Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром

М. Л. Расулов (Львов)

Известно, что одним из основных методов решения смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений в конечных областях является метод Фурье, применяемый преимущественно при решении смешанной задачи, для которой спектральная задача (подходящим образом подобранная граничная задача с параметром) соответствует самосопряженному оператору и, следовательно, имеет полную систему ортогональных собственных функций [10]. Это обстоятельство дает возможность искать решение смешанной задачи в виде ряда по этим собственным функциям с неизвестными коэффициентами, нахождение которых облегчается благодаря ортогональности собственных функций.

Коши впервые указал метод решения смешанных задач для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [5], [6] (см. также [8]), применимый, в отличие от метода Фурье, и в том случае, когда спектральная задача не соответствует самосопряженному оператору.

Смешанную задачу типа (1.1) — (1.3) условимся называть *задачей с неразделяющимися переменными*, если уравнение (1.1) содержит смешанную производную по x и t (t — временное переменное) или граничное условие (1.2) содержит производную по t или, наконец, имеет место и то и другое.

Как замечает Я. Д. Тамаркин в своей книге [16], вычетный метод Коши имеет следующие недостатки:

1. Не видно, как его непосредственно применять к уравнениям с переменными коэффициентами.

2. Отсутствует строгое доказательство сходимости рядов.

К замечаниям Тамаркина можно добавить еще следующее:

3. Не видно, как вычетный метод Коши применять непосредственно к задачам с неразделяющимися переменными (по x и t), даже в случае одного уравнения с постоянными коэффициентами.

Таким образом, метод Коши приводит к двум важным задачам:

А. Установить условия разложимости произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям* граничной задачи с параметром (подобранной подходящим образом для данной смешанной задачи) для линейных диффе-

* Говоря о фундаментальных функциях, мы имеем в виду собственные и присоединенные функции рассматриваемой спектральной задачи.

ренциальных уравнений и дать подходящую формулу разложения с помощью интегрального вычета.

Б. Решая соответствующую задачу А, на основании полученной формулы разложения произвольной вектор-функции дать вычетную формулу, представляющую решение поставленной смешанной задачи для линейных дифференциальных уравнений.

Первый существенный шаг в решении задачи А сделан Биркгофом в его работах [1] и [2]. Во второй из этих работ с помощью результатов, полученных в [1], для задачи типа (5.4) — (5.5) в случае одного уравнения ($n=1$) доказывается справедливость формулы разложения для достаточно гладкой функции $f(x)$:

$$f(x)=\mathscr{E}_\lambda \lambda^{p-1}\int_a^b G(x,\xi,\lambda^p)f(\xi)\,d\xi, \tag{a}$$

где $G(x,\xi,\lambda^p)$ — функция Грина и $\mathscr{E}_\lambda$ обозначает полный вычет подынтегральной функции. Идея представления функций в виде (а) принадлежит А. Пуанкаре [11].

Второй существенный шаг в решении задачи А был сделан Тамаркиным ([16], [17]), который доказал формулу (а) для задачи типа (3.4) — (3.5) в случае одного уравнения ($n=1$) при $m=1$, $s=0$, $F_0(x,\Phi,\lambda)=\Phi(x)$.

Следует еще отметить важную работу М. В. Келдыша [7], относящуюся к спектральной теории несамосопряженного операторного уравнения вида

$$y=K_0y+\lambda K_1y+\ldots+\lambda^nK_ny+f, \tag{б}$$

рассматриваемого в соответствующем пространстве Гильберта, где K_i — вполне непрерывные операторы, y и f — элементы рассматриваемого пространства.

Смешанные задачи, содержащие в граничных условиях производные по времени, не укладываются в схему М. В. Келдыша, хотя бы потому, что *соответствующие спектральные задачи не приводятся к виду* (б), *где оператор, применяемый к* y, *есть многочлен относительно параметра* λ.

Из работ, относящихся к кругу задачи Б, автору известна работа Гепперта, [4], в которой в сущности дается некоторое обоснование вычетного метода Коши.

Исследование автором задачи Б показало, что формула разложения типа (а) не приспособлена к получению вычетного представления решения смешанной задачи, содержащей в граничных условиях производную искомой функции по времени. Как это видно из метода, применяемого в § 4 настоящей статьи, для этой цели нужно иметь формулу разложения (вектор-функции) типа (3.19). В связи с этим первая попытка обобщения результатов Биркгофа и Тамаркина в нужном направлении была сделана автором в работе [12].

В статье [12] автор при доказательстве теорем 7 и 8 не мог освободиться от ряда весьма ограничительных и излишних условий (см. в [12] условия 1) — 5) на стр. 519). Например, условие 5) работы [12] не выполняется для примера § 4 настоящей статьи.

В связи с примерами смешанных задач, встречающихся в приложениях (см. пример в § 4), настоящая работа имеет целью дать вычетный метод решения одномерных смешанных задач возможно более широкого класса. Для этой цели в § 3 дается новая формула (см. теорему 3) разложения произвольной вектор-функции в ряд по фундаментальным функциям граничной задачи (3.1) — (3.2) с параметром для системы уравнений специального вида. Из (3.19), в частности, получается формула (3.22), обобщающая формулу (а) Биркгофа — Тамаркина на случай системы уравнений.

Метод доказательства теоремы 3, в отличие от метода Биркгофа — Тамаркина, заключается в том, что исследование проблемы разложения для задачи (3.1) — (3.2) сводится к таковой для системы уравнений первого порядка. В связи с этим в § 2 доказывается теорема 2 о справедливости формулы разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром для системы уравнений первого порядка.

В § 4 на основании теоремы 3 доказывается, что достаточно гладкое решение смешанной задачи (1.1) — (1.3) представляется вычетной формулой (4.1) (см. теорему 5). В конце этого параграфа приводится пример, встречающийся в подземной гидромеханике и укладывающийся в схему данного метода.

В § 5 на основании теоремы 4 дается вычетное представление решения смешанной задачи с разделяющимися переменными для системы уравнений с переменными по t коэффициентами (см. теорему 6). Результат этого параграфа показывает, что вычетный метод, в отличие от метода трансформации Лапласа, применим и к уравнениям с переменными по t коэффициентами. Кроме того, как это иллюстрируется на примере в § 5, вычетный метод позволяет построить эффективное решение смешанной задачи, если можно построить функцию Грина соответствующей спектральной задачи и найти ее полюсы.

Соответствующие результаты получены автором для уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами [14], [15]. Для простоты изложения в настоящей работе автор решил ограничиться случаем уравнений с гладкими коэффициентами.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу: найти решение системы

$$\frac{\partial^q u}{\partial t^q} = \sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x)\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l} + f(x,t) \tag{1.1}$$

при граничном условии

$$\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant p-1}} \left\{ P_{kl}\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l}\Bigg|_{x=a} + Q_{kl}\frac{\partial^{k+l}u}{\partial t^k\partial x^l}\Bigg|_{x=b}\right\} = 0 \tag{1.2}$$

и начальных условиях

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Bigg|_{t=0} = \Phi_k(x) \quad (k=0,\ldots,q-1), \tag{1.3}$$

где m, q, p — произвольные натуральные числа, удовлетворяющие равенству $p=m\cdot q$; $A_{kl}(x)$ — n-мерная квадратная матрица, элементами которой являются функции $A_{ijkl}(x)$; $f(x,t)$, $\Phi_k(x)$, $u(x,t)$ — n-мерные столбцы функций $f_i(x,t)$ $\Phi_{ik}(x)$, $u_i(x,t)$, рассматриваемых на $[a,b]$; P_{kl}, Q_{kl} — постоянные матрицы размера $np\times n$. При $n=1$ в граничных условиях (1.2) будем полагать $mk+l\leqslant p$.

Путем замены

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}=u^{(i)}\quad (i=0,1,\ldots,q-1) \tag{1.4}$$

задача (1.1) — (1.3) приводится к задаче нахождения решения системы

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}=u^{(1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u^{(q-2)}}{\partial t}=u^{(q-1)},\\
&\frac{\partial u^{(q-1)}}{\partial t}=\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x)\frac{\partial^l u^{(k)}}{\partial x^l}+f(x,t)
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

при граничном условии

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ l\leqslant p-1}}\left\{P_{kl}\left.\frac{\partial^l u^{(k)}}{\partial x^l}\right|_{x=a}+Q_{kl}\left.\frac{\partial^l u^{(k)}}{\partial x^l}\right|_{x=b}\right\}+$$

$$+\sum_{l=0}^{p-1}\left\{P_{ql}\left.\frac{\partial^{l+1}u^{(q-1)}}{\partial t\partial x^l}\right|_{x=a}+Q_{ql}\left.\frac{\partial^{l+1}u^{(q-1)}}{\partial t\partial x^l}\right|_{x=b}\right\}=0 \tag{1.6}$$

и начальных условиях

$$u^{(k)}\big|_{t=0}=\Phi_k(x)\quad (k=0,1,\ldots,q-1). \tag{1.7}$$

§ 2. Теорема разложения в случае граничной задачи для нормальной системы линейных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$L_i(y)\equiv\frac{dy_i}{dx}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,\lambda)y_j=f_i(x) \tag{2.1}$$

при граничных условиях

$$M_i(y)\equiv\sum_{j=1}^{n}\{\alpha_{ij}(\lambda)y_j(a)+\beta_{ij}(\lambda)y_j(b)\}=0\quad (i=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

следующих предположениях:

1°. $$a_{ij}(x,\lambda)=\lambda a_{ij}(x)+\sum_{\nu=0}^{Q}a_{ij}^{(\nu)}(x)\lambda^{-\nu},$$

где Q — некоторое натуральное число, функции $a_{ij}(x)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, $a_{ij}^{(0)}(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка, а все остальные функции $a_{ij}^{(\nu)}(x)$ непрерывны на интервале $[a, b]$.

2°. $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — многочлены от λ, причем матрица

$$(\alpha_{ij}(\lambda), \beta_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^{n}$$

при достаточно больших λ имеет ранг n.

3°. При $x \in [a, b]$ корни $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ характеристического уравнения

$$\Phi(\theta) \equiv |a(x) - \theta E| = 0,$$

где $a(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$ и E — единичная матрица, различны и отличны от нуля; как их аргументы, так и аргументы их разностей не зависят от x.

Из условия 3° следует, что матрица $a(x)$ при $x \in [a, b]$ имеет непрерывную обратную матрицу $a^{-1}(x)$.

В этом параграфе для исследования асимптотического представления матрицы Грина задачи (2.1) — (2.2) и распределения больших нулей характеристического определителя будем пользоваться методом Тамаркина ([16], ([17])

С этой целью рассмотрим множество прямых λ-плоскости, определяемых, согласно условию 3°, уравнениями

$$\mathcal{R}\,\lambda\varphi_i(x) = \mathcal{R}\,\lambda\varphi_j(x)^* \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

при разных i, j. Очевидно, этими прямыми комплексная λ-плоскость разбивается на некоторые секторы (Σ_s), в каждом из которых, согласно условию 3° при подходящей нумерации корней характеристического уравнения имеют место неравенства

$$\mathcal{R}\,\lambda\varphi_1(x) \leqslant \mathcal{R}\,\lambda\varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \mathcal{R}\,\lambda\varphi_n(x).$$

Следовательно, в силу теоремы Тамаркина (см. теорему 2 в [16]), при условиях 1°, 3° существует фундаментальная система частных решений однородной системы, соответствующей (2.1), допускающих в секторе (Σ_s) асимптотическое представление

$$y_{ij}(x, \lambda) = e^{\lambda \int_a^x \varphi_j(\xi)\, d\xi} \left\{ \eta_{ij}(x) + \frac{E_{ij}(x, \lambda)}{\lambda} \right\}, \tag{2.3}$$

где $E_{ij}(x, \lambda)$ непрерывны по $x \in [a, b]$ и ограничены в (Σ_s).

Пользуясь рассуждениями Тамаркина [16], можно получить явное представление $\eta_{ij}(x)$. Для этого заметим, что, в силу условий 1° и 3°, существует непрерывная и обратимая матрица $m(x)$, такая, что

$$m^{-1}(x)\, a(x)\, m(x) = \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_n(x) \end{matrix} \right\|.$$

* $\mathcal{R} z$ обозначает действительную часть комплексной величины z.

С помощью замены $y=m(x)z$ однородную систему, соответствующую системе (2.1), можно привести к виду

$$\frac{dz}{dx}=b(x,\lambda)\,z,$$

где

$$b(x,\lambda)=\lambda b(x)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^{-\nu}b^{(\nu)}(x),$$

$b(x)=m^{-1}(x)\,a(x)\,m(x)$, $b^{(\nu)}(x)=m^{-1}(x)\,a^{(\nu)}(x)\,m(x)$, $a^{(\nu)}(x)$ — матрица элементов $a_{ij}^{(\nu)}(x)$. Очевидно, j-й столбец $m_j(x)$ матрицы $m(x)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$(a(x)-\varphi_j(x)E)\,m_j(x)=0.$$

Пусть алгебраическое дополнение $b_{pp}^{(j)}(x)$ элемента (p,p) определителя $|a(x)-\varphi_j(x)E|$ не обращается в нуль на $[a,b]$. Ясно, что в качестве j-го столбца матрицы $m(x)$ можно взять столбец, составленный из элементов $b_{p1}^{(j)}(x),\dots,b_{pn}^{(j)}(x)$.

Теперь если z_{ij} искать в виде

$$z_{ij}=e^{\int\limits_a^x\varphi_j(\xi)\,d\xi}\left\{g_{ij}(x)+\frac{g_{ij}^{(1)}(x)}{\lambda}+\frac{E_{ij}(x,\lambda)}{\lambda^2}\right\},$$

то, подставляя это выражение в соответствующую систему для z и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим:

$$(\varphi_i(x)-\varphi_j(x))\,g_{ij}(x)=0,\qquad \frac{dg_{jj}}{dx}-b_{jj}^{(0)}(x)\,g_{jj}=0.$$

Из этих соотношений следует, что

$$g_{ij}(x)=0\ \text{при}\ i\neq j,$$

$$g_{jj}(x)=e^{\int\limits_c^x b_{jj}^{(0)}(\xi)\,d\xi},\qquad c\in[a,b].$$

Принимая во внимание замену $y=mz$, для функций $\eta_{ij}(x)$ получаем следующее представление:

$$\eta_{ij}(x)=b_{pi}^{(j)}(x)\,e^{\int\limits_c^x b_{jj}^{(0)}(\xi)\,d\xi}\ {}^{*},$$

где, согласно условию 1°, $b_{jj}^{(0)}(x)$ — непрерывная функция.

* Как видно из хода рассуждения, выражение $\eta_{ij}(x)$ от p не зависит, важно только что $b_{pp}^{(j)}(x)\neq 0$.

Легко показать, что матрица $\eta(x) = (\eta_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ имеет непрерывную обратную матрицу $\eta^{-1}(x)$ на $[a, b]$. В противном случае матрица $\eta(x)$ имела бы $k < n$ линейно независимых столбцов $\eta_1(x), \ldots, \eta_k(x)$. Тогда $k+1$-й столбец представлял бы собой линейную комбинацию этих столбцов:

$$\eta_{k+1}(x) = c_1\eta_1(x) + \ldots + c_k\eta_k(x).$$

Так как $a(x)\eta_j = \varphi_j\eta_j$, то $\eta_{k+1}\varphi_{k+1} = \eta_1 c_1\varphi_1 + \ldots + \eta_k c_k\varphi_k$ или

$$\eta_1 c_1(\varphi_1 - \varphi_{k+1}) + \ldots + \eta_k c_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) = 0,$$

откуда следует, что $c_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, т. е. $\eta_{k+1}(x) = 0$. Последнее же противоречит тому, что $b_{k+1\,k+1}^{(j)}(x) \neq 0$.

Непрерывность матрицы $\eta^{-1}(x)$ на $[a, b]$ очевидна.

Обозначим через $G(x, \xi, \lambda)$ матрицу Грина* задачи (2.1) — (2.2). Обычным методом получаем для нее следующее представление:

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{2.4}$$

$$\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g_{ij}(x, \xi, \lambda) & y_{i1}(x, \lambda) & \ldots & y_{in}(x, \lambda) \\ M_1(g)_x & u_{11}(\lambda) & \ldots & u_{1n}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_n(g)_x & u_{n1}(\lambda) & & u_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}, \tag{2.5}$$

$$\Delta(\lambda) = \det(u_{ij}(\lambda))_{i,j=1}^n, \tag{2.6}$$

где $\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)$ — элементы матрицы $\Delta(x, \xi, \lambda)$,

$$\begin{gathered} g_{ij}(x, \xi, \lambda) = \pm\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n y_{ik}(x, \lambda)\, z_{jk}(\xi, \lambda) \qquad (+\text{ при } x > \xi, -\text{ при } x < \xi), \\ z_{jk}(\xi, \lambda) = \frac{\delta_{jk}(\xi, \lambda)}{\delta(\xi, \lambda)}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$\delta(\xi, \lambda)$ — определитель Вронского фундаментальной системы

$$y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda),$$

$\delta_{ij}(\xi, \lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента с индексом (i, j) в $\delta(\xi, \lambda)$, $M_k(g)_x$ обозначает применение оператора M_k к $g_{1j}, \ldots, g_{nj}$ как к функциям от x, $u_{ij}(\lambda) = M_i(y_{1j}, \ldots, y_{nj})$.

Пусть l_i — наибольший показатель степеней λ с ненулевыми коэффициентами, встречающихся в многочленах $\alpha_{i1}(\lambda), \ldots, \alpha_{in}(\lambda)$, $\beta_{i1}(\lambda), \ldots, \beta_{in}(\lambda)$. Подставляя асимптотические представления (2.3) в (2.2), получим:

$$u_{ij}(\lambda) = \lambda^{l_i}\{[A_{ij}] + [B_{ij}]\, e^{\lambda w_l}\},$$

* Очевидно, эта матрица существует при любом λ, не являющемся нулем характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.

где A_{ij}, B_{ij} — постоянные, $w_j = \int\limits_a^b \varphi_j(\xi)\,d\xi$ и вообще $[f(x)]$ означает выражение вида $f(x) + \frac{E(x,\lambda)}{\lambda}$ при условии ограниченности $E(x,\lambda)$ для больших λ. Тогда для определителя $\Delta(\lambda)$ в секторе (Σ_s) получаем асимптотическое представление:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^l \Delta_0(\lambda) \quad (l = l_1 + \ldots + l_n), \tag{2.8}$$

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} [A_{11}] + [B_{11}]e^{\lambda w_1} & \ldots & [A_{1n}] + [B_{1n}]c^{\lambda w_n} \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ [A_{n1}] + [B_{n1}]e^{\lambda w_1} & \ldots & [A_{nl}] + [B_{nl}]e^{\lambda w_n} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Очевидно, согласно условию 3°, уравнения

$$\mathcal{R}\lambda w_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

определяют $2\mu \leqslant 2n$ различных лучей d_j в λ-плоскости, лежащих попарно на прямых, проходящих через начало координат. Обозначим через $\alpha_j + \frac{\pi}{2}$ аргумент луча d_j и будем полагать, что

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2\mu} < 2\pi.$$

Пусть d_1', d_2',..., $d_{2\mu}'$ — множество произвольно взятых лучей, отличных от лучей d_j и нумерованных в таком же порядке как и лучи $d_1, \ldots, d_{2\mu}$. Лучами d_j' $(j = 1, \ldots, 2\mu)$ λ-плоскость разбивается на секторы $(T_1), \ldots, (T_{2\mu})$. Рассмотрим один из этих секторов (T_j). Пусть $w_1^{(j)}, \ldots, w_{\nu_j}^{(j)}$ — те из чисел $w_1, \ldots, w_n$, которые лежат на прямой, перпендикулярной лучам $d_j, d_{j+\mu}$. Положим

$$w_k^{(j)} = \mu_k^{(j)} e^{\alpha_j \sqrt{-1}},$$

где

$$\mu_1^{(j)} < \mu_2^{(j)} < \ldots < \mu_{\tau_j}^{(j)} < 0 < \mu_{\tau_j+1}^{(j)} < \ldots < \mu_{\nu_j}^{(j)}.$$

Если все числа $\mu_k^{(j)} > 0$, то положим $\tau_j = 0$, а если все $\mu_k^{(j)} < 0$, то положим $\tau_j = \nu_j$. Остальные числа последовательности $w_1, \ldots, w_n$ можно распределить на две категории. К первой категории отнесем те из них, для которых в секторе (T_j) $\mathcal{R}\lambda w \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$ по лучу d_j, ко второй категории — те, для которых $\mathcal{R}\lambda w \to +\infty$. Допустим, что функции φ_i занумерованы так, что числа w_i располагаются в последовательности

$$w_j', \ldots, w_{\varkappa_j}', \quad w_1^{(j)}, \ldots, w_{\nu_j}^{(j)}, w_{\nu_j+\varkappa_j+1}'', \ldots, w_n'',$$

где w', w'' обозначают соответственно числа первой и второй категорий.

Совершенно очевидно, что после вынесения $e^{\lambda\Sigma w''}$ (сумма распространяется на все числа w второй категории) за знак определителя (2.9) получаем:

$$\Delta_0(\lambda) = e^{\lambda\Sigma w''} H_j(z), \tag{2.10}$$

$$H_j(z) = [M_1^{(j)}] e^{m_1^{(j)} z} + \ldots + [M_{\sigma_j}^{(j)}] e^{m_{\sigma_j}^{(j)} z}, \tag{2.11}$$

где

$$z = \lambda e^{-\alpha_j \sqrt{-1}}, \quad m_1^{(j)} < m_2^{(j)} < \ldots < m_{\sigma_j}^{(j)},$$

$$m_1^{(j)} = \begin{cases} \mu_1^{(j)} + \ldots + \mu_{\tau_j}^{(j)}, & \text{если } \tau_j > 0, \\ 0 & \text{, если } \tau_j = 0, \end{cases}$$

$$m_{\sigma_j}^{(j)} = \begin{cases} \mu_{\tau_j+1}^{(j)} + \ldots + \mu_{\nu_j}^{(j)}, & \text{если } \tau_j < \nu_j, \\ 0 & \text{, если } \tau_j = \nu_j, \end{cases}$$

$M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ — определители, составленные соответственно из строк

$$A_{i1} \ \ldots \ A_{i\varkappa_j} \ B_{i\,\varkappa_j+1} \ \ldots \ B_{i\,\varkappa_j+\tau_j} \ A_{i\,\varkappa_j+\tau_j+1} \ \ldots \ A_{i\,\varkappa_j+\nu_j} \ B_{i\,\varkappa_j+\nu_j+1} \ \ldots \ B_{in},$$

$$A_{i1} \ \ldots \ A_{i\,\varkappa_j+\tau_j} \ B_{i\,\varkappa_j+\tau_j+1} \ \ldots \ B_{in}$$

$$\text{при } i = 1, \ldots, n.$$

Для показательного многочлена типа (2.11) Тамаркиным доказано следующее утверждение (см. п. п. 21—25 в [17]):

Если числа $M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ отличны от нуля, то при условиях 1° — 3°:

1) Многочлен $H_j(z)$ (см. (2.11)) имеет бесконечное множество корней $z_k^{(j)}$ ($|z_1^{(j)}| \leqslant |z_2^{(j)}| \leqslant \ldots$), заключенных в полосе ($D_h^{(j)}$) конечной ширины h, содержащей положительную часть мнимой оси z-плоскости.

2) В каждом прямоугольнике (Π_h) вида

$$|x| \leqslant \frac{h}{2}, \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2 \quad (z = x + iy) \tag{Π_h}$$

при достаточно больших $|y_1|$, $|y_2|$ число N корней многочлена $H_j(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{2\pi}(m_{\sigma_j}^{(j)} - m_1^{(j)})(y_2 - y_1) - \sigma_j \leqslant N \leqslant \frac{1}{2\pi}(m_{\sigma_j}^{(j)} - m_1^{(j)})(y_2 - y_1) + \sigma_j.$$

3) Если внутренние части малых кругов радиуса δ с центрами в нулях $H_j(z)$ выбросить из полосы ($D_h^{(j)}$), то в оставшейся части этой полосы при достаточно больших λ имеет место неравенство

$$|H_j(z)| \geqslant N_\delta > 0,$$

где N_δ — положительная постоянная, зависящая только от δ.

Из этого утверждения, согласно (2.4) — (2.11), следует

Теорема 1. *Если при условиях* $1^\circ - 3^\circ$ *все числа* $M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 2\mu)$ *отличны от нуля, то характеристический определитель матрицы Грина задачи* (2.1) — (2.2) *имеет бесконечное множество нулей, которые могут быть распределены на* 2μ *групп. Значения, отнесенные к* j*-ой группе, лежат в полосе* $(D_h^{(j)})$ *конечной ширины, границы которой параллельны лучу* d_j *и которая содержит этот луч, и не сближаются по мере удаления от начала координат, причем если из* λ*-плоскости выбросить внутренности малых кругов радиуса* δ *с центрами в этих нулях, то в оставшейся части при достаточно больших* λ *имеет место неравенство*

$$|\Delta_0(\lambda) e^{-\lambda\Sigma w''}| \geqslant N_\delta > 0. \tag{2.12}$$

Для доказательства теоремы разложения предварительно получим асимптотическое представление матрицы Грина задачи (2.1) — (2.2).

Границы секторов (T) и (Σ) делят всю λ-плоскость на секторы (R), каждый из которых лежит одновременно в одном из секторов (Σ) и в одном из секторов (T). Рассмотрим один из этих секторов (R) и допустим, что числа w занумерованы так, что выполняются неравенства

$$\mathcal{R}\lambda w_1 \leqslant \mathcal{R}\lambda w_2 \leqslant \ldots \leqslant \mathcal{R}\lambda w_\tau \leqslant 0 \leqslant \mathcal{R}\lambda w_{\tau+1} \leqslant \ldots \leqslant \mathcal{R}\lambda w_n.$$

Прибавляя к первому столбцу определителя $\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)$ столбцы с номерами $2, 3, \ldots, \tau, \tau+1, \ldots, n$, помноженные соответственно на

$$\frac{1}{2} z_{j1}(\xi, \lambda), \ldots, \frac{1}{2} z_{j\tau}(\xi, \lambda), \quad -\frac{1}{2} z_{j\,\tau+1}(\xi, \lambda), \ldots, -\frac{1}{2} z_{jn}(\xi, \lambda),$$

получим определитель $\Delta_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) = \Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)$. Элементы первого столбца определителя $\Delta_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda)$ обозначим через $g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda), g_1^{(j)}(\xi, \lambda), \ldots, g_n^{(j)}(\xi, \lambda)$. Очевидно,

$$g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\tau} y_{ik}(x, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) & \text{при } x > \xi, \\ -\sum\limits_{k=\tau+1}^{n} y_{ik}(x, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) & \text{при } x < \xi, \end{cases} \tag{2.13}$$

$$g_p^{(j)}(\xi, \lambda) = \sum_{m=1}^{n} \left\{ \alpha_{pm}(\lambda) \sum_{k=\tau+1}^{n} y_{mk}(a, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) + \beta_{pm}(\lambda) \sum_{k=1}^{\tau} y_{mk}(b, \lambda) z_{jk}(\xi, \lambda) \right\} \tag{2.14}$$

Разлагая определитель $\Delta_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda)$, получаем:

$$G_{ij} = \frac{\Delta_{ij}(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = g_{ij}^{(0)}(x, \xi, \lambda) - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} g_p^{(j)}(\xi, \lambda) y_{iq}(x, \lambda) \Delta_{pq}(\lambda), \tag{2.15}$$

где $\Delta_{pq}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента с индексом (p, q) в определителе $\Delta(\lambda), G_{ij}(x, \xi, \lambda)$ — элементы матрицы Грина $G(x, \xi, \lambda)$.

Согласно условию 3° можем положить

$$\varphi_k(x)=\pi_k q_k(x) \quad (k=1,\ldots,n),$$

где π_k — постоянные, $q_k(x)$ — положительные функции на $[a, b]$. Введем обозначения:

$$\int_a^\xi \varphi_k(x)\,dx=\pi_k\xi_k, \quad \int_a^x \varphi_k(x)\,dx=\pi_k\xi_k, \quad \int_a^b \varphi_k(x)\,dx=\pi_k x_{0k}.$$

По определению функций $z_{jk}(\xi, \lambda)$, согласно (2.3), имеем:

$$\sum_{k=1}^n e^{\lambda\pi_k\xi_k}[\eta_{ik}(\xi)]\,z_{jk}(\xi,\lambda)=\delta_{ij} \quad (i, j=1,\ldots,n), \tag{2.16}$$

где δ_{ij} — символ Кронеккера. Из (2.16) легко получить асимптотическую формулу:

$$z_{jk}(\xi,\lambda)=[v_{jk}(\xi)]\,e^{-\lambda\pi_k\xi_k}, \tag{2.17}$$

где матрица $v=(v_{ij}(\xi))_{i,j=1}^n$ — обратная для $\eta=(\eta_{ij}(\xi))_{i,j=1}^n$. Пользуясь формулами (2.3), (2.17) и принимая во внимание введенные обозначения, из (2.13), получаем:

$$g_{ij}^{(0)}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\tau} e^{\lambda\pi_k(x_k-\xi_k)}\,[\eta_{ik}(x)]\,[v_{jk}(\xi)] & \text{при } x>\xi,\\ -\sum\limits_{k=\tau+1}^{n} e^{\lambda\pi_k(x_k-\xi_k)}\,[\eta_{ik}(x)]\,[v_{jk}(\xi)] & \text{при } x<\xi.\end{cases} \tag{2.18}$$

Точно так же из формулы (2.14) имеем:

$$g_p^{(j)}(\xi,\lambda)=\lambda^{l_p}\sum_{k=1}^n [M_{pk}]\,[v_{jk}(\xi)]\,\omega_k', \tag{2.19}$$

где

$$M_{pk}=\sum_{m=1}^n \{B_{pm}\eta_{mk}(b)-A_{pm}\eta_{mk}(a)\},$$

$$\omega_k=\begin{cases} e^{\lambda\pi_k(x_{0k}-\xi_k)} & \text{при } k=1, 2,\ldots,\tau,\\ e^{-\lambda\pi_k\xi_k} & \text{при } k=\tau+1,\ldots,n.\end{cases}$$

Далее, замечая отсутствие в Δ_{pq} элементов p-й строки и q-го столбца определителя Δ, получаем:

$$\Delta_{pq}(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{l-l_p}e^{\lambda w}E_{pq}(\lambda) & (q=1,\ldots,\tau),\\ \lambda^{l-l_p}e^{\lambda(w-w_q)}\,E_{pq}(\lambda) & (q=\tau+1,\ldots,n),\end{cases} \tag{2.20}$$

где $E_{pq}(\lambda)$ ограничены при больших λ, $w=\sum\limits_{k=\tau+1}^n w_k$.

Обозначим через $\Omega_{ij}(x, \xi, \lambda)$ второе слагаемое в правой части (2.15). На основании асимптотических формул (2.3), (2.19) и (2.20) получаем:

$$\Omega_{ij}(x, \xi, \lambda) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi)] E_q^{(k)}(\lambda) \omega_k' \omega_q'', \tag{2.21}$$

где

$$\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi) = \eta_{iq}(x) v_{jk}(\xi), \qquad E_q^{(k)}(\lambda) = \sum_{p=1}^{n} \frac{[M_{pk}] E_{pq}(\lambda)}{e^{-\lambda w} \Delta_0(\lambda)},$$

$$\omega_q'' = \begin{cases} e^{\lambda \pi_q x_q} & \text{при } q = 1, \ldots, \tau, \\ e^{-\lambda \pi_q (x_{0q} - x_q)} & \text{при } q = \tau + 1, \ldots, n, \end{cases}$$

причем, согласно оценке (2.12), если из рассматриваемого сектора (R) выбросить упомянутые выше малые круги, то в оставшейся части (R_δ) функция $E_q^{(k)}(\lambda)$ будет равномерно ограниченной.

В дальнейшем будут использованы следующие известные леммы (см. [16], п. 107):

Лемма 1. *Пусть* $\mathscr{E}(\lambda, z, x_1, \ldots, x_m) = \mathscr{E}(\lambda, z, x)$ — *функция комплексного переменного* λ, *определенная на полуплоскости* $\mathscr{R}(c\lambda) \leqslant 0$ (c — *отличная от нуля постоянная*) *для всех значений* z *из интервала* $(0, Z)$ *и для всех значений* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *из замкнутой области* D. *Пусть, далее,* Γ_ν — *последовательность полуокружностей радиуса* r_ν ($r_\nu \to \infty$ *при* $\nu \to \infty$) *с центром в начале* λ-*плоскости, лежащих в полуплоскости* $\mathscr{R}(c\lambda) \leqslant 0$. *Если* $\mathscr{E}(\lambda, z, x)$ *равномерно стремится к нулю на* Γ_ν *при* $\nu \to \infty$, *то интеграл*

$$\int_{\Gamma_\nu} \mathscr{E}(\lambda, z, x) e^{c\lambda z} d\lambda \to 0 \quad \textit{при} \quad \nu \to \infty$$

равномерно по $x \in D$ *и* $z \in [\alpha, \beta] \subset (0, Z)$.

Лемма 2. *При условиях леммы* 1, *если* $\mathscr{E}(\lambda, z, x)$ *равномерно ограничена на* Γ_ν *и* $\psi(z)$ — *произвольная интегрируемая функция, то интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(z) dz \int_{\Gamma_\nu} \mathscr{E}(\lambda, z, x) e^{c\lambda z} \frac{d\lambda}{\lambda} \to 0 \quad \textit{при} \quad \nu \to \infty$$

равномерно по $x \in D$ *и* $z \in [\alpha, \beta] \subset (0, Z)$.

Лемма 3. *Если* $\psi(z)$ — *произвольная интегрируемая функция, то интеграл*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(z) e^{c\lambda z} dz \to 0 \quad \textit{при} \quad |\lambda| \to \infty \quad \textit{и} \quad \mathscr{R}(c\lambda) \leqslant 0.$$

Теперь легко может быть доказана.

Теорема 2. *Если все числа* $M_1^{(j)}$, $M_{\sigma_j}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 2\mu)$ *отличны от нуля, то при условиях,* 1°, 2°, 3° *существует последовательность расширяющихся* *замкнутых контуров Γ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) λ-плоскости, таких, что для всякого столбца $\mathfrak{f}(x)$, составленного из функций $\mathfrak{f}_1(x), \ldots, \mathfrak{f}_n(x)$, для которых*

$$\int_a^b |f_i(x)|^2\, dx < \infty \quad (i = 1, \ldots, n),$$

интеграл

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma_\nu} \left(\int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, [\mathfrak{f}(\xi)]\, d\xi \right) d\lambda \to A^{-1}(x)\, \mathfrak{f}(x),$$

при $\nu \to \infty$, причем сходимость понимается в смысле $L_2(a, b)$.

Доказательство. В плоскости λ окружим все собственные числа λ_k задачи (2.1) — (2.2) окружностями c_δ радиуса δ с центрами в собственных числах λ_k. Выберем, далее, последовательность замкнутых контуров Γ_ν, не пересекающих окружностей c_δ и таких, что $\operatorname{mes} \Gamma_\nu = O(r_\nu)$ (r_ν — расстояние от начала λ-плоскости до ближайшей точки Γ_ν) и между контурами Γ_ν и $\Gamma_{\nu+1}$ лежит только одно собственное число. Тогда из (2.15), (2.18), (2.21) будем иметь:

$$\int_{\Gamma_\nu} \left(\int_a^b \sum_{j=1}^n G_{ij}(x, \xi, \lambda)\, f_j(\xi)\, d\xi \right) d\lambda = I_\nu^{(1)}(f, x) + I_\nu^{(2)}(f, x), \tag{2.22}$$

где

$$I_\nu^{(1)}(f, x) = \sum_{(R)} \int_{\Gamma_\nu \cap R} d\lambda \int_a^x \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\tau} e^{\lambda\pi_k (x_k - \xi_k)} [\eta_{ik}(x)\, v_{jk}(\xi)]\, f_j(\xi) \right) d\xi -$$

$$-\sum_{(R)} \int_{\Gamma_\nu \cap R} d\lambda \int_x^b \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=\tau+1}^{n} e^{\lambda\pi_k (x_k - \xi_k)} [\eta_{ik}(x)\, v_{jk}(\xi)] \right) f_j(\xi)\, d\xi, \tag{2.23}$$

$$I_\nu^{(2)}(f, x) = \sum_{(R)} \int_{\Gamma_\nu \cap R} d\lambda \left(\sum_{q=1}^{\tau} \mathscr{E}_i^{(q)}(x, \xi, \lambda)\, e^{\lambda\pi_q x_q} + \sum_{q=\tau+1}^{n} \mathscr{E}_i^{(q)}(x, \xi, \lambda)\, e^{-\lambda\pi_q (x_{0q} - x_q)} \right), \tag{2.24}$$

$$\mathscr{E}_i^{(q)}(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{\tau} E_q^{(k)}(\lambda) \int_a^b [\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi)]\, f_j(\xi)\, e^{-\lambda\pi_k (x_{0k} - \xi_k)}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=\tau+1}^{n} E_q^{(k)}(\lambda) \int_a^b [\omega_{qk}^{(i,j)}(x, \xi)]\, f_j(\xi)\, e^{-\lambda\pi_k \xi_k} d\xi \right), \tag{2.25}$$

где суммы $\sum\limits_{(R)}$ распространяются на все секторы (R), $\Gamma_\lambda \cap R$ обозначает часть контура Γ_ν, лежащую в секторе (R).

Согласно лемме 3,

$$\int_a^b [\omega_{qk}^{(l,j)}(x,\xi)]\, f_j(\xi)\, e^{-\lambda (x_{0k}-\xi_k)\pi_k}\, d\xi \to 0 \text{ при } |\lambda| \to \infty.$$

Тогда, принимая во внимание равномерную ограниченность $E_q^{(k)}(\lambda)$ на контурах Γ_ν, согласно лемме 1, из (2.24) и (2.25) заключаем, что

$$I_\nu^{(2)}(f,x) \to 0 \text{ при } \nu \to \infty, \tag{2.26}$$

причем равномерно внутри интервала (a,b).

Обозначим через $I_\nu^{(0)}$ интеграл, полученный из (2.23), если опустить квадратные скобки. Применяя лемму 2, устанавливаем, что разность

$$I_\nu^{(1)}(f,x) - I_\nu^{(0)}(f,x) \to 0 \text{ при } \nu \to \infty \tag{2.27}$$

равномерно в (a,b). Заметим, что в выражении для $I_\nu^{(0)}(f,x)$ интегрирование по λ может быть выполнено. Тогда при помощи простого рассуждения получим:

$$I_\nu^{(0)} = -2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_a^b \eta_{ik}(x)\, v_{jk}(\xi)\, f_j(\xi)\, \frac{\sin r_\nu |\pi_k| (x_k-\xi_k)}{\pi_k (x_k-\xi_k)}\, d\xi =$$

$$= -2\pi\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_a^b \eta_{ik}(x)\, v_{jk}(\xi)\, f_j(\xi)\, \frac{\sin r_\nu |\pi_k| (x_k-\xi_k)}{(x_k-\xi_k)} \cdot \frac{d\xi_k}{\varphi_k(\xi)}. \tag{2.28}$$

По известной формуле из теории трансформации Фурье интеграл в правой части (2.28) для всякой функции $f_j(x) \in L_2(a,b)$ стремится к $\dfrac{\eta_{ik}(x)\, v_{jk}(x)\, f_j(x)}{\varphi_k(x)}$ в смысле метрики $L_2(a,b)$ (см. [10])

Таким образом, согласно (2.26), (2.27) и (2.28) получаем:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Gamma_\nu}\left(\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi\right) d\lambda \Rightarrow \eta(x) \begin{Vmatrix} \frac{1}{\varphi_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varphi_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\varphi_n} \end{Vmatrix} v(x)\, f(x)$$

при $\nu \to \infty$.

Если вспомнить, что $\eta(x)\, v(x) = E$, то с помощью равенства

$$\eta(x) \begin{Vmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \varphi_n \end{Vmatrix} = A(x)\, \eta(x),$$

которое получится, если подставить $y_{ik}(x,\lambda)$ в однородную систему (2.1) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, выводим:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Gamma_\nu}\left(\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\, f(\xi)\, d\xi\right) d\lambda \Rightarrow A^{-1}(x)\, f(x) \quad \text{при } \nu \to \infty.$$

Как нетрудно заметить из рассуждений, применяемых для получения этого предельного соотношения, опущение квадратных скобок под знаком интеграла

$$\int\limits_{\Gamma_\nu}\left(\int\limits_a^b G(x, \xi, \lambda)\,[f(\xi)]\,d\xi\right)d\lambda$$

дает уклонение, равное интегралу $\int\limits_{\Gamma_\nu}\left(\int\limits_a^b G(x, \xi, \lambda)\frac{E(\xi, \lambda)}{\lambda}\,d\xi\right)d\lambda$, который равномерно стремится к нулю, согласно лемме 2.

Как видно из доказательства теоремы, она имеет место в смысле обычной точечной сходимости, если

$$\int\limits_a^b v_{jk}(\xi) f_j(\xi)\frac{\sin r_\nu |\pi_k| (x_k-\xi_k)}{\varphi_k(\xi)(x_k-\xi_k)}\,d\xi_k \to \frac{v_{jk}(x)}{\varphi_k(x)} f_j(x) \text{ при } \nu\to\infty$$

в точечном смысле. Чтобы этого не оговаривать каждый раз, в дальнейшем сходимость встречающихся рядов будет пониматься в смысле метрики L_2.

§ 3. Разложение произвольной функции-столбца в ряд по фундаментальным функциям спектральной задачи

Задачу нахождения решения системы

$$\left.\begin{aligned}
&v^{(1)}-\lambda^m v^{(0)}=\Phi_0(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&v^{(q-1)}-\lambda^m v^{(0)}=\Phi_{q-2}(x),\\
&\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x)\frac{d^l v^{(k)}}{dx^l}-\lambda^m v^{(q-1)}=\Phi_{q-1}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

при граничном условии

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ l\leqslant p-1}}\left\{P_{kl}\frac{d^l v^{(k)}}{dx^{(l)}}\bigg|_{x=a}+Q_{kl}\frac{d^l v^{(k)}}{dx^l}\bigg|_{x=b}\right\}+$$

$$+\lambda^m\sum_{l=0}^{p-1}\left\{P_{ql}\frac{d^l v^{(q-1)}}{dx^l}\bigg|_{x=a}+Q_{ql}\frac{d^l v^{(q-1)}}{dx^l}\bigg|_{x=b}\right\}=0 \tag{3.2}$$

будем называть *спектральной задачей, соответствующей задаче* (1.5)—(1.7).

Настоящий параграф в основном посвящен доказательству теоремы 3, на основании которой в следующем параграфе устанавливается, что достаточно гладкое решение задачи (1.1)—(1.3) представляется в виде интегрального вычета (4.1). Из теоремы 3 следует теорема 4, на основании которой в § 5 доказывается, что достаточно гладкое решение смешанной задачи с разделяющимися переменными x и t для системы уравнений с переменными по t коэффициентами представимо в виде интегрального вычета (см. теорему 6).

Метод доказательства теоремы 3 состоит в том, что прежде всего задача (3.1)—(3.2) путем замены неизвестных вектор-функций преобразуется в спектральную задачу для системы уравнений первого порядка, применяя к которой теорему 2, мы получаем вспомогательную формулу разложения

(3.21). Далее, возвращаясь, по формулам (3.15) и (3.10), к первоначальной вектор-функции $v^{(s)}$, мы выводим основную формулу (3.19).

Для осуществления этой схемы доказательства прежде всего зафиксируем s среди чисел $0, 1, \ldots, q-1$ и, выразив все $v^{(k)}$ через $v^{(s)}$, сведем задачу (3.1)—(3.2) к спектральной задаче для неизвестной вектор-функции $v^{(s)}$.

Из первых $q-1$ уравнений системы (3.1) имеем:

$$v^{(k)} = \begin{cases} \lambda^{m(k-s)} \{v^{(s)} - (\lambda^{m(s-1)} \Phi_k + \ldots + \lambda^{mk}\Phi_{s-1})\} & \text{при } k<s, \\ v^{(s)} & \text{при } k=s, \\ \lambda^{m(k-s)} \{v^{(s)} + (\lambda^{m(k-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \lambda^{ms}\Phi_{k-1})\} & \text{при } k>s. \end{cases} \tag{3.3}$$

Подставляя $v^{(k)}$ из (3.3) в последнее уравнение системы (3.1) и граничное условие (3.2), приходим к спектральной задаче:

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}} \lambda^{m(k-s)} A_{kl}(x) \frac{d^l v^{(s)}}{dx^l} - \lambda^{m(q-s)} v^{(s)} = F_s(x, \Phi, \lambda^m), \tag{3.4}$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant p-1}} \lambda^{m(k-s)} \left\{ P_{kl} \frac{d^l v^{(s)}}{dx^l}\bigg|_{x=a} + Q_{kl} \frac{d^l v^{(s)}}{dx^l}\bigg|_{x=b} \right\} = N_s(\Phi, \lambda^m), \tag{3.5}$$

где

$$F_s(x, \Phi, \lambda^m) = \Phi_{q-1}(x) + \sum_{\substack{k<s\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x) \frac{d^l}{dx^l} \{\lambda^{-m}\Phi_k(x) + \ldots + \lambda^{m(k-s)}\Phi_{s-1}(x)\} -$$

$$- \sum_{\substack{q-1\geqslant k>s\\ mk+l\leqslant p}} A_{kl}(x) \frac{d^l}{dx^l} \{\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \Phi_{k-1}(x)\} +$$

$$+ \{\lambda^{m(q-s-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \lambda^m \Phi_{q-2}(x)\}, \tag{3.6}$$

$$N_s(\Phi, \lambda^m) = \sum_{\substack{l\leqslant p-1\\ 1\leqslant k<s}} \left\{ P_{kl} \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{-m}\Phi_k(x) + \ldots + \lambda^{-m(s-k)}\Phi_{s-1}(x))\big|_{x=a} + \right.$$

$$\left. + Q_{kl} \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{-m(s-k)}\Phi_{s-1}(x) + \ldots + \lambda^{-m}\Phi_k(x))\big|_{x=b} \right\} -$$

$$- \sum_{\substack{l\leqslant p-1\\ s<k<q-2}} \left\{ P_{kl} \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \Phi_{k-1}(x))\big|_{x=a} + \right.$$

$$\left. + Q_{kl} \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \Phi_{k-1}(x))\big|_{x=b} \right\} -$$

$$- \sum_{l=0}^{p-1} \left\{ (P_{q-1\,l} + \lambda^m P_{ql}) \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \Phi_{q-2}(x))\big|_{x=a} + \right.$$

$$\left. + (Q_{q-1\,l} + \lambda^m Q_{ql}) \frac{d^l}{dx^l} (\lambda^{m(k-s-1)}\Phi_s(x) + \ldots + \lambda^{ms}\Phi_{q-2}(x))\big|_{x=b} \right\}, \tag{3.7}$$

причем при $s=q-1$ последнее слагаемое в правой части (3.6) отсутствует.

В дальнейшем задачу (3.4)—(3.5) будем называть s-**вспомогательной спектральной задачей**.

Очевидно, при $s=0$ имеем:

$$F_0(x,\Phi,\lambda^m)=\sum_{k=0}^{q-1}\lambda^{m(q-1-k)}\Phi_k(x)-$$

$$-\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant q-1\\ mk+l\leqslant p}}A_{kl}(x)\frac{d^l}{dx^l}(\lambda^{m(k-1)}\Phi_0(x)+\ldots+\Phi_{k-1}(x)), \tag{3.8}$$

$$N_0(\Phi,\lambda^m)=-\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant q-2\\ 0\leqslant l\leqslant p-1}}\left\{P_{kl}\frac{d^l}{dx^l}(\lambda^{m(k-1)}\Phi_0(x)+\ldots+\Phi_{k-1}(x))\big|_{x=a}+\right.$$

$$\left.+Q_{kl}\frac{d^l}{dx^l}(\lambda^{m(k-1)}\Phi_0(x)+\ldots+\Phi_{k-1}(x))\big|_{x=b}\right\}-$$

$$-\sum_{l=0}^{p-1}\left\{(P_{q-1\,l}+\lambda^m P_{ql})\frac{d^l}{dx^l}(\lambda^{m(q-2)}\Phi_0(x)+\ldots+\Phi_{q-2}(x))\big|_{x=a}+\right.$$

$$\left.+(Q_{q-1\,l}+\lambda^m Q_{ql})\frac{d^l}{dx^l}(\lambda^{m(q-2)}\Phi_0(x)+\ldots+\Phi_{q-2}(x))\big|_{x=b}\right\}. \tag{3.9}$$

Теперь, для того чтобы привести s-вспомогательную спектральную задачу к задаче для системы уравнений первого порядка, сделаем замену

$$\lambda^{-l}\frac{d^l v^{(s)}}{dx^l}=w_l^{(s)}\quad (l=0,\ldots,p-1;\ s=0,\ldots,q-1). \tag{3.10}$$

Осуществляя замену (3.10) в формулах (3.4)—(3.5), после очевидных преобразований приходим к спектральной задаче для системы уравнений первого порядка:

$$\frac{dw_k^{(s)}}{dx}=\lambda w_{k+1}^{(s)}\quad (k=0,\ldots,p-2),$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ l\leqslant p-1\\ mk+l\leqslant p}}\lambda^{mk+l-p+1}A_{kl}(x)w_l^{(s)}+\frac{dw_{p-1}^{(s)}}{dx}-\lambda A_{0p}^{-1}(x)w_0^{(s)}=\lambda^{ms+1-p}A_{0p}^{-1}(x)F_s(x,\Phi,\lambda^m), \tag{3.11}$$

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant q\\ 0\leqslant l\leqslant p-1}}\lambda^{mk+l}\{P_{kl}w_l^{(s)}|_{x=a}+Q_{kl}w_l^{(s)}|_{x=b}\}=\lambda^{ms}N_s(\Phi,\lambda^m). \tag{3.12}$$

Допустим, что выполняются следующие условия:

1. При $x\in[a,b]$ функции $A_{kl}(x)$ непрерывны, при $mk+l=p-1$ они имеют непрерывные производные первого порядка, при $mk+l=p$ — непрерывные производные второго порядка.

2. Корни $\psi_1(x), \ldots, \psi_{np}(x)$ характеристического уравнения

$$\det(\theta^p A_{0p}(x) + \theta^{p-m} A_{q-1\,m}(x) + \ldots + \theta^m A_{1\,(q-1)m}(x) - E) = 0\,*$$

при $x \in [a, b]$ различны и отличны от нуля; как их аргументы, так и аргументы их разностей не зависят от x.

3. При достаточно больших λ ранг матрицы

$$\| \alpha_0(\lambda), \ldots, \alpha_{p-1}(\lambda), \quad \beta_0(\lambda), \ldots, \beta_{q-1}(\lambda) \|,$$

где

$$\alpha_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{q} \lambda^{mk+j} P_{kj}, \quad \beta_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{q} \lambda^{mk+j} Q_{kj},$$

равен np.

4. На интервале $[a, b]$ функции $\Phi_{k-1}(x)$ имеют непрерывные производные до порядка $p - mk$ включительно. При больших λ и при любом $s = 0, \ldots$ $\ldots, q-1$ имеет место соотношение

$$\lambda^{ms} N_s(\Phi, \lambda^m) = O(\lambda^{-m}).$$

Далее, для того чтобы к задаче (3.11)—(3.12) можно было применять теорему 2, прежде всего следует привести эту задачу к задаче при однородном граничном условии. Учитывая, что при переходе от новых неизвестных вектор-функций к первоначальной в правых частях (3.11)—(3.12) играют роль только главные члены для больших λ, выделим попутно эти члены.

Заметим, что, в силу условия 4, правая часть граничного условия (3.12) при больших λ убывает как λ^{-m}. Поэтому это условие можно записать в виде:

$$\lambda^{ms} N_s(\Phi, \lambda^m) = \lambda^{-m} [R_s], \tag{3.13}$$

где R_s — постоянная матрица, а прямые скобки употребляются в смысле, указанном в § 2.

Как видно далее из выражения $F_s(\Phi, x, \lambda^m)$, при больших λ главным членом для $\lambda^{ms+1-p} F_s(\Phi, x, \lambda^m)$ является $\lambda^{-m+1} A_{0p}^{-1}(x) \Phi_s(x)$. Следовательно, правая часть последнего уравнения системы (3.11) может быть представлена в виде

$$\lambda^{ms+1-p} F_s(\Phi, x, \lambda^m) = \lambda^{-m+1} [A_{0p}^{-1}(x) \Phi_s(x)]. \tag{3.14}$$

В силу условия 3, можно подобрать числовые столбцы $z_l^{(s)}(a, \lambda)$, $z_l^{(s)}(b, \lambda)$, удовлетворяющие граничным условиям (3.12). Согласно (3.13), эти числовые столбцы допускают следующие представления:

$$z_l^{(s)}(a, \lambda) = \lambda^{-m} [C_l^{(s)}], \quad z_l^{(s)}(b, \lambda) = \lambda^{-m} [D_l^{(s)}],$$

* В дальнейшем через E обозначается единичная матрица соответствующего размера.

где $C_l^{(s)}$, $D_l^{(s)}$ — постоянные столбцы. Построенные по этим столбцам функциональные столбцы

$$z_l^{(s)}(x,\lambda)=\lambda^{-m}\left\{[C_l^{(s)}]+\frac{x-a}{b-a}[D_l^{(s)}-C_l^{(s)}]\right\},$$

очевидно, удовлетворяют граничному условию (3.12). Тогда, принимая во внимание (3.14), легко видеть, что, осуществляя в (3.11) — (3.12) замену неизвестной вектор-функции $w_l^{(s)}$

$$y_l^{(s)}=w_l^{(s)}-z_l^{(s)}(x,\lambda), \tag{3.15}$$

приходим к спектральной задаче для системы уравнений первого порядка при однородном граничном условии:

$$\begin{gathered}\frac{dy_l^{(s)}}{dx}-\lambda y_{l+1}^{(s)}=\lambda^{-m+1}[z_{l+1\,0}^{(s)}(x)]\quad (l=0,\ \ldots,\ p-2),\\ \frac{dy_{p-1}^{(s)}}{dx}-\lambda A_{0p}^{-1}(x)\,y_0^{(s)}+\sum_{\substack{k\leqslant q-1\\ l\leqslant p-1\\ mk+l\leqslant p}}\lambda^{mk+l-p+1}A_{0p}^{-1}(x)\,A_{kl}(x)_{y_l}^{(s)}=\\ =\lambda^{-m+1}[f_s(x)],\end{gathered} \tag{3.16}$$

$$\sum_{\substack{k\leqslant q\\ l\leqslant p-1}}\lambda^{mk+l}\{P_{kl}y_l^{(s)}(a)+Q_{kl}y_l^{(s)}(b)\}=0, \tag{3.17}$$

где

$$\begin{gathered}f_s(x)=A_{0p}^{-1}(x)\,\Phi_s(x)+A_{0p}^{-1}(x)\,z_{00}^{(s)}(x)-\\ -A_{0p}^{-1}(x)\,A_{q-1\,m}(x)\,z_{m\,0}^{(s)}(x)+\ldots+A_{1\,(q-1)m}(x)\,z_{(q-1)m\,0}^{(s)}(x)),\end{gathered} \tag{3.18}$$

$$z_{l\,0}^{(s)}(x)=C_l^{(s)}+\frac{x-a}{b-a}(D_l^{(s)}-C_l^{(s)}).$$

Аналогично тому, как это сделано в § 2, с помощью асимптотического представления независимых решений однородной системы, соответствующей (3.16), для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ матрицы Грина задачи (3.16)—(3.17) при больших λ можно получить асимптотическое представление

$$\Delta(\lambda)=\lambda^l e^{\Sigma\lambda w''}\{[M_1^{(j)}]\,e^{m_1^{(j)}z}+\ldots+[M_{n_j}^{(j)}]\,e^{m_{n_j}^{(j)}z}\}$$

в соответствующих секторах (T_j).

В добавление к условиям 1—4 предполагается еще выполненным условие

5. Все числа $M_1^{(j)}$, $M_{n_j}^{(j)}$ $(j=1,\ \ldots,\ 2\mu)$ отличны от нуля.

Теперь, если применить теорему 2 к задаче (3.16)—(3.17), может быть доказана

Теорема 3. *При условиях* 1—5 *настоящего параграфа имеет место формула* *

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{c_\nu}\lambda^{m-1}v^{(s)}(x,\lambda)\,d\lambda=\Phi_s(x)\quad(s=0,\ \ldots,\ q-1),\qquad(3.19)$$

где c_ν — *замкнутый контур* λ-*плоскости, окружающий только один полюс* λ_ν *подынтегральной функции и сумма по* ν *распространяется на все полюсы этой функции, причем равенство* (3.19) *понимается в смысле* $L_2[a,b]$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что при условиях 1—5 для задачи (3.16)—(3.17) выполняются все условия теоремы 2.

В силу условий 1 и 3, условия 1°, 2° теоремы 2 для задачи (3.16)—(3.17), очевидно, выполняются.

Остается показать, что выполняется условие 3°, а это делается с помощью преобразования характеристического уравнения для системы (3.16).

В самом деле, легко видеть, что характеристическое уравнение системы (3.16) имеет вид:

$$\left\|\begin{array}{cccccccccc}
-\theta E & E & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & -\theta E & E & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\theta E & E\\
A_{0p}^{-1}(x) & \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m-1} & & -A_{0p}^{-1}(x)A_{q-1\,m}(x) & \cdots & \cdots & -A_{0p}^{-1}(x)A_{1\,(q-1)m}(x) & \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{m-1} & -\theta E
\end{array}\right\|=0,\qquad(3.20)$$

где нули обозначают нулевые матрицы порядка n.

Если матричные столбцы с номерами $m+1,\ 2m+1,\ \ldots,\ (q-1)m+1,\ qm$ определителя, стоящего в левой части (3.20), помножить соответственно на $\theta^m,\ \theta^{2m},\ \ldots,\ \theta^{(q-1)m},\ \theta^{qm-1}$ и сложить с первым матричным столбцом, то, последовательно применяя теорему Лапласа к полученному определителю, легко привести уравнение (3.20) к виду:

$$\det\left(A_{0p}(x)\theta^p+A_{1(q-1)m}(x)\theta^{p-m}+\ldots+A_{q-1\ m}(x)\theta^m-E\right)=0.$$

Таким образом, согласно условию 2, для задачи (3.16)—(3.17), выполняется условие 3° теоремы 2.

* Как видно из доказательства, эта теорема остается справедливой, если $\Phi_{q-1}(x)\in L_2[a,b]$.

Следовательно, применяя теорему 2 к задаче (3.16)—(3.17), получаем:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{\Gamma_\nu}\lambda^{m-1}\left\|\begin{matrix} y_0^{(s)} \\ \vdots \\ y_{p-1}^{(s)}\end{matrix}\right\| d\lambda \Rightarrow B^{-1}(x)\left\|\begin{matrix} z_{10}^{(s)}(x) \\ \vdots \\ z_{p-10}^{(s)}(s) \\ f_s(x)\end{matrix}\right\| \text{ при } \nu\to\infty,$$

$$B(x)=\left\|\begin{matrix} 0 & E & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots & 0 & E \\ A_{0p}^{-1} & \underbrace{0,\ldots,0}_{m-1} & A_{0p}^{-1} & A_{q-1\,m} & \cdots & -A_{0p}^{-1}A_{1\,(q-1)m} & \underbrace{0,\ldots,0}_{m-1} & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Далее, непосредственным вычислением можно убедиться в том, что

$$B^{-1}(x)=\left\|\begin{matrix} \overbrace{0,\ldots,0}^{m-1} & A_{q-1\,m}(x) & \overbrace{0,\ldots,0}^{m-1} & A_{q-2\,2m}(x) & \cdots & A_{1\,(q-1)m}(x) & \overbrace{0,\ldots,0}^{m-1} & A_{0p}(x) \\ E\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\ E\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\ E & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Поэтому, принимая во внимание (3.18), получаем:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Gamma_\nu}\lambda^{m-1}\left\|\begin{matrix} y_0^{(s)} \\ \vdots \\ y_{p-1}^{(s)}\end{matrix}\right\| d\lambda\to\left\|\begin{matrix}\Phi_s(x)+z_{00}^{(s)}(x) \\ z_{10}^{(s)}(x) \\ \vdots \\ z_{p-1\,0}^{(s)}(x)\end{matrix}\right\| \text{ при } \nu\to\infty. \tag{3.21}$$

Наконец, возвращаясь по формулам (3.15) и (3.10) к $v^{(s)}$, из (3.21) получаем формулу (3.19)*, которую и нужно было установить.

Полагая, в частности, $\Phi_k(x)=0$ при $k=0, 1, \ldots, p-2$, из (3.19) выводим формулу:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{C_\nu}\lambda^{m(s+1)-1}d\lambda\int_a^b G(x,\xi,\lambda)\,\Phi_{q-1}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при } s<q-1, \\ \Phi_{q-1}(x) & \text{при } s=q-1, \end{cases} \tag{3.22}$$

* Предел последовательности интегралов по расширяющимся контурам, очевидно, дает сумму вычетов по всем полюсам функции $\lambda^{m-1}v^{(s)}(x,\lambda)$.

справедливую, согласно подстрочному примечанию к теореме 3, для $\Phi_{q-1}(x) \in L_2[a, b]$, где $G(x, \xi, \lambda)$ — матрица Грина 0-вспомогательной спектральной задачи.

Таким образом, из теоремы 3, в частности, следует

Теорема 4. *При условиях* 1, 2, 3 *и* 5 *любая вектор-функция* $\Phi_{q-1}(x) \in L_2[a, b]$ *может быть разложена по формуле* (3.22) *в ряд по фундаментальным функциям* 0-*вспомогательной спектральной задачи.*

Для целей следующего параграфа необходимо записать решение спектральной задачи (3.1)—(3.2) в более компактном виде.

Пусть $V_{0i}(x, \lambda)$ $(i = 1, \ldots, p)$ — квадратные матрицы независимых решений однородной системы 0-вспомогательной спектральной задачи. Известно (см. [9]), что общее решение упомянутой однородной системы имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{p} V_{0k}(x, \lambda)\, b_k,$$

где b_k — столбцы произвольных постоянных. Подставляя это выражение в граничное условие 0-вспомогательной спектральной задачи, для определения столбца постоянных получаем матричное уравнение

$$A(\lambda) \left\| \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{matrix} \right\| = N_0(\Phi, \lambda^m),$$

где $A(\lambda)$ состоит из p матричных ячеек

$$\sum_{\substack{k \leqslant q \\ l \leqslant p-1}} \lambda^{mk} (P_{kl} V_{0s}(x, \lambda)|_{x=a} + Q_{kl} V_{0s}(x, \lambda)|_{x=b}) \quad (s = 1, \ldots, p)$$

размера $np \times n$, расположенных по горизонтали.

Определяя из последнего уравнения столбец постоянных и подставляя в общее решение, получаем вектор-функцию

$$\Delta_0(x, \Phi, \lambda) = \sum_{k=1}^{p} V_{0k}(x, \lambda)\, A^{-1}(\lambda)\, N_0(\Phi, \lambda^m)\,^*,$$

удовлетворяющую однородной системе 0-вспомогательной спектральной задачи и неоднородному граничному условию.

Пусть, далее, $A^{-1}(\lambda)$ состоит из p матричных ячеек $(A^{-1}(\lambda))_s$ $(s = 1, \ldots$ $\ldots, p)$ размера $n \times np$. Тогда, записывая $F_0(x, \Phi, \lambda^m)$, $N_0(\Phi, \lambda^m)$ в матричной форме, нетрудно убедиться в том, что решение $v^{(0)}(x, \lambda)$ 0-вспомогательной спектральной задачи представляется в виде:

$$v^{(0)}(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, l\left(\xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \Phi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{s=1}^{p} V_{0s}(x, \lambda) \left\{ \alpha_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) \Phi(x)|_{x=a} + \beta_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) \Phi(x)|_{x=b} \right\}, \tag{3.23}$$

* Очевидно, матрица $A^{-1}(\lambda)$ существует при всяком λ, не являющемся нулем характеристического определителя $\Delta(\lambda) = \det A(\lambda)$.

где $G(x, \xi, \lambda)$ — матрица Грина, $l\left(\xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)$ — матрица, состоящая из матричных ячеек

$$l_s\left(\xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) = \lambda^{m(q-s)} E - \sum_{\substack{s \leqslant k \leqslant q-1 \\ mk+l \leqslant p}} \lambda^{m(k-s)} A_{kl}(\xi) \frac{d^l}{d\xi^l} \quad (s = 1, \ldots, q-1),$$

$l_q = E$, расположенных по горизонтали; $\alpha_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right)$, $\beta_s\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right)$ — матрицы, состоящие соответственно из матричных ячеек

$$\alpha_{sk}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right), \; \beta_{sk}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, q-1; \; \alpha_{s\,q-1} = \beta_{s\,q-1} = 0),$$

расположенных также по горизонтали,

$$\alpha_{si}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) = (A^{-1}(\lambda))_s \left\{ \sum_{\substack{i+1 \leqslant k \leqslant q-1 \\ l \leqslant p-1}} \lambda^{m(k-1-i)} P_{kl} \frac{d^l}{dx^l} + \sum_{l=0}^{p-1} \lambda^{m(q-1-i)} P_{ql} \frac{d^l}{dx^l} \right\}, \tag{3.24}$$

$$\beta_{si}\left(\lambda, \frac{d}{dx}\right) = (A^{-1}(\lambda))_s \left\{ \sum_{\substack{i+1 \leqslant k \leqslant q-1 \\ l \leqslant p-1}} \lambda^{m(k-1-i)} Q_{kl} \frac{d^l}{dx^l} + \sum_{l=0}^{p-1} \lambda^{m(q-1-i)} Q_{ql} \frac{d^l}{dx^l} \right\}$$

$$(i = 0, \ldots, q-2),$$

$$\alpha_{s\,q-1} = \beta_{s\,q-1} = 0,$$

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{q-1} \end{matrix} \right\|.$$

Тогда, принимая во внимание соотношение $v^{(k)} = \lambda^{mk} v^{(0)} + \lambda^{m(k-1)} \Phi_0 + \ldots$ $\ldots + \Phi_{k-1}$, получаемое из (3.3) при $s = 0$, легко видеть, что решение

$$v(x, \lambda) = \left\| \begin{matrix} v^{(0)} \\ \vdots \\ v^{(q-1)} \end{matrix} \right\|$$

спектральной задачи (3.1)—(3.2) может быть представлено в виде:

$$v(x, \lambda) = \int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \Phi(\xi)\, d\xi + \Delta(x, \Phi, \lambda) + P(\lambda) \Phi(x), \tag{3.25}$$

где $K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)$ состоит из матричных ячеек

$$K_{ij}\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) = \lambda^{(i-1)m} G(x, \xi, \lambda) \left(\lambda^{m(q-j)} E - \sum_{\substack{j \leqslant k \leqslant q-1 \\ mk+l \leqslant p}} \lambda^{m(k-j)} A_{kl}(\xi) \frac{d^l}{d\xi^l} \right),$$

при $i = 1, 2, \ldots, q$; $j = 1, 2, \ldots, q-1$,

$$K_{iq} = \lambda^{m(i-1)} E,$$

$$\Delta(\Phi, x, \lambda) = \left\| \begin{array}{c} \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \\ \lambda^m \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \\ \vdots \\ \lambda^{m(q-1)} \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \end{array} \right\|,$$

$$P(\lambda) = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^m E & E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{m(q-2)}E & \lambda^{m(q-3)}E & \lambda^{m(q-4)}E & \cdots & E & 0 \end{array} \right\|;$$

нули обозначают нулевые матричные ячейки соответствующего размера. Как видно из (3.24), $\Delta(x, \Phi, \lambda)$ и $P(\lambda)\Phi(x)$ фактически не зависят от $\Phi_{q-1}(x)$.

§ 4. Вычетная формула, представляющая решение задачи (1.1)—(1.3)

В этом параграфе сохраняются обозначения §§ 1 — 3.

Теорема 5. *Пусть при условиях* 1, 2, 3, 5 § 3 *граничное условие* (1.2) *не содержит производной по времени порядка* q (*т. е.* $P_{ql}, Q_{ql} = 0$ *при* $l = 0, \ldots, p-1$) *и задача* (1.1)—(1.3) *для* $f(x, t) \in L_2 \left(\int_a^b |f_k(x, t)|^2 dx < \infty \right.$ *при каждом* t *из интервала изменения* $\left. t \right)$, $\int_0^T \int_a^b |f_k(x, t)| \, dx \, dt < \infty$ *имеет решение* $u(x, t)$, *удовлетворяющее условию* 4 *теоремы* 3 *и обладающее свойствами*:

1. u, $\frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}$ *на интервале* $[a, b]$ *имеют производные по* x *до порядка* p, *причем производные до порядка* $p-1$ *абсолютно непрерывны по* x, *а производная порядка* p *принадлежит* $L_2[a, b]$.

2. *Производная по* t *от* $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l}$ $(k = 0, \ldots, q-1, \; l = 0, 1, \ldots, p-1)$ *суммируема в двумерной области* $0 \leqslant t \leqslant T$, $a \leqslant x \leqslant b$; *сами производные* $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l}$ $(k = 0, 1, \ldots, q-1; \; l = 0, \ldots, p-1)$ *абсолютно непрерывны по* t *в интервале* $[0, T]$.

Тогда это решение представимо в виде:

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi \sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{c_\nu} \lambda^{m-1} e^{\lambda^m t} \, d\lambda \left\{ \int_a^b G(x, \xi, \lambda) \left(F_0(\xi, \Phi, \lambda^m) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^t e^{-\lambda^m \tau} f(\xi, \tau) \, d\tau \right) d\xi + \Delta_0(x, \Phi, \lambda) \right\}, \tag{4.1}$$

где $F_0(\xi, \Phi, \lambda^m)$ *определяется формулой* (3.8), *а* $\Delta_0(x, \Phi, \lambda)$ *есть решение 0-вспомогательной спектральной задачи, соответствующей однородной системе.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы прежде всего введем обозначения:

$$z = \left\| \begin{matrix} u^{(0)} \\ \vdots \\ u^{(q-1)} \end{matrix} \right\|, \quad F(x, t) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x, t) \end{matrix} \right\|,$$

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \begin{matrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & E \\ \sum\limits_{l=0}^{p} A_{0l}(x)\frac{\partial^l}{\partial x^l} & \sum\limits_{l=0}^{p-m} A_{1l}(x)\frac{\partial^l}{\partial x^l} & \sum\limits_{l=0}^{p-2m} A_{2l}(x)\frac{\partial^l}{\partial x^l} \cdots & & \sum\limits_{l=0}^{m} A_{q-1\,l}(x)\frac{\partial^l}{\partial x^l} \end{matrix} \right\|,$$

где нули обозначают матричные ячейки порядка n.

Легко видеть, что $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор, соответствующий правой части системы (1.5). Тогда, принимая во внимание условие теоремы ($P_{ql} = Q_{ql} = 0$), в этих обозначениях задачу (1.5)—(1.7) можно записать в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) z + F(x, t), \tag{4.2}$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left\{ (P_{0l}, \ldots, P_{q-1\,l}) \frac{\partial^l z}{\partial x^l}\bigg|_{x=a} + (Q_{0l}, \ldots, Q_{q-1\,l}) \frac{\partial^l z}{\partial x^l}\bigg|_{x=b} \right\} = 0, \tag{4.3}$$

$$z(x, 0) = \Phi(x). \tag{4.4}$$

Точно так же соответствующая спектральная задача (3.1) — (3.2) примет вид:

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) v - \lambda^m v = \Phi(x), \tag{4.5}$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left\{ (P_{0l}, \ldots, P_{q-1\,l}) \frac{\partial^l v}{\partial x^l}\bigg|_{x=a} + (Q_{0l}, \ldots, Q_{q-1\,l}) \frac{d^l v}{dx^l}\bigg|_{x=b} \right\} = 0. \tag{4.6}$$

Для решения v спектральной задачи (4.5)—(4.6) в § 3 была получена формула (3.25). Согласно этой формуле, для любой вектор-функции v, принадлежащей области определения дифференциального оператора, определяемого задачей (4.5)—(4.6), имеет место тождество

$$v(x)=\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}\right)\left(L\left(\xi, \frac{d}{d\xi}\right)-\lambda^m E\right) v(\xi) d\xi +$$

$$+P(\lambda)\left(L\left(x, \frac{d}{dx}\right)-\lambda^m E\right) v(x)+\Delta\left(x,\left(L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^m E\right) \Phi(x), \lambda\right). \quad (4.7)$$

Пусть теперь λ_ν^m — полюс порядка $\varkappa_\nu$ ($\nu=1, 2, \ldots$) вектор-функции $v(x, \lambda)$, определяемой формулой (3.25).

Обозначим через $F_{k\nu}(x)$ интеграл

$$K_{k\nu}(F)=F_{k\nu}(x)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_\nu} \lambda^{m(k+1)-1} d\lambda \left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}\right) F(\xi) d\xi+\Delta(x, F, \lambda)\right\}, \quad (4.8)$$

определяемый для любой достаточно гладкой вектор-функции $F(x)$ на $[a, b]$, где c_ν — замкнутый контур, окружающий только один полюс λ_ν вектор-функции $\lambda^{m-1} v(x, \lambda)$.

Пусть $u^{(0)}=u(x, t)$ — решение задачи (1.1)—(1.3), обладающее приведенными в формулировке теоремы свойствами 1 и 2. Тогда, очевидно, $z(x, t)$ есть решение задачи (4.2)—(4.4), обладающее соответствующими свойствами.

Следовательно, применяя оператор $K_{k\nu}$ к обеим частям (4.2), получаем (возможность применения оператора $K_{k\nu}$ обеспечивается условиями 1 и 2):

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_\nu} \lambda^{m(k+1)-1} d\lambda \left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \frac{\partial}{\partial t} z(\xi, t) d\xi+\Delta\left(x, \frac{\partial}{\partial t} z, \lambda\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_\nu} \lambda^{m(k+1)-1} d\lambda \left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) L\left(\xi, \frac{d}{d\xi}\right) z(\xi, t) d\xi+\right.$$

$$\left.+\Delta\left(x, L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) z, \lambda\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c_\nu} \lambda^{m(k+1)-1} d\lambda \left\{\int_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) F(\xi, t) d\xi+\Delta(x, F, \lambda)\right\}.$$

В силу того, что все столбцовые компоненты $F(x, t)$, кроме последнего столбца, равны нулю, имеем: $\Delta(x, F, \lambda)=0$. В самом деле, как показывают формулы (3.24), $\Delta(x, F, \lambda)$ от последней столбцовой компоненты не зависит.

Далее, как это видно из формул (3.23) и (3.25), зависимость $\Delta\left(x, \frac{\partial z}{\partial t}, \lambda\right)$ от $\frac{\partial z}{\partial t}$ линейна и, следовательно, в силу условия 2 теоремы, дифференцирование по t может быть вынесено за знак интеграла. Тогда, если принять во внимание аналитичность $P(\lambda)$ во всей λ-плоскости, последнее тождество может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)z(\xi,t)\,d\xi+\Delta(x,z,\lambda)\right)\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)\left(L\left(\xi,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)-\lambda^m E\right)z(\xi,t)+\right.$$

$$\left.+P(\lambda)\left(L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^m E\right)z(x,t)+\Delta\left(x,\left(L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda^m E\right)z,\lambda\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+2)-1}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)z(\xi,t)\,d\xi+\Delta(x,z,\lambda)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)F(\xi,t)\,d\xi.$$

Согласно (4.7), при обозначении (4.8) последнее тождество примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}z_{k\nu}(x,t)=z_{k+1\,\nu}(x,t)+F_{k\nu}(x,t). \tag{4.9}$$

Таким же образом, применяя оператор $K_{k\nu}$ к обеим частям начального условия (4.4), получаем:

$$z_{k\nu}(x,0)=\Phi_{k\nu}(x). \tag{4.10}$$

Из тождества

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m-1}(\lambda^m-\lambda_\nu^m)^{\varkappa_\nu}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)z(\xi,t)\,d\xi+\Delta(x,\xi,\lambda)\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\varkappa_\nu}\binom{\varkappa_\nu}{k}(-\lambda_\nu^m)^{\varkappa_\nu-k}z_{k+1\,\nu}(x,t)=0,$$

очевидно, можно выразить $z_{\varkappa_\nu\nu}(x,t)$ через

$$z_{0\nu}(x,t),\ z_{1\nu}(x,t),\ \ldots,\ z_{\varkappa_\nu-1\,\nu}(x,t). \tag{4.11}$$

Следовательно, (4.11) есть решение задачи Коши, получаемой из (4.9)—(4.10) при $k=0,\ldots,\varkappa_\nu-1$. Принимая во внимание условия теоремы, нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что

$$z_{k\nu0}(x,t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\limits_{c_\nu}\lambda^{m(k+1)-1}d\lambda\left\{\int\limits_{a}^{b}K\left(x,\xi,\frac{d}{d\xi},\lambda\right)\left(\Phi(\xi)e^{\lambda^m t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{0}^{t}e^{\lambda^m(t-\tau)}F(\xi,\tau)\,d\tau\right)d\xi+e^{\lambda^m t}\Delta(x,\Phi,\lambda)\right\} \tag{4.12}$$

является решением задачи Коши, получаемой из (4.9)—(4.10) при $k=0, 1, \ldots, \varkappa_\nu - 1$. В силу единственности решения задачи Коши заключаем, что

$$z_{k\nu 0}(x, t) = z_{k\nu}(x, t) \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa_\nu - 1;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Применяя теорему 3 к решению $z(x, t)$ задачи (4.2)—(4.4), согласно (4.12) и (4.13) получаем:

$$z(x, t) = \sum_\nu z_{0\nu}(x, t) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_\nu \int\limits_{c_\nu} \lambda^{m-1} d\lambda \left\{ \int\limits_a^b K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right) \left(\Phi(\xi) e^{\lambda^m t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^t e^{\lambda^m (t-\tau)} F(\xi, \tau)\, d\tau \right) d\xi + e^{\lambda^m t} \Delta(x, \Phi, \lambda) \right\}. \tag{4.14}$$

Теперь для завершения доказательства теоремы заметим, что, согласно введенным обозначениям, $u(x, t) = u^{(0)}(x, t)$ — первая столбцовая компонента вектор-функции $z(x, t)$, для получения которой из (4.14) достаточно выделить первую столбцовую компоненту подынтегрального выражения. А для этого, очевидно, первую строку матрицы $K\left(x, \xi, \frac{d}{d\xi}, \lambda\right)$ следует применить к столбцу

$$\Phi(\xi) e^{\lambda^m t} + \int\limits_0^t e^{\lambda^m (t-\tau)} F(\xi, \tau)\, d\tau,$$

записывая его через столбцовые компоненты

$$\Phi_k(\xi) e^{\lambda^m t} + \int\limits_0^t e^{\lambda^m (t-\tau)} F_k(\xi, \tau)\, d\tau \quad (k = 0, \ldots, q-1)$$

и принимая во внимание, что $F_k(\xi) = 0$ при $k = 0, \ldots, q-2$ и $\Delta(x, F, \lambda)$ есть столбец, состоящий из элементов $\Delta_0, \lambda^m \Delta_0, \ldots, \lambda^{m(q-1)} \Delta_0$.

Таким образом, выделяя $u^{(0)}$, из (4.14) получаем формулу (4.1), которую и нужно было вывести.

Примечание 1. Нетрудно убедиться непосредственной проверкой в том, что формула (4.1) дает формальное решение задачи (1.1)—(1.3) для более общего случая, когда $P_{ql}, Q_{ql} \neq 0$. Но в этом общем случае, как видно из (1.5)—(1.7), замена (1.4) не приводит к задаче с разделяющимися переменными x и t, и поэтому метод доказательства теоремы 5 не позволяет доказать такую теорему для этого общего случая ($P_{ql}, Q_{ql} \neq 0$).

Примечание 2. При условии достаточной гладкости данных задачи (1.1)—(1.3), пользуясь методом работы [13], для широкого класса задач можно доказать, что функция, определяемая формулой (4.1), является решением задачи (1.1)—(1.3).

Пример. В подземной гидромеханике в связи с исследованием гидродинамических параметров пласта возникает смешанная задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\delta c^2\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

при граничных условиях

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=a}=0,\quad u(b,t)=\beta\,*$$

и начальных условиях

$$u(x,0)=\Phi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\Phi_1(x),$$

где δ, c, α, β — постоянные.

Ввиду малости величины $\frac{1}{c^2}$ в книге И. А. Чарного ([18], стр. 118—132) решается соответствующая смешанная задача для уравнения теплопроводности.

Нетрудно убедиться в том, что если $\Phi_0''(x)$, $\Phi_1(x)$ непрерывны на интервале $[a,b]$ и $\Phi_0(b)=0$, то для этой задачи все условия теоремы 5 выполняются. Поэтому достаточно гладкое решение $u(x,t)$ этой задачи представляется формулой (4.1), причем $m=1$, $p=q=2$, $F_0(x,\Phi,\lambda)=(\lambda+\delta c^2)\Phi_0(x)+\Phi_1(x)$, $G(x,\xi,\lambda)$, $\Delta(x,\Phi,\lambda)$ выражаются через функции Бесселя.

§ 5. Вычетная формула, представляющая решение смешанной задачи с разделяющимися переменными для системы уравнений с переменными по t коэффициентами

В этом параграфе показывается, что вычетный метод, в отличие от метода трансформации Лапласа, применим также и к смешанным задачам для уравнений с переменными по t коэффициентами. Результаты этого параграфа обобщают соответствующие результаты работы [12] на случай системы уравнений.

Рассмотрим смешанную задачу: найти решение системы

$$M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)u=L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u+f(x,t), \tag{5.1}$$

при граничном условии

$$\sum_{j=1}^{p-1}\left\{\alpha_j\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=a}+\beta_j\left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j}\right|_{x=b}\right\}=0 \tag{5.2}$$

и начальных условиях

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\Phi_k(x), \tag{5.3}$$

где

$$M\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)=\sum_{k=0}^{q}B_k(t)\frac{\partial^{q-k}}{\partial t^{q-k}},$$

* Очевидно, можно полагать $\beta=0$.

$B_k(t)$ — n-мерные квадратные матрицы, составленные из непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций от t ($\det B_0(t) \neq 0$ на этом интервале);

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k=0}^{p} A_k(x) \frac{\partial^{p-k}}{\partial x^{p-k}},$$

$A_k(x)$ — n-мерные квадратные матрицы, составленные из непрерывных на $[a, b]$ функций от x, причем $\det A_0(x) \neq 0$ на этом интервале; α_j, β_j — постоянные матрицы размера $np \times n$; $f(x, t)$, $\Phi_k(x)$ — вектор-функции соответствующего размера.

Задачу нахождения решения системы

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) v - \lambda^p v = f(x) \tag{5.4}$$

при граничном условии

$$\sum_{j=0}^{p-1} \left\{ \alpha_j \frac{d^j v}{dx^j}\bigg|_{x=a} + \beta_j \frac{d^j v}{dx^j}\bigg|_{x=b} \right\} = 0 \tag{5.5}$$

назовем **спектральной задачей, соответствующей задаче** (5.1)—(5.3).

Сначала займемся решением следующей задачи Коши:

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) Y - \mu Y = f(\xi, t) \quad (\mu = \lambda^p), \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial^k Y}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \Phi_k(\xi). \tag{5.7}$$

Известно (см. [9]), что теория систем дифференциальных уравнений вида (5.4) аналогична теории одного линейного уравнения.

Пусть $Y_1(t, \mu), \ldots, Y_q(t, \mu)$ — система независимых решений ($Y_k(t, \mu)$ — квадратные матрицы порядка n) однородной системы, соответствующей системе (5.6), удовлетворяющих начальным условиям

$$\frac{\partial^k Y_j}{\partial t^k}\bigg|_{t=0} = \begin{cases} E & \text{при } k = j - 1, \\ 0 & \text{при } k \neq j - 1. \end{cases}$$

Обозначим через $\delta(t, \lambda)$ определитель

$$\delta(t, \lambda) = \begin{vmatrix} Y_1^{(q-1)}(t, \mu) & \ldots & Y_q^{(q-1)}(t, \mu) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_1(t, \mu) & \ldots & Y_q(t, \mu) \end{vmatrix}.$$

Пусть $Z_\nu(t, \mu)$ обозначает матрицу, полученную транспонированием матрицы, оставленной из алгебраических дополнений элементов матрицы $Y_\nu(t, \mu)$

$\nu=1, \ldots, q$) в определителе $\delta(t, \mu)$. Тогда решение задачи (5.6)—(5.7) представляется формулой:

$$Y(t, \lambda)=\sum_{k=1}^{q} Y_k(t, \mu)\Phi_k(\xi)+\int_0^t K(t, \tau, \mu) f(\xi, \tau)\, d\tau,$$

где

$$K(t, \tau, \lambda)=\sum_{k=1}^{q} \frac{Y_k(t, \mu) Z_k(t, \mu)}{\delta(t, \mu)} B_0^{-1}(\tau).$$

Теперь легко может быть доказана

Теорема 6. *Пусть условия теоремы 4 выполнены для спектральной задачи* (5.4)—(5.5)*, *оператор* $M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ *перестановочен с матрицей Грина* $G(x, \xi, \mu)$ *спектральной задачи* (5.4)—(5.5) *и задача* (5.1)—(5.3) *для* $f(x, t) \in L_2$,

$$\int_0^T \int_a^b |f_k(x, t)|\, dx\, dt<\infty \quad (k=1, \ldots, n)$$

имеет решение $u(x, t)$, *обладающее свойствами:*

1. $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{q-1} u}{\partial t^{q-1}}$ *абсолютно непрерывны по* t *в* $[0, T]$ *при* $a<x<b$ *и ограничены в области* $a<x<b,\ 0 \leqslant t \leqslant T$.

2. $\frac{\partial^q u}{\partial t^q}$ *абсолютно интегрируема по области* $a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant T$.

3. *На отрезке* $[a, b]$ $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} u}{\partial x^{p-1}}$ *абсолютно непрерывны при* $t \in [0, T]$ *и* $\frac{\partial^p u}{\partial x^p}$ *суммируема.*

Тогда $u(x, t)$ *представимо формулой:*

$$u(x, t)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{\nu} \int_{c_\nu} d\mu \int_a^b G(x, \xi, \mu)\Big\{Y_k(t, \mu)\Phi_k(\xi)+$$

$$+\int_0^t K(t, \tau, \mu) f(\xi, \tau)\, d\tau\Big\}\, d\xi, \tag{5.8}$$

где c_ν — *замкнутый контур, окружающий только один полюс* μ_ν — *матрицы Грина* $G(x, \xi, \mu)$ *и сумма по* ν *распространена на все полюсы этой матрицы.*

---

* Для задачи (5.4)—(5.5) в частном случае, когда все полюсы матрицы Грина суть простые нули характеристического определителя, теорема разложения доказывается в [9].

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение, обладающее перечисленными в формулировке теоремы свойствами. Тогда, аналогично тому как это мы делали в ходе доказательства теоремы 5, принимая во внимание условия теоремы и применяя оператор

$$K_{k\nu}(F) \equiv F_{k\nu}(x) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{c_\nu} \mu^k \int\limits_a^b G(x, \xi, \mu) F(\xi) d\xi$$

к обеим частям (5.1)—(5.3), приходим к тождествам:

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) u_{k\nu}(x, t) = u_{k+1\,\nu}(x, t) + f_{k\nu}(x, t), \tag{5.9}$$

$$u_{k\nu}(x, 0) = \Phi_{k\nu}(x). \tag{5.10}$$

Принимая во внимание условия теоремы и (5.6), (5.7), непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что функция

$$u_{k\nu 0}(x, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int\limits_{c_\nu} \lambda^k d\lambda \int\limits_a^b G(x, \xi, \lambda) \left\{ \sum_{k=1}^{q} Y_k(t, \lambda) \Phi_k(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t K(t, \tau, \lambda) f(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi$$

является решением задачи (5.9)—(5.10). Из последнего тождества, применяя теорему 4, получаем формулу (5.8), которую и нужно было вывести.

Из теорем 5 и 6 следует, что решения задач (1.1)—(1.3) и (5.1)—(5.3) обладающие свойствами, перечисленными в формулировках этих теорем, единственны.

Пример. Пусть имеем смешанную задачу:

$$p_0(t) \frac{\partial u}{\partial t} + p_1(t) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=0} - 2 \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=1} = 0 \quad (k = 0, 1),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

с достаточно гладкими $p_i(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$.

Ввиду того, что коэффициенты $p_i(t)$ зависят от t, к этой задаче метод трансформации Лапласа непосредственно не применим. Что касается обычного метода Фурье, то он не применим, так как соответствующая спектральная задача — не самосопряженная.

Изложенный в этом параграфе метод позволяет эффективно построить решение этой задачи:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{(-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\,x}\int_0^1 \{17\,\mathrm{ch}(-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi +$$

$$+ 3\,\mathrm{sh}(-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi\}\, T(t,\xi,-\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-(\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})x}\int_0^1 \{11\,\mathrm{ch}(\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi +$$

$$+ 3\,\mathrm{sh}(\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\xi\}\, T(t,\xi,\ln 2+2\nu\pi\sqrt{-1})\,d\xi,$$

где

$$T(t,\xi,\lambda) = \varphi(\xi)\exp\left\{\int_0^t \frac{\lambda - p_1(\tau)}{p_0(\tau)}\,d\tau\right\} +$$

$$+\int_0^t \frac{f(\xi,\tau)}{p_0(\tau)}\exp\left\{\int_\tau^t \frac{\lambda - p_1(\tau_1)}{p_0(\tau_1)}\,d\tau_1\right\}d\tau.$$

(Поступило в редакцию 27/XI 1956 г.)

Литература

1. G. D. Birkhoff, On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations, containing a parameter, Trans. Amer. Math. Soc., **9** (1908), 219—231.
2. G. D. Birkhoff, Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **9** (1908), 373—395.
3. G. D. Birkhoff, R. E. Langer, The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts and Sciences, **58** (1923), 51—128.
4. H. Geppert, Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach funktionentheoretischen Methoden, Math. Zeitschr., **20** (1924), 29—94.
5. A. L. Cauchy, Mémoire sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique, Paris, 1827.
6. A. L. Cauchy, Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy (II), v. VII, Paris, 1827.
7. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, т. **77**, № **1** (1951), 11—14.
8. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
9. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
10. А. И. Плеснер, Спектральная теория линейных операторов. I, Успехи матем. наук, вып. **IX** (1941), 3—125.
11. H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rend. Pal., **8** (1894), 57—156.

12. М. Л. Расулов, Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений, Матем. сб., **30 (72)** (1952), 509—528.
13. М. Л. Расулов, Об одной задаче подземной гидромеханики, Научные записки Львовского политехн. ин-та, вып. 38, серия физ.-мат., № 2 (1956), 66—89.
14. М. Л. Расулов, Об одной формуле разложения произвольной функции, ДАН СССР, т. **119**, № **3** (1958), 450—453.
15. М. Л. Расулов, Вычетный метод решения смешанных задач и некоторые с ним связанные формулы разложения, ДАН СССР, т. **120**, № **1** (1958), 33—36.
16. Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и разложении произвольных функций в ряды, Петроград, 1917.
17. J. Tamarkin, Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitschr., **27** (1928), 1—54.
18. И. А. Чарный, Подземная гидромеханика, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.