О многократном дифференцировании по параметру решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной

А. Б. Васильева (Москва)

Изучению предельных свойств решения задачи с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, т. е. уравнений, вырождающихся при значении параметра, равном нулю, посвящен целый ряд работ (например, [1]—[10] и другие), в которых рассматривались различные типы уравнений и изучались различные предельные свойства решений.

Одной из первых работ этого направления была работа А. Н. Тихонова [1], в которой рассматривалась система

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{dz}{dt} &= F(z, x, t), \\ \frac{dx}{dt} &= f(z, x, t), \\ z|_{t=0} = z^0, &\quad x|_{t=0} = x^0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр. Полагая в (1) $\mu = 0$, получим вырожденную систему уравнений

$$0 = F(z, x, t), \tag{2_1}$$

$$\frac{dx}{dt} = f(z, x, t). \tag{2_2}$$

Естественно поставить вопрос: при каких условиях решение $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ системы (1) будет при $\mu \to 0$ стремиться к некоторому решению $z(t)$, $x(t)$ вырожденной системы (2)? Чтобы определить однозначно это решение, надо задать начальное условие для $x(t)$ и указать способ выбора корня $z = \varphi(x, t)$ уравнения (2_1) в случае, если это уравнение имеет несколько корней. В работе [1] содержится ответ на поставленный вопрос. Приведем здесь некоторые определения и результаты этой работы, необходимые для дальнейшего.

Назовем корень $z = \varphi(x, t)$ уравнения (2_1) *устойчивым в некоторой области* D *пространства* (x, t), если $\frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(x, t), x, t) < 0$ для точек (x, t) из $\overline{D}$. Назовем *областью влияния устойчивого корня* $z = \varphi(x, t)$ совокупность точек (z^0, x^0, t^0), для которых $\operatorname{sign} F(z, x^0, t^0) = \operatorname{sign} F(z^0, x^0, t^0)$ для всех z в промежутке $z^0 \gtrless z \gtrless \varphi(x^0, t^0)$, т. е. $F(z, x^0, t^0) > 0$ при $z^0 < \varphi(x^0, t^0)$ и $F(z, x^0, t^0) < 0$ при $z > \varphi(x^0, t^0)$.

В работе [1] доказана следующая

Теорема. *Если начальная точка* $(z^0, x^0, 0)$, *определяющая рассматриваемое решение системы* (1), *лежит в области влияния некоторого устойчи-*

вого корня $z=\varphi(x, t)$ *уравнения* (2_1), *то при* $\mu\to 0$ *имеют место предельные равенства*

$$\begin{aligned}&\lim_{\mu\to 0} z(t, \mu)=\bar{z}(t)=\varphi(\bar{x}(t), t) \quad 0<t\leqslant T,\\&\lim_{\mu\to 0} x(t, \mu)=\bar{x}(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T,\end{aligned}\tag{3}$$

где $\bar{z}(t)$, $\bar{x}(t)$ — *решение вырожденной системы* (2), *соответствующее устойчивому корню* $z=\varphi(x, t)$ *и удовлетворяющее начальному условию* $\bar{x}|_{t=0}=x^0$; T — *некоторая величина, не зависящая от* μ.

В более поздней работе [2] сделано то же самое для систем более общего вида.

Настоящая работа посвящена изучению предельных свойств производных по μ от решения системы (1), в основном доказательству того факта, что этим производным также соответствуют вполне определенные предельные функции при $\mu\to 0$. Эта задача была частично решена раньше (см. [3], где рассматривались производные первого порядка). Изучение производных по μ от решения системы (1) дает возможность построить асимптотические формулы для этого решения с ошибкой любого порядка малости по параметру μ.

Первые производные по μ от решения системы (1) z_μ, x_μ удовлетворяют системе уравнений, получающейся дифференцированием (1):

$$\begin{gathered}\mu\frac{d}{dt}z_\mu+\frac{d}{dt}z=F_z(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,z_\mu+F_x(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,x_\mu,\\ \frac{d}{dt}x_\mu=f_z(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,z_\mu+f_x(z(t, \mu), x(t, \mu), t)\,x_\mu,\\ z_\mu|_{t=0}=0, \quad x_\mu|_{t=0}=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Соответствующая вырожденная система имеет вид

$$0=F_z(\bar{z}, \bar{x}, t)\bar{z}_\mu+F_x(\bar{z}, \bar{x}, t)\bar{x}_\mu-\frac{d}{dt}\bar{z},\tag{5_1}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{x}_\mu=f_z(\bar{z}, \bar{x}, t)\bar{z}_\mu+f_x(\bar{z}, \bar{x}, t)\,\bar{x}_\mu.\tag{5_2}$$

В работе [4] показано, что

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\mu\to 0} z_\mu=\bar{z}_\mu,\\&\lim_{\mu\to 0} x_\mu=\bar{x}_\mu\end{aligned}\right\} \quad 0<t\leqslant T,\tag{6}$$

где $\bar{z}_\mu$, $\bar{x}_\mu$ — решение вырожденной системы (4) (о выборе корня уравнения (5_1) здесь вопрос не возникает, так как этот корень — единственный и устойчивый), удовлетворяющее специальному начальному условию:

$$\bar{x}_\mu|_{t=0}=\bar{x}_\mu^0=\int_0^\infty [f(z_0(\tau), x^0, 0)-f(\varphi(x^0, 0), x^0, 0)]\,d\tau.\tag{7}$$

Здесь $z_0(\tau)$ — решение уравнения

$$\begin{gathered}\frac{dz_0}{d\tau}=F(z_0, x^0, 0),\\ z_0|_{\tau=0}=z^0.\end{gathered}\tag{8}$$

В предельном переходе (6), в отличие от (3), новым моментом является то, что если начальные значения x и $\bar{x}$ совпадают $(x|_{t=0}=\bar{x}|_{t=0}=x^0)$, то начальные значения $\dot{x}_\mu$ и $\bar{x}_\mu$ различны, так как $\bar{x}_\mu^0$, вообще говоря, нулю не равно. Можно сказать, что функция x_μ при $\mu\to 0$ имеет в пределе скачок в начальной точке $t=0$, напоминающий, хотя и не вполне аналогичный, скачок функции $z(t, \mu)$ в той же начальной точке.

При изучении производных по μ n-го порядка от решения $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$ системы (1) будем предполагать, что функция F обладает непрерывными частными производными до $n+1$-го порядка включительно, а функция f — таковыми же до n-го порядка включительно. Производные z_{μ^n}, x_{μ^n} удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{d}{dt}z_{\mu^n}-n\frac{d}{dt}z_{\mu^{n-1}}&=F_{\mu^n}=F_n(z, x, t, z_\mu, x_\mu,\dots, z_{\mu^n}, x_{\mu^n}),\\ \frac{d}{dt}x_{\mu^n}&=f_{\mu^n}=f_n(z, x, t, z_\mu, x_\mu,\dots, z_{\mu^n}, x_{\mu^n}),\\ z_{\mu^n}|_{t=0}&=0,\quad x_{\mu^n}|_{t=0}=0,\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

где F_n, f_n — некоторые функции от $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$, их производных до n-го порядка и t. Заметим, что группа производных порядка n входит линейно $z, x,\dots, z_{\mu^{n-1}}, x_{\mu^{n-1}}$ считаются известными функциями t, μ.

Отправляясь от предельных функций $\bar{z}_\mu, \bar{x}_\mu$, существование которых было доказано в [4], можно построить вырожденную систему для производных второго порядка и показать, что для производных второго порядка имеют место предельные равенства, аналогичные (7), причем значение $\bar{x}_{\mu^2}^0$ выражается формулой, аналогичной (8) (имеет место скачок функции x_{μ^2} в точке $t=0$). Процесс можно продолжить. Считая, наконец, известными предельные функции для $z, x,\dots, z_{\mu^{n-1}}, x_{\mu^{n-1}}$, можно построить вырожденную систему уравнений для производных n-го порядка

$$\begin{aligned} 0&=F_n(\bar{z}, \bar{x}, t, \bar{z}_\mu, \bar{x}_\mu,\dots, \bar{z}_{\mu^n}, \bar{x}_{\mu^n})-n\frac{d}{dt}\bar{z}_{\mu^{n-1}},\\ \frac{d}{dt}\bar{x}_{\mu^n}&=f_n(\bar{z}, \bar{x}, t, \bar{z}_\mu, \bar{x}_\mu,\dots, \bar{z}_{\mu^n}, \bar{x}_{\mu^n})\end{aligned}\tag{10}$$

и обнаружить существование предельного перехода, аналогичного (7), также и для производных n-го порядка. Чтобы написать формулу для скачка x_{μ^n} при $t=0$, рассмотрим вспомогательную систему уравнений, получаемую из (1) заменой $\frac{t}{\mu}=\tau$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau}&=F(z, x, \mu\tau),\\ \frac{dx}{d\tau}&=\mu f(z, x, \mu\tau),\\ z|_{\tau=0}&=z^0,\quad x|_{\tau=0}=x^0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Назовем **формальными степенными рядами** для z и x ряды

$$\begin{aligned} z&=z_0(\tau)+\mu z_1(\tau)+\dots,\\ x&=x_0(\tau)+\mu x_1(\tau)+\dots,\end{aligned}\tag{12}$$

коэффициенты которых определяются в результате подстановки (12) в (11). При подстановке рядов в правые части (11) последние должны приводиться также к форме степенных рядов, например, F нужно представить в виде $F=F_0+\mu F_1+\ldots$, где

$$F_i=F_i(z_0, x_0,\ldots, z_i,x_i)=\frac{1}{i!}\left[\frac{\partial^i}{\partial\mu^i}F(z_0+\mu z_1+\ldots, x_0+\mu x_1+\ldots, \mu\tau)\right]_{\mu=0}.$$

Ниже (§ 2) будет показано, что условие устойчивости и условия гладкости, наложенные на F и f, позволяют фактически определить по крайней мере n членов каждого ряда (12), а это уже дает возможность получить n членов разложения функции $f(z, x, \mu\tau)$. Обозначим n — 1-ый член этого разложения через $f_{n-1}(\tau)$.

Формулируем теперь основную теорему, которая будет доказана в настоящей работе.

Теорема. *Предельные значения* $\bar{z}_{\mu^n}, \bar{x}_{\mu^n}$ *производных n-го порядка по параметру* μ *от решения* $z(t, \mu), x(t, \mu)$ *системы* (1) *существуют и удовлетворяют вырожденной системе* (10) *при начальном условии*

$$\bar{x}_{\mu^n}|_{t=0}=\bar{x}^0_{\mu^n}=(-1)^n\int\limits_0^\infty\tau^n f^{(n)}_{n-1}(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Заметим, что для $n=1$ формула (13) совпадает с (7). Действительно, согласно (13) для $n=1$

$$\bar{x}^0_\mu=-\int\limits_0^\infty\tau f'_0(\tau)\,d\tau=-\tau[f_0(\tau)-f_0(\infty)]\big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty[f_0(\tau)-f_0(\infty)]\,d\tau=$$
$$=\int\limits_0^\infty[f(z_0(\tau), x^0, 0)-f(\varphi(x^0, 0), x^0,0)]\,d\tau.$$

Нижеследующее изложение разбивается на несколько параграфов: § 1— сводка некоторых специальных обозначений, применяемых в настоящей работе, и вспомогательных теорем, доказанных в предыдущих работах; § 2 — новые вспомогательные теоремы и оценки; § 3 — доказательство основной теоремы.

§ 1

В настоящей статье будут приняты некоторые специальные обозначения и сокращения. Частично они использовались в предыдущей статье [4].

Все постоянные, не зависящие от μ, обозначаются одной и той же буквой C.

Равенство $f=[\Phi_k]$, относящееся к функции f, зависящей от μ (может быть, через $z(t, \mu), x(t, \mu)$, их производные и т. д.), означает, что $|f|<\Phi_k$, где под Φ_k подразумевается сумма конечного числа слагаемых вида $C\frac{t^\alpha}{\mu^\beta}$ $(\alpha-\beta=k,\ \alpha>0)$.

В дальнейшем будем пользоваться некоторыми простейшими свойствами Φ_k:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а)}\ \Phi_k\Phi_l=\Phi_{k+l},\\
&\text{б)}\ \frac{\Phi_k}{\mu}=\Phi_{k-1},\\
&\text{в)}\ \Phi_k t=\Phi_{k+1},\\
&\text{г)}\ \int\limits_0^t\Phi_k\,dt=\Phi_{k+1},
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

д) для $t < 1$ $\Phi_k + \Phi_{k+1} = \Phi_k$ (или $< \Phi_k$), так как от замены множителя t в каждом слагаемом Φ_{k+1} единицей Φ_{k+1} обращается в Φ_k, которое, очевидно, больше прежнего Φ_{k+1}.

Выше были введены в рассмотрение формальные ряды (12)

$$z = z_0(\tau) + \mu z_1(\tau) + \ldots \tag{1.2}$$

(аналогично для x).

Обозначим $\mu^l z_l(\tau)$ через $\overset{(l)}{z}$. Частичную сумму ряда (1.2) номера n обозначим через $(z)_n$:

$$(z)_n = \overset{(0)}{z} + \overset{(1)}{z} + \ldots + \overset{(n)}{z}.$$

Предполагая, что функции $z_i(\tau)$, $x_i(\tau)$ можно определить (это будет сделано в § 2 для $i \leqslant n$, как уже указывалось выше), отметим некоторые используемые в дальнейшем свойства $\overset{(l)}{z}$ и $(z)_l$. Условимся применять равенство $f = O_k$ для обозначения того, что порядок малости величины $f(\tau, \mu)$ (τ и μ — независимые переменные) относительно μ есть k. Например, $\overset{(n)}{z} = O_n$. Для производной по μ от этой функции, рассматриваемой как сложная функция μ, будем иметь, учитывая, что $\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{\tau}{\mu}\frac{\partial}{\partial\tau}$:

$$\overset{(n)}{z}_\mu = (\mu^n z_n(\tau))_\mu = n\,\mu^{n-1} z_n + \mu^n z_n' \left(-\frac{\tau}{\mu}\right) = O_{n-1},$$

и для производной k-го порядка:

$$\overset{(n)}{z}_{\mu^k} = O_{n-k}.$$

Наконец, равенство $f = S_k$ будет означать, что член наиболее высокого порядка малости по μ в выражении f есть O_k, а равенство $f = I_k$ будет означать, что член наинизшего порядка малости по μ в выражении для f есть O_k. Очевидно,

$$(z)_n = S_n, \quad (z)_n = I_0;$$

$$(z)_{n\mu^k} = S_{n-k}, \quad (z)_{n\mu^k} = I_{-k}.$$

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют z_l, x_l; $\overset{(l)}{z}$, $\overset{(l)}{x}$. При составлении уравнений для z_l, x_l надо ряды (12) подставить в правые части (11) и полученные выражения представить также в виде рядов

$$F = F_0 + \mu F_1 + \ldots,$$

$$f = f_0 + \mu f_1 + \ldots.$$

Коэффициенты F_l, f_l являются функциями коэффициентов рядов (12) и τ:

$$F_l = F_l(\tau, z_0, x_0, \ldots, z_l, x_l) = \frac{1}{l!}\left[\frac{\partial^l}{\partial\mu^l} F(z_0 + \mu z_1 + \ldots, x_0 + \mu x_1 + \ldots, \mu\tau)\right]_{\mu=0}.$$

Отметим, что z_i, x_i входят линейно с множителями $F_z(z_0, x_0, 0) = F_{z0}$ и $F_x(z_0, x_0, 0) = F_{x0}$ соответственно. Будем употреблять обозначения:

$$F_i(\tau, z_i, x_i) = F_i(\tau, z_0(\tau), x_0(\tau), \ldots, z_{i-1}(\tau), x_{i-1}(\tau), z_i, x_i),$$
$$F_i(\tau) = F_i(\tau, z_0(\tau), x_0(\tau), \ldots, z_i(\tau), x_i(\tau)).$$

F_i без указания аргументов будем употреблять во всех случаях, если по смыслу ясно, с какими аргументами имеем дело.

Уравнения, которым удовлетворяют z_0, x_0, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_0}{d\tau} = F(z_0, x_0, 0),\\ &\frac{dx_0}{d\tau} = 0,\\ &z_0|_{\tau=0} = z^0, \quad x_0|_{\tau=0} = x^0. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Для z_p, x_p $(p = 1, 2, \ldots)$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz_p}{d\tau} = F_p(\tau, z_p, x_p),\\ &\frac{dx_p}{d\tau} = f_{p-1}(\tau),\\ &z_p|_{\tau=0} = 0 \quad x_p|_{\tau=0} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Заметим, что начальные значения производных по τ любого порядка от функций z_p, x_p представляют собой некоторые постоянные, не зависящие от μ.

$\overset{(0)}{z}$, $\overset{(0)}{x}$ совпадают с z_0, x_0. Функции $\overset{(p)}{z}$, $\overset{(p)}{x}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют уравнениям (за независимое переменное удобно взять t)

$$\mu \frac{d}{dt}\overset{(p)}{z} = \overset{(p)}{F}(t, \overset{(p)}{z}, \overset{(p)}{x}), \tag{1.5'}$$

$$\frac{d}{dt}\overset{(p)}{x} = \overset{(p-1)}{f}(t). \tag{1.5''}$$

Для $p = 1$ эти уравнения выписаны в п. 1 § 2. Начальные условия для этих функций, так же как и для z_p, x_p,— нулевые, за исключением $\overset{(0)}{z}$, $\overset{(0)}{x}$, совпадающих с z_0, x_0. Заметим, что производные по μ любого порядка от $\overset{(p)}{z}$, $\overset{(p)}{x}$, z_p, x_p удовлетворяют нулевым начальным условиям.

Для $(z)_p$, $(x)_p$ имеет место система уравнений

$$\mu \frac{d}{dt}(z)_p = (F)_p, \qquad \frac{d}{dt}(x)_p = (f)_{p-1}. \tag{1.6}$$

Остановимся, наконец, на двух вспомогательных теоремах, доказанных раньше [4], которые будут существенно использованы в настоящей работе.

Для оценки решения линейного однородного уравнения $\mu \frac{du}{dt} = F_z u$ (а следовательно, и соответствующего неоднородного) употребляется неравенство

$$e^{\frac{1}{\mu}\int\limits_{\tau}^{t} F_z(z(t,\mu), x(t,\mu), t)\,dt} < e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}} \quad (\varkappa > 0), \tag{1.7}$$

вытекающее из условия устойчивости $F_z(\varphi(x, t), x, t) < 0$. Аргументами F_z могут быть, кроме $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$, t, также $z_0(\tau)$, x^0, 0 и т. п. (см. [4], гл. I, лемма 1).

Для оценки решения линейной системы вида *

$$\mu \frac{du}{dt} = F_z u + F_x v + \varphi,$$

$$\frac{dv}{dt} = f_z u + f_x v + \psi$$

служит

Лемма ([4], гл. I, лемма 2). *Любое решение системы*

$$\mu \frac{du}{dt} = F_z u + \mu F_x v,$$

$$\mu \frac{dv}{dt} = f_z u + \mu f_x v,$$

ограниченное по модулю при $t = 0$, ограниченно по модулю на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

В настоящей работе будет, как и в [4], употребляться символ $A \cong B$ для обозначения того, что разность $A - B$ бесконечно мала при $\mu \to 0$. То же будет обозначать запись $A - B = \varepsilon(\mu) = \varepsilon$.

§ 2

1. Исследуем функции $\overset{(p)}{z}(t, \mu)$, $\overset{(p)}{x}(t, \mu)$ и их производные по μ.

$\overset{(p)}{z}, \overset{(p)}{x}$ удовлетворяют уравнениям (1.5). Выпишем эти уравнения сначала для номеров $p = 0,1$. Для $p = 0$ система уравнений получается из (1.3) заменой $\tau = \frac{t}{\mu}$, так как $\overset{(0)}{z} = z_0$, $\overset{(0)}{x} = x_0$,

$$\left.\begin{aligned} &\mu \frac{d\overset{(0)}{z}}{dt} = F(\overset{(0)}{z}, \overset{(0)}{x}, 0), \\ &\frac{d\overset{(0)}{x}}{dt} = 0, \\ &\overset{(0)}{z}\big|_{t=0} = z^0, \quad \overset{(0)}{x}\big|_{t=0} = x^0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Отсюда видно, что $\overset{(0)}{x} \equiv x^0$, поэтому (2.1) принимает вид

$$\mu \frac{d\overset{(0)}{z}}{dt} = F(\overset{(0)}{z}, x^0, 0), \qquad (2.2)$$

откуда можно заключить, что $\overset{(0)}{z}(t, \mu)$ существует и, в силу условия устойчивости, имеет пределом при $\mu \to 0$ постоянную $\varphi(x^0, 0)$ **.

---

* Точнее, для оценки функций v, для u этого не достаточно и надо привлекать еще лемму 1.

** Этот факт был использован еще в [4]. Уравнение (2.2), если за независимое переменное выбрать τ, совпадает с (8). В работе [2] с помощью уравнения (8) было дано другое, отличное от принятого здесь, определение устойчивого корня, обобщающееся на случай, когда μ является множителем при производной в нескольких уравнениях.

При $p=1$

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{d}{dt}\overset{(1)}{z} &= F_{z0}\overset{(1)}{z}+F_{x0}\overset{(1)}{x}+F_{t0}t,\\ \frac{d}{dt}\overset{(1)}{x} &= f_0,\\ \overset{(1)}{z}\Big|_{t=0} &= 0,\quad \overset{(1)}{x}\Big|_{t=0}=0. \end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

Решение этой системы уравнений существует и, в силу условия устойчивости, при $\mu\to 0$ стремится к решению соответствующей вырожденной системы.

Выясним структуру правых частей системы (1.5) в общем случае. Так как $\overset{(p)}{F}=\frac{\mu^p}{p!}\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F(z,x,\tau\mu)\right]_{\mu=0}$, то задача сводится к выяснению структуры $\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F(z,x,\tau\mu)\right]_{\mu=0}$. Предположим, что

$$\frac{\partial^{p-1}}{\partial\mu^{p-1}}F(z,x,\tau\mu)=\sum\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\beta_1,\ldots,\beta_{p-1},\gamma}\,z_\mu^{\alpha_1}\ldots z_{\mu^{p-1}}^{\alpha_{p-1}}x_\mu^{\beta_1}\ldots x_{\mu^{p-1}}^{\beta_{p-1}}\tau^\gamma.\tag{2.4}$$

Суммирование ведется по всем $\alpha_1,\ldots,\gamma$, причем $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(p-1)\alpha_{p-1}+\beta_1+2\beta_2+\ldots+(p-1)\beta_{p-1}+\gamma=p-1$. Φ — некоторые функции от $z, x, \tau\mu$. Заметим, что член, содержащий $z_{\mu^{p-1}}$, имеет вид $F_z(z,x,\tau\mu)\,z_{\mu^{p-1}}$ ($\alpha_{p-1}=1$, все остальные α,β и γ равны нулю). Дифференцируя (2.4), будем иметь:

$$\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F=\sum\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\Phi_{\alpha_1,\ldots,\gamma}\,z_\mu^{\alpha_1}\ldots\tau^\gamma+\Phi_{\alpha_1,\ldots,\gamma}\,\alpha_1 z_\mu^{\alpha_1-1}z_{\mu^2}^{\alpha_2+1}z_{\mu^3}^{\alpha_3}\ldots\tau^\gamma+\ldots\right).$$

Под знаком суммы во втором слагаемом (аналогично в последующих)

$$(\alpha_1-1)+2(\alpha_2+1)+\ldots+\gamma=p.$$

Первое слагаемое распадается на три согласно тому, что $\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}z_\mu+\frac{\partial\Phi}{\partial x}x_\mu+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\tau$, и, таким образом, показатели будут удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} &(\alpha_1+1)+2\alpha_2+\ldots+\gamma=p,\\ &\alpha_1+\ldots+(\beta_1+1)+\ldots+\gamma=p,\\ &\alpha_1+\ldots\qquad\qquad+(\gamma+1)=p. \end{aligned}$$

Это и доказывает справедливость формулы (2.4) для любого p. Учитывая теперь, что $\overset{(p)}{z}=\frac{\mu^p}{p!}\left(\frac{\partial^p z}{\partial\mu^p}\right)_{\mu=0}$, получим для $\overset{(p)}{F}$:

$$\overset{(p)}{F}=\sum\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_p,\gamma}\,\overset{(1)}{z}{}^{\alpha_1}\ldots\overset{(p)}{z}{}^{\alpha_p}\,\overset{(1)}{x}{}^{\beta_1}\ldots\overset{(p)}{x}{}^{\beta_p}\,\tau^\gamma,\tag{2.5}$$

где $\Phi_{\alpha_1,\ldots,\gamma}$ — некоторые функции от $\overset{(0)}{z},\overset{(0)}{x}, 0$. Суммирование ведется по всем $\alpha_1,\ldots,\gamma$ таким, что $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+p\alpha_p+\beta_1+\ldots+p\beta_p+\gamma=p$. Член, содержащий $\overset{(p)}{z}$, имеет вид $F_{z0}\overset{(p)}{z}$.

Напишем теперь систему уравнений для производных $\overset{(p)}{z}_{\mu^r}$, $\overset{(p)}{x}_{\mu^r}$. Эта система получается дифференцированием соответствующее число раз системы (1.5):

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu^r} + r\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu^{r-1}} &= \overset{(p)}{F}_{\mu^r}, \\ \frac{d}{dt}\overset{(p)}{x}_{\mu^r} &= \overset{(p-1)}{f}_{\mu^r}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выясним структуру правых частей. $\overset{(p)}{F}_{\mu^r}$ имеет вид:

$$\overset{(p)}{F}_{\mu^r} = \sum \Phi \overset{(0)}{z}_{\mu}^{\alpha_{01}} \ldots \overset{(0)}{z}_{\mu^r}^{\alpha_{0r}} \overset{(1)}{z}^{\alpha_{10}} \overset{(1)}{z}_{\mu}^{\alpha_{11}} \cdots \overset{(1)}{z}_{\mu^r}^{\alpha_{1r}} \ldots \overset{(p)}{x}^{\beta_{p0}} \overset{(p)}{x}_{\mu}^{\beta_{p1}} \ldots \overset{(p)}{x}_{\mu^r}^{\beta_{pr}} t^{\gamma}. \tag{2.7}$$

Φ — некоторые ограничение функции, зависящие от $\overset{(0)}{z}, \overset{(0)}{x}, 0$. Суммирование ведется таким образом, что

$$0(\alpha_{01}+\ldots+\alpha_{0r}) + 1\cdot(\alpha_{10}+\ldots+\alpha_{1r}) + \ldots + p(\beta_{p0}+\ldots+\beta_{pr}) + \gamma = p, \tag{2.8'}$$

$$1\cdot\alpha_{01}+\ldots+r\alpha_{0r}+0\cdot\alpha_{10}+\ldots+r\alpha_{1r}+\ldots+0\cdot\beta_{p0}+\ldots+r\beta_{pr} = r. \tag{2.8''}$$

Легко убедиться в справедливости формулы (2.7) для любого p и $r = 1$. Действительно, из (2.5) получаем:

$$\overset{(p)}{F}_{\mu} = \sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\overset{(0)}{z}_{\mu}\overset{(1)}{z}^{\alpha_1}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_p} t^{\gamma} + \Phi\alpha_1\overset{(1)}{z}^{\alpha_1-1}\overset{(1)}{z}_{\mu}\overset{(2)}{z}^{\alpha_2}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_p} t^{\gamma} + \ldots + \Phi\overset{(1)}{z}^{\alpha_1}\cdots\beta_p\overset{(p)}{x}^{\beta_p-1}\overset{(p)}{x}_{\mu} t^{\gamma}\right),$$

$$\alpha_1+\ldots+p\alpha_p+\beta_1+\ldots+p\beta_p+\gamma = p.$$

Переписывая эту сумму в виде

$$\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\overset{(0)}{z}_{\mu}^{1}\overset{(1)}{z}^{\alpha_1}\overset{(1)}{z}_{\mu}^{0}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_1}\overset{(p)}{x}_{\mu}^{0} t^{\gamma} + \Phi\alpha_1\overset{(0)}{z}_{\mu}^{0}\overset{(1)}{z}^{\alpha_1-1}\overset{(1)}{z}_{\mu}^{1}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_p}\overset{(p)}{x}_{\mu}^{0} t^{\gamma} + \ldots\right),$$

убеждаемся, что в первом слагаемом

$$1(\alpha_{10}+\alpha_{11})+\ldots+p(\beta_{p0}+\beta_{p1})+\gamma = 1(\alpha_1+0)+\ldots+p(\beta_p+0)+\gamma = p,$$

$$\alpha_{01}+\alpha_{11}+\ldots+\beta_{p1} = 1+0+\ldots+0 = 1,$$

во втором

$$1(\alpha_{10}+\alpha_{11})+\ldots+p(\beta_{p0}+\beta_{p1})+\gamma = 1[(\alpha_1-1)+1]+2(\alpha_2+0)+\ldots$$

$$\ldots+p(\beta_p+0)+\gamma = p,$$

$$\alpha_{01}+\alpha_{11}+\ldots+\beta_{p1} = 0+1+\ldots+0 = 1$$

и так далее. Поэтому сумму можно записать в виде

$$\sum\Phi\overset{(0)}{z}_{\mu}^{\alpha_{01}}\overset{(1)}{z}^{\alpha_{10}}\overset{(1)}{z}_{\mu}^{\alpha_{11}}\cdots\overset{(p)}{x}^{\beta_{p0}}\overset{(p)}{x}_{\mu}^{\beta_{p1}} t^{\gamma},$$

$$1(\alpha_{10}+\alpha_{11})+\ldots+p(\beta_{p0}+\beta_{p1})+\gamma = p,$$

$$\alpha_{01}+\alpha_{11}+\ldots+\beta_{p1} = 1,$$

что и требуется. В справедливости формулы (2.7) для $r>1$ нетрудно убедиться методом индукции, аналогично тому как это было сделано для (2.4). Соответствующие рассуждения мы опускаем.

Лемма 1. *В промежутке* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *имеют место следующие неравенства*:

$$\begin{aligned} |\overset{(p)}{z}_{\mu l}| &< \Phi_{p-l}, \\ |\overset{(p)}{x}_{\mu l}| &< \Phi_{p-l}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом индукции. Нетрудно непосредственно получить оценки (2.9) для $p=0$ и $l=1$.

Дифференцируя (2.1) по μ, получим: $\mu \frac{d}{dt} \overset{(0)}{z}_{\mu} = F_{z0} \overset{(0)}{z}_{\mu} - \frac{d\overset{(0)}{z}}{dt}$. Очевидно, $\frac{d\overset{(0)}{z}}{dt} = \Phi_{-1}$, поэтому $z_{\mu} = \int\limits_0^t \Phi_{-1} \frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu} d\tau = \Phi_{-1}$. Далее, согласно формуле (2.7)

$$\mu \frac{d}{dt} \overset{(0)}{z}_{\mu l} - \frac{d}{dt} \overset{(0)}{z}_{\mu l-1} = \overset{(0)}{F}_{\mu l} = \sum \Phi \overset{(0)}{z}_{\mu}^{\alpha_{01}} \cdots \overset{(0)}{z}_{\mu r}^{\alpha_{0r}} \qquad (1 \cdot \alpha_{01} + \ldots + r\alpha_{0r} = r), \tag{2.10}$$

причем слагаемое в правой части, содержащее $z_{\mu l}$, имеет вид $F_z(\overset{(0)}{z}, x^0, 0) \overset{(0)}{z}_{\mu l} = F_{z0} \overset{(0)}{z}_{\mu l}$. Отсюда, предполагая, что $\overset{(0)}{z}_{\mu k} < \Phi_{-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, l-1)$, получим:

$$\mu \frac{d}{dt} \overset{(0)}{z}_{\mu l} = F_{z0} \overset{(0)}{z}_{\mu l} + \Phi_{-l}$$

и, следовательно,

$$\overset{(0)}{z}_{\mu l} = \int\limits_0^t \Phi_{-l} \frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu} d\tau = \Phi_{-l}.$$

Оценка $\overset{(0)}{x}_{\mu l} < \Phi_{-l}$ не имеет смысла, так как $\overset{(0)}{x}_{\mu l} \equiv 0$, впрочем, ею нигде не приходится пользоваться.

Предположим теперь, что

$$\begin{aligned} |\overset{(k)}{z}_{\mu l}| &< \Phi_{k-l}, \\ |\overset{(k)}{x}_{\mu l}| &< \Phi_{k-l} \end{aligned} \tag{2.9'}$$

$(k = 0, 1, \ldots, p-1;\ l$ — любое). В этом предположении докажем, что

$$\begin{aligned} |\overset{(p)}{z}| &< \Phi_p, \\ |\overset{(p)}{x}| &< \Phi_p. \end{aligned} \tag{2.9''}$$

Затем, предполагая справедливыми оценки

$$\begin{aligned} |\overset{(p)}{z}_{\mu l}| &< \Phi_{p-l} \\ |\overset{(p)}{x}_{\mu l}| &< \Phi_{p-l} \end{aligned} \qquad (l = 1, 2, \ldots, r), \tag{2.9'''}$$

докажем справедливость таких же оценок для $l = r+1$.

Рассмотрим систему уравнений (1.5). Пользуясь выражением (2.5) для $\overset{(p)}{F}$, аналогичным выражением для $\overset{(p-1)}{f}$ и оценками (2.9′) для $\overset{(k)}{z}_{\mu^l}$ ($k=0,1,\ldots, p-1$; $l = 0,1,\ldots$), получим следующие оценки для правой части (1.5″):

$$|\overset{(p-1)}{f}| < \sum C\,\Phi_{\alpha_1}\cdots\Phi_{(p-1)\,\alpha_{p-1}}\Phi_{\beta_1}\cdots\Phi_{(p-1)\,\beta_{p-1}}t^{\gamma} =$$

$$= \Phi_{\alpha_1+\ldots+(p-1)\,\alpha_{p-1}+\beta_1+\ldots+(p-1)\,\beta_{p-1}+\gamma} = \Phi_{p-1}.$$

Интегрируя по t, получим:

$$|\overset{(p)}{x}| < \Phi_p.$$

Пользуясь этой оценкой и (2.5), получим ту же оценку для правой части (1.5′), из которой выделен член $F_{z0}\overset{(p)}{z}$, т. е.

$$\mu\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z} = F_{z0}\overset{(p)}{z} + \Phi_p,$$

и, следовательно,

$$|\overset{(p)}{z}| < \int\limits_0^t \Phi_p\,\frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu}\,d\tau = \Phi_p.$$

Неравенства (2.9″), таким образом, доказаны.

Предполагая теперь выполненными неравенства (2.9‴), рассмотрим систему

$$\mu\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu^{r+1}} + (r+1)\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu^r} = \overset{(p)}{F}_{\mu^{r+1}}, \tag{2.11′}$$

$$\frac{d}{dt}\overset{(p)}{x}_{\mu^{r+1}} = \overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}. \tag{2.11″}$$

Пользуясь формулой, аналогичной (2.7), для $\overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}$, будем иметь:

$$|\overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}| < \sum C\,\Phi_{-1}^{\alpha_{01}}\cdots\Phi_{-(r+1)}^{\alpha_{0\,r+1}}\;\Phi_1^{\alpha_{10}}\cdots\Phi_{1-(r+1)}^{\alpha_{1r+1}}\cdots\Phi_{p-1-(r+1)}^{\beta_{p-1\,r+1}}t^{\gamma} = \sum\Phi_{\alpha},$$

где

$$\alpha = (-\alpha_{01}-\ldots-(r+1)\,\alpha_{0\,r+1}) + (\alpha_{10}+\ldots+[1-(r+1)]\,\alpha_{1\,r+1}) + \ldots$$

$$\ldots + (p-1)\,\beta_{p-1\,0}+\ldots+[p-1-(r+1)]\,\beta_{p-1\,r+1}+\gamma. \tag{2.12}$$

Соответствующей перегруппировкой слагаемых в (2.12) нетрудно вычислить, используя (2.8), $\alpha = p-r-2$. Таким образом,

$$|\overset{(p-1)}{f}_{\mu^{r+1}}| < \Phi_{p-r-2},$$

и, следовательно,

$$|\overset{(p)}{x}_{\mu^{r+1}}| < \Phi_{p-r-1} = \Phi_{p-(r+1)}. \tag{2.13}$$

Пользуясь этим, произведем теперь оценку правой части (2.11′) без учета слагаемого $F_{z0}\overset{(p)}{z}_{\mu^{r+1}}$ и получим ее, очевидно, тоже в виде $\Phi_{p-(r+1)}$. Кроме того, пользуясь (2.9‴), можно написать неравенства

$$\left|\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu^{l}}\right|<\Phi_{p-l-1}\quad (l=1,\,2,\ldots,\,r),$$

учитывая которые, будем иметь:

$$\mu\frac{d}{dt}\overset{(p)}{z}_{\mu^{r+1}}=F_{z0}\overset{(p)}{z}_{\mu^{r+1}}+\Phi_{p-(r+1)},$$

а следовательно,

$$|\overset{(p)}{z}_{\mu^{r+1}}|<\int\limits_0^t\Phi_{p-(r+1)}\frac{e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}}{\mu}d\tau=\Phi_{p-(r+1)}, \tag{2.14}$$

что и доказывает вместе с (2.13) справедливость (2.9‴) для $l=r+1$.

В заключение заметим, что изменение номеров p, l, участвующих в формулировке леммы 1, лимитировано только степенью гладкости F и f. В предположениях относительно этих функций, указанных во введении, можно считать справедливой лемму для p, $l=0,1,\,2,\ldots,\,n$.

2. В настоящем пункте будут получены оценки для производных по τ от $z_p(\tau)$, $x_p(\tau)$. Эти производные $z_{p\tau^r}=\frac{d^r}{d\tau^r}z_p(\tau)$, $x_{p\tau^r}=\frac{d^r}{d\tau^r}x_p(\tau)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{d}{d\tau}z_{p\tau^r}=F_{p\tau^r},$$
$$\frac{d}{d\tau}x_{p\tau^r}=f_{p-1\,\tau^r}.$$

Начальные значения для $z_{p\tau^r}$, $x_{p\tau^r}$ представляют собой некоторые постоянные. Выясним структуру $F_{p\tau^r}$. Пользуясь формулой (2.5) и учитывая, что $\overset{(p)}{F}=\mu^pF_p$, будем иметь:

$$F_p(\tau)=\sum\Phi_{\alpha_1\ldots\beta_p\gamma}\,z_1^{\alpha_1}\ldots z_p^{\alpha_p}x_1^{\beta_1}\ldots x_p^{\beta_p}\tau^{\gamma} \tag{2.15}$$
$$(\alpha_1+\ldots+p\,\alpha_p+\beta_1+\ldots+p\beta_p+\gamma=p).$$

Напишем выражение для производной от этой функции по τ. Рассмотрим сумму (ср. с (2.7))

$$\sum\Phi_{0\tau}^{\alpha_{01}}\ldots z_{0\tau^r}^{\alpha_{0r}}z_1^{\alpha_{10}}z_{1\tau}^{\alpha_{11}}\ldots z_{1\tau^r}^{\alpha_{1r}}\ldots x_{p\tau^r}^{\beta_{pr}}\tau^{\gamma}, \tag{2.16}$$

где показатели подчиняются требованию (2.8), и обозначим ее через $V_{p,r}$. Дифференцируя $V_{p,r}$ по τ, нетрудно убедиться, что производная представляет собой сумму двух функций подобного же типа, но с другими индексами. Действительно,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_{p,r}&=\sum\tau^{\gamma}\frac{d}{dt}\left(\Phi z_{0\tau}^{\alpha_{01}}\ldots x_{p\tau^r}^{\beta_{pr}}\right)+\sum\Phi\,z_{0\tau}^{\alpha_{01}}\ldots x_{p\tau^r}^{\beta_{pr}}\gamma\tau^{\gamma-1}=\\&=V_{p,r+1}+V_{p-1,r}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Если $p = 0$, то формула видоизменяется, правая часть ее содержит лишь первый член. Действительно, при $p = 0$ $V_{0r} = \sum \Phi z_{0\tau}^{\alpha_{01}} \dots z_{0\tau^r}^{\alpha_{0r}}$ не содержит τ явно, и поэтому при дифференцировании появляется только член $V_{0,r+1}$. Возвращаясь к $F_{p\tau^r}$, предположим, что

$$F_{p\tau^r} = V_{p,r} + V_{p-1,\,r+1} + \dots + V_{p-r,\;0} \tag{2.18}$$

(если $p < r$, то формула обрывается на члене $V_{0,0}$). Доказательство формулы (2.18) для $F_{p\tau^{r+1}}$ после установления правил дифференцирования $V_{p,r}$ не требует пояснений.

Условимся обозначать через $M(\tau)$ любой многочлен относительно τ.

Лемма 2. *На полупрямой $0 \leqslant \tau < \infty$ имеют место следующие неравенства:*

$$\left.\begin{array}{l}
|z_0| < M(\tau), \quad |z_{0\tau^r}| < M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau} \quad (r = 1, 2, \dots), \\
|z_1| < M(\tau), \quad |z_{1\tau}| < M(\tau), \quad |z_{1\tau^r}| < M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau} \quad (r = 2, 3, \dots), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
|z_{p\tau^r}| < M(\tau) \quad (r = 0, 1, \dots, p), \\
|z_{p\tau^r}| < M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau} \quad (r = p+1, p+2, \dots).
\end{array}\right\} \tag{2.19}$$

Аналогичные неравенства имеют место для $x_{p\tau^r}$.

Доказательство. Для первых номеров эти оценки легко получить непосредственно. Обратимся к системе (1.3). Очевидно, $|x_0| = |x^0| < M(\tau)$ и $|z_0(\tau)| < C < M(\tau)$. Производная $z_{0\tau}$ удовлетворяет уравнению $\frac{d}{d\tau} z_{0\tau} = F_{z0}\, z_{0\tau}$, причем $z_{0\tau}|_{\tau=0} = F(z^0, x^0, 0) = C$. Отсюда нетрудно получить неравенство $|z_{0\tau}| < C\, e^{-\varkappa\tau}$, т. е.

$$|z_{0\tau}| < M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau}.$$

Для $z_{0\tau^r}$ справедливо уравнение (ср. с (2.10))

$$\frac{d}{d\tau} z_{0\tau^r} = F_{z0}\, z_{0\tau^r} + \sum \Phi z_{0\tau}^{\alpha_1} \dots z_{0\tau^{r-1}}^{\alpha_{r-1}} \quad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (r-1)\,\alpha_{r-1} = r),$$

откуда, предполагая, что $|z_{0\tau}| < M\, e^{-\varkappa\tau}, \dots, |z_{0\tau^{r-1}}| < M\, e^{-\varkappa\tau}$, будем иметь:

$$|z_{0\tau^r}| < C\, e^{-\varkappa\tau} + \int_0^\tau M(\tau_1)\, e^{-r\varkappa\tau_1}\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 = M(\tau)\, e^{-\varkappa\tau}.$$

Предположим теперь, что неравенства (2.19) имеют место для некоторого номера p. Найдем оценки для z_{p+1}, x_{p+1}. Так как $\frac{d}{d\tau} x_{p+1} = f_p$, то пользуясь формулой для f_p, аналогичной (2.15), получим: $|f_p| < M(\tau)$, а следовательно,

$$|x_{p+1}| < M(\tau). \tag{2.20}$$

Пользуясь теперь уравнением $\frac{d}{d\tau} z_{p+1} = F_{p+1}$ и формулой (2.15), получим, что правая часть этого уравнения (не считая члена $F_{z0}\, z_{p+1}$) также оценивается $M(\tau)$ и, следовательно,

$$|z_{p+1}| < C\, e^{-\varkappa\tau} + \int_0^\tau M(\tau_1)\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 = M(\tau). \tag{2.21}$$

Предположим теперь, что оценки (2.19) имеют место для $p+1$ и производных порядка $0, 1, \ldots, r < p+1$. Имеем:

$$x_{p+1\,\tau^{r+1}} = \frac{d}{d\tau} x_{p+1\,\tau^r} = f_{p\tau^r} = V_{p,r} + \ldots + V_{p-r,\,0}. \tag{2.22}$$

Используя формулу (2.16) и учитывая (2.19), нетрудно видеть, что каждое слагаемое в выражении для $V_{p,r}$ имеет оценку либо $M(\tau)$, либо $M(\tau)e^{-\varkappa\tau}$. Важно подчеркнуть, что если только $p \geqslant r$ (то же, что $r < p+1$), то, вообще говоря, присутствует слагаемое с оценкой $M(\tau)$, например, слагаемые $f_{z0}\, z_{p\tau^r}$, $f_{x0}\, x_{p\tau^r}$, и, следовательно, $|f_{p\tau^r}| < M(\tau)$, а вместе с тем и

$$|x_{p+1\,\tau^{r+1}}| < M(\tau).$$

Далее,

$$\frac{d}{d\tau} z_{p+1\,\tau^{r+1}} = F_{p+1\,\tau^{r+1}} = V_{p+1,\,\tau^{r+1}} + \ldots + V_{p-r,\,0} + F_{z0}\, z_{p+1\,\tau^{r+1}} \tag{2.23}$$

(выделяем справа член, содержащий неизвестное $z_{p+1\,\tau^{r+1}}$, как уже не раз делали выше). В правой части уравнения (2.23) также, вообще говоря, присутствует член, имеющий оценку $M(\tau)$ (например, $F_{x0}\, x_{p+1\,\tau^{r+1}}$). Следовательно,

$$|z_{p+1\,\tau^{r+1}}| < Ce^{-\varkappa\tau} + \int_0^\tau M(\tau_1)\, e^{-\varkappa(\tau-\tau_1)}\, d\tau_1 = M(\tau).$$

Если же предположить, что оценки (2.19) имеют место для $p+1$ и производных порядка $0, 1, \ldots, r = p+1$, то дальнейшие рассуждения существенно меняются. Действительно, тогда

$$x_{p+1\,\tau^{r+1}} = x_{p+1\,\tau^{p+2}} = f_{p\tau^{p+1}} = V_{p,\,p+1} + \ldots + V_{0,1}. \tag{2.24}$$

Убедимся, что $V_{p,r}$, где $r > p$, содержит только такие члены, которые имеют оценку $M(\tau)e^{-\varkappa\tau}$. В самом деле, обращаясь к (2.16), замечаем, что в каждой группе сомножителей с одинаковым первым нижним индексом обязательно присутствует производная, порядок которой выше значения этого индекса, т. е. сомножитель, имеющий по (2.19) оценку $M(\tau)e^{-\varkappa\tau}$. В противном случае имело бы место противоречие требованию (2.8). Действительно, противное означает наличие в сумме (2.16) слагаемого вида

$$\Phi\, z_1^{\alpha_{10}}\, z_{1\tau}^{\alpha_{11}}\, z_2^{\alpha_{20}}\, z_{2\tau}^{\alpha_{21}}\, z_{2\tau^2}^{\alpha_{22}} \ldots x_p^{\beta_{p0}} \ldots x_{p\tau^p}^{\beta_{pp}}\, \tau^{\gamma}.$$

Левая часть равенства — условия на показатели (2.8′) — имеет в этом случае вид:

$$0\cdot\alpha_{10} + 1\cdot\alpha_{11} + 0\cdot\alpha_{20} + 1\cdot\alpha_{21} + 2\alpha_{22} + \ldots + 0\,\beta_{p0} + \ldots + p\,\beta_{pp} = r, \tag{2.25}$$

а левая часть (2.8″) — вид

$$1(\alpha_{10}+\alpha_{11})+2(\alpha_{20}+\alpha_{21}+\alpha_{22})+\ldots+p(\beta_{p0}+\ldots+\beta_{pp})+\gamma=p. \qquad (2.26)$$

Сравнивая (2.25) с (2.26), замечаем, что левая часть (2.26) содержит те же слагаемые, что и левая часть (2.25), плюс еще некоторые, которые не могут быть отрицательными. Отсюда $p\geqslant r$, а предполагалось, что $p<r$.

Таким образом, из (2.24) получаем:

$$|x_{p+1\,\tau^{p+2}}|<M(\tau)\,e^{-x\tau},$$

а так как

$$\frac{d}{d\tau}z_{p+1\,\tau^{p+2}}=F_{p+1\,\tau^{p+2}}=F_{z0}\,z_{p+1\,\tau^{p+2}}+V_{p+1,\,p+2}+\ldots+V_{0,1},$$

то

$$|z_{p+1\,\tau^{p+2}}|<Ce^{-x\tau}+\int\limits_1^{\tau}M(\tau_1)\,e^{-x\tau_1}\,e^{-x(\tau-\tau_1)}d\tau_1=M(\tau)\,e^{-x\tau}.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что переход от r к $r+1$ при $r>p+1$ дает для $z_{p+1\,\tau^{r+1}}$, $x_{p+1\,\tau^{r+1}}$ также оценки типа $M(\tau)\,e^{-x\tau}$. Таким образом, лемма 2 может считаться доказанной. Как и в предыдущей лемме, пределы изменения p и r зависят от степени гладкости функций F и f. Наложенными выше условиями на F, f гарантирована справедливость леммы для $p, r=0,1,\ldots,n$.

Заметим, что одновременно с (2.19) проведенные рассуждения дают возможность установить аналогичные оценки для произвольной достаточно гладкой функции $F(z, x, t)$:

$$\begin{aligned}&|F_{p\tau^r}|<M(\tau) \qquad (r=0,1,\ldots,p),\\ &|F_{p\tau^r}|<M(\tau)\,e^{-x\tau} \qquad (r=p+1,\ldots).\end{aligned} \qquad (2.27)$$

3. В настоящем пункте будут получены оценки для разностей $z-(z)_n$, $x-(x)_n$ и их производных по μ. Введем обозначения:

$$z_{\mu^k}-(z)_{n\mu^k}=\Delta_{nk}, \quad x_{\mu^k}-(x)_{n\mu^k}=\delta_{nk}.$$

Лемма 3. *Имеют место следующие неравенства*:

$$\begin{aligned}&|\Delta_{nk}|<\Phi_{n-k+1},\\ &|\delta_{nk}|<\Phi_{n-k+1} \qquad (k\leqslant n), \quad 0\leqslant t\leqslant 1.\end{aligned} \qquad (2.28)$$

Доказательство. Докажем сначала (2.28) для $k=0$, т. е. оценим разности $z-(z)_n$, $x-(x)_n$, а также $F-(F)_n$, где F — некоторая функция аргументов z, x, t.

Для $n=k=0$ оценки получаются непосредственно. Действительно, $x-(x)_0=x-x^0$, а $|x-x^0|<ct$, т. е. $x-x^0=\Phi_1$. В то же время

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z, x, t),$$

$$\mu\frac{d(z)_0}{dt}=F((z)_0, x^0, 0),$$

откуда

$$\mu \frac{d}{dt}[z-(z)_0]=\frac{\partial F^*}{\partial z}[z-(z)_0]+\frac{\partial F^*}{\partial x}(x-x^0)+\frac{\partial F^*}{\partial t}t$$

и, следовательно,

$$z-(z)_0=\int\limits_0^t \frac{\Phi_1}{\mu} e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}\, d\tau=\Phi_1\ ^*.$$

Предположим, что неравенства (2.28) имеют место для $k=0$ и некоторого n, а также для всех номеров, предшествующих n. Докажем справедливость этих неравенств для $n+1$. Имеем:

$$\mu \frac{d}{dt}[z-(z)_{n+1}]=F-(F)_{n+1},$$

$$\frac{d}{dt}[x-(x)_{n+1}]=f-(f)_n.$$

Представим разность $F-(F)_{n+1}$ (и аналогично $f-(f)_n$) следующим образом

$$[F(z,x,t)-F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t)]+[F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t)-(F)_{n+1}]=\Delta_1+\Delta_2.$$

Рассмотрим

$$\Delta_2=F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t)-(F)_{n+1}=[F]_{n+1}-(F)_{n+1}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F_{n+1}=p!\,F_p=\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}F(z_0+\mu z_1+\ldots,x_0+\mu x_1+\ldots,t)\right]_{\mu=0},$$

причем дифференцирование производится формально, так как аргументами F являются ряды (12). Что касается $[F]_{n+1}=F((z)_{n+1},(x)_{n+1},t)$, то, так как ее аргументами являются уже не ряды, а многочлены, имеет место фактическое тождество $p!\,F_p=\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}[F]_{n+1}\right]_{\mu=0}$. Таким образом, имеем:

$$\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}(F)_{n+1}\right]_{\mu=0}=\left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p}[F]_{n+1}\right]_{\mu=0}\qquad (p=0,1,\ldots,n+1),$$

откуда следует:

$$\Delta_2=[F]_{n+1}-(F)_{n+1}=\frac{\partial^{n+2}}{\partial\mu^{n+2}}\left\{[F]_{n+1}-(F)_{n+1}\right\}_{\mu=\mu^*}\frac{\mu^{n+2}}{(n+2)!}=\left\{\frac{\partial^{n+2}}{\partial\mu^{n+2}}[F]_{n+1}\right\}_{\mu=\mu^*}\frac{\mu^{n+2}}{(n+2)!},$$

а отсюда

$$|\Delta_2|<\Phi_{n+2}.$$

Представляя теперь Δ_1 в виде $\Delta_1=\frac{\partial F^*}{\partial z}[z-(z)_{n+1}]+\frac{\partial F}{\partial x}[x-(x)_{n+1}]$, получим:

$$\mu\frac{d}{dt}[z-(z)_{n+1}]=\frac{\partial F^*}{\partial z}[z-(z)_{n+1}]+\frac{\partial F^*}{\partial x}[x-(x)_{n+1}]+\Delta_2, \tag{2.29}$$

---

* Эта оценка была необходима для исследования первых производных z_μ, x_μ и была получена еще в [4].

где $|\Delta_2| < \Phi_{n+2}$, и аналогично

$$\frac{d}{dt}[x-(x)_{n+1}] = \frac{\partial f^*}{\partial z}[z-(z)_n] + \frac{\partial f^*}{\partial x}[x-(x)_n] + \delta_2, \tag{2.30}$$

где $|\delta_2| < \Phi_{n+1}$. Пользуясь (2.28) для $k=0$ и n, получим из (2.30):

$$\frac{d}{dt}[x-(x)_{n+1}] = \Phi_{n+1},$$

откуда

$$x-(x)_{n+1} = \Phi_{n+2},$$

а тогда из (2.29) будем иметь:

$$z-(z)_{n+1} = \int_0^t \frac{\Phi_{n+2}}{\mu} e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}} d\tau = \Phi_{n+2},$$

что и доказывает лемму 3 для $k=0$.

Заметим, что попутно получено неравенство

$$|F-(F)_n| < \Phi_{n+1}, \tag{2.31}$$

где F — произвольная достаточно гладкая функция аргументов $z(t,\mu), x(t,\mu), t$.

Сравним теперь производные $z_{\mu k}$, $x_{\mu k}$ с производными того же порядка от $(z)_n$, $(x)_n$. $z_{\mu k}$, $x_{\mu k}$ удовлетворяют системе (9), которую можно записать следующим образом:

$$\mu\frac{d}{dt}z_{\mu k} - k\frac{d}{dt}z_{\mu k-1} = F_{\mu k} = \sum \Phi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k} z_\mu^{\alpha_1}\cdots z_{\mu k}^{\alpha_k} x_\mu^{\beta_1}\cdots x_{\mu k}^{\beta_k}, \tag{2.32'}$$

$$\frac{d}{dt}x_{\mu k} = f_{\mu k} = \sum \Psi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k} z_\mu^{\alpha_1}\cdots z_{\mu k}^{\alpha_k} x_\mu^{\beta_1}\cdots x_{\mu k}^{\beta_k}, \tag{2.32''}$$

где (ср. с (2.5)) $\Phi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta_1,\ldots,\beta_k}$ — некоторая функция от $z(t,\mu)$, $x(t,\mu)$, t. Суммирование ведется по всем $\alpha_1,\ldots,\beta_k$, таким, что $\alpha_1+\ldots+k\alpha_k+\beta_1+\ldots+k\beta_k=k$. Член, содержащий $z_{\mu k}$ в (2.32′), имеет вид $F_z z_{\mu k}$ ($\alpha_k=1$, $\alpha_1=\ldots$ $\ldots=\alpha_{k-1}=\beta_1=\ldots=\beta_k=0$). Структура $\Psi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k}$ аналогична.

Уравнения для $(z)_{n\mu k}$, $(x)_{n\mu k}$ получим, дифференцируя k раз систему (1.6). При этом заметим следующее. Если между двумя формальными рядами по μ с коэффициентами, зависящими от τ, f_1 и f_2, имеет место формальное тождество (в смысле равенства коэффициентов при одинаковых степенях) $f_1=f_2$, то имеют место также формальные тождества $\frac{df_1}{d\tau}=\frac{df_2}{d\tau}$, $\frac{\partial f_1}{\partial\mu}=\frac{\partial f_2}{\partial\mu}$. Если же рассматривать τ как функцию μ, $\tau=\frac{t}{\mu}$ (t от μ не зависит), то имеет место также и тождество $\frac{df_1}{d\mu}=\frac{df_2}{d\mu}$. Далее, если степенные ряды f_1, f_2 и т. д. формально удовлетворяют уравнению $F_1(f_1,f_2,\ldots)=F_2(f_1,f_2,\ldots)$, то $f_1, f_2,\ldots$ удовлетворяют также уравнению, получающемуся из него дифференцированием по μ (как частным образом, так и через $\tau=\frac{t}{\mu}$).

Напишем, например, уравнения для $(z)_{n\mu}$, $(x)_{n\mu}$. Так как

$$\mu\frac{d}{dt}z_\mu + \frac{d}{dt}z = F_\mu, \quad \frac{d}{dt}x_\mu = f_\mu$$

и так как $(z)_{n\mu}=I_{-1}=S_{n-1}$, $\frac{d}{d\tau}(z)_{n\mu}=\mu\frac{d}{dt}(z)_{n\mu}=I_{-1}=S_{n-1}$, $\frac{d}{dt}(z)_n=$ $=\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\tau}(z)_n=I_{-1}=S_{n-1}$, а $\frac{d}{dt}(x)_{n\mu}=S_{n-2}$, то

$$\mu\frac{d}{dt}(z)_{n\mu}+\frac{d}{dt}(z)_n=(F_\mu)_{n-1},$$

$$\frac{d}{dt}(x)_n=(f_\mu)_{n-2}.$$

Аналогично будем иметь для $(z)_{n\mu^k}$, $(x)_{n\mu^k}$:

$$\begin{aligned}&\mu\frac{d}{dt}(z)_{n\mu^k}+k\frac{d}{dt}(z)_{n\mu^{k-1}}=(F_{\mu^k})_{n-k},\\&\frac{d}{dt}(x)_{n\mu^k}=(f_{\mu^k})_{n-(k+1)}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Сравним $(F_{\mu^k})_p$ $(p\leqslant n)$ с выражением

$$[F_{\mu^k}]_n=(\Phi_{\alpha_1,\ldots,\beta_k})_n\,(z)_{n\mu}^{\alpha_1}\cdots(z)_{n\mu^k}^{\alpha_k}\,(x)_{n\mu}^{\beta_1}\cdots(x)_{n\mu^k}^{\beta_k},$$

которое, очевидно, содержит все те же слагаемые, что $(F_{\mu^k})_p$, и еще некото рые дополнительные слагаемые, порядок которых формально выше p. Таким образом, разность

$$D_p=(F_{\mu^k})_p-[F_{\mu^k}]_n\tag{2.34}$$

имеет порядок формально выше p. Нетрудно получить и фактическую оценку D_p. Действительно, D_p содержит члены вида

$$\overset{(q)}{\Phi}\,\overset{(q_1)}{z_\mu}{}^{\gamma_1}\cdots\overset{(q_k)}{z_{\mu^k}}{}^{\gamma_k}\,\overset{(r_1)}{x_\mu}{}^{\delta_1}\cdots\overset{(r_k)}{x_{\mu^k}}{}^{\delta_k},$$

где

$$q+\gamma_1(q_1-1)+\ldots+\gamma_k(q_k-k)+\delta_1(r_1-1)+\ldots+\delta_k(r_k-k)>p.\tag{2.35}$$

Пользуясь теперь леммой 1 (формулой (2.9)) и неравенством $|\overset{(q)}{\Phi}|<\Phi_q$, получим, что каждый член D_p оценивается величиной

$$\Phi_q\cdot\Phi_{\gamma_1(q_1-1)}\cdots\Phi_{\delta_k(r_k-k)}=\Phi_{q+\gamma_1(q_1-1)+\ldots+\delta_k(r_k-k)}=\Phi_s,$$

где $s>p$ по (2.35), и, следовательно,

$$D_p=\Phi_s\quad(s>p)\ \text{или}\ D_p=\Phi_{p+1}.\tag{2.36}$$

Вводя аналогично величину

$$d_p=(f_{\mu^k})_p-[f_{\mu^k}]_n,\tag{2.37}$$

получим:

$$d_p=\Phi_s\quad(s>p)\ \text{или}\ d_p=\Phi_{p+1}.\tag{2.38}$$

Систему уравнений для Δ_{nk}, δ_{nk} можно записать следующим образом:

$$\mu\frac{d}{dt}\Delta_{nk}+k\frac{d}{dt}\Delta_{n\,k-1}=F_{\mu k}-[F_{\mu k}]_n-D_{n-k},$$
$$\frac{d}{dt}\delta_{nk}=f_{\mu k}-[f_{\mu k}]_n-d_{n-(k+1)}. \qquad (2.39)$$

Для $k=0$ лемма 3 была доказана выше. Предположим, что она доказана для $\Delta_{n0},\ldots,\Delta_{n\,k-1}$, $\delta_{n0},\ldots,\delta_{n\,k-1}$ и что паралелльно с этим получены оценки $\frac{d}{dt}\Delta_{n0}=\Phi_n$, $\frac{d}{dt}\delta_{n0}=\Phi_n,\ldots;\ \frac{d}{dt}\Delta_{n\,k-1}=\Phi_{n-(k-1)}$, $\frac{d}{dt}\delta_{nk}=\Phi_{n-(k-1)}$ (для $k=0$ это легко видеть из (2.29), (2.30)). Получим оценки для Δ_{nk}, δ_{nk}.

Обращаясь к системе (2.39), исследуем разность

$$F_{\mu k}-[F_{\mu k}]_n=\sum\left[\Phi z_{\mu}^{\alpha_1}\ldots x_{\mu k}^{\beta_k}-(\Phi)_n(z)_{n\mu}^{\alpha_1}\ldots(x)_{n\mu k}^{\beta_k}\right]=$$
$$=\sum\{[\Phi-(\Phi)_n](z)_{n\mu}^{\alpha_1}\ldots(x)_{n\mu k}^{\beta_k}+\Phi\Delta z_{\mu}^{\alpha_1}(z)_{n\mu^2}^{\alpha_2}\ldots(x)_{n\mu k}^{\beta_k}+\ldots+\Phi z_{\mu}^{\alpha_1}\ldots x_{\mu k-1}^{\beta_{k-1}}\Delta x_{\mu k}^{\beta_k}\}. \qquad (2.40)$$

Выделим из этой суммы слагаемые, содержащие $\Delta z_{\mu k}^{\alpha_k}$, $\Delta x_{\mu k}^{\beta_k}$ и имеющие вид ($\alpha_k=\beta_k=1$)

$$F_z\,\Delta_{nk}+F_x\,\delta_{nk}. \qquad (2.41)$$

Остальные слагаемые нетрудно оценить. Именно, $|\Delta z_{\mu l}^{\alpha_l}|=|z_{\mu l}^{\alpha_l}-(z)_{n\mu l}^{\alpha_l}|<C|(z)_{n\mu l}^{\alpha_l-1}||\Delta_{nl}|$, но согласно лемме 1 $(z)_{n\mu l}=\Phi_{-l}$, $(x)_{n\mu l}=\Phi_{-l}$, а Δ_{nl}, $\delta_{nl}=\Phi_{n-l+1}$ по предположению, поэтому получаем оценку для любого слагаемого (2.40), исключая (2.41), в виде $\Phi_{n-(k-1)}$. Аналогично оценивается разность $f_{\mu k}-[f_{\mu k}]_n$. Кроме того, по предположению $\frac{d}{dt}\Delta_{n\,k-1}=\Phi_{n-(k-1)}$. Учитывая, наконец, (2.36), (2.38), можем написать:

$$\mu\frac{d}{dt}\Delta_{nk}=F_z\,\Delta_{nk}+F_x\,\delta_{nk}+\Phi_{n-(k-1)}, \qquad (2.41')$$

$$\frac{d}{dt}\delta_{nk}=f_z\,\Delta_{nk}+f_x\,\delta_{nk}+\Phi_{n-k}. \qquad (2.41'')$$

Воспользовавшись леммой 2 из [4], будем иметь: $\delta_{nk}=\Phi_{n-(k-1)}$, а следовательно, из (2.41′) получим:

$$\Delta_{nk}=\int_0^t\frac{\Phi_{n-(k-1)}}{\mu}e^{-\frac{\varkappa(t-\tau)}{\mu}}d\tau=\Phi_{n-(k-1)},$$

что и доказывает лемму*.

При $k=n$ имеем, в частности:

$$|\Delta_{nn}|<\Phi_1,$$
$$|\delta_{nn}|<\Phi_1. \qquad (2.42)$$

* Соответствующие оценки для производных $\frac{d}{dt}\delta_{nk}$, $\frac{d}{dt}\Delta_{nk}$, необходимые для логической завершенности доказательства, получаются из (2.41) очевидным образом.

Неравенства (2.42) означают, что в промежутке изменения t $(0, -A\mu\ln\mu)$ производные z_{μ^n}, x_{μ^n} отличаются бесконечно мало от величин $(z)_{n\mu^n}$, $(x)_{n\mu^k}$, так как в этом промежутке

$$\Phi_1 = \sum C \frac{t^{k+1}}{\mu^k} < \sum C \frac{A^{k+1}|\ln\mu|^{k+1}\mu^{k+1}}{\mu^k} \to 0. \tag{2.43}$$

4. Исследуем функции $(z)_n$, $(x)_n$ и их производные по μ n-го порядка. Имеем (см. (1.6)):

$$\frac{d}{dt}(x)_n = (f)_{n-1}, \tag{2.44}$$

где

$$(f)_{n-1} = f_0(\tau) + \mu f_1(\tau) + \ldots + \mu^{n-1} f_{n-1}(\tau).$$

Продифференцируем тождество (2.44) n раз по μ. В правой части будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}(f)_{n-1} = -\frac{\tau}{\mu}f_0' + \left[f_1 + \mu f_1'\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\right] + \ldots + \mu^{n-2}[(n-1)f_{n-1} - \tau f_{n-1}'] =$$

$$= \frac{1}{\mu} f_{01}(\tau) + f_{11}(\tau) + \ldots + \mu^{n-2} f_{n-1\,1}(\tau), \, *$$

. . . .

$$\frac{\partial^n}{\partial\mu^n}(f)_{n-1} = \frac{1}{\mu^n} f_{0n}(\tau) + \ldots + \frac{1}{\mu} f_{n-1\,n}(\tau).$$

Нетрудно доказать методом индукции, что

$$f_{in} = \frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}} (\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)} \qquad (i < n). \tag{2.45}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(x)_{n\mu^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}} (\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}$$

и, следовательно,

$$(x)_{n\mu^n} = \int_0^t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}} (\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\mu^{n-i-1}} \int_0^\tau (\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-1)}\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^n}{\mu^{n-i-1}} (\tau^n f_i^{(i+1)})^{(n-i-2)} \Big|_0^\tau + (-1)^n \int_0^\tau \tau^n f_{n-1}^{(n)}\, d\tau. \tag{2.46}$$

На основании (2.27) может быть установлена сходимость входящего сюда интеграла при $\tau \to \infty$. Из тех же оценок (2.27) следует, что при $\tau = -A\ln\mu$ $(\mu \to 0)$, где A — достаточно большая постоянная, внеинтегральный член формулы (2.46) бесконечно мал.

Для $(z)_{n\mu^n}$ имеем:

$$(z)_{n\mu^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^n}{\mu^{n-i}} (\tau^n z_i^{(i+1)})^{(n-i-1)} + \overset{(n)}{(z)}_{\mu^n}.$$

* $'$ означает производную по τ.

Сумма, входящая сюда, бесконечна мала в точке $t = A\mu \ln \mu$ (по тем же, причинам, что и сумма в (2.46)), а $\overset{(n)}{(z)}_{\mu^n} = \Phi_0$ согласно (2.9). Следовательно, при $t = -A\mu \ln \mu$

$$\overset{(n)}{(z)}_{\mu^n} < C\,|\ln \mu|^\alpha,$$

α — некоторое положительное число.

Таким образом, принимая во внимание (2.42) и (2.43), убеждаемся в том, что доказана

Лемма 4. *При $\mu \to 0$ в точке $t = t^* = -A^*\mu \ln \mu$, где A^* — достаточно большая постоянная,*

$$\begin{gathered} |z_{\mu^n}| < C\,|\ln \mu|^\alpha, \quad \alpha > 0, \\ |x_{\mu^n}| \cong (-1)^n \int_0^\infty \tau^n f_{n-1}^{(n)}(\tau)\,d\tau. \end{gathered} \tag{2.47}$$

§ 3

Докажем основную теорему, сформулированную во введении.

z_{μ^n}, x_{μ^n} удовлетворяют системе уравнений (9), которую запишем в виде

$$\mu \frac{d}{dt} z_{\mu^n} + n \frac{d}{dt} z_{\mu^{n-1}} = F_z z_{\mu^n} + F_x x_{\mu^n} + G_n, \tag{3.1'}$$

$$\frac{d}{dt} x_{\mu^n} = f_z z_{\mu^n} + f_x x_{\mu^n} + g_n, \tag{3.1''}$$

$$z_{\mu^n}|_{t=0} = 0, \quad x_{\mu^n}|_{t=0} = 0. \tag{3.1'''}$$

G_n, g_n представляют собой некоторые функции от $z(t, \mu)$, $x(t, \mu)$, t, z_μ x_μ, ..., $z_{\mu^{n-1}}$, $x_{\mu^{n-1}}$. Полагая в G_n, g_n и в F_z, f_z, F_x, f_x аргументы равными их вырожденным значениям (эти значения можно определить, выписывая последовательно системы уравнений для z_μ, x_μ, z_{μ^2}, x_{μ^2} и т. д.), получим вырожденную систему

$$0 = \bar{F}_z \bar{z}_{\mu^n} + \bar{F}_x \bar{x}_{\mu^n} + \bar{G}_n - n \frac{d}{dt} \bar{z}_{\mu^{n-1}}, \tag{3.2'}$$

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_{\mu^n} = \bar{f}_z \bar{z}_{\mu^n} + \bar{f}_x \bar{x}_{\mu^n} + \bar{g}_n, \tag{3.2''}$$

$$\bar{x}_{\mu^n}|_{t=0} = \bar{x}^0_{\mu^n} = (-1)^n \int_0^\infty \tau^n f_{n-1}^{(n)}(\tau)\,d\tau. \tag{3.2'''}$$

Очевидно, вырожденное значение $\bar{z}_{\mu^n}$ существует и имеет непрерывные производные по t в силу условий гладкости, наложенных на f и F.

Доказательство теоремы проведем методом индукции.

Предположим, что

$$
\begin{aligned}
&z_{\mu^k} \cong \bar{z}_{\mu^k} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \\
&x_{\mu^k} \cong \bar{x}_{\mu^k} \quad (t \geqslant t_{k0} = -A_{k0}\mu \ln \mu)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

и что аналогичные соотношения имеют место для производных по t порядка p от этих же функций:

$$
\begin{aligned}
&z_{\mu^k{}_t{}^p} \cong \bar{z}_{\mu^k{}_t{}^p}, \\
&x_{\mu^k{}_t{}^p} \cong \bar{x}_{\mu^k{}_t{}^p} \quad (t \geqslant t_{kp} = -A_{kp}\mu \ln \mu).
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

A_{kp}, вообще говоря, зависит от p, но для любого фиксированного p может быть выбрано одинаковым для производных всех порядков $1,\ 2,\ \ldots,\ p$.

Вводя обозначения $\Delta_n = z_{\mu^n} - \bar{z}_{\mu^n}$ и $\delta_n = x_{\mu^n} - \bar{x}_{\mu^n}$ и вычитая (3.2) из (3.1), получаем для этих функций следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{d}{dt}\Delta_n = F_z\Delta_n + F_x\delta_n + (F_z - \bar{F}_z)\bar{z}_{\mu^n} + (F_x - \bar{F}_x)\bar{x}_{\mu^n} + (G_n - \bar{G}_n) - \\
-n\left(z_{\mu^{n-1}{}_t} - \bar{z}_{\mu^{n-1}{}_t}\right) + \mu\frac{d}{dt}\bar{z}_{\mu^n}, \\
\frac{d}{dt}\delta_n = f_z\Delta_n + f_x\delta_n + (f_z - \bar{f}_z)\bar{z}_{\mu^n} + (f_x - \bar{f}_x)\bar{x}_{\mu^n} + (g_n - \bar{g}_n).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Начальные условия для этой системы зададим в точке $t = \bar{t} = -\bar{A}\mu\ln\mu$, где $\bar{A} = \max(A^*,\ A_{00},\ \ldots,\ A_{n-1\,0},\ A_{n-1\,1})$. Согласно (2.47) и (3.2'''), они будут иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_n|_{t=\bar{t}} < C\,|\ln\mu|^{\alpha}, \\
&\delta_n|_{t=\bar{t}} \cong 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Свободные члены этой линейной системы, согласно предположениям (3.3), (3.4), бесконечно малы. Пользуясь леммами 1 и 2 из [4] (см. § 1), получим, что при $t \geqslant \bar{t} - A'\mu\ln\mu$, т. е. при $t \geqslant t_{n0} = -A_{n0}\mu\ln\mu$ $(A_{n0} = \bar{A} + A')$,

$$
\begin{aligned}
&\Delta_n = \varepsilon, \\
&\delta_n = \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Чтобы доказательство можно было считать завершенным, надо доказать, что аналогичные (3.7) равенства имеют место для $z_{\mu^n{}_t{}^p}$, $x_{\mu^n{}_t{}^p}$. Прежде всего из (3.1'') видно, если принять во внимание (3.7), что при $t \geqslant t_{n0}$ $x_{\mu^n{}_t}$ близко к своему предельному значению $\bar{x}_{\mu^n{}_t}$. Дифференцируя теперь (3.1') по t, получим:

$$
\mu\frac{d}{dt}z_{\mu^n{}_t} = F_z z_{\mu^n{}_t} + H_n, \tag{3.8}
$$

где H_n — функция, зависящая от $z, x, \ldots, z_{\mu^{n-1}}, x_{\mu^{n-1}}, x_{\mu^n}$ и их производных по t (от x_{μ^n} входит первая производная). Начальные условия для (3.8) имеют вид:

$$|z_{\mu^n t}|_{t=t_{n0}} < \frac{C}{\mu}.$$

В силу предположений (3.3) и (3.4) и того, что $x_{\mu^n t}$ близко к своему предельному значению для $t \geqslant t_{n0}$, свободный член линейного уравнения (3.8) как угодно близок к своему предельному значению для $t \geqslant t_{n0}$. Поэтому, сравнивая (3.8) с соответствующим вырожденным уравнением, аналогично тому как это было сделано с системой (3.1), докажем, что

$$z_{\mu^n t} - \bar{z}_{\mu^n t} = \varepsilon$$

для $t \geqslant t_{n1} = t_{n0} - A''\mu \ln \mu = -A_{n1}\mu \ln \mu$. Переходя от $p-1$ к p, можно доказать, что

$$z_{\mu^n t^p} - \bar{z}_{\mu^n t^p} = \varepsilon, \quad t \geqslant t_{np} = -A_{np}\mu \ln \mu,$$

$$x_{\mu^n t^p} - \bar{x}_{\mu^n t^p} = \varepsilon, \quad t \geqslant t_{n\,p-1} = -A_{n\,p-1}\mu \ln \mu.$$

Так как для $n=0$, $p=1, 2, \ldots$ и для $n=1$, $p=0$ (3.3), (3.4) были получены в [4], то можно считать, что основная теорема доказана.

Отметим в заключение, что фактическим повторением всех приведенных здесь рассуждений может быть доказана аналогичная теорема для систем, в которых μ является множителем при производной в нескольких уравнениях:

$$\mu \frac{d}{dt} z_j = F_j(z_l, x_k, t) \quad (j, l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{d}{dt} x_i = f_i(z_l, x_k, t) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$z_j|_{t=0} = z_j^0, \quad x_i|_{t=0} = x_i^0.$$

Именно, при условии устойчивости, использованном в [5], имеют место при $\mu \to 0$ предельные равенства:

$$\lim_{\mu \to 0} z_{j\mu^n} = \bar{z}_{j\mu^n},$$

$$\lim_{\mu \to 0} x_{i\mu^n} = \bar{x}_{i\mu^n},$$

где $\bar{z}_{j\mu^n}$, $\bar{x}_{i\mu^n}$ — решение вырожденной системы уравнений, соответствующей системе уравнений для $z_{j\mu^n}$, $x_{i\mu^n}$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{x}_{i\mu^n}|_{t=0} = \bar{x}^0_{i\mu^n} = (-1)^n \int_0^\infty \tau^n f_{i\,n-1}^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

(Поступило в редакцию 11/X 1957 г.)

Литература

1. А. Н. Тихонов, О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Матем. сб., **22** (**64**) (1948), 193—204.
2. А. Н. Тихонов, Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, Матем. сб., **31** (**73**) (1952), 575—586.
3. А. Б. Васильева, О дифференцировании решений дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, Матем. сб., **28** (**70**) (1951), 131—146.
4. А. Б. Васильева, О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры, Матем. сб., **31** (**73**) (1952), 587—644.
5. А. Б. Васильева, О дифференцировании решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, Вестник МГУ, № 3 (1954), 29—39.
6. В. М. Волосов, К теории нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков с малым параметром при старшей производной, Матем. сб., **31** (**73**) (1952), 645—686.
7. В. М. Волосов, Квазилинейные дифференциальные уравнения высших порядков, содержащие малый параметр, Матем. сб., **36** (**78**) (1955), 501—554.
8. И. С. Градштейн, Линейные уравнения с переменными коэффициентами и малыми параметрами при старших производных, Матем. сб., **27** (**69**) (1950), 47—68.
9. И. С. Градштейн, Применение теории устойчивости Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, ДАН СССР, т. **81**, № **6** (1951), 285—286.
10. Е. Ф. Мищенко и Л. С. Понтрягин, Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, ДАН СССР, т. **102**, № **5** (1955), 889—891.