, C, D (см. чертеж). Пусть l и m — целые положительные числа.

1) Проведем $l-2$ прямолинейных отрезка, каждый из которых соединяет внутреннюю точку стороны AB с внутренней точкой стороны DC так, чтобы никакие два из этих отрезков не имели общих точек. Сторону AD обозначим через X_1; проведенные нами отрезки, считая слева направо, обозначим соответственно через $X_2, X_3, \ldots, X_{l-1}$; сторону BC обозначим через X_l.

2) Проведем $m-2$ прямолинейных отрезка, каждый из которых соединяет внутреннюю точку стороны AD с внутренней точкой стороны BC так, чтобы никакие два из этих отрезков не имели общих точек. Сторону AB обозначим через Y_1; проведенные отрезки, считая снизу вверх, обозначим соответственно через $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{m-1}$; сторону DC обозначим через Y_m.

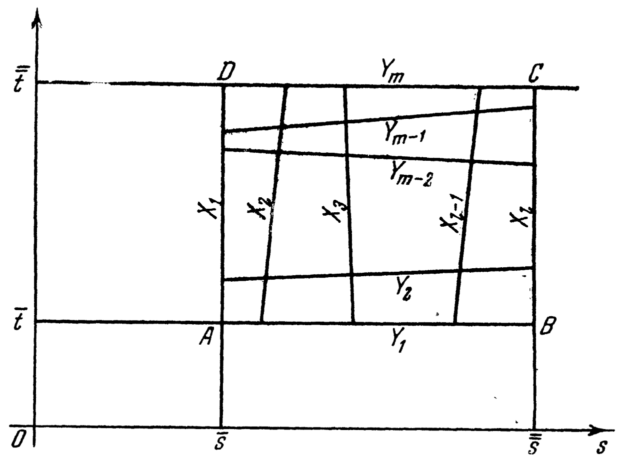
Совокупность отрезков $X_1, X_2, \ldots, X_l, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ назовем *сеткой* и будем обозначать через R_{st}, так же, как исходный прямоугольник. Точку пересечения отрезка X_i с отрезком Y_j назовем *узлом сетки* и обозначим символом (i, j).

Под *функцией, заданной на сетке*, будем понимать функцию $f = f_{ij}$, определенную на множестве всех узлов сетки. Таким образом, $f = f_{ij}$ есть функция двух целочисленных аргументов i и j $(i = 1, 2, \ldots, l;$ $j = 1, 2, \ldots, m)$.

Две сетки R_{st} и R_{uv} будем называть *эквивалентными*, если выполняются два условия: 1) число l отрезков X_i в обеих сетках одинаково; 2) число m отрезков Y_j в обеих сетках одинаково. Заметим, что функция, заданная на какой-либо сетке, тем самым определяется также и на любой эквивалентной ей сетке.

Линией уровня $f = c$ *функции* f, заданной на некоторой сетке, назовем множество тех узлов этой сетки, в которых $f_{ij} = c$. Про некоторую прямую будем говорить, что она *несет линию уровня* $f = c$, если все те узлы, из которых состоит эта линия уровня, лежат на указанной прямой.

Функцию f, определенную на сетке R_{st}, будем называть *номографируемой*, если на некоторой плоскости uOv существует система E прямых и эквивалентная сетке R_{st} сетка R_{uv}, такие, что: 1) число различных прямых в системе E равно числу непустых линий уровня функции f, и каждая прямая системы E несет одну непустую линию уровня функции f на сетке R_{uv}; 2) прямые системы E, несущие различные линии уровня, не имеют общих точек внутри и на сторонах прямоугольника R_{uv}; 3) какое бы значение $f_{i_0 j_0}$ функции f ни взять, прямая системы E, несущая линию уровня $f = f_{i_0 j_0}$, в прямоугольнике R_{uv} отделяет множество тех узлов (i, j), в которых $f_{ij} > f_{i_0 j_0}$, от множества тех узлов, в которых $f_{ij} < f_{i_0 j_0}$.



Пусть α и β — две прямые; точку пересечения этих прямых обозначим символом (α, β). Имеет место следующая теорема, касающаяся трех пятерок прямых на плоскости.

Теорема 1. *Пусть* 1, 2, 3, 4, 5 *и* 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ — *такие две пятерки лежащих на одной плоскости прямых, что никакие три из этих десяти прямых, если они не все принадлежат одной пятерке, не имеют общих точек, и пусть, кроме того*: 1) *точки* (1,3′), (2,2′) *и* (3,1′) *лежат на одной прямой*; 2) *точки* (1,4′), (2,3′), (3,2′) *и* (4,1′) *лежат на одной прямой*; 3) *точки* (1,5′), (2,4′), (3,3′), (4,2′) *и* (5,1′) *лежат на одной прямой*; 4) *точки* (2,5′), (3,4′), (4,3′) *и* (5,2′) *лежат на одной прямой. Тогда и точки* (3,5′), (4,4′) *и* (5,3′) *лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть 1″, 2″, 3″, 4″ и 5″ — прямые, на которых соответственно лежат точки: 1) (1,3′), (2,2′) и (3,1′); 2) (1,4′), (2,3′), (3,2′) и 4,1′); 3) (1,5′), (2,4′), (3,3′), (4,2′) и (5,1′); 4) (2,5′), (3,4′), (4,3′) и (5,2′); 5) (3,5′) и (4,4′). Нужно доказать, что и точка (5,3′) лежит на прямой 5″.

Из наших предположений вытекает, что все прямые 1, 2, 3, 4, 5, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ и 1″, 2″, 3″, 4″, 5″ различны. Шесть прямых 2, 4′, 4″, 4, 2′, 2″ образуют шестиугольник*, а 3,3′, 3″—три его диагонали. Существует семейство алгебраических кривых третьего класса, зависящее от одного параметра, каждая из которых имеет касательными прямые 3, 3′, 3″, 2, 4′, 4″, 4 и 2′. По теореме Шаля (см., например, [2], стр. 24—25) к каждой из этих кривых будет касательной и прямая 2″. В этом семействе существует единственная кривая

* Такой шестиугольник называют шестиугольником Брианшона (см. ссылку в тексте).

третьего класса K, касательной к которой является и прямая 5. Итак, прямые 3, $3'$, $3''$, 2, $4'$, $4''$, 4, $2'$, $2''$ и 5 будут касательными к кривой K.

Рассмотрим шестиугольник со сторонами $2''$, 3, $3'$, $4''$, 5 и $1'$ и с диагоналями $2'$, $3''$ и 4. Все диагонали и первые пять сторон этого шестиугольника являются касательными к кривой K. Поэтому по теореме Шаля касательной к K будет и последняя сторона — прямая $1'$.

Рассмотрим затем шестиугольник со сторонами 2, $3'$, $3''$, 4, $1'$ и $1''$ и с диагоналями $2'$, $2''$ и 3. Все диагонали и первые пять сторон этого шестиугольника являются касательными к кривой K. Поэтому касательной к кривой K будет и последняя сторона — $1''$.

Рассмотрим, далее, шестиугольник со сторонами $4'$, $3''$, 3, $2'$, $1''$ и 1 и с диагоналями $2''$, 2 и $3'$. Как и ранее, заключаем, что касательной к K является и прямая 1.

Рассмотрим шестиугольник со сторонами $4''$, 3, $3'$, $2''$, 1 и $5'$ и с диагоналями 2, $4'$ и $3''$. Как и ранее, заключаем, что касательной к K будет и прямая $5'$.

Рассмотрим затем шестиугольник со сторонами 4, $3'$, $3''$, 2, $5'$ и $5''$ и с диагоналями $4'$, $4''$ и 3. Как и ранее, заключаем, что касательной к K будет и прямая $5''$.

Рассмотрим, наконец, шестиугольник со сторонами 5, $2'$, $3''$, 3 и $4'$ и с диагоналями $3'$, $4''$ и 4. Все диагонали и пять указанных сторон этого шестиугольника являются касательными к кривой K. Поэтому касательной к K будет и шестая сторона шестиугольника, проходящая через точки $(4,4')$ и $(5.3')$; обозначим ее через T. Но через точку $(4.4')$ уже проходят три различных касательных к кривой K, а именно прямые 4, $4'$ и $5''$. Так как K — кривая третьего класса, то через точку $(4.4')$ не может проходить четвертой касательной к K. Поэтому T совпадает с одной из этих прямых: 4,$4'$ или $5''$. Но первые две из этих прямых не могут проходить через точку $(5,3')$, так как в противном случае через эту точку проходили бы три прямых, принадлежащих к числу заданных десяти прямых, причем не все они принадлежали бы к одной из двух заданных пятерок прямых. Поэтому T совпадает с $5''$, и, следовательно, прямая $5''$ проходит и через точку $(5,3')$. Теорема доказана.

Нетрудно теперь построить пример функции, определенной на прямоугольной сетке R_{xy}, возрастающей с возрастанием каждой из переменных x и y при постоянной другой и неномографируемой.

Пример 1. Пусть в квадрате R_{xy} $(0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ плоскости xOy взята сетка так, что прямые, несущие отрезки X_i и Y_j, имеют соответственно уравнения $x=\frac{i-1}{4}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ и $y=\frac{j-1}{4}$ $(j=1,2,3,4,5)$. Для узла $(i,\ j)$ положим $f_{ij}=\frac{i+j-2}{4}$, если $(i,\ j)$ отлично от $(5,3)$, а f_{53} возьмем не равным $\frac{6}{4}$; положим, например, $f_{53}=\frac{193}{128}$. Так определенная на сетке R_{xy} функция f является неномографируемой.

В самом деле, допустим, что функция f номографируема. Тогда на некоторой плоскости uOv существует сетка R_{uv}, эквивалентная заданной сетке R_{xy}, и система прямых E, удовлетворяющая перечисленным выше условиям. Сетка R_{uv} состоит из двух пятерок отрезков, соответствующих отрезкам

X_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) и Y_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$) сетки R_{xy}. Пусть 1, 2, 3, 4, 5 и 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ — прямые в плоскости uOv, соответственно несущие эти отрезки. Пусть 1″, 2″, 3″, 4″ и 5″ — прямые из системы E, несущие соответственно линии уровня $f=\frac{1}{2}$, $f=\frac{3}{4}$, $f=1$, $f=\frac{5}{4}$, $f=\frac{3}{2}$. Если, как и прежде, обозначать точку пересечения прямых α и β через (α, β), то очевидно, что: 1) точки (1,3′), (2,2′) и (3,1′) лежат на прямой 1″; 2) точки (1,4′), (2,3′), (3,2′) и (4,1′) лежат на прямой 2″; 3) точки (1,5′), (2,4′), (3,3′), (4,2′) и (5,1′) лежат на прямой 3″; 4) точки (2,5′), (3,4′), (4,3′) и (5,2′) лежат на прямой 4″ и, наконец, 5) точки (3,5′) и (4,4′) лежат на прямой 5″. В силу теоремы 1, на этой же прямой 5″ должна лежать и точка (5,3′), и, таким образом, должно выполняться равенство $f_{53}=\frac{3}{2}$. Но это не так: как мы знаем, $f_{53}=\frac{193}{128}$. Допустив, что f номографируема, мы пришли к противоречию.

Хотя функция f не номографируема, она является пределом последовательности номографируемых функций. В самом деле, рассмотрим функцию $g^{(n)}$ ($n=1, 2, \ldots$), значения которой во всех узлах сетки, за исключением узла (3,5), совпадают с соответствующими значениями функции f, а для узла (3,5) пусть $g^{(n)}_{35}=\frac{3}{2}-\frac{1}{8n}$. Тогда ясно, что последовательность $g^{(n)}$ сходится на сетке R_{xy} (т. е. в каждом узле этой сетки) к функции f. Вместе с тем нетрудно видеть, что каждая из функций $g^{(n)}$ ($n=1, 2, \ldots$) номографируема. В самом деле, в качестве эквивалентной сетки, входящей в определение номографируемой функции, мы можем взять саму сетку R_{xy}, а в качестве системы E — совокупность следующих прямых: $x+y=0$, $x+y=\frac{1}{4}$, $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=\frac{3}{4}$, $x+y=1$, $x+y=\frac{5}{4}$, $4x+3y-5=0$, $4x+3y-\frac{21}{4}=0$, $4x+3y-\frac{11}{2}=0$, $x+y=\frac{7}{4}$, $x+y=2$. Тогда ясно, что сетка R_{xy} и система E удовлетворяют всем указанным выше условиям.

Замечание. Нетрудно видеть, что построенная в примере 1 функция не номографируема и с несколько более широкой точки зрения. Именно, она останется неномографируемой и в том случае, если мы в определении функции, номографируемой на сетке, отбросим условия 2) и 3) и сохраним только условие 1).

§ 2. Функции, номографируемые с помощью непрерывных функций

В номограмме из выравненных точек некоторой функции $z=f(x, y)$ шкалы переменных x, y и z не равноправны: шкалы независимых переменных x и y должны быть приспособлены для того, чтобы по отметке, т. е. по значению соответствующей переменной, находить точку шкалы, а шкала функции z, наоборот, должна быть приспособлена для того, чтобы по точке шкалы находить отметку, т. е. значение функции. В соответствии с этим мы будем рассматривать два типа шкал:

Шкалой первого типа (шкалой аргумента) l_t будем называть плоский непрерывный образ отрезка $P=P(t)$, $\overline{t}\leqslant t\leqslant\overline{\overline{t}}$; значение t называется **отметкой** данной точки P.

Шкалой второго типа (шкалой функции, ответной шкалой) l_z будем называть плоское замкнутое ограниченное множество, на котором определена непрерывная функция $z = z(P)$. Значение функции $z(P)$ в данной точке называется отметкой данной точки.

Шкалу первого типа будем назывть монотонной, если отображение $P = P(t)$ есть гомеоморфизм.

Номограммой $N(l_x, l_y, l_z)$ будем называть совокупность двух шкал первого типа l_x и l_y и шкалы второго типа l_z, расположенных в одной плоскости так, что удовлетворяются следующие три условия: 1) всякая прямая, пересекающая шкалы l_x и l_y («разрешающая прямая»), пересекает и шкалу l_z; 2) через каждую точку шкалы l_z проходит по крайней мере одна разрешающая прямая; 3) все точки пересечения шкалы l_z с каждой разрешающей прямой имеют одну и ту же отметку (но, конечно, точки пересечения l_z с разными разрешающими прямыми, вообще говоря, имеют разные отметки). l_z называется ответной шкалой номограммы.

Если шкалы l_x и l_y не пересекаются, то номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$, где $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$ и $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}}$, определяет в прямоугольнике R_{xy} $(\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}};$ $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}})$ некоторую функцию $z = f(x, y)$: каждой паре значений x и y ставится в соответствие одно определенное z — отметка точек пересечения шкалы l_z с разрешающей прямой, проходящей через точку шкалы l_x с отметкой x и точку шкалы l_y с отметкой y. Легко видеть, что эта функция $z = f(x, y)$ непрерывна в R_{xy} *.

В самом деле, пусть (x_0, y_0) — произвольная точка прямоугольника R_{xy}. Возьмем произвольную последовательность (x_n, y_n) $(y = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к (x_0, y_0). Пусть для любого n K_n — точка шкалы l_x с отметкой x_n и L_n — точка шкалы l_y с отметкой y_n. В силу определения шкал l_x и l_y, последовательность K_n будет сходиться к K_0, а последовательность L_n — к L_0 K_0 — точка шкалы l_x с отметкой x_0, L_0 — точка шкалы l_y с отметкой y_0). Проведем через точки K_n и L_n $(n = 1, 2, \ldots)$ разрешающие прямые α_n. На каждой из этих прямых возьмем по точке M_n, принадлежащей шкале l_z. По определению функции $z = f(x, y)$ точка M_n будет иметь отметку $f(x_n, y_n)$. Из последовательности M_n, принадлежащей плоскому компакту l_z, можно выделить подпоследовательность M_{n_i}, сходящуюся в некоторой точке $M_0 \in l_z$ Пусть z_0 — отметка точки M_0. В силу определения шкалы второго типа l_z, будем иметь: $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}, y_{n_i}) = z_0$. Так как $K_{n_i} \to K_0$ и $L_{n_i} \to L_0$ и точка M_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ принадлежит прямой α_{n_i}, проходящей через K_{n_i} и L_{n_i}, то M_0 будет принадлежать разрешающей прямой, проходящей через K_0 и L_0. Таким образом, $f(x_0, y_0) = z_0$ и, следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}, y_{n_i}) = f(x_0, y_0)$. Итак, из каждой последовательности $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ можно выделить подпоследовательность (x_{n_i}, y_{n_i}), для которой $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}, y_{n_i}) = f(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0).

* Заметим, что если номограмма определяет некоторую функцию $z = f(x, y)$ и шкалы l_x и l_y пересекаются, то $z = \mathrm{const}$.

Если существует номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$, определяющая в R_{xy} функцию $z=f(x,y)$, то мы будем называть эту функцию **номографируемой** в R_{xy} **с помощью непрерывных функций**; $N(l_x, l_y, l_z)$ будем называть **номограммой этой функции** в R_{xy}.

Номограмму функции $z=f(x,y)$ мы будем называть **нормированной**, если точка $\overline{G}$ шкалы l_x с отметкой $\overline{x}$ имеет в плоскости sOt номограммы координаты $(-1, 1)$, точка $\overline{\overline{G}}$ шкалы l_x с отметкой $\overline{\overline{x}}$ имеет координаты $(1,1)$, точка $\overline{H}$ шкалы l_y с отметкой $\overline{y}$ имеет координаты $(-1, -1)$ и точка $\overline{\overline{H}}$ шкалы l_y с отметкой $\overline{\overline{y}}$ имеет координаты $(1, -1)$.

Будем говорить, что функция $z=f(x,y)$ **монотонна по каждой из переменных в прямоугольнике** R_{xy}, если она является в R_{xy} монотонной (в строгом смысле) функцией от x при постоянном y и монотонной (в строгом смысле) функцией от y при постоянном x.

Пусть функция $z=f(x,y)$ монотонна по каждой из переменных и номографируема с помощью непрерывных функций в прямоугольнике $R_{xy}(\overline{x}\leqslant x\leqslant\overline{\overline{x}}, \overline{y}\leqslant y\leqslant\overline{\overline{y}})$. Пусть $N(l_x, l_y, l_z)$ — произвольная нормированная номограмма функции $z=f(x,y)$, расположенная в плоскости sOt. Установим ряд свойств номограммы $N(l_x, l_y, l_z)$.

2.1. *Шкалы l_x, l_y и l_z попарно не пересекаются.*

Шкалы l_x и l_y не могут иметь общей точки, так как в противном случае функция $z=f(x,y)$ была бы постоянна. Допустим, что общую точку имеют шкалы l_x и l_z. Пусть эта точка имеет отметку x_0 на шкале l_x и отметку z_0 на шкале l_z. Проведем разрешающие прямые через эту точку и точки с отметками $\overline{y}$ и $\overline{\overline{y}}$ шкалы l_y. Тогда должны выполняться равенства $f(x_0,\overline{y})=f(x_0,\overline{\overline{y}})=z_0$, что противоречит монотонности $f(x,y)$ при постоянном x, так как $\overline{\overline{y}}>\overline{y}$.

2.2. *Шкалы l_x и l_y монотонны.*

Достаточно показать, что отображение $P=P(x)$ отрезка $\overline{x}\leqslant x\leqslant\overline{\overline{x}}$ на шкалу l_x является взаимно однозначным или, иными словами, так как две различные точки одной отметки иметь не могут, что каждая точка шкалы l_x имеет только одну отметку. Но если бы это было не так, то нашлась бы точка $K\in l_x$, имеющая по крайней мере две отметки x_1 и x_2, $x_1<x_2$. Проведем разрешающую прямую через K и произвольную точку шкалы l_y с отметкой y. Тогда должно выполняться равенство $f(x_1,y)=f(x_2,y)$, что невозможно.

2.3. *Всякая разрешающая прямая пересекает каждую из шкал l_x и l_y одной точке.*

Если бы какая-либо разрешающая прямая пересекала, например, шкалу l_x в двух различных точках с отметками x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$, и шкалу l_y в точке с отметкой y, то мы имели бы $f(x_1,y)=f(x_2,y)$, что невозможно.

Для определенности будем в дальнейшем предполагать, что $z=f(x,y)$ — возрастающая функция от x при постоянном y и возрастающая функция от y при постоянном x в R_{xy}. Если $f(x,y)$ — монотонная по каждой из переменных функция другого характера, то все нижеследующие утверждения либо остаются без изменений, либо же очевидным образом изменяются.

2.4. *Шкалы l_x и l_y целиком расположены в полосе $-1 \leqslant s \leqslant 1$ плоскости sOt.*

В самом деле, прямая $s = 1$ является разрешающей и поэтому пересекает шкалу l_x лишь в одной точке $\overline{\overline{G}}$ с отметкой $\overline{\overline{x}}$. Отображение $P = P(x)$ отрезка $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$ на l_x есть гомеоморфизм. Если бы на шкале l_x имелись точки с абсциссой $s > 1$, то, выкинув из l_x точку $\overline{\overline{G}}$, мы получили бы несвязное множество, являющееся топологическим образом полуинтервала $\overline{x} \leqslant x < \overline{\overline{x}}$, что невозможно. Совершенно так же можно показать, что все абсциссы точек шкалы l_x $s \geqslant -1$ и что шкала l_y расположена в полосе $-1 \leqslant s \leqslant 1$.

2.5. *При $-1 < s < 1$ для любой точки шкалы l_x выполняется условие $t > |s|$, а для любой точки шкалы l_y — условие $t < -|s|$.*

Действительно, прямые $t = s$ и $t = -s$ являются разрешающими и, если бы не выполнялись указанные условия, то шкала l_x или же шкала l_y пересекалась бы с одной из этих прямых по крайней мере в двух точках.

2.6. *Разрешающими прямыми являются те и только те прямые, которые пересекают и отрезок $\overline{G}\overline{\overline{G}}$ и отрезок $\overline{H}\overline{\overline{H}}$.*

Прямые $s = -1$, $s = 1$, $t = -s$, $t = s$, очевидно, являются разрешающими. Всякая другая прямая, пересекающая указанные отрезки, должна пересекать и шкалу l_x и шкалу l_y и, следовательно, будет разрешающей. В самом деле, эти шкалы связны, а всякая такая прямая отделяет точки $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$ шкалы l_x и точки $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ шкалы l_y.

Допустим теперь, что α — разрешающая прямая, отличная от прямых $s = -1$, $s = 1$, $t = -s$, $t = s$. Тогда, в силу 2.5, общая точка прямой α с l_x должна лежать в полосе $-1 < s < 1$ над ломаной $\overline{G}O\overline{\overline{G}}$, где O — начало координат, а общая точка прямой α с l_y должна лежать в этой полосе под ломаной $\overline{H}O\overline{\overline{H}}$. Но прямая, проходящая через две такие точки, пересекает оба отрезка $\overline{G}\overline{\overline{G}}$ и $\overline{H}\overline{\overline{H}}$.

2.7. *Шкалу l_x в системе координат sOt можно задать уравнением $t = \varphi_1(s)$, а шкалу l_y — уравнением $t = \varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — непрерывные функции на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$.*

В силу 2.6, всякая прямая вида $s = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, является разрешающей. Поэтому со всякой такой прямой шкала l_x пересекается, и притом лишь в одной точке. Этим определяется функция $t = \varphi_1(s)$. Проекция l_x на отрезок $-1 \leqslant s \leqslant 1$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением. Поэтому эта проекция — гомеоморфизм. Отсюда следует, что $t = \varphi_1(s)$ — непрерывная функция на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$. В точности такое же рассуждение можно провести относительно l_y.

В силу 2.7, функции $t = \varphi_1(s)$ и $t = \varphi_2(s)$ задают гомеоморфные отображения отрезка $-1 \leqslant s \leqslant 1$ соответственно на l_x и l_y. Так как, согласно 2.2, отображение $P = P(x)$ отрезка $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$ на l_x есть гомеоморфизм, то тем самым задано топологическое отображение $x = \psi_1(s)$ отрезка $-1 \leqslant s \leqslant 1$ на отрезок $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$. Точно таким же образом с помощью функции $t = \varphi_2(s)$ определяется топологическое отображение $y = \psi_2(s)$ отрезка $-1 \leqslant s \leqslant 1$ на отрезок $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}}$.

2.8. *Функции $x = \psi_1(s)$ и $x = \psi_2(s)$ являются непрерывными монотонно возрастающими в строгом смысле функциями на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$.*

Монотонное возрастание $\psi_1(s)$ вытекает из того, что $\psi_1(1) = \overline{\overline{x}} > \overline{x} = \psi_1(-1)$.

2.9. *Шкала l_z в полосе $-1 \leqslant s \leqslant 1$ целиком расположена над шкалой l_y и под шкалой l_x, а при $|s| > 1$ точки шкалы l_z могут находиться только на прямых $t = s$ и $t = -s$.*

В самом деле, допустим, что точка M шкалы l_z с отметкой z_1 находится при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ над шкалой l_x, или при $s < -1$ — над прямой $t = -s$, или при $s > 1$ — над прямой $t = -s$. Проведем через точку M две различные разрешающие прямые α_1 и α_2. Пусть они пересекаются со шкалой l_x соответственно в точках K_1 и K_2 с отметками x_1 и x_2, а со шкалой l_y — соответственно в точках L_1 и L_2 с отметками y_1 и y_2. Пусть $x_1 < x_2$. Легко видеть, что тогда $y_1 < y_2$. Вместе с тем имеем: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = z_1$, что противоречит возрастанию функции $z = f(x, y)$ по каждой из переменных, так как $f(x_1, y_1) < f(x_1, y_2) < f(x_2, y_2)$.

Точно таким же образом можно показать, что шкала l_z не может иметь точек при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ под шкалой l_y, при $s < -1$ под прямой $t = s$ и при $s > 1$ под прямой $t = -s$. Наконец, шкала l_z не может иметь точек при $|s| > 1$ и $|t| < |s|$, так как через такие точки не проходило бы ни одной разрешающей прямой.

2.10. *Всякая разрешающая прямая, за исключением, быть может, одной или нескольких из четырех прямых $s = -1$, $s = 1$, $t = -s$ и $t = s$, пересекает шкалу l_z в одной точке.*

Пусть α — произвольная разрешающая прямая, отличная от четырех перечисленных прямых. Допустим, что на ней лежат две точки M_1 и M_2 шкалы l_z. Тогда точки M_1 и M_2 имеют одну и ту же отметку, скажем z_1. Прямая α пересекает оба отрезка $\overline{G}\overline{\overline{G}}$ и $\overline{H}\overline{\overline{H}}$ и, самое большее, содержит лишь одну из четырех точек $\overline{G}$, $\overline{\overline{G}}$, $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$. Допустим для определенности, что α не проходит ни через $\overline{G}$, ни через $\overline{\overline{G}}$. Пусть α пересекает шкалу l_y в точке L. Тогда ясно, что для любой достаточно близкой к L точке шкалы l_y прямые, соединяющие эту точку с точками M_1 и M_2, будут разрешающими. Возьмем произвольную такую точку P шкалы l_y. Пусть она имеет отметку y_1, и пусть прямая, соединяющая P с M_1, пересекает шкалу l_x в точке K_1 с отметкой x_1, а прямая, соединяющая P с M_2, пересекает l_x в точке K_2 с отметкой x_2. Тогда, очевидно, $f(x_1, y_1) = z_1$ и $f(x_2, y_1) = z_1$. Но это невозможно, так как точки x_1 и x_2 не совпадают и, следовательно, $x_1 \neq x_2$.

Назовем **основной частью** Γ_z **шкалы** l_z совокупность точек этой шкалы, лежащих в полосе $-1 < s < 1$. Из 2.10 следует, что точки шкалы l_z, не входящие в Γ_z, целиком располагаются в интервалах $|t| < 1$ прямых $s = -1$ и $s = 1$ и в бесконечных интервалах $|t| > 1$ прямых $t = -s$ и $t = s$. Следовательно, все эти точки имеют соответственно одну из четырех отметок $f(\overline{x}, \overline{y})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$.

2.11. *Γ_z — открытая дуга, уравнение которой в плоскости sOt может быть задано в виде $t = \varphi_3(s)$, где $\varphi_3(s)$ — непрерывная функция в интервале $-1 < s < 1$.*

В силу 2.10, всякая прямая вида $s=s_0$, где $-1<s_0<1$, пересекает Γ_z, и притом только в одной точке. Этим определена функция $t=\varphi_3(s)$. Эта функция непрерывна. В самом деле, пусть s_0 — произвольная точка интервала $-1<s<1$ и s_n $(n=1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность точек этого интервала, сходящаяся к s_0. Из последовательности точек $(s_n, \varphi_3(s_n))$, принадлежащих ограниченному замкнутому множеству l_z, можно выбрать подпоследовательность $(s_{n_i}, \varphi_3(s_{n_i}))$, сходящуюся к точке $M \in l_z$. Тогда M принадлежит Γ_z и прямой $s=s_0$. Так как Γ_z пересекается с прямой $s=s_0$ лишь в одной точке $(s_0, \varphi_3(s_0))$, то отсюда следует, что $M=(s_0, \varphi_3(s_0))$ и, следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty}\varphi_3(s_{n_i})=\varphi_3(s_0)$. Итак, из всякой последовательности $s_n \to s_0$ можно выделить подпоследовательность s_{n_i}, для которой $\lim\limits_{i\to\infty}\varphi_3(s_{n_i})=$ $=\varphi_3(s_0)$. Отсюда следует, что функция $t=\varphi_3(s)$ непрерывна в точке s_0.

Так как Γ_z представляет собой график непрерывной функции $t=\varphi_3(s)$ на интервале $-1<s<1$, то Γ_z гомеоморфно этому интервалу, и проекция π множества Γ_z на интервал $-1<s<1$ есть гомеоморфизм.

2.12. *Для всякого значения z такого, что $f(\bar{x}, \bar{y})<z<f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, существует одна и только одна точка основной части Γ_z шкалы l_z, имеющая отметку z. Значения $f(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$ и $f(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$ принимаются в точках пересечения Γ_z соответственно с прямой $t=-s$ и с прямой $t=s$.*

Рассмотрим в прямоугольнике R_{xy} множество точек T вида $(\psi_1(s), \psi_2(s))$, где $x=\psi_1(s)$ и $x=\psi_2(s)$ — функции, о которых шла речь в 2.8, и $-1\leqslant s\leqslant 1$. В силу 2.8, T — простая дуга, соединяющая в R_{xy} точки $(\bar{x}, \bar{y})$ и $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, в которых функция $z=f(x, y)$ соответственно принимает наименьшее и наибольшее значения. Поэтому на T функция $f(x, y)$ принимает все промежуточные значения между $f(\bar{x}, \bar{y})$ и $f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$. Так как, в силу 2.8, функции $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ являются монотонно возрастающими, а $f(x, y)$ — функция, монотонно возрастающая по каждой из переменных при постоянной другой, то в любых двух различных точках T функция $z=f(x, y)$ принимает различные значения.

Пусть z_0 — произвольное значение, такое, что $f(\bar{x}, \bar{y})<z_0<f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$. Найдется точка $(\psi_1(s_0), \psi_2(s_0))$ множества T, в которой $f(x, y)$ принимает значение z_0. При этом ясно, что $-1<s_0<1$. В соответствии с определением функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ это означает, что в плоскости sOt прямая $s=s_0$ пересекает шкалу l_z в точке M_0 с отметкой z_0. Так как $-1<s_0<1$, точка M_0 принадлежит Γ_z. Допустим, что в Γ_z существует еще одна точка M_1 с отметкой z_0. Точка M_1 имеет абсциссу s_1. При этом $s_1\neq s_0$, так как прямая $s=s_0$ является разрешающей и, в силу 2.10, пересекает l_z лишь в одной точке. В соответствии с определением функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ отметка в точке M_1 должна равняться $f(\psi_1(s_1), \psi_2(s_1))\neq f(\psi_1(s_0), \psi_2(s_0))=z_0$, и мы пришли к противоречию.

Множество Γ_z пересекается и с прямой $t=s$ и с прямой $t=-s$. Покажем, например, первое. Γ_z, в силу 2.11, — связное множество. Поэтому достаточно показать, что Γ_z имеет точки как над прямой $t=s$, так и под этой прямой. Но если бы Γ_z было целиком расположено, например, над этой прямой, то для точки $M(s, t)$ множества Γ_z с абсциссой s мы имели бы: $s\leqslant t\leqslant\varphi_1(s)$, и поэтому при $s\to 1$ t стремилось бы к 1 и точка M стремилась бы к точке $\overline{\overline{G}}$, что невозможно, так как l_z замкнуто, $\overline{\overline{G}} \in l_x$ и l_x и l_z не пересекаются.

В точке пересечения Γ_z с прямой $t = -s$ шкала l_z должна иметь отметку $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$, а в точке пересечения с прямой $t = s$ — отметку $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$. Так как различные точки Γ_z не могут иметь одинаковых отметок, то в других точках отметки $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ и $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$ не принимаются.

Из 2.12, очевидно, вытекает

2.13. *Для всякого значения z, отличного от значений $f(\overline{x}, \overline{y})$, $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ и такого, что $\min\limits_{(x,y)\in R_{xy}} f(x, y) \leqslant z \leqslant \max\limits_{(x,y)\in R_{xy}} f(x, y)$, существует одна и только одна точка шкалы l_z, имеющая отметку z. Точки шкалы l_z, имеющие указанные четыре отметки, целиком располагаются соответственно на прямых $s = -1$, $t = -s$, $t = s$, $s = 1$.*

Для всякого s_0, $-1 \leqslant s_0 \leqslant 1$, обозначим через $\psi_3(s_0)$ отметку точек пересечения прямой $s = s_0$ со шкалой l_z.

2.14. $z = \varphi_3(s)$ — *непрерывная, монотонно возрастающая функция на отрезке* $-1 \leqslant s \leqslant 1$.

Это очевидно, так как $\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s))$.

Заметим, что мы нигде в утверждениях 2.1—2.14 не пользовались непрерывностью функции $z = z(P)$, входящей в определение шкалы l_z. Легко видеть, что в наших предположениях эта функция *автоматически оказывается непрерывной.*

В самом деле, в точках шкалы l_z, лежащих на полупрямых $t = \pm s$, $|s| > 1$, она, очевидно, непрерывна, а в остальных точках шкалы l_z выполняется равенство $z(P) = \psi_3(\pi(P))$, где π — проекция шкалы l_z на ось Os, а $\psi_3(s)$ — определенная выше функция.

Свойства 2.1—2.14 довольно ясно описывают строение произвольной нормированной номограммы функции $z = f(x, y)$. Шкалы l_x и l_y этой номограммы являются в плоскости sOt графиками непрерывных функций $t = \varphi_1(s)$ и $t = \varphi_2(s)$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, причем $\varphi_1(-1) = \varphi_1(1) = 1$ и $\varphi_2(-1) = \varphi_2(1) = -1$. Отметки на этих шкалах монотонно возрастают с ростом s. Шкала l_z при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ также является графиком Γ_z непрерывной функции $t = \varphi_3(s)$, и отметки на Γ_z также непрерывно возрастают вместе с s. Γ_z содержится между l_y и l_x. При $s \to 1$ и при $s \to -1$ функция $t = \varphi_3(s)$ либо стремится к определенному пределу, либо может вести себя «подобно» функции $\sin\frac{1}{s}$ при $s \to 0$. При $s \to 1$ отметка точки Γ_z с абсциссой s стремится к $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, а при $s \to -1$ — к $f(\overline{x}, \overline{y})$. Шкала l_z, помимо Γ_z, состоит из предельных отрезков Γ_z на отрезках $\overline{H}\,\overline{G}$ и $\overline{\overline{H}}\,\overline{\overline{G}}$ (конечно, один или оба этих предельных отрезка могут вырождаться в точку) и из произвольных замкнутых ограниченных множеств, лежащих на интервалах $s = \pm 1$, $|t| \leqslant 1$ и $t = \pm s$, $|s| > 1$. Точки l_z, лежащие на этих интервалах, соответственно имеют отметки $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, $f(\overline{x}, \overline{y})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$, $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$.

Нетрудно показать, что у всякой номографируемой с помощью непрерывных функций, монотонной по каждой из переменных в прямоугольнике R_{xy} функции существует нормированная номограмма.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть $z = f(x, y)$ — функция, монотонная по каждой из переменных и номографируемая с помощью непрерывных функций в прямоугольнике R_{xy}, и пусть в этом прямоугольнике взята произвольная прямоугольная сетка. Тогда функция, индуцированная функцией $z = f(x, y)$ на этой сетке, номографируема.*

Доказательство. Пусть в прямоугольнике R_{xy} с вершинами $A(\bar{x}, \bar{y})$ $B(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$, $C(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ и $D(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$ взята прямоугольная сетка с отрезками X_i и Y_j ($i = 1, 2, \ldots, l$; $j = 1, 2, \ldots, m$). При этом прямые, несущие отрезки X_i, имеют в плоскости xOy соответственно уравнения $x = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, l$), где $x_1 = \bar{x}$, $x_l = \bar{\bar{x}}$ и $x_1 < x_2 < \ldots < x_l$, а прямые, несущие отрезки Y_j, имеют в плоскости xOy уравнения $y = y_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), где $y_1 = \bar{y}$, $y_m = \bar{\bar{y}}$ и $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$. Как и ранее, будем предполагать, что $z = f(x, y)$ — возрастающая функция от x при постоянном y и возрастающая функция от y при постоянном x.

Возьмем произвольную нормированную номограмму $N(l_x, l_y, l_z)$ функции $z = f(x, y)$, расположенную в плоскости sOt. Она будет удовлетворять всем описанным выше условиям.

Рассмотрим коррелятивное отображение ω плоскости sOt на плоскость uOv, переводящее точку (s, t) плоскости sOt в прямую $au + bv + c = 0$, где a, b и c определяются по формуле

$$a : b : c = (t + 1) : (-t + 1) : (-2s).$$

При этом отображении точки $\bar{G}(-1, 1)$, $\bar{\bar{G}}(1, 1)$, $\bar{H}(-1, -1)$ и $\bar{\bar{H}}(1, -1)$ плоскости sOt перейдут соответственно в прямые $u = -1$, $u = 1$, $v = -1$ и $v = 1$ плоскости uOv.

При отображении ω прямая $ps + qt + r = 0$ плоскости sOt переходит в точку $\left(-\frac{q+r}{p}, \frac{q-r}{p}\right)$ плоскости uOv. Обозначим через R_{uv} квадрат в плоскости uOv с вершинами $A'(-1, -1)$, $B'(1, -1)$, $C'(1, 1)$ и $D'(-1, 1)$. Любая разрешающая прямая номограммы $N(l_x, l_y, l_z)$, в силу 2.6, будет пересекать в плоскости sOt и отрезок $\bar{G}\bar{\bar{G}}$: $t = 1$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, и отрезок $\bar{H}\bar{\bar{H}}$: $t = -1$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$. Пусть она пересекает первый отрезок в точке $(s_1, 1)$, а второй — в точке $(s_2, -1)$, где $-1 \leqslant s_1 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant s_2 \leqslant 1$. Тогда эта прямая имеет уравнение $2s + (s_2 - s_1)t - (s_1 + s_2) = 0$ и, следовательно, при отображении ω переходит в точку (s_1, s_2) квадрата R_{uv}.

Определим теперь отображение Ω прямоугольника R_{xy} на квадрат R_{uv} следующим образом. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямоугольника R_{xy}. Пусть α — соответствующая ей разрешающая прямая и пусть при отображении ω эта прямая переходит в точку $N(u, v)$ квадрата R_{uv}. Тогда мы полагаем $\Omega(M) = N$.

Так как двум различным точкам прямоугольника R_{xy} отвечают различные разрешающие прямые, Ω является взаимно однозначным отображением R_{xy} на R_{uv}. Ясно также, что $\Omega(A) = A'$, $\Omega(B) = B'$, $\Omega(C) = C'$ и $\Omega(D) = D'$. Ω — непрерывное отображение. В самом деле, если в R_{xy} последовательность $M_n(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) сходится к $M_0(x_0, y_0)$, то на l_x последовательность точек K_n с отметками x_n сходится к точке K_0 с отметкой x_0, а на l_y последовательность точек L_n с отметками y_n сходится к точке L_0 с отметкой y_0. Пусть разрешающая прямая, соединяющая K_n с L_n, пересекает отрезок $\overline{G}\,\overline{\overline{G}}$ в точке $(s_1^{(n)}, 1)$, а отрезок $\overline{H}\,\overline{\overline{H}}$ — в точке $(s_2^{(n)}, -1)$ и прямая, соединяющая K_0 с L_0, пересекает указанные отрезки соответственно в точках $(s_1^{(0)}, 1)$ и $(s_2^{(0)}, -1)$. Тогда, очевидно, $s_1^{(n)} \to s_1^{(0)}$, $s_2^{(n)} \to s_2^{(0)}$ и, следовательно, $(s_1^{(n)}, s_2^{(n)}) \to (s_1^{(0)}, s_2^{(0)})$.

Так как Ω — непрерывное взаимно однозначное отображение R_{xy} на R_{uv}, оно является гомеоморфизмом. Так как каждой прямой вида $x = x_0$, плоскости xOy соответствует совокупность разрешающих прямых, проходящих через (единственную) точку шкалы l_x с отметкой x_0, то при отображении Ω прямая $x = x_0$ перейдет в некоторый прямолинейный отрезок, соединяющий $A'B'$ с $D'C'$. Семейство $x = \text{const}$ перейдет при отображении Ω в семейство отрезков, соединяющих сторону $A'B'$ со стороной $D'C'$. При этом никакие два различных отрезка не имеют общих точек. Подобным же образом семейство отрезков в R_{xy} вида $y = \text{const}$ перейдет при отображении Ω в семейство прямолинейных отрезков, соединяющих сторону $A'D'$ со стороной $B'C'$, причем все эти отрезки попарно не пересекаются.

Наконец, каждой линии уровня $z = z_0$ функции $z = f(x, y)$, где z_0 отлично от $f(\overline{x}, \overline{y})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$, $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ и $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, соответствует в плоскости sOt совокупность разрешающих прямых, проходящих через (опять-таки единственную) точку шкалы l_z, имеющую отметку z_0. Линии уровня $z = f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ соответствует в плоскости sOt совокупность всех разрешающих прямых, проходящих через точку Γ_z с отметкой $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ (к числу этих прямых принадлежит и прямая $t = -s$), а линии уровня $z = f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$ в плоскости sOt соответствует совокупность всех разрешающих прямых, проходящих через точку Γ_z, имеющую отметку $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$. Поэтому каждой линии уровня $z = z_0$, где $f(\overline{x}, \overline{y}) < z_0 \leqslant f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ при отображении Ω соответствует прямолинейный отрезок, концы которого лежат на границе квадрата R_{uv}. При этом ясно, что никакие два таких отрезка не пересекаются и что отрезок, соответствующий линии уровня $z = z_0$, отделяет в R_{uv} отрезки, соответствующие линиям уровня $z = z'$, где $z' < z_0$, от отрезков, соответствующих линиям уровня $z = z''$, где $z'' > z_0$. Наконец, линии уровня $z = f(\overline{x}, \overline{y})$ и $z = f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ состоят лишь из единственных точек A и C, и эти точки соответственно переходят при отображении Ω в точки A' и C'.

Совокупность отрезков X'_i в R_{uv}, в которые соответственно переходят при отображении Ω отрезки X_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, и отрезков Y'_j, в которые переходят отрезки Y_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, образует сетку R_{uv}, эквивалентную сетке R_{xy}. В качестве системы прямых E возьмем совокупность прямых, несущих в плоскости uOv отрезки, соответствующие линиям уровня функции $z = f(x, y)$, проходящим через узлы сетки R_{xy}. Тогда ясно, что сетка R_{uv} и система E удовлетворяют всем требуемым условиям и, следовательно, функция, индуцируемая функцией $z = f(x, y)$ на заданной прямолинейной сетке, номографируема.

Можно показать, что, наоборот, всякую функцию, номографируемую на прямоугольной сетке R_{xy}, можно продолжить на весь прямоугольник R_{xy} в монотонную по каждой из переменных функцию, номографируемую с помощью непрерывных функций.

Приведем пример функции, возрастающей по каждой из переменных, непрерывной и неномографируемой с помощью непрерывных функций.

Пример 2. Положим

$$f(x, y) = x + y + \frac{|w| - w}{4}, \text{ где } w = (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{64},$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Ясно, что эта функция монотонно возрастает по каждой из переменных и непрерывна в квадрате $R_{xy}(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$. В узлах построенной в примере 1 сетки эта функция принимает те же значения, что и определенная в примере 1 функция f. Из теоремы 2 заключаем, что $f(x, y)$ не номографируема с помощью непрерывных функций.

§ 3. Номограммы со шкалами, заданными параметрически

Шкалой l_x, заданной параметрически, будем называть плоский непрерывный образ отрезка $P = P(\xi)$, $\bar{\xi} \leqslant \xi \leqslant \bar{\bar{\xi}}$, причем на этом отрезке задана непрерывная функция $x = x(\xi)$. Для каждой точки $P = P(\xi) \in l_x$ значение $x(\xi)$ называется отметкой данной точки.

В этом параграфе, дополнительно этого не оговаривая, под номограммой мы будем понимать совокупность трех шкал l_x, l_y и l_z, заданных параметрически (соответственно с параметрами ξ, η и ζ), расположенных в одной плоскости и удовлетворяющих перечисленным выше условиям (см. § 2): 1) всякая прямая, пересекающая шкалы l_x и l_y (разрешающая прямая), пересекает и шкалу l_z; 2) через каждую точку шкалы l_z проходит по крайней мере одна разрешающая прямая; 3) все точки пересечения шкалы l_z с каждой разрешающей прямой имеют одну и ту же отметку.

Заметим, что, хотя шкалы определены в этом случае совершенно равноправно — все они заданы параметрически, — в определение номограммы x, y и z входят по-прежнему неравноправно.

Мы будем говорить, что номограмма $N(l_x,\ l_y,\ l_z)$ определяет в прямоугольнике R_{xy} $(\bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}};\ \bar{y} \leqslant y \leqslant \bar{\bar{y}})$ функцию $z = f(x, y)$, если на шкале l_x множество значений, принимаемых отметкой $x = x(\xi)$, есть отрезок $\bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}}$, на шкале l_y множество значений, принимаемых отметкой $y = y(\eta)$, есть отрезок $\bar{y} \leqslant y \leqslant \bar{\bar{y}}$ и если любая разрешающая прямая, пересекающая шкалу l_x в точке с отметкой $x \in [\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$ и шкалу l_y в точке с отметкой $y \in [\bar{y}, \bar{\bar{y}}]$, пересекает шкалу l_z в точках, имеющих отметку $z = f(x, y)$.

Функцию $z = f(x, y)$ мы будем называть в этом параграфе номографируемой в прямоугольнике R_{xy}, если существует номограмма, определяющая эту функцию в R_{xy}.

Пусть $z = f(x, y)$ — функция, монотонная по каждой из переменных, непрерывная и номографируемая в прямоугольнике R_{xy}. Пусть $N(l_x,\ l_y,\ l_z)$ — произвольная номограмма этой функции. Мы покажем, что $N(l_x,\ l_y,\ l_z)$ является номограммой функции $z = f(x, y)$ и в смысле § 2. Для этого последовательно установим некоторые свойства этой номограммы. При этом, как и прежде, для определенности будем считать, что функция $z = f(x, y)$ возрастает по каждой из переменных при постоянной другой.

3.1. *Шкалы l_x, l_y и l_z попарно не пересекаются.* (См. 2.1.)

3.2. *Каждая точка шкалы l_x, каждая точка шкалы l_y и каждая точка шкалы l_z имеют только одну отметку.*

Так как через каждую точку шкалы l_z проходит по крайней мере одна разрешающая прямая, то указанное свойство шкалы l_z вытекает из условия 3) определения номограммы. Для шкал l_x и l_y это свойство, очевидно, следует из монотонности функции $z = f(x, y)$ (см. 2.2).

Таким образом, каждой точке P шкалы l_x отвечает одна определенная отметка x. Тем самым на шкале l_x определена функция $x = x(P)$. Очевидно, для любого $\xi \in [\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]$ $X(P(\xi)) = x(\xi)$. Подобным же образом на l_y определена функция $y = Y(P)$ и на l_z функция $z = Z(P)$.

3.3. *$X(P)$, $Y(P)$ и $Z(P)$ — непрерывные функции соответственно на l_x, l_y и l_z.*

Пусть P_0 — произвольная точка шкалы l_x и P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность точек этой шкалы, сходящаяся к P_0. Для каждой точки P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ возьмем любое значение ξ_n, где $\bar{\xi} \leqslant \xi_n \leqslant \bar{\bar{\xi}}$ и $P_n = P(\xi_n)$. Из последовательности ξ_n выделим сходящуюся подпоследовательность $\xi_{n_k}: \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k} = \xi_0$. Тогда, так как отображение $P = P(\xi)$ отрезка $[\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]$ на l_x непрерывно и так как $P_{n_k} \to P_0$, мы будем иметь: $P_0 = P(\xi_0)$. С другой стороны, так как $x(\xi)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{k\to\infty} x(\xi_{n_k}) = x(\xi_0)$. Но это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} X(P_{n_k}) = X(P_0)$. Итак, из каждой последовательности $P_n \in l_x$, сходящейся к P_0, можно выделить подпоследовательность P_{n_k}, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} X(P_{n_k}) = X(P_0)$. Отсюда следует, что функция $x = X(P)$ непрерывна в точке P_0.

3.4. *Все точки пересечения шкалы l_x (шкалы l_y) с каждой разрешающей прямой имеют одну и ту же отметку.* (См. 2.3.)

3.5. *Не существует связного, состоящего более чем из одной точки подмножества шкалы l_x (шкалы l_y), все точки которого имеют одну и ту же отметку.*

Пусть U — связное, состоящее более чем из одной точки подмножество шкалы l_x, все точки которого имеют одну и ту же отметку x_0. Допустим сначала, что U не принадлежит одной разрешающей прямой. Возьмем произвольную точку L_0 шкалы l_y. Пусть она имеет отметку y_0. Проведем через L_0 прямую α, по обе стороны от которой есть точки множества U; это возможно, так как U не принадлежит одной разрешающей прямой. Пусть α пересекает шкалу l_z в точке M с отметкой z_0. Возьмем точки K_1 и K_2 множества U, лежащие по разные стороны от α. Проведем прямые β_1 и β_2 соответственно через M и K_1 и через M и K_2. Тогда, так как U связно, всякая прямая, проходящая через точку M внутри вертикальных углов, образованных прямыми β_1 и β_2 и содержащих прямую α, будет пересекать U. Внутренность того из этих вертикальных углов, который содержит L_0, пересекает

l_y по открытому в l_y множеству V, содержащему L_0. Возьмем произвольную точку L множества V и соединим ее с M прямой γ. Тогда γ пересечет U и, следовательно, будет разрешающей прямой. Поэтому, если L имеет отметку y, то должно выполняться равенство $f(x_0, y) = z_0 = f(x_0, y_0)$. Так как $f(x, y)$ монотонна по y при постоянном x, то отсюда следует, что $y = y_0$. Итак, точка L_0 имеет в l_y окрестность V, все точки которой имеют одну и ту же отметку.

Для каждой точки шкалы l_y возьмем окрестность, все точки которой имеют одну и ту же отметку. Из полученного покрытия выделим конечное подпокрытие П. Так как l_y связно, любые две окрестности покрытия П можно соединить цепочкой окрестностей из П так, чтобы первая окрестность цепочки совпадала с первой данной окрестностью, последняя окрестность цепочки совпадала со второй данной окрестностью и каждая окрестность цепочки имела общие точки с предыдущей и со следующей окрестностями цепочки. Так как в каждой из этих окрестностей отметка постоянна, то отсюда следует, что и во всех окрестностях покрытия П отметка постоянна и все точки шкалы l_y имеют одну и ту же отметку, что невозможно.

Допустим теперь, что множество U принадлежит разрешающей прямой δ. Пусть B — общая часть δ и шкалы l_y; все точки множества B, в силу 3.4, имеют одну и ту же отметку, допустим y_1. Для каждой точки L шкалы l_y, не принадлежащей B, как и выше, найдем окрестность $V(L)$ относительно l_y, все точки которой имеют одну и ту же отметку. Возьмем число $\varepsilon = \frac{\overline{\overline{y}} - \overline{y}}{3} > 0$ и для каждой точки L множества B найдем окрестность $W(L)$ относительно l_y, в каждой точке которой отметка y удовлетворяет условию $|y - y_1| < \varepsilon$; такая окрестность существует, в силу 3.3. Положим $W = \bigcup_{L \in B} W(L)$; тогда W — открытое в l_y множество, которое содержит B и отметка каждой точки которого удовлетворяет условию $|y - y_1| < \varepsilon$.

Все множества $V(L)$ и множество W образуют покрытие шкалы l_y; выделим из него конечное покрытие Π_1. Если в Π_1 не входит множество W, то, как и выше, заключаем, что все точки шкалы l_y имеют одну и ту же отметку, что невозможно. Пусть теперь Π_1 состоит из окрестностей $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и W. Тогда, так как l_y связно, любую окрестность V_i можно соединить с W цепочкой элементов покрытия Π_1 так, чтобы первый элемент цепочки совпадал с V_i, последний — с W и каждый элемент цепочки имел общие точки с предыдущим и следующим за ним элементами. Так как в каждом из этих элементов, кроме W, отметка постоянна, то отсюда следует, что и отметка каждой точки окрестности V_i удовлетворяет условию $|y - y_1| < \varepsilon$. Но V_i — любая окрестность из Π_1, поэтому отметка любой точки шкалы удовлетворяет неравенству $|y - y_1| < \varepsilon$, что, в силу выбора ε, невозможно.

3.6. *Всякая разрешающая прямая пересекает шкалу l_x (шкалу l_y) в одной точке.*

Допустим, что разрешающая прямая α пересекает шкалу l_x не в одной точке. Тогда все точки пересечения l_x с α имеют одну и ту же отметку, скажем x_0. Прямой α принадлежит по крайней мере одна точка L шкалы l_y. Пусть L имеет отметку y_0.

Прежде всего ясно, что все точки пересечения прямой α с l_x лежат на α по одну сторону от L. В самом деле, если бы это было не так, мы могли бы на шкале l_y взять точку L' с отметкой $y' \neq y_0$ и провести прямую β через L и L'. Тогда прямая β отделяла бы точки шкалы l_x. Так как шкала l_x связна, отсюда следовало бы, что β пересекает l_x и поэтому является разрешающей прямой, что, в силу 3.4, невозможно.

Ясно далее, что каждая точка пересечения прямой α с l_x является предельной для множества T точек шкалы l_x, не принадлежащих α. В самом деле, в противном случае у какой-либо общей точки K прямой α и l_x была бы окрестность V относительно l_x, целиком состоящая из точек прямой α. Так как l_x локально связно, нашлась бы связная окрестность U точки K, $U \subset V$. В силу 3.4, все точки U имели бы одну и ту же отметку, что, согласно 3.5, невозможно.

Покажем далее, что шкала l_y не может лежать по обе стороны от прямой α. В самом деле, в противном случае возьмем две точки L_1 и L_2 шкалы l_y по разные стороны от α и две точки K_1 и K_2 шкалы l_x, лежащее на α. Проведем прямые β_1 и β_2 соответственно через L_1 и K_1 и через L_2 и K_1. Тогда любая прямая, проходящая через K_1 и лежащая в двух вертикальных углах, образованных β_1 и β_2 и содержащих прямую α, будет отделять точки L_1 и L_2 и, следовательно, так как l_y связна, будет пересекать l_y. Поэтому всякая такая прямая является разрешающей. Внутренность того из двух вертикальных углов, который содержит точку K_2, является окрестностью этой точки. Так как l_x локально связна, найдется связная окрестность U точки K_2 относительно l_x, целиком лежащая внутри этого угла. Любая точка множества U лежит на одной разрешающей прямой с точкой K_1 и, следовательно, имеет отметку x_0. Итак, мы нашли связное открытое подмножество U шкалы l_x, все точки которого имеют одну и ту же отметку, что, в силу 3.5, невозможно.

Таким образом, шкала l_y целиком лежит по одну сторону от α (и, конечно, имеет точки на α). Прямой α принадлежат по крайней мере две точки шкалы l_x. Вновь обозначим их через K_1 и K_2, причем будем считать, что K_1 лежит ближе к точке L, чем K_2. Обозначим множество точек шкалы l_x, лежащих по ту же сторону от α, что и l_y, через T', а множество точек шкалы l_x, лежащих по другую сторону от α,—через T'' (общие точки α и l_x мы не причисляем ни к T', ни к T''). Как было показано выше, точки K_1 и K_2 являются предельными точками множества $T = T' \cup T''$.

Покажем, что K_1 и K_2 не могут одновременно быть предельными точками T' или же T''. Возьмем произвольную точку L' шкалы l_y, не лежащую на α. Если бы K_1 и K_2 были предельными для T', то мы провели бы прямую через K_2 и L'. Тогда всякая прямая, проходящая через K_2 и любую точку внутри угла LK_2L', будет отделять L от L' и, следовательно, будет разрешающей. Возьмем точку K_1' множества T', лежащую внутри этого угла; такая точка найдется, так как K_1 является предельной точкой T'. Проведем прямую α_1 через K_2 и K_1'. Тогда α_1 является разрешающей прямой; на ней лежат по крайней мере две точки K_2 и K_1' шкалы l_x, и шкала l_y лежит по обе стороны от α, что невозможно. Подобным же образом можно показать, что K_1 и K_2 не могут быть предельными для T''; здесь нужно только будет поменять ролями K_1 и K_2. Итак, одна из точек K_1 и K_2, допустим K_1, является предельной для T', а другая, K_2 — для T''. Покажем теперь, что шкала l_x не может иметь с α никаких других общих точек, кроме K_1 и K_2. В самом деле, всякая такая точка K была бы предельной для T, но она не может быть предельной ни для T', ни для T'', так как в первом случае на α были бы две точки K и K_1, предельных для T', а во втором — две точки K и K_2, предельных для T'', но оба эти случая по-предыдущему исключены.

Рассмотрим теперь два множества: $\overline{T}'$, состоящее из T' и точки K_1, и $\overline{T}''$, состоящее из T'' и точки K_2. Эти множества, очевидно, замкнуты, не пересекаются и вместе дают l_x. Но это невозможно, так как l_x связно. Таким образом, мы пришли к противоречию и утверждение 3.6 полностью доказано.

3.7. *Шкалы l_x и l_y являются простыми дугами.*

Возьмем произвольную точку L шкалы l_y и проведем произвольный луч u с началом L, не пересекающий шкалы l_x; такой луч найдется, так как всякая прямая, проходящая через L, пересекает l_x не более чем в одной точке. Рассмотрим L в качестве полюса, а u — в качестве полярной оси. Пусть $\overline{\theta}$ — наименьший полярный угол, для которого луч, выходящий из L, пересекает шкалу l_x, а $\overline{\overline{\theta}}$ — наибольший такой угол; так как l_x — замкнутое ограниченное множество, эти углы существуют; ясно также, что $\overline{\overline{\theta}}-\overline{\theta}<\pi$. Тогда, так как каждая прямая, проходящая через L, пересекает l_x не более чем в одной точке и так как l_x связно, в системе полярных координат ρ, θ шкала l_x имеет уравнение $\rho=\rho(\theta)$, где $\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}$. Покажем, что $\rho(\theta)$ — непрерывная функция. Рассмотрим значение θ_0 и последовательность θ_n $(n=1, 2,\ldots)$, сходящуюся к θ_0, где $\overline{\theta}\leqslant\theta_0\leqslant\overline{\overline{\theta}}$, $\overline{\theta}\leqslant\theta_n\leqslant\overline{\overline{\theta}}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тогда из последовательности $\rho(\theta_n)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\rho(\theta_{n_i})$; положим $\lim\limits_{i\to\infty}\rho(\theta_{n_i})=\rho_0$. Тогда, очевидно, последовательность точек $K_{n_i}(\theta_{n_i}, \rho(\theta_{n_i}))$ сходится к $K_0(\theta_0,\rho_0)$ и так как все точки K_{n_i} принадлежат l_x, то и $K_0\in l_x$, и поэтому $\rho(\theta_0)=\rho_0$. Отсюда следует, что функция $\rho(\theta)$ непрерывна на отрезке $\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}$ и l_x — простая дуга.

Обозначим концы дуги l_x через $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$, а концы дуги l_y — через $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ причем обозначения выберем так, чтобы для отметок выполнялись неравенства $X(\overline{G})\leqslant X(\overline{\overline{G}})$ и $Y(\overline{H})\leqslant Y(\overline{\overline{H}})$. На шкале l_x, как известно, определена отметка $x=X(P)$, а на шкале l_y — отметка $y=Y(P)$.

3.8. *Функция $x=X(P)$ не может достигать локального максимума и минимума ни в одной точке шкалы l_x, кроме точек $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$; функция $y=$ $=Y(P)$ не может достигать локального максимума и минимума ни в одной точке шкалы l_y, кроме точек $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$.*

Допустим, для определенности, что функция $X(P)$ достигает локального максимума в точке K_0, отличной от $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$. Пусть $X(K_0)=x_0$. У точки K^0 существует связная окрестность U относительно l_x, для каждой точки K которой выполняется условие $X(K)\leqslant X(K_0)$. Возьмем на шкале l_y точку L_0, в которой функция $y=Y(P)$ принимает наибольшее значение $\overline{\overline{y}}$ (точка L_0 могла бы оказаться и одной из точек $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$). Проведем разрешающую прямую α через K_0 и L_0. На α возьмем какую-либо точку M шкалы l_z; эта точка будет иметь отметку $z_0 = f(x_0, y_0)$. Так как K_0 отлична от $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$, то U имеет точки по обе стороны от α (если L_0 взять в качестве полюса полярной системы координат, как в 3.7, то ясно, что U будет состоять из всех точек шкалы l_x, удовлетворяющих условию $\theta' < \theta < \theta''$, где θ' и θ'' — некоторые числа, $\theta'' - \theta' < \pi$, и полярный угол θ_0 точки K_0 будет удовлетворять неравенствам $\theta' < \theta_0 < \theta''$). Возьмем по точке K' и K'' окрестности U по разные стороны от α. Проведем прямые β' и β'' соответственно через M и K' и через M и K''. Так как U связна, всякая прямая, проходящая через M и любую точку внутри двух вертикальных углов, образованных прямыми β' и β'' и содержащих α, будет пересекать окрестность U, потому что всякая такая прямая отделяет точки K' и K''. Внутренность того из этих двух вертикальных углов, который содержит L_0, пересекает шкалу l_y по открытому в ней множеству V. Возьмем точку L_1 множества V с отметкой $y_1 < \overline{\overline{y}}$; такая точка существует, так как в противном случае все точки множества V имели бы отметку $\overline{\overline{y}}$, и мы могли бы найти связную окрестность $W \subset V$ точки L_0, все точки которой имели бы одну и ту же отметку $\overline{\overline{y}}$, что, в силу 3.5, невозможно. Проведем прямую через точки M и L_1; она пересечет U в точке с отметкой x_1, причем $x_1 \leqslant x_0$. Вместе с тем мы должны иметь $f(x_1, y_1) = z_0 = f(x_0, \overline{\overline{y}})$, что невозможно, так как $f(x, y)$ монотонно возрастает по каждой из переменных при постоянной другой и поэтому $f(x_1, y_1) \leqslant f(x_0, y_1) < f(x_0, \overline{\overline{y}})$, и мы пришли к противоречию.

Из 3.8 сразу получаем следствие:

3.9. *Функция $x = X(P)$ задает взаимно однозначное отображение шкалы l_x на отрезок $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$, причем $X(\overline{G}) = \overline{x}$, $X(\overline{\overline{G}}) = \overline{\overline{x}}$. Функция $y = Y(P)$ задает взаимно однозначное отображение шкалы l_y на отрезок $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}}$, причем $Y(\overline{H}) = \overline{y}$, $Y(\overline{\overline{H}}) = \overline{\overline{y}}$.*

Так как взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта на компакт есть гомеоморфизм, мы получаем (учитывая также 3.3):

3.10. *Шкалы l_x и l_y являются монотонными шкалами первого типа; шкала l_z является шкалой второго типа. Номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$ есть номограмма функции $z = f(x, y)$ в смысле § 2.*

Нормируем номограмму $N(l_x, l_y, l_z)$, совершив проективное преобразование плоскости sOt номограммы, переводящее точку $\overline{G}$ в точку $(-1, 1)$, точку $\overline{\overline{G}}$ — в точку $(1,1)$, $\overline{H}$ — в $(-1, -1)$ и $\overline{\overline{H}}$ — в $(1, -1)$; такое преобразование существует, так как никакие три из точек $\overline{G}$, $\overline{\overline{G}}$, $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ не лежат на одной (прямой. Тогда получившаяся после преобразования номограмма $N'(l'_x, l'_y, l'_z)$ будет нормированной номограммой функции $z = f(x, y)$ и поэтому будет обладать всеми свойствами 2.1—2.14 § 2. Заметим только, что, так как шкала l_z, а значит и l'_z, в этом случае связна и локально связна, здесь будут некоторые упрощения, а именно: 1) l'_z не будет теперь иметь точек на полупрямых $t = \pm s$, $|t| > 1$ и, следовательно, целиком будет расположена в полосе

$|s| \leqslant 1$; 2) точка $M(s, t)$ основной части Γ_z шкалы l_z' при $s \to 1$ и при $s \to -1$ будет стремиться к определенным пределам.

Из 3.10 заключаем:

3.11. *Функция $z = f(x, y)$ примера 2 не номографируема в смысле § 3, т. е. не существует номограммы со шкалами, заданными параметрически, определяющей эту функцию в квадрате $R_{xy}(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.*

В частности, если в качестве параметра шкалы l_x рассмотреть саму отметку x, в качестве параметра шкалы l_y — отметку y и в качестве параметра шкалы l_z — отметку z, получаем:

3.12. *Для построенной в примере 2 функции $z = f(x, y)$ не существует определителя*

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & 1 \\ Y_1(y) & Y_2(y) & 1 \\ Z_1(z) & Z_2(z) & 1 \end{vmatrix}$$

(где функции $X_1(x)$ и $X_2(x)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, функции $Y_1(y)$ и $Y_2(y)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \leqslant y \leqslant 1$ и функции $Z_1(z)$ и $Z_2(z)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 2$) такого, что в квадрате R_{xy} уравнение $\Delta(x, y, z) = 0$ определяет функцию $z = f(x, y)$.

(Поступило в редакцию 23/X 1957 г.)

Литература

1. М. А. Крейнес, И. А. Вайнштейн и Н. Д. Айзенштат, О номографировании функций, заданных на сетке, ДАН СССР, т. 111, № 5 (1956), 941—944.
2. W. Blaschke, G. Bohl, Geometrie der Gewebe, Berlin, 1938.