Некоторые примеры griseномографируемых функций

М. А. Крейнес, И. А. Вайнштейн, Н. Д. Айзенштат (Москва)

В этой статье рассматриваются функции, номографируемые на сетке, и функции, номографируемые в прямоугольнике с помощью непрерывных функций, и строятся примеры неномографируемых функций (см. [1]). Ниже иногда рассматриваются не сами номограммы, а образы, им двойственные; это облегчает изложение.

§ 1. Функции, номографируемые на сетке

На некоторой плоскости sOt рассмотрим прямоугольник R_{st} $(\overline{s} \leqslant s \leqslant \overline{\overline{s}}, \overline{t} \leqslant t \leqslant \overline{\overline{t}})$ с вершинами A, B, C, D (см. чертеж). Пусть l и m — целые положительные числа.

1) Проведем $l-2$ прямолинейных отрезка, каждый из которых соединяет внутреннюю точку стороны AB с внутренней точкой стороны DC так, чтобы никакие два из этих отрезков не имели общих точек. Сторону AD обозначим через X_1; проведенные нами отрезки, считая слева направо, обозначим соответственно через $X_2, X_3, \ldots, X_{l-1}$; сторону BC обозначим через X_l.

2) Проведем $m-2$ прямолинейных отрезка, каждый из которых соединяет внутреннюю точку стороны AD с внутренней точкой стороны BC так, чтобы никакие два из этих отрезков не имели общих точек. Сторону AB обозначим через Y_1; проведенные отрезки, считая снизу вверх, обозначим соответственно через $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{m-1}$; сторону DC обозначим через Y_m.

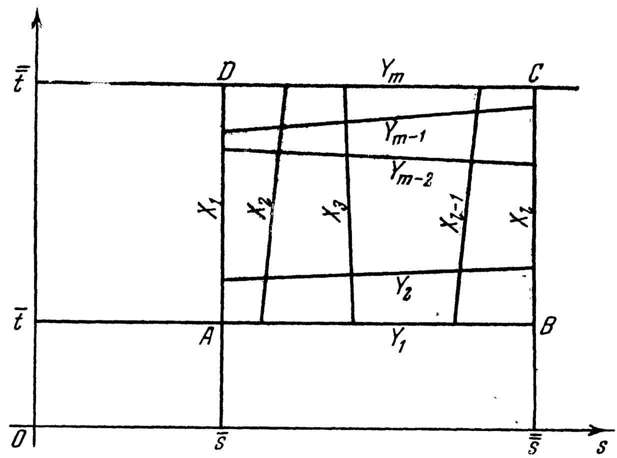
Совокупность отрезков $X_1, X_2, \ldots, X_l, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ назовем *сеткой* и будем обозначать через R_{st}, так же, как исходный прямоугольник. Точку пересечения отрезка X_i с отрезком Y_j назовем *узлом сетки* и обозначим символом (i, j).

Под *функцией, заданной на сетке*, будем понимать функцию $f=f_{ij}$, определенную на множестве всех узлов сетки. Таким образом, $f=f_{ij}$ есть функция двух целочисленных аргументов i и j $(i=1, 2, \ldots, l;$ $j=1, 2, \ldots, m)$.

Две сетки R_{st} и R_{uv} будем называть *эквивалентными*, если выполняются два условия: 1) число l отрезков X_i в обеих сетках одинаково; 2) число m отрезков Y_j в обеих сетках одинаково. Заметим, что функция, заданная на какой-либо сетке, тем самым определяется также и на любой эквивалентной ей сетке.

Линией уровня $f=c$ *функции* f, заданной на некоторой сетке, назовем множество тех узлов этой сетки, в которых $f_{ij}=c$. Про некоторую прямую будем говорить, что она *несет линию уровня* $f=c$, если все те узлы, из которых состоит эта линия уровня, лежат на указанной прямой.

Функцию f, определенную на сетке R_{st}, будем называть *номографируемой*, если на некоторой плоскости uOv существует система E прямых и эквивалентная сетке R_{st} сетка R_{uv}, такие, что: 1) число различных прямых в системе E равно числу непустых линий уровня функции f, и каждая прямая системы E несет одну непустую линию уровня функции f на сетке R_{uv}; 2) прямые системы E, несущие различные линии уровня, не имеют общих точек внутри и на сторонах прямоугольника R_{uv}; 3) какое бы значение $f_{i_0j_0}$ функции f ни взять, прямая системы E, несущая линию уровня $f = f_{i_0j_0}$, в прямоугольнике R_{uv} отделяет множество тех узлов (i, j), в которых $f_{ij} > f_{i_0j_0}$, от множества тех узлов, в которых $f_{ij} < f_{i_0j_0}$.



Пусть α и β — две прямые; точку пересечения этих прямых обозначим символом (α, β). Имеет место следующая теорема, касающаяся трех пятерок прямых на плоскости.

Теорема 1. *Пусть* 1, 2, 3, 4, 5 *и* 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ — *такие две пятерки лежащих на одной плоскости прямых, что никакие три из этих десяти прямых, если они не все принадлежат одной пятерке, не имеют общих точек, и пусть, кроме того*: 1) *точки* (1,3′), (2,2′) *и* (3,1′) *лежат на одной прямой*; 2) *точки* (1,4′), (2,3′), (3,2′) *и* (4,1′) *лежат на одной прямой*; 3) *точки* (1,5′), (2,4′), (3,3′), (4,2′) *и* (5,1′) *лежат на одной прямой*; 4) *точки* (2,5′), (3,4′), (4,3′) *и* (5,2′) *лежат на одной прямой. Тогда и точки* (3,5′), (4,4′) *и* (5,3′) *лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть 1″, 2″, 3″, 4″ и 5″ — прямые, на которых соответственно лежат точки: 1) (1,3′), (2,2′) и (3,1′); 2) (1,4′), (2,3′), (3,2′) и 4,1′); 3) (1,5′), (2,4′), (3,3′), (4,2′) и (5,1′); 4) (2,5′), (3,4′), (4,3′) и (5,2′); 5) (3,5′) и (4,4′). Нужно доказать, что и точка (5,3′) лежит на прямой 5″.

Из наших предположений вытекает, что все прямые 1, 2, 3, 4, 5, 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ и 1″, 2″, 3″, 4″, 5″ различны. Шесть прямых 2, 4′, 4″, 4, 2′, 2″ образуют шестиугольник*, а 3,3′, 3″—три его диагонали. Существует семейство алгебраических кривых третьего класса, зависящее от одного параметра, каждая из которых имеет касательными прямые 3, 3′, 3″, 2, 4′, 4″, 4 и 2′. По теореме Шаля (см., например, [2], стр. 24—25) к каждой из этих кривых будет касательной и прямая 2″. В этом семействе существует единственная кривая

* Такой шестиугольник называют шестиугольником Брианшона (см. ссылку в тексте).

третьего класса K, касательной к которой является и прямая 5. Итак, прямые 3, 3′, 3″, 2, 4′, 4″, 4, 2′, 2″ и 5 будут касательными к кривой K.

Рассмотрим шестиугольник со сторонами 2″, 3, 3′, 4″, 5 и 1′ и с диагоналями 2′, 3″ и 4. Все диагонали и первые пять сторон этого шестиугольника являются касательными к кривой K. Поэтому по теореме Шаля касательной к K будет и последняя сторона — прямая 1′.

Рассмотрим затем шестиугольник со сторонами 2, 3′, 3″, 4, 1′ и 1″ и с диагоналями 2′, 2″ и 3. Все диагонали и первые пять сторон этого шестиугольника являются касательными к кривой K. Поэтому касательной к кривой K будет и последняя сторона — 1″.

Рассмотрим, далее, шестиугольник со сторонами 4′, 3″, 3, 2′, 1″ и 1 и с диагоналями 2″, 2 и 3′. Как и ранее, заключаем, что касательной к K является и прямая 1.

Рассмотрим шестиугольник со сторонами 4″, 3, 3′, 2″, 1 и 5′ и с диагоналями 2, 4′ и 3″. Как и ранее, заключаем, что касательной к K будет и прямая 5′.

Рассмотрим затем шестиугольник со сторонами 4, 3′, 3″, 2, 5′ и 5″ и с диагоналями 4′, 4″ и 3. Как и ранее, заключаем, что касательной к K будет и прямая 5″.

Рассмотрим, наконец, шестиугольник со сторонами 5, 2′, 3″, 3 и 4′ и с диагоналями 3′, 4″ и 4. Все диагонали и пять указанных сторон этого шестиугольника являются касательными к кривой K. Поэтому касательной к K будет и шестая сторона шестиугольника, проходящая через точки (4,4′) и (5.3′); обозначим ее через T. Но через точку (4.4′) уже проходят три различных касательных к кривой K, а именно прямые 4, 4′ и 5″. Так как K — кривая третьего класса, то через точку (4.4′) не может проходить четвертой касательной к K. Поэтому T совпадает с одной из этих прямых: 4,4′ или 5″. Но первые две из этих прямых не могут проходить через точку (5,3′), так как в противном случае через эту точку проходили бы три прямых, принадлежащих к числу заданных десяти прямых, причем не все они принадлежали бы к одной из двух заданных пятерок прямых. Поэтому T совпадает с 5″, и, следовательно, прямая 5″ проходит и через точку (5,3′). Теорема доказана.

Нетрудно теперь построить пример функции, определенной на прямоугольной сетке R_{xy}, возрастающей с возрастанием каждой из переменных x и y при постоянной другой и неномографируемой.

Пример 1. Пусть в квадрате R_{xy} $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ плоскости xOy взята сетка так, что прямые, несущие отрезки X_i и Y_j, имеют соответственно уравнения $x=\frac{i-1}{4}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ и $y=\frac{j-1}{4}$ $(j=1, 2, 3, 4, 5)$. Для узла $(i,\ j)$ положим $f_{ij}=\frac{i+j-2}{4}$, если $(i,\ j)$ отлично от (5,3), а f_{53} возьмем не равным $\frac{6}{4}$; положим, например, $f_{53}=\frac{193}{128}$. Так определенная на сетке R_{xy} функция f является неномографируемой.

В самом деле, допустим, что функция f номографируема. Тогда на некоторой плоскости uOv существует сетка R_{uv}, эквивалентная заданной сетке R_{xy}, и система прямых E, удовлетворяющая перечисленным выше условиям. Сетка R_{uv} состоит из двух пятерок отрезков, соответствующих отрезкам

X_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) и Y_j ($j=1, 2, 3, 4, 5$) сетки R_{xy}. Пусть 1, 2, 3, 4, 5 и 1′, 2′, 3′, 4′, 5′ — прямые в плоскости uOv, соответственно несущие эти отрезки. Пусть 1″, 2″, 3″, 4″ и 5″ — прямые из системы E, несущие соответственно линии уровня $f=\frac{1}{2}$, $f=\frac{3}{4}$, $f=1$, $f=\frac{5}{4}$, $f=\frac{3}{2}$. Если, как и прежде, обозначать точку пересечения прямых α и β через (α, β), то очевидно, что: 1) точки (1,3′), (2,2′) и (3,1′) лежат на прямой 1″; 2) точки (1,4′), (2,3′), (3,2′) и (4,1′) лежат на прямой 2″; 3) точки (1,5′), (2,4′), (3,3′), (4,2′) и (5,1′) лежат на прямой 3″; 4) точки (2,5′), (3,4′), (4,3′) и (5,2′) лежат на прямой 4″ и, наконец, 5) точки (3,5′) и (4,4′) лежат на прямой 5″. В силу теоремы 1, на этой же прямой 5″ должна лежать и точка (5,3′), и, таким образом, должно выполняться равенство $f_{53}=\frac{3}{2}$. Но это не так: как мы знаем, $f_{53}=\frac{193}{128}$. Допустив, что f номографируема, мы пришли к противоречию.

Хотя функция f не номографируема, она является пределом последовательности номографируемых функций. В самом деле, рассмотрим функцию $g^{(n)}$ ($n=1, 2, \ldots$), значения которой во всех узлах сетки, за исключением узла (3,5), совпадают с соответствующими значениями функции f, а для узла (3,5) пусть $g^{(n)}_{35}=\frac{3}{2}-\frac{1}{8n}$. Тогда ясно, что последовательность $g^{(n)}$ сходится на сетке R_{xy} (т. е. в каждом узле этой сетки) к функции f. Вместе с тем нетрудно видеть, что каждая из функций $g^{(n)}$ ($n=1, 2, \ldots$) номографируема. В самом деле, в качестве эквивалентной сетки, входящей в определение номографируемой функции, мы можем взять саму сетку R_{xy}, а в качестве системы E — совокупность следующих прямых: $x+y=0$, $x+y=\frac{1}{4}$, $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=\frac{3}{4}$, $x+y=1$, $x+y=\frac{5}{4}$, $4x+3y-5=0$, $4x+3y-\frac{21}{4}=0$, $4x+3y-\frac{11}{2}=0$, $x+y=\frac{7}{4}$, $x+y=2$. Тогда ясно, что сетка R_{xy} и система E удовлетворяют всем указанным выше условиям.

Замечание. Нетрудно видеть, что построенная в примере 1 функция не номографируема и с несколько более широкой точки зрения. Именно, она останется неномографируемой и в том случае, если мы в определении функции, номографируемой на сетке, отбросим условия 2) и 3) и сохраним только условие 1).

§ 2. Функции, номографируемые с помощью непрерывных функций

В номограмме из выравненных точек некоторой функции $z=f(x, y)$ шкалы переменных x, y и z не равноправны: шкалы независимых переменных x и y должны быть приспособлены для того, чтобы по отметке, т. е. по значению соответствующей переменной, находить точку шкалы, а шкала функции z, наоборот, должна быть приспособлена для того, чтобы по точке шкалы находить отметку, т. е. значение функции. В соответствии с этим мы будем рассматривать два типа шкал:

Шкалой первого типа (шкалой аргумента) l_t будем называть плоский непрерывный образ отрезка $P=P(t)$, $\overline{t}\leqslant t\leqslant\overline{\overline{t}}$; значение t называется **отметкой** данной точки P.

Шкалой второго типа (шкалой функции, ответной шкалой) l_z будем называть плоское замкнутое ограниченное множество, на котором определена непрерывная функция $z=z(P)$. Значение функции $z(P)$ в данной точке называется отметкой данной точки.

Шкалу первого типа будем называть монотонной, если отображение $P=$ $=P(t)$ есть гомеоморфизм.

Номограммой $N(l_x, l_y, l_z)$ будем называть совокупность двух шкал первого типа l_x и l_y и шкалы второго типа l_z, расположенных в одной плоскости так, что удовлетворяются следующие три условия: 1) всякая прямая, пересекающая шкалы l_x и l_y («разрешающая прямая»), пересекает и шкалу l_z; 2) через каждую точку шкалы l_z проходит по крайней мере одна разрешающая прямая; 3) все точки пересечения шкалы l_z с каждой разрешающей прямой имеют одну и ту же отметку (но, конечно, точки пересечения l_z с разными разрешающими прямыми, вообще говоря, имеют разные отметки). l_z называется ответной шкалой номограммы.

Если шкалы l_x и l_y не пересекаются, то номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$, где $\overline{x}\leqslant x\leqslant \overline{\overline{x}}$ и $\overline{y}\leqslant y\leqslant \overline{\overline{y}}$, определяет в прямоугольнике R_{xy} $(\overline{x}\leqslant x\leqslant \overline{\overline{x}};$ $\overline{y}\leqslant y\leqslant \overline{\overline{y}})$ некоторую функцию $z=f(x,y)$: каждой паре значений x и y ставится в соответствие одно определенное z — отметка точек пересечения шкалы l_z с разрешающей прямой, проходящей через точку шкалы l_x с отметкой x и точку шкалы l_y с отметкой y. Легко видеть, что эта функция $z=f(x,y)$ непрерывна в R_{xy}*.

В самом деле, пусть (x_0, y_0) — произвольная точка прямоугольника R_{xy}. Возьмем произвольную последовательность (x_n, y_n) $(y=1, 2, \ldots)$, сходящуюся к (x_0, y_0). Пусть для любого n K_n — точка шкалы l_x с отметкой x_n и L_n — точка шкалы l_y с отметкой y_n. В силу определения шкал l_x и l_y, последовательность K_n будет сходиться к K_0, а последовательность L_n — к L_0 K_0 — точка шкалы l_x с отметкой x_0, L_0 — точка шкалы l_y с отметкой y_0). Проведем через точки K_n и L_n $(n=1,2,\ldots)$ разрешающие прямые α_n. На каждой из этих прямых возьмем по точке M_n, принадлежащей шкале l_z. По определению функции $z=f(x,y)$ точка M_n будет иметь отметку $f(x_n, y_n)$. Из последовательности M_n, принадлежащей плоскому компакту l_z, можно выделить подпоследовательность M_{n_i}, сходящуюся в некоторой точке $M_0 \in l_z$ Пусть z_0 — отметка точки M_0. В силу определения шкалы второго типа l_z, будем иметь: $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}, y_{n_i})=z_0$. Так как $K_{n_i}\to K_0$ и $L_{n_i}\to L_0$ и точка M_{n_i} $(i=1, 2, \ldots)$ принадлежит прямой α_{n_i}, проходящей через K_{n_i} и L_{n_i}, то M_0 будет принадлежать разрешающей прямой, проходящей через K_0 и L_0. Таким образом, $f(x_0, y_0)=z_0$ и, следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}, y_{n_i})=f(x_0, y_0)$. Итак, из каждой последовательности $(x_n, y_n)\to(x_0, y_0)$ можно выделить подпоследовательность (x_{n_i}, y_{n_i}), для которой $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}, y_{n_i})=f(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0, y_0).

---

* Заметим, что если номограмма определяет некоторую функцию $z=f(x,y)$ и шкалы l_x и l_y пересекаются, то $z=\mathrm{const}$.

Если существует номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$, определяющая в R_{xy} функцию $z = f(x, y)$, то мы будем называть эту функцию **номографируемой** в R_{xy} **с помощью непрерывных функций**; $N(l_x, l_y, l_z)$ будем называть **номограммой этой функции** в R_{xy}.

Номограмму функции $z = f(x, y)$ мы будем называть **нормированной**, если точка $\bar{G}$ шкалы l_x с отметкой $\bar{x}$ имеет в плоскости sOt номограммы координаты $(-1, 1)$, точка $\bar{\bar{G}}$ шкалы l_x с отметкой $\bar{\bar{x}}$ имеет координаты $(1,1)$, точка $\bar{H}$ шкалы l_y с отметкой $\bar{y}$ имеет координаты $(-1, -1)$ и точка $\bar{\bar{H}}$ шкалы l_y с отметкой $\bar{\bar{y}}$ имеет координаты $(1, -1)$.

Будем говорить, что функция $z = f(x, y)$ **монотонна по каждой из переменных в прямоугольнике** R_{xy}, если она является в R_{xy} монотонной (в строгом смысле) функцией от x при постоянном y и монотонной (в строгом смысле) функцией от y при постоянном x.

Пусть функция $z = f(x, y)$ монотонна по каждой из переменных и номографируема с помощью непрерывных функций в прямоугольнике $R_{xy}(\bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}}, \bar{y} \leqslant y \leqslant \bar{\bar{y}})$. Пусть $N(l_x, l_y, l_z)$ — произвольная нормированная номограмма функции $z = f(x, y)$, расположенная в плоскости sOt. Установим ряд свойств номограммы $N(l_x, l_y, l_z)$.

2.1. *Шкалы l_x, l_y и l_z попарно не пересекаются.*

Шкалы l_x и l_y не могут иметь общей точки, так как в противном случае функция $z = f(x, y)$ была бы постоянна. Допустим, что общую точку имеют шкалы l_x и l_z. Пусть эта точка имеет отметку x_0 на шкале l_x и отметку z_0 на шкале l_z. Проведем разрешающие прямые через эту точку и точки с отметками $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ шкалы l_y. Тогда должны выполняться равенства $f(x_0, \bar{y}) = f(x_0, \bar{\bar{y}}) = z_0$, что противоречит монотонности $f(x, y)$ при постоянном x, так как $\bar{\bar{y}} > \bar{y}$.

2.2. *Шкалы l_x и l_y монотонны.*

Достаточно показать, что отображение $P = P(x)$ отрезка $\bar{x} \leqslant x \leqslant \bar{\bar{x}}$ на шкалу l_x является взаимно однозначным или, иными словами, так как две различные точки одной отметки иметь не могут, что каждая точка шкалы l_x имеет только одну отметку. Но если бы это было не так, то нашлась бы точка $K \in l_x$, имеющая по крайней мере две отметки x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Проведем разрешающую прямую через K и произвольную точку шкалы l_y с отметкой y. Тогда должно выполняться равенство $f(x_1, y) = f(x_2, y)$, что невозможно.

2.3. *Всякая разрешающая прямая пересекает каждую из шкал l_x и l_y одной точке.*

Если бы какая-либо разрешающая прямая пересекала, например, шкалу l_x в двух различных точках с отметками x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$, и шкалу l_y в точке с отметкой y, то мы имели бы $f(x_1, y) = f(x_2, y)$, что невозможно.

Для определенности будем в дальнейшем предполагать, что $z = f(x, y)$ — возрастающая функция от x при постоянном y и возрастающая функция от y при постоянном x в R_{xy}. Если $f(x, y)$ — монотонная по каждой из переменных функция другого характера, то все нижеследующие утверждения либо остаются без изменений, либо же очевидным образом изменяются.

2.4. *Шкалы l_x и l_y целиком расположены в полосе $-1 \leqslant s \leqslant 1$ плоскости sOt.*

В самом деле, прямая $s = 1$ является разрешающей и поэтому пересекает шкалу l_x лишь в одной точке $\overline{\overline{G}}$ с отметкой $\overline{\overline{x}}$. Отображение $P = P(x)$ отрезка $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$ на l_x есть гомеоморфизм. Если бы на шкале l_x имелись точки с абсциссой $s > 1$, то, выкинув из l_x точку $\overline{\overline{G}}$, мы получили бы несвязное множество, являющееся топологическим образом полуинтервала $\overline{x} \leqslant x < \overline{\overline{x}}$, что невозможно. Совершенно так же можно показать, что все абсциссы точек шкалы l_x $s \geqslant -1$ и что шкала l_y расположена в полосе $-1 \leqslant s \leqslant 1$.

2.5. *При $-1 < s < 1$ для любой точки шкалы l_x выполняется условие $t > |s|$, а для любой точки шкалы l_y — условие $t < -|s|$.*

Действительно, прямые $t = s$ и $t = -s$ являются разрешающими и, если бы не выполнялись указанные условия, то шкала l_x или же шкала l_y пересекалась бы с одной из этих прямых по крайней мере в двух точках.

2.6. *Разрешающими прямыми являются те и только те прямые, которые пересекают и отрезок $\overline{G}\overline{\overline{G}}$ и отрезок $\overline{H}\overline{\overline{H}}$.*

Прямые $s = -1$, $s = 1$, $t = -s$, $t = s$, очевидно, являются разрешающими. Всякая другая прямая, пересекающая указанные отрезки, должна пересекать и шкалу l_x и шкалу l_y и, следовательно, будет разрешающей. В самом деле, эти шкалы связны, а всякая такая прямая отделяет точки $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$ шкалы l_x и точки $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ шкалы l_y.

Допустим теперь, что α — разрешающая прямая, отличная от прямых $s = -1$, $s = 1$, $t = -s$, $t = s$. Тогда, в силу 2.5, общая точка прямой α с l_x должна лежать в полосе $-1 < s < 1$ над ломаной $\overline{G}O\overline{\overline{G}}$, где O — начало координат, а общая точка прямой α с l_y должна лежать в этой полосе под ломаной $\overline{H}O\overline{\overline{H}}$. Но прямая, проходящая через две такие точки, пересекает оба отрезка $\overline{G}\overline{\overline{G}}$ и $\overline{H}\overline{\overline{H}}$.

2.7. *Шкалу l_x в системе координат sOt можно задать уравнением $t = \varphi_1(s)$, а шкалу l_y — уравнением $t = \varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ — непрерывные функции на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$.*

В силу 2.6, всякая прямая вида $s = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, является разрешающей. Поэтому со всякой такой прямой шкала l_x пересекается, и притом лишь в одной точке. Этим определяется функция $t = \varphi_1(s)$. Проекция l_x на отрезок $-1 \leqslant s \leqslant 1$ является непрерывным и взаимно однозначным отображением. Поэтому эта проекция — гомеоморфизм. Отсюда следует, что $t = \varphi_1(s)$ — непрерывная функция на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$. В точности такое же рассуждение можно провести относительно l_y.

В силу 2.7, функции $t = \varphi_1(s)$ и $t = \varphi_2(s)$ задают гомеоморфные отображения отрезка $-1 \leqslant s \leqslant 1$ соответственно на l_x и l_y. Так как, согласно 2.2, отображение $P = P(x)$ отрезка $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$ на l_x есть гомеоморфизм, то тем самым задано топологическое отображение $x = \psi_1(s)$ отрезка $-1 \leqslant s \leqslant 1$ на отрезок $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$. Точно таким же образом с помощью функции $t = \varphi_2(s)$ определяется топологическое отображение $y = \psi_2(s)$ отрезка $-1 \leqslant s \leqslant 1$ на отрезок $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}}$.

2.8. *Функции $x = \psi_1(s)$ и $x = \psi_2(s)$ являются непрерывными монотонно возрастающими в строгом смысле функциями на отрезке $-1 \leqslant s \leqslant 1$.*

Монотонное возрастание $\psi_1(s)$ вытекает из того, что $\psi_1(1) = \overline{\overline{x}} > \overline{x} = \psi_1(-1)$.

2.9. *Шкала l_z в полосе $-1 \leqslant s \leqslant 1$ целиком расположена над шкалой l_y и под шкалой l_x, а при $|s| > 1$ точки шкалы l_z могут находиться только на прямых $t = s$ и $t = -s$.*

В самом деле, допустим, что точка M шкалы l_z с отметкой z_1 находится при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ над шкалой l_x, или при $s < -1$ — над прямой $t = -s$, или при $s > 1$ — над прямой $t = -s$. Проведем через точку M две различные разрешающие прямые α_1 и α_2. Пусть они пересекаются со шкалой l_x соответственно в точках K_1 и K_2 с отметками x_1 и x_2, а со шкалой l_y — соответственно в точках L_1 и L_2 с отметками y_1 и y_2. Пусть $x_1 < x_2$. Легко видеть, что тогда $y_1 < y_2$. Вместе с тем имеем: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = z_1$, что противоречит возрастанию функции $z = f(x, y)$ по каждой из переменных, так как $f(x_1, y_1) < f(x_1, y_2) < f(x_2, y_2)$.

Точно таким же образом можно показать, что шкала l_z не может иметь точек при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ под шкалой l_y, при $s < -1$ под прямой $t = s$ и при $s > 1$ под прямой $t = -s$. Наконец, шкала l_z не может иметь точек при $|s| > 1$ и $|t| < |s|$, так как через такие точки не проходило бы ни одной разрешающей прямой.

2.10. *Всякая разрешающая прямая, за исключением, быть может, одной или нескольких из четырех прямых $s = -1$, $s = 1$, $t = -s$ и $t = s$, пересекает шкалу l_z в одной точке.*

Пусть α — произвольная разрешающая прямая, отличная от четырех перечисленных прямых. Допустим, что на ней лежат две точки M_1 и M_2 шкалы l_z. Тогда точки M_1 и M_2 имеют одну и ту же отметку, скажем z_1. Прямая α пересекает оба отрезка $\overline{G}\overline{\overline{G}}$ и $\overline{H}\overline{\overline{H}}$ и, самое большее, содержит лишь одну из четырех точек $\overline{G}$, $\overline{\overline{G}}$, $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$. Допустим для определенности, что α не проходит ни через $\overline{G}$, ни через $\overline{\overline{G}}$. Пусть α пересекает шкалу l_y в точке L. Тогда ясно, что для любой достаточно близкой к L точке шкалы l_y прямые, соединяющие эту точку с точками M_1 и M_2, будут разрешающими. Возьмем произвольную такую точку P шкалы l_y. Пусть она имеет отметку y_1, и пусть прямая, соединяющая P с M_1, пересекает шкалу l_x в точке K_1 с отметкой x_1, а прямая, соединяющая P с M_2, пересекает l_x в точке K_2 с отметкой x_2. Тогда, очевидно, $f(x_1, y_1) = z_1$ и $f(x_2, y_1) = z_1$. Но это невозможно, так как точки x_1 и x_2 не совпадают и, следовательно, $x_1 \neq x_2$.

Назовем **основной частью** Γ_z **шкалы** l_z совокупность точек этой шкалы, лежащих в полосе $-1 < s < 1$. Из 2.10 следует, что точки шкалы l_z, не входящие в Γ_z, целиком располагаются в интервалах $|t| < 1$ прямых $s = -1$ и $s = 1$ и в бесконечных интервалах $|t| > 1$ прямых $t = -s$ и $t = s$. Следовательно, все эти точки имеют соответственно одну из четырех отметок $f(\overline{x}, \overline{y})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$.

2.11. *Γ_z — открытая дуга, уравнение которой в плоскости sOt может быть задано в виде $t = \varphi_3(s)$, где $\varphi_3(s)$ — непрерывная функция в интервале $-1 < s < 1$.*

В силу 2.10, всякая прямая вида $s = s_0$, где $-1 < s_0 < 1$, пересекает Γ_z, и притом только в одной точке. Этим определена функция $t = \varphi_3(s)$. Эта функция непрерывна. В самом деле, пусть s_0 — произвольная точка интервала $-1 < s < 1$ и s_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность точек этого интервала, сходящаяся к s_0. Из последовательности точек $(s_n, \varphi_3(s_n))$, принадлежащих ограниченному замкнутому множеству l_z, можно выбрать подпоследовательность $(s_{n_i}, \varphi_3(s_{n_i}))$, сходящуюся к точке $M \in l_z$. Тогда M принадлежит Γ_z и прямой $s = s_0$. Так как Γ_z пересекается с прямой $s = s_0$ лишь в одной точке $(s_0, \varphi_3(s_0))$, то отсюда следует, что $M = (s_0, \varphi_3(s_0))$ и, следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_3(s_{n_i}) = \varphi_3(s_0)$. Итак, из всякой последовательности $s_n \to s_0$ можно выделить подпоследовательность s_{n_i}, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi_3(s_{n_i}) = \varphi_3(s_0)$. Отсюда следует, что функция $t = \varphi_3(s)$ непрерывна в точке s_0.

Так как Γ_z представляет собой график непрерывной функции $t = \varphi_3(s)$ на интервале $-1 < s < 1$, то Γ_z гомеоморфно этому интервалу, и проекция π множества Γ_z на интервал $-1 < s < 1$ есть гомеоморфизм.

2.12. *Для всякого значения z такого, что $f(\bar{x}, \bar{y}) < z < f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, существует одна и только одна точка основной части Γ_z шкалы l_z, имеющая отметку z. Значения $f(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$ и $f(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$ принимаются в точках пересечения Γ_z соответственно с прямой $t = -s$ и с прямой $t = s$.*

Рассмотрим в прямоугольнике R_{xy} множество точек T вида $(\psi_1(s), \psi_2(s))$, где $x = \psi_1(s)$ и $x = \psi_2(s)$ — функции, о которых шла речь в 2.8, и $-1 \leqslant s \leqslant 1$. В силу 2.8, T — простая дуга, соединяющая в R_{xy} точки $(\bar{x}, \bar{y})$ и $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, в которых функция $z = f(x, y)$ соответственно принимает наименьшее и наибольшее значения. Поэтому на T функция $f(x, y)$ принимает все промежуточные значения между $f(\bar{x}, \bar{y})$ и $f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$. Так как, в силу 2.8, функции $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ являются монотонно возрастающими, а $f(x, y)$ — функция, монотонно возрастающая по каждой из переменных при постоянной другой, то в любых двух различных точках T функция $z = f(x, y)$ принимает различные значения.

Пусть z_0 — произвольное значение, такое, что $f(\bar{x}, \bar{y}) < z_0 < f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$. Найдется точка $(\psi_1(s_0), \psi_2(s_0))$ множества T, в которой $f(x, y)$ принимает значение z_0. При этом ясно, что $-1 < s_0 < 1$. В соответствии с определением функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ это означает, что в плоскости sOt прямая $s = s_0$ пересекает шкалу l_z в точке M_0 с отметкой z_0. Так как $-1 < s_0 < 1$, точка M_0 принадлежит Γ_z. Допустим, что в Γ_z существует еще одна точка M_1 с отметкой z_0. Точка M_1 имеет абсциссу s_1. При этом $s_1 \neq s_0$, так как прямая $s = s_0$ является разрешающей и, в силу 2.10, пересекает l_z лишь в одной точке. В соответствии с определением функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ отметка в точке M_1 должна равняться $f(\psi_1(s_1), \psi_2(s_1)) \neq f(\psi_1(s_0), \psi_2(s_0)) = z_0$, и мы пришли к противоречию.

Множество Γ_z пересекается и с прямой $t = s$ и с прямой $t = -s$. Покажем, например, первое. Γ_z, в силу 2.11, — связное множество. Поэтому достаточно показать, что Γ_z имеет точки как над прямой $t = s$, так и под этой прямой. Но если бы Γ_z было целиком расположено, например, над этой прямой, то для точки $M(s, t)$ множества Γ_z с абсциссой s мы имели бы: $s \leqslant t \leqslant \varphi_1(s)$, и поэтому при $s \to 1$ t стремилось бы к 1 и точка M стремилась бы к точке $\bar{\bar{G}}$, что невозможно, так как l_z замкнуто, $\bar{\bar{G}} \in l_x$ и l_x и l_z не пересекаются.

В точке пересечения Γ_z с прямой $t = -s$ шкала l_z должна иметь отметку $f(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$, а в точке пересечения с прямой $t = s$ — отметку $f(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$. Так как различные точки Γ_z не могут иметь одинаковых отметок, то в других точках отметки $f(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$ и $f(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$ не принимаются.

Из 2.12, очевидно, вытекает

2.13. *Для всякого значения z, отличного от значений $f(\bar{x}, \bar{y})$, $f(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$, $f(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$, $f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ и такого, что* $\min\limits_{(x,y)\in R_{xy}} f(x, y) \leqslant z \leqslant \max\limits_{(x,y)\in R_{xy}} f(x, y)$, *существует одна и только одна точка шкалы l_z, имеющая отметку z. Точки шкалы l_z, имеющие указанные четыре отметки, целиком располагаются соответственно на прямых $s = -1$, $t = -s$, $t = s$, $s = 1$.*

Для всякого s_0, $-1 \leqslant s_0 \leqslant 1$, обозначим через $\psi_3(s_0)$ отметку точек пересечения прямой $s = s_0$ со шкалой l_z.

2.14. $z = \varphi_3(s)$ — *непрерывная, монотонно возрастающая функция на отрезке* $-1 \leqslant s \leqslant 1$.

Это очевидно, так как $\psi_3(s) = f(\psi_1(s), \psi_2(s))$.

Заметим, что мы нигде в утверждениях 2.1—2.14 не пользовались непрерывностью функции $z = z(P)$, входящей в определение шкалы l_z. Легко видеть, что в наших предположениях эта функция *автоматически оказывается непрерывной*.

В самом деле, в точках шкалы l_z, лежащих на полупрямых $t = \pm s$, $|s| > 1$, она, очевидно, непрерывна, а в остальных точках шкалы l_z выполняется равенство $z(P) = \psi_3(\pi(P))$, где π — проекция шкалы l_z на ось Os, а $\psi_3(s)$ — определенная выше функция.

Свойства 2.1—2.14 довольно ясно описывают строение произвольной нормированной номограммы функции $z = f(x, y)$. Шкалы l_x и l_y этой номограммы являются в плоскости sOt графиками непрерывных функций $t = \varphi_1(s)$ и $t = \varphi_2(s)$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, причем $\varphi_1(-1) = \varphi_1(1) = 1$ и $\varphi_2(-1) = \varphi_2(1) = -1$. Отметки на этих шкалах монотонно возрастают с ростом s. Шкала l_z при $-1 \leqslant s \leqslant 1$ также является графиком Γ_z непрерывной функции $t = \varphi_3(s)$, и отметки на Γ_z также непрерывно возрастают вместе с s. Γ_z содержится между l_y и l_x. При $s \to 1$ и при $s \to -1$ функция $t = \varphi_3(s)$ либо стремится к определенному пределу, либо может вести себя «подобно» функции $\sin\frac{1}{s}$ при $s \to 0$. При $s \to 1$ отметка точки Γ_z с абсциссой s стремится к $f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, а при $s \to -1$ — к $f(\bar{x}, \bar{y})$. Шкала l_z, помимо Γ_z, состоит из предельных отрезков Γ_z на отрезках $\bar{H}\bar{G}$ и $\bar{\bar{H}}\bar{\bar{G}}$ (конечно, один или оба этих предельных отрезка могут вырождаться в точку) и из произвольных замкнутых ограниченных множеств, лежащих на интервалах $s = \pm 1$, $|t| \leqslant 1$ и $t = \pm s$, $|s| > 1$. Точки l_z, лежащие на этих интервалах, соответственно имеют отметки $f(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$, $f(\bar{x}, \bar{y})$, $f(\bar{\bar{x}}, \bar{y})$, $f(\bar{x}, \bar{\bar{y}})$.

Нетрудно показать, что у всякой номографируемой с помощью непрерывных функций, монотонной по каждой из переменных в прямоугольнике R_{xy} функции существует нормированная номограмма.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $z = f(x, y)$ — *функция, монотонная по каждой из переменных и номографируемая с помощью непрерывных функций в прямоугольнике* R_{xy}, *и пусть в этом прямоугольнике взята произвольная прямоугольная сетка. Тогда функция, индуцированная функцией* $z = f(x, y)$ *на этой сетке, номографируема.*

Доказательство. Пусть в прямоугольнике R_{xy} с вершинами $A(\overline{x}, \overline{y})$ $B(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$, $C(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ и $D(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ взята прямоугольная сетка с отрезками X_i и Y_j ($i = 1, 2, \ldots, l$; $j = 1, 2, \ldots, m$). При этом прямые, несущие отрезки X_i, имеют в плоскости xOy соответственно уравнения $x = x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, l$), где $x_1 = \overline{x}$, $x_l = \overline{\overline{x}}$ и $x_1 < x_2 < \ldots < x_l$, а прямые, несущие отрезки Y_j, имеют в плоскости xOy уравнения $y = y_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), где $y_1 = \overline{y}$, $y_m = \overline{\overline{y}}$ и $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$. Как и ранее, будем предполагать, что $z = f(x, y)$ — возрастающая функция от x при постоянном y и возрастающая функция от y при постоянном x.

Возьмем произвольную нормированную номограмму $N(l_x, l_y, l_z)$ функции $z = f(x, y)$, расположенную в плоскости sOt. Она будет удовлетворять всем описанным выше условиям.

Рассмотрим коррелятивное отображение ω плоскости sOt на плоскость uOv, переводящее точку (s, t) плоскости sOt в прямую $au + bv + c = 0$, где a, b и c определяются по формуле

$$a : b : c = (t + 1) : (-t + 1) : (-2s).$$

При этом отображении точки $\overline{G}(-1, 1)$, $\overline{\overline{G}}(1, 1)$, $\overline{H}(-1, -1)$ и $\overline{\overline{H}}(1, -1)$ плоскости sOt перейдут соответственно в прямые $u = -1$, $u = 1$, $v = -1$ и $v = 1$ плоскости uOv.

При отображении ω прямая $ps + qt + r = 0$ плоскости sOt переходит в точку $\left(-\frac{q+r}{p}, \frac{q-r}{p}\right)$ плоскости uOv. Обозначим через R_{uv} квадрат в плоскости uOv с вершинами $A'(-1, -1)$, $B'(1, -1)$, $C'(1, 1)$ и $D'(-1, 1)$. Любая разрешающая прямая номограммы $N(l_x, l_y, l_z)$, в силу 2.6, будет пересекать в плоскости sOt и отрезок $\overline{G}\overline{\overline{G}}$: $t = 1$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$, и отрезок $\overline{H}\overline{\overline{H}}$: $t = -1$, $-1 \leqslant s \leqslant 1$. Пусть она пересекает первый отрезок в точке $(s_1, 1)$, а второй — в точке $(s_2, -1)$, где $-1 \leqslant s_1 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant s_2 \leqslant 1$. Тогда эта прямая имеет уравнение $2s + (s_2 - s_1)t - (s_1 + s_2) = 0$ и, следовательно, при отображении ω переходит в точку (s_1, s_2) квадрата R_{uv}.

Определим теперь отображение Ω прямоугольника R_{xy} на квадрат R_{uv} следующим образом. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка прямоугольника R_{xy}. Пусть α — соответствующая ей разрешающая прямая и пусть при отображении ω эта прямая переходит в точку $N(u, v)$ квадрата R_{uv}. Тогда мы полагаем $\Omega(M) = N$.

Так как двум различным точкам прямоугольника R_{xy} отвечают различные разрешающие прямые, Ω является взаимно однозначным отображением R_{xy} на R_{uv}. Ясно также, что $\Omega(A) = A'$, $\Omega(B) = B'$, $\Omega(C) = C'$ и $\Omega(D) = D'$. Ω — непрерывное отображение. В самом деле, если в R_{xy} последовательность $M_n(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) сходится к $M_0(x_0, y_0)$, то на l_x последовательность точек K_n с отметками x_n сходится к точке K_0 с отметкой x_0, а на l_y последовательность точек L_n с отметками y_n сходится к точке L_0 с отметкой y_0. Пусть разрешающая прямая, соединяющая K_n с L_n, пересекает отрезок $\overline{G}\,\overline{\overline{G}}$ в точке $(s_1^{(n)}, 1)$, а отрезок $\overline{H}\,\overline{\overline{H}}$ — в точке $(s_2^{(n)}, -1)$ и прямая, соединяющая K_0 с L_0, пересекает указанные отрезки соответственно в точках $(s_1^{(0)}, 1)$ и $(s_2^{(0)}, -1)$. Тогда, очевидно, $s_1^{(n)} \to s_1^{(0)}$, $s_2^{(n)} \to s_2^{(0)}$ и, следовательно, $(s_1^{(n)}, s_2^{(n)}) \to (s_1^{(0)}, s_2^{(0)})$.

Так как Ω — непрерывное взаимно однозначное отображение R_{xy} на R_{uv}, оно является гомеоморфизмом. Так как каждой прямой вида $x = x_0$, плоскости xOy соответствует совокупность разрешающих прямых, проходящих через (единственную) точку шкалы l_x с отметкой x_0, то при отображении Ω прямая $x = x_0$ перейдет в некоторый прямолинейный отрезок, соединяющий $A'B'$ с $D'C'$. Семейство $x = \text{const}$ перейдет при отображении Ω в семейство отрезков, соединяющих сторону $A'B'$ со стороной $D'C'$. При этом никакие два различных отрезка не имеют общих точек. Подобным же образом семейство отрезков в R_{xy} вида $y = \text{const}$ перейдет при отображении Ω в семейство прямолинейных отрезков, соединяющих сторону $A'D'$ со стороной $B'C'$, причем все эти отрезки попарно не пересекаются.

Наконец, каждой линии уровня $z = z_0$ функции $z = f(x, y)$, где z_0 отлично от $f(\overline{x}, \overline{y})$, $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$, $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ и $f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$, соответствует в плоскости sOt совокупность разрешающих прямых, проходящих через (опять-таки единственную) точку шкалы l_z, имеющую отметку z_0. Линии уровня $z = f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ соответствует в плоскости sOt совокупность всех разрешающих прямых, проходящих через точку Γ_z с отметкой $f(\overline{x}, \overline{\overline{y}})$ (к числу этих прямых принадлежит и прямая $t = -s$), а линии уровня $z = f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$ в плоскости sOt соответствует совокупность всех разрешающих прямых, проходящих через точку Γ_z, имеющую отметку $f(\overline{\overline{x}}, \overline{y})$. Поэтому каждой линии уровня $z = z_0$, где $f(\overline{x}, \overline{y}) < z_0 \leqslant f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ при отображении Ω соответствует прямолинейный отрезок, концы которого лежат на границе квадрата R_{uv}. При этом ясно, что никакие два таких отрезка не пересекаются и что отрезок, соответствующий линии уровня $z = z_0$, отделяет в R_{uv} отрезки, соответствующие линиям уровня $z = z'$, где $z' < z_0$, от отрезков, соответствующих линиям уровня $z = z''$, где $z'' > z_0$. Наконец, линии уровня $z = f(\overline{x}, \overline{y})$ и $z = f(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ состоят лишь из единственных точек A и C, и эти точки соответственно переходят при отображении Ω в точки A' и C'.

Совокупность отрезков X_i' в R_{uv}, в которые соответственно переходят при отображении Ω отрезки X_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$, и отрезков Y_j', в которые переходят отрезки Y_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, образует сетку R_{uv}, эквивалентную сетке R_{xy}. В качестве системы прямых E возьмем совокупность прямых, несущих в плоскости uOv отрезки, соответствующие линиям уровня функции $z = f(x, y)$, проходящим через узлы сетки R_{xy}. Тогда ясно, что сетка R_{uv} и система E удовлетворяют всем требуемым условиям и, следовательно, функция, индуцируемая функцией $z = f(x, y)$ на заданной прямолинейной сетке, номографируема.

Можно показать, что, наоборот, всякую функцию, номографируемую на прямоугольной сетке R_{xy}, можно продолжить на весь прямоугольник R_{xy} в монотонную по каждой из переменных функцию, номографируемую с помощью непрерывных функций.

Приведем пример функции, возрастающей по каждой из переменных, непрерывной и неномографируемой с помощью непрерывных функций.

Пример 2. Положим

$$f(x, y)=x+y+\frac{|w|-w}{4}, \text{ где } w=(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{64},$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Ясно, что эта функция монотонно возрастает по каждой из переменных и непрерывна в квадрате $R_{xy}(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$. В узлах построенной в примере 1 сетки эта функция принимает те же значения, что и определенная в примере 1 функция f. Из теоремы 2 заключаем, что $f(x, y)$ не номографируема с помощью непрерывных функций.

§ 3. Номограммы со шкалами, заданными параметрически

Шкалой l_x, заданной параметрически, будем называть плоский непрерывный образ отрезка $P=P(\xi)$, $\overline{\xi} \leqslant \xi \leqslant \overline{\overline{\xi}}$, причем на этом отрезке задана непрерывная функция $x=x(\xi)$. Для каждой точки $P=P(\xi) \in l_x$ значение $x(\xi)$ называется отметкой данной точки.

В этом параграфе, дополнительно этого не оговаривая, под номограммой мы будем понимать совокупность трех шкал l_x, l_y и l_z, заданных параметрически (соответственно с параметрами ξ, η и ζ), расположенных в одной плоскости и удовлетворяющих перечисленным выше условиям (см. § 2): 1) всякая прямая, пересекающая шкалы l_x и l_y (разрешающая прямая), пересекает и шкалу l_z; 2) через каждую точку шкалы l_z проходит по крайней мере одна разрешающая прямая; 3) все точки пересечения шкалы l_z с каждой разрешающей прямой имеют одну и ту же отметку.

Заметим, что, хотя шкалы определены в этом случае совершенно равноправно — все они заданы параметрически, — в определение номограммы x, y и z входят по-прежнему неравноправно.

Мы будем говорить, что номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$ определяет в прямоугольнике R_{xy} $(\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}};\ \overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}})$ функцию $z=f(x, y)$, если на шкале l_x множество значений, принимаемых отметкой $x=x(\xi)$, есть отрезок $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$, на шкале l_y множество значений, принимаемых отметкой $y=y(\eta)$, есть отрезок $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}}$ и если любая разрешающая прямая, пересекающая шкалу l_x в точке с отметкой $x \in [\overline{x}, \overline{\overline{x}}]$ и шкалу l_y в точке с отметкой $y \in [\overline{y}, \overline{\overline{y}}]$, пересекает шкалу l_z в точках, имеющих отметку $z=f(x, y)$.

Функцию $z=f(x, y)$ мы будем называть в этом параграфе номографируемой в прямоугольнике R_{xy}, если существует номограмма, определяющая эту функцию в R_{xy}.

Пусть $z=f(x, y)$ — функция, монотонная по каждой из переменных, непрерывная и номографируемая в прямоугольнике R_{xy}. Пусть $N(l_x, l_y, l_z)$ — произвольная номограмма этой функции. Мы покажем, что $N(l_x, l_y, l_z)$ является номограммой функции $z=f(x, y)$ и в смысле § 2. Для этого последовательно установим некоторые свойства этой номограммы. При этом, как и прежде, для определенности будем считать, что функция $z = f(x, y)$ возрастает по каждой из переменных при постоянной другой.

3.1. *Шкалы l_x, l_y и l_z попарно не пересекаются.* (См. 2.1.)

3.2. *Каждая точка шкалы l_x, каждая точка шкалы l_y и каждая точка шкалы l_z имеют только одну отметку.*

Так как через каждую точку шкалы l_z проходит по крайней мере одна разрешающая прямая, то указанное свойство шкалы l_z вытекает из условия 3) определения номограммы. Для шкал l_x и l_y это свойство, очевидно, следует из монотонности функции $z = f(x, y)$ (см. 2.2).

Таким образом, каждой точке P шкалы l_x отвечает одна определенная отметка x. Тем самым на шкале l_x определена функция $x = x(P)$. Очевидно, для любого $\xi \in [\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]$ $X(P(\xi)) = x(\xi)$. Подобным же образом на l_y определена функция $y = Y(P)$ и на l_z функция $z = Z(P)$.

3.3. *$X(P)$, $Y(P)$ и $Z(P)$ — непрерывные функции соответственно на l_x, l_y и l_z.*

Пусть P_0 — произвольная точка шкалы l_x и P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность точек этой шкалы, сходящаяся к P_0. Для каждой точки P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ возьмем любое значение ξ_n, где $\bar{\xi} \leqslant \xi_n \leqslant \bar{\bar{\xi}}$ и $P_n = P(\xi_n)$. Из последовательности ξ_n выделим сходящуюся подпоследовательность $\xi_{n_k} : \lim\limits_{k\to\infty} \xi_{n_k} = \xi_0$. Тогда, так как отображение $P = P(\xi)$ отрезка $[\bar{\xi}, \bar{\bar{\xi}}]$ на l_x непрерывно и так как $P_{n_k} \to P_0$, мы будем иметь: $P_0 = P(\xi_0)$. С другой стороны, так как $x(\xi)$ — непрерывная функция, $\lim\limits_{k\to\infty} x(\xi_{n_k}) = x(\xi_0)$. Но это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} X(P_{n_k}) = X(P_0)$. Итак, из каждой последовательности $P_n \in l_x$, сходящейся к P_0, можно выделить подпоследовательность P_{n_k}, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} X(P_{n_k}) = X(P_0)$. Отсюда следует, что функция $x = X(P)$ непрерывна в точке P_0.

3.4. *Все точки пересечения шкалы l_x (шкалы l_y) с каждой разрешающей прямой имеют одну и ту же отметку.* (См. 2.3.)

3.5. *Не существует связного, состоящего более чем из одной точки подмножества шкалы l_x (шкалы l_y), все точки которого имеют одну и ту же отметку.*

Пусть U — связное, состоящее более чем из одной точки подмножество шкалы l_x, все точки которого имеют одну и ту же отметку x_0. Допустим сначала, что U не принадлежит одной разрешающей прямой. Возьмем произвольную точку L_0 шкалы l_y. Пусть она имеет отметку y_0. Проведем через L_0 прямую α, по обе стороны от которой есть точки множества U; это возможно, так как U не принадлежит одной разрешающей прямой. Пусть α пересекает шкалу l_z в точке M с отметкой z_0. Возьмем точки K_1 и K_2 множества U, лежащие по разные стороны от α. Проведем прямые β_1 и β_2 соответственно через M и K_1 и через M и K_2. Тогда, так как U связно, всякая прямая, проходящая через точку M внутри вертикальных углов, образованных прямыми β_1 и β_2 и содержащих прямую α, будет пересекать U. Внутренность того из этих вертикальных углов, который содержит L_0, пересекает

l_y по открытому в l_y множеству V, содержащему L_0. Возьмем произвольную точку L множества V и соединим ее с M прямой γ. Тогда γ пересечет U и, следовательно, будет разрешающей прямой. Поэтому, если L имеет отметку y, то должно выполняться равенство $f(x_0, y) = z_0 = f(x_0, y_0)$. Так как $f(x, y)$ монотонна по y при постоянном x, то отсюда следует, что $y = y_0$. Итак, точка L_0 имеет в l_y окрестность V, все точки которой имеют одну и ту же отметку.

Для каждой точки шкалы l_y возьмем окрестность, все точки которой имеют одну и ту же отметку. Из полученного покрытия выделим конечное подпокрытие П. Так как l_y связно, любые две окрестности покрытия П можно соединить цепочкой окрестностей из П так, чтобы первая окрестность цепочки совпадала с первой данной окрестностью, последняя окрестность цепочки совпадала со второй данной окрестностью и каждая окрестность цепочки имела общие точки с предыдущей и со следующей окрестностями цепочки. Так как в каждой из этих окрестностей отметка постоянна, то отсюда следует, что и во всех окрестностях покрытия П отметка постоянна и все точки шкалы l_y имеют одну и ту же отметку, что невозможно.

Допустим теперь, что множество U принадлежит разрешающей прямой δ. Пусть B — общая часть δ и шкалы l_y; все точки множества B, в силу 3.4, имеют одну и ту же отметку, допустим y_1. Для каждой точки L шкалы l_y, не принадлежащей B, как и выше, найдем окрестность $V(L)$ относительно l_y, все точки которой имеют одну и ту же отметку. Возьмем число $\varepsilon = \frac{\bar{\bar{y}} - \bar{y}}{3} > 0$ и для каждой точки L множества B найдем окрестность $W(L)$ относительно l_y, в каждой точке которой отметка y удовлетворяет условию $| y - y_1 | < \varepsilon$; такая окрестность существует, в силу 3.3. Положим $W = \bigcup\limits_{L \in B} W(L)$; тогда W — открытое в l_y множество, которое содержит B и отметка каждой точки которого удовлетворяет условию $| y - y_1 | < \varepsilon$.

Все множества $V(L)$ и множество W образуют покрытие шкалы l_y; выделим из него конечное покрытие $П_1$. Если в $П_1$ не входит множество W, то, как и выше, заключаем, что все точки шкалы l_y имеют одну и ту же отметку, что невозможно. Пусть теперь $П_1$ состоит из окрестностей $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и W. Тогда, так как l_y связно, любую окрестность V_i можно соединить с W цепочкой элементов покрытия $П_1$ так, чтобы первый элемент цепочки совпадал с V_i, последний — с W и каждый элемент цепочки имел общие точки с предыдущим и следующим за ним элементами. Так как в каждом из этих элементов, кроме W, отметка постоянна, то отсюда следует, что и отметка каждой точки окрестности V_i удовлетворяет условию $| y - y_1 | < \varepsilon$. Но V_i — любая окрестность из $П_1$, поэтому отметка любой точки шкалы удовлетворяет неравенству $| y - y_1 | < \varepsilon$, что, в силу выбора ε, невозможно.

3.6. *Всякая разрешающая прямая пересекает шкалу l_x (шкалу l_y) в одной точке.*

Допустим, что разрешающая прямая α пересекает шкалу l_x не в одной точке. Тогда все точки пересечения l_x с α имеют одну и ту же отметку, скажем x_0. Прямой α принадлежит по крайней мере одна точка L шкалы l_y. Пусть L имеет отметку y_0.

Прежде всего ясно, что все точки пересечения прямой α с l_x лежат на α по одну сторону от L. В самом деле, если бы это было не так, мы могли бы на шкале l_y взять точку L' с отметкой $y' \neq y_0$ и провести прямую β через L и L'. Тогда прямая β отделяла бы точки шкалы l_x. Так как шкала l_x связна, отсюда следовало бы, что β пересекает l_x и поэтому является разрешающей прямой, что, в силу 3.4, невозможно.

Ясно далее, что каждая точка пересечения прямой α с l_x является предельной для множества T точек шкалы l_x, не принадлежащих α. В самом деле, в противном случае у какой-либо общей точки K прямой α и l_x была бы окрестность V относительно l_x, целиком состоящая из точек прямой α. Так как l_x локально связно, нашлась бы связная окрестность U точки K, $U \subset V$. В силу 3.4, все точки U имели бы одну и ту же отметку, что, согласно 3.5, невозможно.

Покажем далее, что шкала l_y не может лежать по обе стороны от прямой α. В самом деле, в противном случае возьмем две точки L_1 и L_2 шкалы l_y по разные стороны от α и две точки K_1 и K_2 шкалы l_x, лежащее на α. Проведем прямые β_1 и β_2 соответственно через L_1 и K_1 и через L_2 и K_1. Тогда любая прямая, проходящая через K_1 и лежащая в двух вертикальных углах, образованных β_1 и β_2 и содержащих прямую α, будет отделять точки L_1 и L_2 и, следовательно, так как l_y связна, будет пересекать l_y. Поэтому всякая такая прямая является разрешающей. Внутренность того из двух вертикальных углов, который содержит точку K_2, является окрестностью этой точки. Так как l_x локально связна, найдется связная окрестность U точки K_2 относительно l_x, целиком лежащая внутри этого угла. Любая точка множества U лежит на одной разрешающей прямой с точкой K_1 и, следовательно, имеет отметку x_0. Итак, мы нашли связное открытое подмножество U шкалы l_x, все точки которого имеют одну и ту же отметку, что, в силу 3.5, невозможно.

Таким образом, шкала l_y целиком лежит по одну сторону от α (и, конечно, имеет точки на α). Прямой α принадлежат по крайней мере две точки шкалы l_x. Вновь обозначим их через K_1 и K_2, причем будем считать, что K_1 лежит ближе к точке L, чем K_2. Обозначим множество точек шкалы l_x, лежащих по ту же сторону от α, что и l_y, через T', а множество точек шкалы l_x, лежащих по другую сторону от α,—через T'' (общие точки α и l_x мы не причисляем ни к T', ни к T''). Как было показано выше, точки K_1 и K_2 являются предельными точками множества $T = T' \cup T''$.

Покажем, что K_1 и K_2 не могут одновременно быть предельными точками T' или же T''. Возьмем произвольную точку L' шкалы l_y, не лежащую на α. Если бы K_1 и K_2 были предельными для T', то мы провели бы прямую через K_2 и L'. Тогда всякая прямая, проходящая через K_2 и любую точку внутри угла LK_2L', будет отделять L от L' и, следовательно, будет разрешающей. Возьмем точку K_1' множества T', лежащую внутри этого угла; такая точка найдется, так как K_1 является предельной точкой T'. Проведем прямую α_1 через K_2 и K_1'. Тогда α_1 является разрешающей прямой; на ней лежат по крайней мере две точки K_2 и K_1' шкалы l_x, и шкала l_y лежит по обе стороны от α, что невозможно. Подобным же образом можно показать, что K_1 и K_2 не могут быть предельными для T''; здесь нужно только будет поменять ролями K_1 и K_2. Итак, одна из точек K_1 и K_2, допустим K_1, является предельной для T', а другая, K_2 — для T''. Покажем теперь, что шкала l_x не может иметь с α никаких других общих точек, кроме K_1 и K_2. В самом деле, всякая такая точка K была бы предельной для T, но она не может быть предельной ни для T', ни для T'', так как в первом случае на α были бы две точки K и K_1, предельных для T', а во втором — две точки K и K_2, предельных для T'', но оба эти случая по-предыдущему исключены.

Рассмотрим теперь два множества: $\overline{T}'$, состоящее из T' и точки K_1, и $\overline{T}''$, состоящее из T'' и точки K_2. Эти множества, очевидно, замкнуты, не пересекаются и вместе дают l_x. Но это невозможно, так как l_x связно. Таким образом, мы пришли к противоречию и утверждение 3.6 полностью доказано.

3.7. *Шкалы l_x и l_y являются простыми дугами.*

Возьмем произвольную точку L шкалы l_y и проведем произвольный луч u с началом L, не пересекающий шкалы l_x; такой луч найдется, так как всякая прямая, проходящая через L, пересекает l_x не более чем в одной точке. Рассмотрим L в качестве полюса, а u — в качестве полярной оси. Пусть $\overline{\theta}$ — наименьший полярный угол, для которого луч, выходящий из L, пересекает шкалу l_x, а $\overline{\overline{\theta}}$ — наибольший такой угол; так как l_x — замкнутое ограниченное множество, эти углы существуют; ясно также, что $\overline{\overline{\theta}}-\overline{\theta}<\pi$. Тогда, так как каждая прямая, проходящая через L, пересекает l_x не более чем в одной точке и так как l_x связно, в системе полярных координат ρ, θ шкала l_x имеет уравнение $\rho=\rho(\theta)$, где $\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}$. Покажем, что $\rho(\theta)$ — непрерывная функция. Рассмотрим значение θ_0 и последовательность θ_n $(n=1,\ 2,\ldots)$, сходящуюся к θ_0, где $\overline{\theta}\leqslant\theta_0\leqslant\overline{\overline{\theta}}$, $\overline{\theta}\leqslant\theta_n\leqslant\overline{\overline{\theta}}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Тогда из последовательности $\rho(\theta_n)$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\rho(\theta_{n_i})$; положим $\lim\limits_{i\to\infty}\rho(\theta_{n_i})=\rho_0$. Тогда, очевидно, последовательность точек $K_{n_i}(\theta_{n_i},\rho(\theta_{n_i}))$ сходится к $K_0(\theta_0,\rho_0)$ и так как все точки K_{n_i} принадлежат l_x, то и $K_0\in l_x$, и поэтому $\rho(\theta_0)=\rho_0$. Отсюда следует, что функция $\rho(\theta)$ непрерывна на отрезке $\overline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\overline{\overline{\theta}}$ и l_x — простая дуга.

Обозначим концы дуги l_x через $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$, а концы дуги l_y — через $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ причем обозначения выберем так, чтобы для отметок выполнялись неравенства $X(\overline{G})\leqslant X(\overline{\overline{G}})$ и $Y(\overline{H})\leqslant Y(\overline{\overline{H}})$. На шкале l_x, как известно, определена отметка $x=X(P)$, а на шкале l_y — отметка $y=Y(P)$.

3.8. *Функция $x=X(P)$ не может достигать локального максимума и минимума ни в одной точке шкалы l_x, кроме точек $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$; функция $y=$ $=Y(P)$ не может достигать локального максимума и минимума ни в одной точке шкалы l_y, кроме точек $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$.*

Допустим, для определенности, что функция $X(P)$ достигает локального максимума в точке K_0, отличной от $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$. Пусть $X(K_0)=x_0$. У точки K^0 существует связная окрестность U относительно l_x, для каждой точки K которой выполняется условие $X(K)\leqslant X(K_0)$. Возьмем на шкале l_y точку L_0, в которой функция $y=Y(P)$ принимает наибольшее значение $\overline{\overline{y}}$ (точка L_0 могла бы оказаться и одной из точек $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$). Проведем разрешающую прямую α через K_0 и L_0. На α возьмем какую-либо точку M шкалы l_z; эта точка будет иметь отметку $z_0 = f(x_0, y_0)$. Так как K_0 отлична от $\overline{G}$ и $\overline{\overline{G}}$, то U имеет точки по обе стороны от α (если L_0 взять в качестве полюса полярной системы координат, как в 3.7, то ясно, что U будет состоять из всех точек шкалы l_x, удовлетворяющих условию $\theta' < \theta < \theta''$, где θ' и θ'' — некоторые числа, $\theta'' - \theta' < \pi$, и полярный угол θ_0 точки K_0 будет удовлетворять неравенствам $\theta' < \theta_0 < \theta''$). Возьмем по точке K' и K'' окрестности U по разные стороны от α. Проведем прямые β' и β'' соответственно через M и K' и через M и K''. Так как U связна, всякая прямая, проходящая через M и любую точку внутри двух вертикальных углов, образованных прямыми β' и β'' и содержащих α, будет пересекать окрестность U, потому что всякая такая прямая отделяет точки K' и K''. Внутренность того из этих двух вертикальных углов, который содержит L_0, пересекает шкалу l_y по открытому в ней множеству V. Возьмем точку L_1 множества V с отметкой $y_1 < \overline{\overline{y}}$; такая точка существует, так как в противном случае все точки множества V имели бы отметку $\overline{\overline{y}}$, и мы могли бы найти связную окрестность $W \subset V$ точки L_0, все точки которой имели бы одну и ту же отметку $\overline{\overline{y}}$, что, в силу 3.5, невозможно. Проведем прямую через точки M и L_1; она пересечет U в точке с отметкой x_1, причем $x_1 \leqslant x_0$. Вместе с тем мы должны иметь $f(x_1, y_1) = z_0 = f(x_0, \overline{\overline{y}})$, что невозможно, так как $f(x, y)$ монотонно возрастает по каждой из переменных при постоянной другой и поэтому $f(x_1, y_1) \leqslant f(x_0, y_1) < f(x_0, \overline{\overline{y}})$, и мы пришли к противоречию.

Из 3.8 сразу получаем следствие:

3.9. *Функция $x = X(P)$ задает взаимно однозначное отображение шкалы l_x на отрезок $\overline{x} \leqslant x \leqslant \overline{\overline{x}}$, причем $X(\overline{G}) = \overline{x}$, $X(\overline{\overline{G}}) = \overline{\overline{x}}$. Функция $y = Y(P)$ задает взаимно однозначное отображение шкалы l_y на отрезок $\overline{y} \leqslant y \leqslant \overline{\overline{y}}$, причем $Y(\overline{H}) = \overline{y}$, $Y(\overline{\overline{H}}) = \overline{\overline{y}}$.*

Так как взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта на компакт есть гомеоморфизм, мы получаем (учитывая также 3.3):

3.10. *Шкалы l_x и l_y являются монотонными шкалами первого типа; шкала l_z является шкалой второго типа. Номограмма $N(l_x, l_y, l_z)$ есть номограмма функции $z = f(x, y)$ в смысле § 2.*

Нормируем номограмму $N(l_x, l_y, l_z)$, совершив проективное преобразование плоскости sOt номограммы, переводящее точку $\overline{G}$ в точку $(-1, 1)$, точку $\overline{\overline{G}}$ — в точку $(1,1)$, $\overline{H}$ — в $(-1, -1)$ и $\overline{\overline{H}}$ — в $(1, -1)$; такое преобразование существует, так как никакие три из точек $\overline{G}$, $\overline{\overline{G}}$, $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ не лежат на одной (прямой. Тогда получившаяся после преобразования номограмма $N'(l'_x, l'_y, l'_z)$ будет нормированной номограммой функции $z = f(x, y)$ и поэтому будет обладать всеми свойствами 2.1—2.14 § 2. Заметим только, что, так как шкала l_z, а значит и l'_z, в этом случае связна и локально связна, здесь будут некоторые упрощения, а именно: 1) l'_z не будет теперь иметь точек на полупрямых $t = \pm s$, $|t| > 1$ и, следовательно, целиком будет расположена в полосе

$|s| \leqslant 1$; 2) точка $M(s, t)$ основной части Γ_z шкалы l'_z при $s \to 1$ и при $s \to -1$ будет стремиться к определенным пределам.

Из 3.10 заключаем:

3.11. *Функция $z = f(x, y)$ примера 2 не номографируема в смысле § 3, т. е. не существует номограммы со шкалами, заданными параметрически, определяющей эту функцию в квадрате R_{xy} $(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.*

В частности, если в качестве параметра шкалы l_x рассмотреть саму отметку x, в качестве параметра шкалы l_y — отметку y и в качестве параметра шкалы l_z — отметку z, получаем:

3.12. *Для построенной в примере 2 функции $z = f(x, y)$ не существует определителя*

$$\Delta(x, y, z) = \begin{vmatrix} X_1(x) & X_2(x) & 1 \\ Y_1(y) & Y_2(y) & 1 \\ Z_1(z) & Z_2(z) & 1 \end{vmatrix}$$

(где функции $X_1(x)$ и $X_2(x)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, функции $Y_1(y)$ и $Y_2(y)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \leqslant y \leqslant 1$ и функции $Z_1(z)$ и $Z_2(z)$ определены и непрерывны на отрезке $0 \leqslant z \leqslant 2$) такого, что в квадрате R_{xy} уравнение $\Delta(x, y, z) = 0$ определяет функцию $z = f(x, y)$.

(Поступило в редакцию 23/X 1957 г.)

Литература

1. М. А. Крейнес, И. А. Вайнштейн и Н. Д. Айзенштат, О номографировании функций, заданных на сетке, ДАН СССР, т. **111**, № 5 (1956), 941—944.
2. W. Blaschke, G. Bohl, Geometrie der Gewebe, Berlin, 1938.