5.4 X, 17

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК

НОВАЯ СЕРИЯ

ТОМ СОРОК ВОСЬМОЙ
ВЫПУСК ЧЕТВЕРТЫЙ
Т. 48(90):4

АВГУСТ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1959

О сходящихся последовательностях частных сумм тригонометрического ряда

Д. Е. Меньшов (Москва)

§ 1. Введение

Возьмем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \tag{1.1}$$

члены которого являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Положим

$$Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

и введем следующее

Определение 1. Функцию $\varphi(x) \equiv \varphi(x, E)$, определенную почти всюду на некотором множестве $E \subset [a, b]$* положительной меры, мы будем называть предельной функцией ряда (1.1) на этом множестве, если существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{k\to\infty} Q_{\rho_k}(x) = \varphi(x) \tag{1.3}$$

почти всюду на E.

Возьмем какое-нибудь множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ измеримых функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ положительной меры. (Множества E могут быть различными для различных функций $\varphi(x, E) \in M$.) В [1] и [2] дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы множество M было множеством всех предельных функций** некоторого тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.4}$$

Чтобы сформулировать это условие, введем следующие определения (см. [1] и [2]).

---

* Когда мы говорим, что измеримая функция определена почти всюду на некотором измеримом множестве, то мы не исключаем возможности того, что эта функция равна $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

** Мы называем $\varphi(x, E)$ предельной функцией тригонометрического ряда, если она является предельной функцией этого ряда на соответствующем множестве E.

Определение 2. Возьмем последовательность функций

$$\varphi_n(x, E_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.5}$$

каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве E_n. Положим

$$E = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \tag{1.6}$$

и предположим, что множество E и некоторое другое множество E' удовлетворяют условиям

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad \operatorname{mes} E' > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - E) = 0. \tag{1.7}$$

Мы скажем, что функция $f(x, E')$, определенная почти всюду на множестве E', есть предельный элемент в широком смысле последовательности (1.5), если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, E_n) = f(x, E') \tag{1.8}$$

почти всюду на E'*.

Легко видеть, что предельный элемент в широком смысле последовательности (1.5) определяется не однозначно. В самом деле, если $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности (1.5) и $\operatorname{mes} E'' > 0$, $\operatorname{mes}(E'' - E') = 0$, то функция $\varphi(x, E'')$, равная $\varphi(x, E')$ почти всюду на E'', также будет предельным элементом в широком смысле последовательности (1.5).

Определение 3. Возьмем какое-нибудь множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$. Мы будем называть функцию $f(x, E')$, определенную почти всюду на множестве E' положительной меры, предельным элементом в широком смысле множества M, если существует последовательность функций $\varphi_n(x, E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих множеству M, для которой $f(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле.**

В этом определении функции $\varphi_n(x, E_n)$ не обязательно должны быть различны для различных n. В таком случае, как легко показать, любая функция $\varphi(x, E)$ множества $M = \{\varphi(x, E)\}$ есть предельный элемент в широком смысле этого множества.

Определение 4. Пусть множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ удовлетворяет тем же условиям, как в определении 3. Мы будем называть это множество замкнутым в узком смысле, если оно содержит все свои предельные элементы в широком смысле.

* Отметим, что имеет смысл говорить о пределе функции $\varphi_n(x, E_n)$ при $n \to \infty$ почти всюду на E', так как на основании (1.6) и (1.7) в любой точке $x \in E'$, кроме, быть может, множества меры нуль, функция $\varphi_n(x, E_n)$ определена для всех достаточно больших значений n. Ясно, в каком смысле надо понимать равенство (1.8), если $\varphi_n(x, E_n)$ принимают значения $+\infty$ или $-\infty$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все множества E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат некоторому интервалу $[a, b]$, и будем рассматривать только те предельные элементы в широком смысле последовательности (1.5), для которых $E' \subset [a, b]$.

** В этом определении мы можем всегда предположить, что $E_n \subset E'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так как $(E \cdot E') = \overline{\lim_{n\to\infty}} (E_n \cdot E')$, если E определяется из равенства (1.6), и $\operatorname{mes}(E \cdot E') = \operatorname{mes} E'$, в силу (1.7), и, следовательно, множества E_n можно заменить множествами $(E_n \cdot E')$.

В [2] доказана следующая

Теорема А. *Пусть* $M = \{\varphi(x, E)\}$ — *множество измеримых функций, каждая из которых определена почти всюду на некотором множестве E положительной меры, лежащем на* $[-\pi, \pi]$.

Для того чтобы M было множеством всех предельных функций тригонометрического ряда (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы это множество было замкнутым в узком смысле.*

Теорема А может быть получена как следствие более общих теорем. Прежде, чем сформулировать эти теоремы, напомним некоторые определения, содержащиеся в [3].*

Определение 5. Пусть задана последовательность измеримых функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определенных почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Мы скажем, что измеримая функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, если $F(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a^\circ.\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) > \varphi(x)]\cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0^{**} \tag{1.9}$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$.

$$b^\circ.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) > \psi(x)]\cdot E[F(x) > \psi(x)]\} > 0 \tag{1.10}$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$.

Определение 6. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обладают теми же свойствами, как в определении 5. Мы скажем, что измеримая функция $G(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, есть нижний предел по мере на этом сегменте последовательности функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, если $G(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha^\circ.\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) < \tau(x)]\cdot E[\tau(x) < G(x)]\} = 0 \tag{1.11}$$

для любой измеримой функции $\tau(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$.

$$\beta^\circ.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) < \chi(x)]\cdot E[G(x) < \chi(x)]\} > 0 \tag{1.12}$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$.

Можно доказать, что верхний и нижний пределы по мере определяются однозначно с точностью до множества меры нуль и обладают многими свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных верхних и нижних пределов***.

---

* [3], стр. 4.

** Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

*** [3], § 2, стр. 6—15, теоремы A, B, C, D, E. В [3] предполагалось, что функции $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ конечны почти всюду на $[a, b]$. Но определения верхнего и нижнего пределов по мере имеют смысл и без этого ограничения, причем теоремы A, B, C, D, E, также справедливы без этого ограничения и их доказательства остаются без изменения.

Возьмем теперь ряд (1.1), члены которого являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на сегменте $[a, b]$. Введем еще следующее

Определение 7. Мы скажем, что измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$, определенные почти всюду на $[a, b]$, являются верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда (1.1), если $F(x)$ и $G(x)$ равны соответственно верхнему и нижнему пределам по мере на $[a, b]$ последовательности частных сумм того же ряда. *

В [2] первая часть теоремы A, т. е необходимость условия, входящего в ее формулировку, получается из следующей теоремы.

Теорема B. *Пусть члены ряда* (1.1) *измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте* $[a, b]$ *и пусть функции* $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на* $[a, b]$ *этого ряда. Тогда множество* $M = \{\varphi(x, E)\}$ *всех предельных функций ряда* (1.1) *удовлетворяет следующим условиям:*

α. *M замкнуто в узком смысле.*

β. *Если $\varphi(x, F) \in M$, то $\varphi(x, E)$ измерима на E и*

$$G(x) \leqslant \varphi(x, E) \leqslant F(x) \tag{1.13}$$

почти всюду на этом множестве.

γ. *Если $\varphi(x, E) \in M$ и если*

$$E_0 = E + E[F(x) = G(x)], \tag{1.14}$$

то функция $\varphi_0(x, E_0)$, определяемая из равенства

$$\varphi_0(x, E_0) = \begin{cases} \varphi(x, E) & (x \in E), \\ F(x) & (x \in E_0 - E), \end{cases} \tag{1.15}$$

также принадлежит множеству M **.

Вторая часть теоремы A, т. е. достаточность содержащегося в ней условия, получается из следующей теоремы.

Теорема C. *Пусть $M = \{\varphi(x, E)\}$ — не пустое множество функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве E, причем*

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [-\pi, \pi]. \tag{1.16}$$

Предположим, что множество M удовлетворяет условиям α, β и γ теоремы B, где $F(x)$ и $G(x)$ являются измеримыми функциями, определенными почти всюду на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяющими неравенству

$$G(x) \leqslant F(x) \tag{1.17}$$

*почти всюду на этом сегменте.****

---

* Это определение дано в [4] (определение 5, стр. 779).

** В равенстве (1.15) мы определяем функции $\varphi(x, E)$ и $F(x)$ произвольным образом на множестве меры нуль, где они первоначально не были определены.

*** Мы предполагаем, что условия α, β и γ формулируются для сегмента $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

В таком случае существует тригонометрический ряд (1.4), *обладающий следующими свойствами*:

a. *M есть множество всех предельных функций ряда* (1.4).

b. *$F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ ряда* (1.4).

c. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0^*. \tag{1.18}$$

В настоящей работе мы докажем теоремы, которые были сформулированы без доказательства в [4], причем некоторые из них мы докажем в более общем виде. Все эти теоремы получатся, как следствия, из теорем A, B и C формулировки которых были даны выше.

Прежде всего напомним некоторые определения, содержащиеся в [4], а также введем еще одно определение (определение 11).

Определение 8. Мы будем говорить, что функция $f(x)$, определенная почти всюду на некотором множестве E положительной меры, является **предельным элементом в смысле сходимости почти всюду на E для множества** $M = \{\varphi(x)\}$ **функций** $\varphi(x)$, определенных почти всюду на E, если существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in M$ $(n=1,2,\ldots)$, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду на E**.

Предельный элемент $f(x)$ некоторого множества M в смысле сходимости почти всюду является частным случаем предельного элемента в широком смысле (см. определение 2), если этот предельный элемент и все функции $\varphi(x, E) \in M$ определены почти всюду на одном и том же множестве E.

Определение 9. Мы будем говорить, что множество $M = \{\varphi(x)\}$ функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на некотором множестве E положительной меры, является **замкнутым в смысле сходимости почти всюду на** E, если всякая функция, являющаяся предельным элементом множества M в смысле сходимости почти всюду на E, принадлежит этому множеству M.

Как обычно, пустое множество и множество, состоящее из конечного числа функций, мы будем считать замкнутыми.

Определение 10. Пусть члены ряда (1.1) измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Мы скажем, что функция $f(x)$ — **предельная функция в узком смысле ряда (1.1) на множестве** $E \subset [a, b]$, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k $(k = 1, 2, \ldots)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

a. Последовательность частных сумм $Q_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ряда (1.1) сходится к $f(x)$ почти всюду на множестве E.

b. Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n'_k $(k = 1, 2, \ldots)$, содержащейся в последовательности n_k $(k=1, 2, \ldots)$, частные суммы $Q_{n'_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1.1) не сходятся ни к какому

---

* Теорема сформулирована в [1] и доказана в [2].

** [4], стр. 777. В [4] мы называли предельный элемент предельной функцией. В этом определении функции $f(x)$ и $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ могут принимать значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

пределу (ни к конечному, ни к бесконечному определенного знака) почти всюду на множестве $[a, b] - E$ *.

Определение 11. Предельную функцию $\varphi(x, E)$ ряда (1.1) на множестве E мы будем называть **максимальной**, если не существует другой предельной функции $f(x, E')$ того же ряда на множестве E', удовлетворяющей условиям:

a°. $E \subset E' \subset [a, b]$, $\operatorname{mes}(E' - E) > 0$.

b°. $f(x, E') = \varphi(x, E)$ почти всюду на множестве E.

Легко доказать, что любая максимальная предельная функция $\varphi(x, E)$ ряда (1.1) на множестве E есть предельная функция в узком смысле ряда (1.1) на том же множестве. Но обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

В самом деле, если бы некоторая максимальная предельная функция $\varphi(x, E)$ ряда (1.1) на множестве E не являлась предельной функцией в узком смысле того же ряда на E, то существовала бы возрастающая последовательность натуральных чисел n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и содержащаяся в ней подпоследовательность n'_k $(k = 1, 2, \ldots)$, которые удовлетворяют условиям:

1)
$$\lim_{k\to\infty} Q_{n_k}(x) = \varphi(x, E)$$
почти всюду на E,

2)
$$\lim_{k\to\infty} Q_{n'_k}(x) = g(x)$$
почти всюду на некотором множестве e, где

$$e \subset [a, b] - E, \quad \operatorname{mes} e > 0$$

и $g(x)$ — некоторая функция, определенная почти всюду на e.

Тогда, полагая

$$E' = E + e,$$
$$f(x, E') = \varphi(x, E)$$

почти всюду на E,

$$f(x, E') = g(x)$$

почти всюду на e, мы получили бы:

$$\lim_{k\to\infty} Q_{n'_k}(x) = f(x, E')$$

почти всюду на E', а так как

$$\operatorname{mes}(E' - E) = \operatorname{mes} e > 0,$$

то $\varphi(x, E)$ не могла бы быть предельной функцией в узком смысле ряда (1.1) на множестве E. Таким образом, всякая максимальная функция ряда (1.1) на множестве E является предельной в узком смысле этого ряда на том же множестве.

---

* Если $\operatorname{mes} E = b - a$, то определение предельной функции в узком смысле совпадает с данным ранее определением предельной функции (см. определение 1).

С другой стороны, возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x),$$

члены которого являются измеримыми функциями, определенными и конечными на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, и предположим, что любая последовательность частных сумм этого ряда не сходится ни к какому пределу почти всюду на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Положим

$$u_{2k}(x) = \sum_{s=0}^{k} v_s(x), \quad u_{2k+1}(x) = -\sum_{s=0}^{k} v_s(x) \quad \left(0 \leqslant x < \frac{1}{2};\ k = 0, 1, 2, \ldots\right),$$

$$u_n(x) = 0 \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1;\ n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Возьмем ряд (1.1), члены которого определяются из последних равенств. Легко видеть, что функция $\varphi(x) \equiv 0$ является предельной функцией в узком смысле ряда (1.1) на сегменте $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, но не является максимальной предельной функцией этого ряда на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.*

Формулируем теперь четыре теоремы, которые или содержатся в [4], или являются обобщениями теорем, содержащихся в [4].

Теорема I. *Для того чтобы множество $M = \{\varphi(x)\}$ измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ положительной меры, было множеством всех предельных функций некоторого тригонометрического ряда* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы M было замкнутым в смысле сходимости почти всюду.* **

Теорема II. *Если члены ряда* (1.1) *являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$, и если $E \subset [a, b]$, $\operatorname{mes} E > 0$, то множество всех предельных функций ряда* (1.1) *на E есть замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на E* ***.

Теорема III. *Пусть $M = \{\varphi(x)\}$ — некоторое множество измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ положительной меры. Предположим, что M — замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на E.*

---

* В определении предельной функции в узком смысле (определение 10) мы берем $[a, b] = [0, 1]$, $E = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $n_k = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

** [4], теорема 2. В [4] мы дали определение предельной функции ряда на множестве E, не требуя, чтобы выполнялось условие $\operatorname{mes} E > 0$. Однако во всем дальнейшем изложении мы будем вводить это требование, так как в смысле определения, данного в [4], любая функция, определенная на множестве меры нуль, является предельной для любого ряда вида (1.1).

*** [4], теорема 3. В теореме 3 мы предполагали, что члены $u_n(x)$ ряда (1.1) конечны почти всюду на ограниченном множестве E, но мы можем считать, что $u_n(x)$ конечны почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$, содержащем множество E, так как мы можем положить $u_n(x) = 0$ на $[a, b] - E$.

В таком случае можно определить тригонометрический ряд (1.4), *который обладает следующими свойствами*:

α) *Каждая из функций* $\varphi(x)\in M$ *есть максимальная предельная функция ряда* (1.4) *на множестве* E.

β) *Если* $f(x)$ — *предельная функция ряда* (1.4) *на множестве* E, *то* $f(x)\in M$.

γ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *.

Теорема IV. *Возьмем множество* E *положительной меры, содержащееся в* $[-\pi, \pi]$, *и измеримые функции* $F(x)$, $G(x)$, *определенные почти всюду на* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяющие условию*

$$G(x) \leqslant F(x) \tag{1.19}$$

почти всюду на этом сегменте.

Возьмем, далее, множество $M = \{\varphi(x)\}$ *измеримых функций* $\varphi(x)$, *определенных почти всюду на* E *и удовлетворяющих условию*

$$G(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x) \tag{1.20}$$

почти всюду на этом множестве. Предположим, что M — *замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на* E.

Тогда можно определить тригонометрический ряд (1.4), *обладающий следующими свойствами*:

1°. M *есть множество всех предельных функций ряда* (1.4) *на множестве* E.

2°. *Если какая-нибудь последовательность частных сумм* $S_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ *ряда* (1.4) *с возрастающими номерами* n_k *сходится всюду на некотором множестве* $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, *к функции* $f(x)$, *то существует такая последовательность функций* $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{1.21}$$

почти всюду на e.

3°. $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (1.4).

4°. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{1.22}$$

5°. *Если множество*

$$H = \{([-\pi, \pi] - E)\cdot E[\,G(x) < F(x)]\} \tag{1.23}$$

имеет положительную меру, то для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *соответствующая последовательность частных сумм* $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *ряда* (1.4) *не сходится ни к какому*

---

* Так как всякая максимальная предельная функция некоторого ряда на множестве E есть предельная функция в узком смысле того же ряда на E (см. замечание после определения 11), то теорема III содержит, как частный случай, теорему 4 из [4].

В определении 11, которым мы пользуемся при формулировке теоремы III, мы полагаем $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

пределу (ни к конечному, ни к бесконечному определенного знака) почти всюду на множестве H *.

Ясно, что теорема I является следствием теорем II и III. Далее, легко видеть, что теорема III получается, как следствие, из теоремы IV. В самом деле, пусть $M = \{\varphi(x)\}$ — некоторое множество измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на множестве E положительной меры, лежащем на $[-\pi, \pi]$. Предположим, что M — замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на E. Положим теперь в теореме IV

$$G(x) = -\infty, \quad F(x) = +\infty \quad (x \in [-\pi, \pi]). \tag{1.24}$$

Тогда для функций $F(x)$, $G(x)$ и $\varphi(x) \in M$ будет выполняться неравенство (1.20) почти всюду на E, а для функций $F(x)$ и $G(x)$ будет выполняться неравенство (1.19) всюду на $[-\pi, \pi]$. Следовательно, мы находимся в условиях применимости теоремы IV, а в таком случае на основании этой теоремы можно определить тригонометрический ряд (1.4), удовлетворяющий всем условиям 1°—5° из формулировки теоремы IV. При этом множество H, входящее в условие 5°, определяется из равенства

$$H = [-\pi, \pi] - E. \tag{1.25}$$

Условие 4° теоремы IV совпадает с условием γ) теоремы III. Далее из условия 1° теоремы IV следует, что каждая функция $\varphi(x) \in M$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E и, обратно, если $f(x)$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E, то $f(x) \in M$. Тогда ряд (1.4) удовлетворит условию β) теоремы III. Поэтому, чтобы закончить доказательство этой теоремы, нам достаточно доказать, что ряд (1.4) удовлетворяет условию α).

Мы уже доказали, что каждая из функций $\varphi(x) \in M$ есть предельная функция ряда (1.4) на множестве E. Докажем теперь, что каждая из этих функций есть максимальная предельная функция ряда (1.4) на множестве E. Предположим, что одна из функций $\varphi_0(x) \in M$ не является максимальной предельной функцией ряда (1.4) на множестве E. Так как мы уже доказали, что всякая функция $\varphi(x) \in M$ — предельная функция ряда (1.4) на E, то из определения максимальной предельной функции (см. определение 11)** следует, что для функции $\varphi_0(x)$ существует предельная функция $f(x, E')$ ряда (1.4) на некотором множестве E', удовлетворяющем условиям

$$E \subset E' \subset [-\pi, \pi), \quad \operatorname{mes}(E' - E) > 0, \tag{1.26}$$

причем

$$f(x, E') = \varphi_0(x)$$

почти всюду на E.

Так как $f(x, E')$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E', то существует такая последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k, что

$$\lim_{k\to\infty} S_{n_k}(x) = f(x, E') \tag{1.27}$$

почти всюду на E' и, следовательно, почти всюду на $E' - E$.

---

* Теорема IV является небольшим обобщением теоремы 5, сформулированной в [4].

** В определении 11 полагаем $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

С другой стороны, из равенства (1.25) и условий (1.26) следует, что

$$E' - E \subset H. \tag{1.28}$$

Кроме того, в силу условия 5° теоремы IV, последовательность функций $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ не сходится ни к какому пределу почти всюду на множестве H, а это невозможно, так как на основании (1.26) $\operatorname{mes}(E' - E) > 0$.

Таким образом, предположение, что $\varphi_0(x)$ не является максимальной предельной функцией ряда (1.4) на множестве E, приводит к противоречию, и, следовательно, любая функция $\varphi(x) \in M$ есть максимальная предельная функция ряда (1.4) на множестве E, т. е. ряд (1.4) удовлетворяет условию α) теоремы III.

Как мы уже отметили, этим завершается доказательство теоремы III, т. е. теорема III является следствием теоремы IV.

Из всего сказанного следует, что для доказательства теорем I—IV достаточно доказать теоремы II и IV. В § 2 настоящей работы мы получим доказательства этих двух последних теорем, пользуясь теоремами В и С, формулированными в начале настоящей работы.

Из теоремы IV можно получить, как следствия, теоремы 2 и 3, доказанные в [3]. Кроме того, из той же теоремы IV мы получим, как следствие, еще одну теорему. Для ее формулировки введем следующее

Определение 12. Пусть K — некоторое множество точек (x, y) на плоскости. (Пары чисел $(x, +\infty)$ и $(x, -\infty)$ мы также будем рассматривать как точки на плоскости.)

Мы будем называть множество K замкнутым по вертикали, если для любого действительного x множество K_x всех значений y, для которых $(x, y) \in K$ при данном x, есть линейное замкнутое множество.*

В конце § 2 будет доказана следующая

Теорема V. *Пусть K — плоское множество, замкнутое по вертикали, проекция которого на ось x совпадает с сегментом $[-\pi, \pi]$. Предположим, что две измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$ определены почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, причем для каждого x этого сегмента, за исключением, быть может, множества меры нуль, выполняется неравенство*

$$G(x) \leqslant y \leqslant F(x) \tag{1.29}$$

для любого y, для которого соответствующая точка $(x, y) \in K$. Пусть, далее, $M = \{\varphi(x)\}$ — множество всех измеримых функций, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$, для каждой из которых выполняется условие

$$[x, \varphi(x)] \in K, \tag{1.30}$$

*каково бы ни было $x \in [-\pi, \pi]$, кроме, быть может, множества меры нуль**.*

Тогда существует тригонометрический ряд (1.4), удовлетворяющий следующим условиям:

А. *M — множество всех предельных функций на $[-\pi, \pi]$ ряда (1.4).*

---

* Множество K_x может содержать числа $y = +\infty$ и $y = -\infty$. Ясно, как надо определять в этом случае линейное замкнутое множество. Множество K_x может быть также пустым.

** Мы обозначаем через $[x, \varphi(x)]$ точку на плоскости с координатами x и $y = \varphi(x)$.

B. *Если какая-нибудь последовательность частных сумм* $S_{n_k}(x)$ $(k=1, 2,\ldots)$ *ряда* (1.4) *с возрастающими номерами* n_k *сходится к функции* $f(x)$ *на некотором множестве* $e \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} e > 0$, *то существует такая последовательность функций* $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{1.31}$$

почти всюду на e.

C. $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (1.4).

D. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{1.32}$$

Предположим по-прежнему, что члены ряда (1.1) являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$. В § 3 настоящей работы мы докажем, что всякий такой ряд имеет по крайней мере одну максимальную предельную функцию, если множество его предельных функций не пустое; а именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема VI. *Если* $\varphi(x, E)$ — *предельная функция ряда* (1.1) *на множестве* E, *то существует максимальная предельная функция* $\chi(x, H)$ *этого ряда на некотором множестве* H, *которая удовлетворяет следующим условиям*:

$$E \subset H, \tag{1.33}$$

$$\chi(x, H) = \varphi(x, E) \tag{1.34}$$

почти всюду на E.

§ 2. Вывод теоремы II из теоремы B

Возьмем ряд (1.1), члены которого являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Предположим, что множество E удовлетворяет условиям

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [a, b], \tag{2.1}$$

и обозначим через $M = \{\varphi(x, E)\}$ множество всех предельных функций ряда (1.1) на данном множестве E. Докажем, что M замкнуто в смысле сходимости почти всюду на E.

Если M — пустое множество, то теорема II доказана. Предположим теперь, что M — не пустое множество. Обозначим через $M' = \{\psi(x, e)\}$ множество *всех* предельных функций ряда (1.1). Тогда каждая из функций $\psi(x, e) \in M$ определена почти всюду на соответствующем множестве e, причем

$$\operatorname{mes} e > 0, \quad e \subset [a, b]. \tag{2.2}$$

Ясно, что

$$M \subset M' \tag{2.3}$$

и, кроме того, в силу теоремы B, M' замкнуто в узком смысле (см. условие α теоремы B).

Из (2.3) следует, что M' — не пустое множество. Пусть $f(x, E)$ — произвольный предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на E (см. определение 8, § 1). Из определения 9 (§ 1) следует, что для доказательства теоремы II достаточно доказать, что

$$f(x, E) \in M. \tag{2.4}$$

Так как $f(x, E)$—предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на E, то из определения 8 следует, что существует такая последовательность функций $\varphi_n(x, E)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\varphi_n(x, E) \in M \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, E) = f(x, E) \tag{2.6}$$

почти всюду на E, причем каждая из функций $\varphi_n(x, E)$ определена почти всюду на этом множестве.

Принимая во внимание условия (2.1) и определение 2, в котором полагаем $E' = E$, $E_n = E$ $(n = 1, 2, \ldots)$, мы видим, что функция $f(x, E)$, определенная почти всюду на E, есть предельный элемент в широком смысле последовательности функций $\varphi_n(x, E)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а тогда на основании (2.3), (2.5) и определения 3 (§ 1) функция $f(x, E)$ есть предельный элемент в широком смысле множества M'.

Так как мы уже доказали, что множество M' замкнуто в узком смысле и, следовательно, в силу определения 4, содержит все свои предельные элементы в широком смысле, то

$$f(x, E) \in M'. \tag{2.7}$$

Так как $f(x, E)$ определена почти всюду на E, то из определения множества M' и условия (2.7) следует, что $f(x, E)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E. В таком случае, в силу определения множества M, выполняется условие (2.4), и теорема II доказана.

Вывод теоремы IV из теоремы С. Предположим, что точечное множество E, функции $F(x)$, $G(x)$ и множество $M = \{\varphi(x)\}$ измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на E, удовлетворяют условиям теоремы IV (§ 1). Докажем, что тогда можно определить тригонометрический ряд (1.4), обладающий свойствами 1°—5° (см. формулировку теоремы IV).

По условию теоремы IV, имеем для множества E:

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.8}$$

Положим

$$E_0 = E + E[F(x) = G(x)], \tag{2.9}$$

откуда, в силу (2.8),

$$E \subset E_0, \quad \operatorname{mes} E_0 > 0, \quad E_0 \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.10}$$

Для каждой функции $\varphi(x) \in M$ определим функцию $\varphi_0(x)$ равенством

$$\varphi_0(x) = \begin{Bmatrix} \varphi(x) & (x \in E), \\ F(x) & (x \in E_0 - E). \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

В этом равенстве мы определяем функции $\varphi(x)$ и $F(x)$ произвольным образом на множестве меры нуль, где они первоначально не были определены. Ясно, что для каждой функции $\varphi(x) \in M$ соответствующая функция $\varphi_0(x)$ определяется однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль. При этом $\varphi_0(x)$ измерима на E_0 так как $\varphi(x)$ измерима на E и $F(x)$ измерима на $[-\pi, \pi]$.

Множество E_0 и функция $\varphi_0(x)$ получаются из множества E и функции $\varphi(x)$ таким же образом, как в условии γ теоремы В (§ 1), в котором вместо $\varphi(x, E)$ и $\varphi_0(x, E_0)$ мы берем $\varphi(x)$ и $\varphi_0(x)$.

Обозначим через $M_0 = \{\psi(x, e)\}$ множество всех функций $\psi(x, e)$, каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве e и удовлетворяет условиям:

$$\text{A}^\circ. \quad \operatorname{mes} e > 0, \quad e \subset [-\pi, \pi], \quad \operatorname{mes}(e - E_0) = 0. \tag{2.12}$$

В°. Для $\psi(x, e)$ можно определить такую функцию $\varphi_0(x)$, соответствующую одной из функций $\varphi(x) \in M$ [см. (2.11)], что

$$\psi(x, e) = \varphi_0(x) \tag{2.13}$$

почти всюду на e.

Принимая во внимание равенства (2.8), (2.10), (2.11) и условия А°, В°, мы видим, что

$$M \subset M_0. \tag{2.14}$$

Обозначим через M'_0 множество всех предельных элементов в широком смысле множества M_0 (см. определение 3, § 1)*. Так как всякий элемент множества M_0 есть предельный элемент в широком смысле этого множества (см. замечание после определения 3), то

$$M_0 \subset M'_0 \tag{2.15}$$

и, следовательно, в силу (2.14),

$$M \subset M'_0. \tag{2.16}$$

Докажем, что всякий предельный элемент в широком смысле множества M'_0 является предельным элементом в широком смысле множества M_0. Предварительно сделаем следующее замечание.

Предположим, что $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле некоторой последовательности функций

$$\psi_n(x, e_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.17}$$

каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве e_n (см. определение 2, § 1). Мы докажем, что для любого положительного

* К множеству M'_0 мы причисляем только те предельные элементы $\varphi(x, E')$ в широком смысле, для которых $E' \subset [-\pi, \pi]$ (см. примечание к определению 2 (§ 1), в котором берем $[a, b] = [-\pi, \pi]$). Вообще, E' может содержать точки вне $[-\pi, \pi]$; однако всегда справедливо равенство $\operatorname{mes}(E' - [-\pi, \pi]) = 0$. В дальнейшем, когда мы будем говорить о множестве всех предельных функций $\varphi(x, E')$ в широком смысле для множества M_0, то мы всегда будем подразумевать, что $E' \subset [-\pi, \pi]$.

числа ε можно определить такое множество E'' и такое натуральное число N, что выполняются следующие условия:

$$\operatorname{mes} E'' > \operatorname{mes} E' - \varepsilon, \quad E'' \subset E', \tag{2.18}$$

$$E'' \subset e_n \quad (n \geqslant N); \tag{2.19}$$

$$| \varphi(x, E') - \psi_n(x, e_n) | < \varepsilon, \quad -\infty < \psi_n(x, e_n) < +\infty, \tag{2.20}$$

если $\varphi(x, E')$ конечна, $x \in E''$ и $n \geqslant N$;

$$\psi_n(x, e_n) > \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.21}$$

если $\varphi(x, E') = +\infty$, $x \in E''$, $n \geqslant N$, и

$$\psi_n(x, e_n) < -\frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.22}$$

если $\varphi(x, E') = -\infty$, $x \in E''$, $n \geqslant N$.

В самом деле, так как $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций (2.17), то, полагая

$$e_0 = \varliminf_{n \to \infty} e_n \tag{2.23}$$

и принимая во внимание определение 2 (§ 1), будем иметь:

$$\operatorname{mes} e_0 > 0, \quad \operatorname{mes} E' > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - e_0) = 0 \tag{2.24}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(x, e_n) = \varphi(x, E') \tag{2.25}$$

почти всюду на E'.

Обозначим через H_m $(m = 1, 2, \ldots)$ множество всех точек x, для каждой из которых выполняется условие

$$x \in e_n \quad (n \geqslant m). \tag{2.26}$$

Тогда на основании (2.23)

$$e_0 = \sum_{m=1}^{\infty} H_m \tag{2.27}$$

и, кроме того,

$$H_m \subset e_n, \quad H_m \subset H_{m+1} \quad [(n \geqslant m;\ m = 1, 2, \ldots). \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{mes} e_0 = \lim_{m \to \infty} \operatorname{mes} H_m, \tag{2.29}$$

а в таком случае для любого положительного числа ε можно определить такое натуральное число m_0, что

$$\operatorname{mes} H_m > \operatorname{mes} e_0 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (m \geqslant m_0). \tag{2.30}$$

Из (2.28) следует, что

$$H_{m_0} \subset e_n \quad (n \geqslant m_0),$$

а в таком случае, функции $\psi_n(x, e_n)$ определены почти всюду на H_{m_0} для всех $n \geqslant m_0$. Кроме того, в силу (2.25), последовательность функций

$$\psi_n(x, e_n) \quad (n = m_0,\ m_0+1, \ldots) \tag{2.31}$$

сходится к $\varphi(x, E')$ почти всюду на $(E' \cdot H_{m_0})$, причем, в силу (2.24) и (2.30)

$$\operatorname{mes}(E' \cdot H_{m_0}) > \operatorname{mes} E' - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.32}$$

Применяя теорему Егорова, мы можем определить множество E'', которое удовлетворяет условиям

$$\operatorname{mes} E'' > \operatorname{mes}(E' \cdot H_{m_0}) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad E'' \subset (E' \cdot H_{m_0}) \tag{2.33}$$

и на котором последовательность (2.31) сходится равномерно к функции $\varphi(x, E')$. *

Следовательно, для взятого нами положительного числа ε можно подобрать такое натуральное число $N > m_0$, что будут выполняться условия (2.20), (2.21) и (2.22). Так как, в силу (2.28), (2.32), (2.33) и неравенства $N > m_0$, выполняются также условия (2.18) и (2.19), то высказанное нами утверждение доказано.

Предположим теперь, что $\varphi(x, E')$ — произвольный предельный элемент в широком смысле множества M_0'. Тогда существует последовательность (2.17) функций $\psi_n(x, e_n)$, принадлежащих множеству M_0', для которой $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле. Следовательно, полагая $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и принимая во внимание предыдущее замечание, мы можем опре-

---

* У нас функция $\varphi(x, E')$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры. В этом случае равномерная сходимость последовательности (2.31) к функции $\varphi(x, E')$ на множестве E'' определяется следующим образом:

Мы будем говорить, что последовательность (2.31) сходится равномерно к $\varphi(x, E')$ на E'', если для любого положительного числа σ можно определить такое натуральное число N, что для всех $n > N$ и для всех $x \in E''$ выполняется одно из следующих условий:

$$|\varphi(x, E') - \psi_n(x, e_n)| < \sigma, \quad -\infty < \psi_n(x, e_n) < +\infty,$$

если $\varphi(x, E')$ конечна,

$$\psi_n(x, e_n) > \frac{1}{\sigma},$$

если $\varphi(x, E') = +\infty$, и

$$\psi_n(x, e_n) < -\frac{1}{\sigma},$$

если $\varphi(x, E') = -\infty$ ([5], определение 3, стр. 22).

Можно доказать, что теорема Егорова справедлива и при таком определении равномерной сходимости ([5], лемма K, стр. 22).

делить натуральные числа N_m и множества Ω_m $(m=1, 2,\ldots)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{mes}\Omega_m > \operatorname{mes} E' - \frac{1}{2^m}, \quad \Omega_m \subset E' \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.34}$$

$$\Omega_m \subset e_{N_m} \subset E'^{*} \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.35}$$

$$\left.\begin{array}{c}|\varphi(x,E') - \psi_{N_m}(x, e_{N_m})| < \frac{1}{2^m}, \quad -\infty < \psi_{N_m}(x,e_{N_m}) < +\infty \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.36}$$

если $\varphi(x, E')$ конечна и $x \in \Omega_m$,

$$\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) > 2^m \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.37}$$

если $\varphi(x, E') = +\infty$, $x \in \Omega_m$, и

$$\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) < -2^m \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.38}$$

если $\varphi(x, E') = -\infty$, $x \in \Omega_m$.

Мы уже знаем, что

$$\psi_n(x, e_n) \in M'_0 \quad (n=1, 2,\ldots). \tag{2.39}$$

В таком случае, в силу определения множества M'_0, для любого $m=1,2,\ldots$ функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ есть предельный элемент в широком смысле множества M_0. Следовательно, на основании определения 3 (§ 1), для любого $m = 1,2,\ldots$ существует последовательность функций

$$g_{mk}(x, e'_{mk}) \in M_0 \quad (k=1, 2,\ldots), \tag{2.40}$$

для которой $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ — предельный элемент в широком смысле.**

Принимая во внимание сделанное выше замечание, в котором опять полагаем $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ $(m=1, 2,\ldots)$, мы можем утверждать, что для любого $m=1,2,\ldots$ существует такое множество Ω'_m и такое натуральное число k_m, что будут выполняться следующие условия:

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{mes}\Omega'_m > \operatorname{mes} e_{N_m} - \frac{1}{2^m}, \quad \Omega'_m \subset e_{N_m} \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.41}$$

$$\Omega'_m \subset e'_{m,k_m} \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.42}$$

$$\left.\begin{array}{c}|\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) - g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m})| < \frac{1}{2^m}, \\ -\infty < g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) < +\infty \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.43}$$

---

* В силу примечания к определению 3 (§ 1) мы можем предположить, что $e_n \subset E'$ $(n=1, 2,\ldots)$.

** Каждая из функций $g_{mk}(x, e'_{mk})$ определена почти всюду на соответствующем множестве e'_{mk}.

если $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ конечна и $x \in \Omega'_m$,

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) > 2^m \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{2.44}$$

если $\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) = +\infty$, $x \in \Omega'_m$, и

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) < -2^m \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{2.45}$$

если $\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) = -\infty$, $x \in \Omega'_m$.

Сопоставляя (2.34), (2.35), (2.41) и (2.42), получаем:

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} e'_{m,k_m} \geqslant \operatorname{mes}(\Omega'_m \cdot \Omega_m) > \operatorname{mes} E' - \frac{1}{2^{m-2}}, \quad \Omega'_m \subset E' \\ (m = 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \tag{2.46}$$

Далее, полагая

$$e' = \varliminf_{m\to\infty} e'_{m,k_m}, \tag{2.47}$$

$$\omega = \varliminf_{m\to\infty} (\Omega'_m \cdot \Omega_m), \tag{2.48}$$

будем иметь на основании (2.42) и (2.46):

$$\omega \subset e', \quad \omega \subset E', \quad \operatorname{mes}\omega = \operatorname{mes} E'. \tag{2.49}$$

Принимая во внимание (2.24)* и (2.49), получаем:

$$\operatorname{mes} e' > 0, \quad \operatorname{mes} E' > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - e') = 0. \tag{2.50}$$

Если $x \in (\Omega'_m \cdot \Omega_m)$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(x, E')$ конечна, то на основании (2.36) функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ также конечна, а тогда, в силу (2.36) и (2.43),

$$|\varphi(x, E') - g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m})| < \frac{1}{2^{m-1}}. \tag{2.51}$$

Далее, если $x \in (\Omega'_m \cdot \Omega_m)$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(x, E') = +\infty$, то на основании (2.37) функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ или конечна, или равна $+\infty$, а в таком случае, в силу (2.37), (2.43) и (2.44),

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) > 2^m - \frac{1}{2^m}. \tag{2.52}$$

Наконец, если $x \in (\Omega'_m \cdot \Omega_m)$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(x, E') = -\infty$, то на основании (2.38) функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ или конечна, или равна $-\infty$, а тогда, в силу (2.38), (2.43) и (2.45),

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) < -2^m + \frac{1}{2^m}. \tag{2.53}$$

---

* Так как $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то выполняются условия (2.24), где e_0 определяется из равенства (2.23).

Сопоставляя равенство (2.48) с неравенствами (2.51), (2.52) и (2.53), мы видим, что

$$\lim_{m\to\infty} g_{m,k_m}(x,\ e'_{m,k_m}) = \varphi(x,\ E') \tag{2.54}$$

для всех $x \in \omega$ и, следовательно, на основании (2.49) это равенство выполняется почти всюду на множестве E'. В таком случае, принимая во внимание (2.47), (2.50) и определение 2 (§ 1), мы видим, что $\varphi(x,\ E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций $g_{m,k_m}(x,\ e'_{m,k_m})$ $(m = 1,\ 2,\ldots)$. Так как на основании (2.40)

$$g_{m,k_m}(x,\ e'_{m,k_m}) \in M_0 \quad (m = 1, 2,\ldots),$$

то из определения 3 (§ 1) следует, что $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле множества M_0.

Мы предположили, что $\varphi(x,\ E')$—произвольный предельный элемент в широком смысле множества M'_0. Следовательно, любой предельный элемент в широком смысле множества M'_0 является также предельным элементом в широком смысле множества M_0. Так как, по определению, множество M'_0 состоит из всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, то отсюда следует, что множество M'_0 содержит все свои предельные элементы в широком смысле, а в таком случае, в силу определения 4 (§ 1), множество M'_0 замкнуто в узком смысле.

Докажем теперь, что множество M'_0 и функции $F(x), G(x)$, входящие в формулировку теоремы IV, удовлетворяют условиям α, β и γ теоремы B (§ 1), если в этих условиях взять M'_0 вместо M. Так как множество M'_0 замкнуто в узком смысле, то оно удовлетворяет условию α. Докажем, что множество M'_0 и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям β и γ.

Пусть $\varphi(x,\ E')$ — произвольная функция, принадлежащая множеству M'_0. Тогда $\varphi(x,\ E')$ определена почти всюду на E', причем

$$\operatorname{mes} E' > 0, \quad E' \subset [-\pi,\ \pi]\,^*. \tag{2.55}$$

Так как множество M'_0 состоит из всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, то, в силу определения 3 (§ 1), существует последовательность функций

$$\psi_n(x,\ e_n) \in M_0 \quad (n = 1,\ 2,\ldots),^{**} \tag{2.56}$$

для которой $\varphi(x,\ E')$—предельный элемент в широком смысле.

В таком случае, определяя множество e_0 из равенства (2.23) и принимая во внимание определение 2 (§ 1), будем иметь:

$$\operatorname{mes} e_0 > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - e_0) = 0, \tag{2.57}$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x,\ e_n) = \varphi(x,\ E') \tag{2.58}$$

почти всюду на E'.

---

* См. примечание к определению множества M'_0.

** Каждая из функций $\psi_n(x,\ e_n)$ определена почти всюду на соответствующем множестве e_n.

Из определения множества M_0 (см. условия A° и B°, т. е. равенства (2.12), (2.13)) и условия (2.56) следует, что

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} e_n > 0, \quad e_n \subset [-\pi, \pi], \quad \operatorname{mes}(e_n - E_0) = 0 \\ (n = 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \tag{2.59}$$

и, кроме того, существуют функции

$$\varphi_n(x) \in M \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.60}$$

и функции $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которые определены соответственно почти всюду на множествах E и E_0 и для которых удовлетворяются условия:

a°.
$$\psi_n(x, e_n) = \varphi_{0n}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.61}$$
почти всюду на e_n;

b°.
$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{0n}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & (x \in E), \\ F(x) & (x \in E_0 - E) \end{cases} \\ (n = 1, 2, \ldots), \end{array}\right\} \tag{2.62}$$

т. е. $\varphi_{0n}(x)$ определяется через функцию $\varphi_n(x)$ таким же образом, как $\varphi_0(x)$ определяется через $\varphi(x)$ при помощи равенства (2.11). * При этом функции $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ измеримы на множестве E_0.

Принимая во внимание (2.23) и (2.59), получаем:

$$\operatorname{mes}(e_0 - E_0) = 0,$$

откуда, в силу (2.57),

$$\operatorname{mes}(E' - E_0) = 0. \tag{2.63}$$

Так как $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (см. (2.60)), то, по условию теоремы IV,

$$G(x) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.64}$$

почти всюду на множестве E, откуда на основании (2.62)

$$G(x) \leqslant \varphi_{0n}(x) \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.65}$$

почти всюду на множестве E_0, а в таком случае, в силу (2.59) и (2.61),

$$G(x) \leqslant \psi_n(x, e_n) \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.66}$$

почти всюду на соответствующем множестве e_n. Сопоставляя (2.23), (2.57) (2.58) и (2.66), мы видим, что выполняется неравенство

$$G(x) \leqslant \varphi(x, E') \leqslant F(x) \tag{2.67}$$

почти всюду на множестве E'.

* Напомним, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_0(x)$, входящие в условие B°, определены соответственно на множествах E и E_0 (см. определение множества M в начале доказательства теоремы IV и равенство (2.11).

Так же, как в равенстве (2.11), мы определяем функции $\varphi_{0n}(x)$ произвольным образом на том множестве меры нуль, на котором функции $\varphi_n(x)$ и $F(x)$ первоначально не были определены.

Кроме того, так как функции $\varphi_{0n}(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ измеримы на множестве E_0, то, в силу (2.59) и (2.61), каждая из функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n=1, 2,\ldots)$ измерима на соответствующем множестве e_n, а тогда на основании (2.58) и (2.59) функция $\varphi(x, E')$ измерима на множестве E'.

Итак, мы взяли произвольную функцию $\varphi(x, E')\in M'_0$ и доказали, что выполняется неравенство (2.67) почти всюду на соответствующем множестве E', причем $\varphi(x, E')$ измерима на E'. В таком случае множество M'_0 и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условию β теоремы B (§ 1).

Докажем теперь, что множество M'_0 удовлетворяет условию γ той же теоремы.* Когда мы приступили к доказательству того, что множество M_0 и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям β и γ, мы взяли произвольную функцию $\varphi(x, E')\in M'_0$ и определили для нее функции $\psi_n(x, e_n)$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_{0n}(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ и множество e_0, удовлетворяющие условиям (2.23) и (2.56) — (2.66).

Положим

$$e'_n = e_n + E\,[F(x) = G(x)] \quad (n = 1, 2,\ldots), \tag{2.68}$$

$$\left.\begin{array}{c}\psi_{0n}(x, e'_n)= \begin{cases} \psi_n(x, e_n) & (x\in e_n), \\ F(x) & (x\in e'_n - e_n) \end{cases} \\ (n=1,\ 2,\ldots),^{**}\end{array}\right\} \tag{2.69}$$

$$E'_0 = E' + E\,[F(x) = G(x)], \tag{2.70}$$

$$\varphi_0(x, E'_0)= \left\{\begin{array}{ll} \varphi(x, E') & (x\in E'), \\ F(x) & (x\in E'_0 - E'). \end{array}\right\} \tag{2.71}$$

Множества e'_n и E'_0 получаются соответственно из множеств e_n и E' таким же образом, как множество E_0 получается из множества E при помощи равенства (1.14). Точно так же, функции $\psi_{0n}(x, e'_n)$ и $\varphi_0(x,E'_0)$ получаются соответственно из функций $\psi_n(x, e_n)$ и $\varphi(x, E')$ таким же образом, как функция $\varphi_0(x, E_0)$ получается из функции $\varphi(x, E)$ при помощи равенства (1.15).

Докажем, что $\varphi_0(x, E'_0)$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций

$$\psi_{0n}(x, e'_n) \quad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{2.72}$$

(см. определение 2, § 1). В самом деле, положим

$$e'_0 = e_0 + E\,[F(x) = G(x)]. \tag{2.73}$$

Тогда, принимая во внимание (2.23) и (2.68), будем иметь:

$$e'_0 = \varliminf_{n\to\infty} e'_n. \tag{2.74}$$

Далее, сопоставляя (2.57), (2.70) и (2.73), получаем:

$$\operatorname{mes} e'_0 > 0, \quad \operatorname{mes}(E'_0 - e'_0) = 0. \tag{2.75}$$

---

* В условии γ мы берем M'_0 вместо M.

** По поводу равенства (2.69) нужно сделать такое же пояснение, какое было сделано в примечании к равенству (1.15). В дальнейшем в аналогичных случаях мы не будем делать соответствующего пояснения.

Кроме того, из (2.55) и (2.70) следует, что

$$\operatorname{mes} E'_0 > 0. \tag{2.76}$$

Принимая во внимание (2.23), (2.57), (2.58), (2.69) и (2.71), мы видим, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{0n}(x, e'_n) = \varphi_0(x, E'_0) \tag{2.77}$$

почти всюду на E'.

В силу (2.71), равенство

$$\varphi_0(x, E'_0) = F(x) \tag{2.78}$$

справедливо на множестве $E'_0 - E'$.* Далее, на основании (2.70)

$$E'_0 - E' \subset E[F(x) = G(x)],$$

откуда, в силу (2.66), $\psi_n(x, e_n) = F(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ почти всюду на множестве $[e_n \cdot (E'_0 - E')]$ с тем же индексом n, а тогда, сопоставляя (2.68), (2.69) и (2.78), получаем:

$$\psi_{0n}(x, e'_n) = F(x) = \varphi_0(x, E'_0) \tag{2.79}$$

почти всюду на множестве $[e'_n \cdot (E'_0 - E')]$ с тем же индексом n.

Из равенства (2.74) следует, что

$$[e'_0 \cdot (E'_0 - E')] = \varliminf_{n\to\infty} [e'_n \cdot (E'_0 - E')]$$

а так как, в силу (2.75),

$$\operatorname{mes}[e'_0 \cdot (E'_0 - E')] = \operatorname{mes}(E'_0 - E'),$$

то на основании (2.79) равенство (2.77) выполняется почти всюду на множестве $E'_0 - E'$. Мы уже доказали, что то же равенство выполняется почти всюду на множестве E'. Следовательно, равенство (2.77) выполняется почти всюду на множестве E'_0, а в таком случае, принимая во внимание (2.74), (2.75), (2.76) и определение 2 (§ 1), мы видим, что $\varphi_0(x, E'_0)$ есть предельный элемент в широком смысле последовательности функций (2.72).

Докажем теперь, что

$$\psi_{0n}(x, e'_n) \in M_0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.80}$$

В самом деле, из (2.9), (2.59) и (2.68) следует, что

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{mes} e'_n > 0, \quad e'_n \subset [-\pi, \pi], \quad \operatorname{mes}(e'_n - E_0) = 0 \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{matrix}\right\} \tag{2.81}$$

* В равенстве (2.71) функция $F(x)$ определяется произвольным образом на том множестве меры нуль, где она первоначально не была определена. Если же считать, что $F(x)$ определена почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то равенство (2.78) будет выполняться почти всюду на множестве $E'_0 - E'$.

Далее, на основании (2.9) и (2.68)

$$e'_n - e_n \subset E\,[F(x) = G(x)] \subset E_0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.82}$$

откуда, в силу (2.65),

$$\varphi_{0n}(x) = F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.83}$$

почти всюду на множестве $e'_n - e_n$ с тем же индексом n. В таком случае, в силу (2.61) и (2.69), получаем:

$$\psi_{0n}(x, e'_n) = \varphi_{0n}(x) \quad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{2.84}$$

почти всюду на множестве e'_n с тем же индексом n.

Мы уже знаем, что каждая функция $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ определяется через соответствующую функцию $\varphi_n(x) \in M$ таким же образом, как функция $\varphi_0(x)$ определяется через функцию $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — произвольная функция, принадлежащая множеству M [см. (2.11) и (2.62)]. В таком случае, сопоставляя условия A° и B° [см. (2.12) и (2.13)] с условиями (2.81), (2.84) и принимая во внимание определение множества M_0 при помощи условий A° и B°, мы видим, что выполняется условие (2.80).

Мы уже доказали, что $\varphi_0(x, E'_0)$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций (2.72). Тогда, так как M'_0 — множество всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, то из условия (2.80) следует, что

$$\varphi_0(x, E'_0) \in M'_0. \tag{2.85}$$

Итак, мы взяли произвольную функцию $\varphi(x, E') \in M'_0$ и доказали, что соответствующая функция $\varphi_0(x, E'_0)$, определяемая из равенства (2.71), также принадлежит множеству M'_0. При этом множество E'_0 определяется из равенства (2.70). В таком случае множество M'_0 удовлетворяет условию γ теоремы B (§ 1). *

Раньше мы уже доказали, что множество M'_0 удовлетворяет условиям α и β теоремы B. Кроме того, для любой функции $\varphi(x, E') \in M'_0$ выполняется условие (2.55). Следовательно, на основании теоремы C (§ 1) мы можем определить тригонометрический ряд (1.4), который обладает свойствами a, b и c, содержащимися в формулировке этой теоремы.**

Докажем, что ряд (1.4) обладает свойствами 1°—5°, перечисленными в формулировке теоремы IV (§ 1). Свойства b и c совпадают соответственно со свойствами 3° и 4°. Докажем, что ряд (1.4) обладает свойством 2°, содержащимся в формулировке теоремы IV.

Предположим, что какая-нибудь последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k сходится всюду на некотором множестве $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, к функции $f(x) \equiv f(x, e)$. Тогда эта функция определена всюду на e и является предельной функцией ряда (1.4) на этом множестве (см. определение 1, § 1).

* В условии γ мы берем множества M'_0, E', E'_0 вместо множеств M, E, E_0 и функции $\varphi(x, E')$, $\varphi_0(x, E'_0)$ вместо функций $\varphi(x, E)$, $\varphi_0(x, E_0)$.

** В свойстве a мы заменяем множество M множеством M'_0.

Из свойства a ряда (1.4) следует, что M'_0 есть множество всех предельных функций этого ряда, откуда вытекает, что

$$f(x) \in M'_0.$$

Множество M'_0, по определению, состоит из всех предельных элементов в широком смысле множества M_0. В таком случае, принимая во внимание определения 2 и 3 (§ 1), мы можем определить последовательность функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n = 1, 2,\ldots)$ и множество e_0, для которых удовлетворяются условия (2.23), (2.56), а также соотношения

$$\operatorname{mes} e_0 > 0, \quad \operatorname{mes}(e - e_0) = 0 \tag{2.86}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x, e_n) = f(x) \tag{2.87}$$

почти всюду на e. При этом, каждая из функций $\psi_n(x, e_n)$ определена почти всюду на соответствующем множестве e_n.

Из условия (2.56) и определения множества M_0 [см. условия A°, B°, т. е. равенства (2.12) и (2.13)], следует, что выполняются соотношения (2.59) и, кроме того, существуют функции $\varphi_n(x) \in M$ и $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1, 2,\ldots)$, определенные соответственно почти всюду на множествах E^* и E_0, для которых удовлетворяются условия a° и b°, т. е. равенства (2.61) и (2.62).

Из равенства (2.23) получаем:

$$(e \cdot e_0) = \underline{\lim}_{n\to\infty}(e \cdot e_n), \tag{2.88}$$

причем, в силу (2.86),

$$\operatorname{mes}(e \cdot e_0) = \operatorname{mes} e. \tag{2.89}$$

С другой стороны, так как $e \subset E$, то $(e \cdot e_n) \subset E$ $(n = 1, 2,\ldots)$, и, следовательно, сопоставляя (2.61) и (2.62), мы видим, что

$$\psi_n(x, e_n) = \varphi_n(x) \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{2.90}$$

почти всюду на соответствующем множестве $(e \cdot e_n)$, откуда на основании (2.87), (2.88) и (2.89) ясно, что выполняется равенство (1.21) почти всюду на e.

Итак, мы предположили, что некоторая последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2,\ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k сходится всюду на множестве $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, к функции $f(x)$, и мы доказали, что существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2,\ldots)$, для которой выполняется равенство (1.21) почти всюду на e. Следовательно, ряд (1.4) обладает свойством 2°, содержащимся в формулировке теоремы IV.

Докажем теперь, что ряд (1.4) обладает свойством 1°, содержащимся в формулировке той же теоремы. Предположим, что $f(x)$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E. Тогда, в силу определения 1 (§ 1), существует последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2,\ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на E. Следовательно, принимая во внимание уже доказанное свойство 2° ряда (1.4),

* Все функции $\varphi(x) \in M$ определены почти всюду на множестве E (см. начало доказательства теоремы IV).

в котором предполагаем, что $e \subset E$, $\operatorname{mes} e = \operatorname{mes} E$, мы можем утверждать, что существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой выполняется равенство (1.21) почти всюду на E, а в таком случае, принимая во внимание определение 8 (§ 1), мы видим, что $f(x)$ является предельным элементом в смысле сходимости почти всюду на E для множества M.

По условию теоремы IV(§ 1), множество M замкнуто в смысле сходимости почти всюду на E. Следовательно, принимая во внимание определение 9 (§ 1), мы можем утверждать, что

$$f(x) \in M. \tag{2.91}$$

Итак, мы предположили, что $f(x)$ — произвольная предельная функция ряда (1.4) на множестве E, и мы доказали, что выполняется условие (2.91). Раньше мы уже доказали, что $M \subset M'_0$ (см. (2.16)). С другой стороны, мы уже знаем, что M'_0 есть множество всех предельных функций ряда (1.4) и, кроме того, все функции, принадлежащие множеству M, определены почти всюду на E. В таком случае M есть множество всех предельных функций ряда (1.4) на множестве E, т. е. ряд (1.4) обладает свойством 1°, содержащимся в формулировке теоремы IV.

Так как мы уже доказали, что ряд (1.4) обладает свойствами 2°, 3°, 4°, указанными в формулировке этой теоремы, то для завершения ее доказательства достаточно показать, что ряд (1.4) обладает свойством 5° (см. формулировку той же теоремы).

Предположим, что множество H, определяемое из равенства (1.23), имеет положительную меру и, в то же время, ряд (1.4) не обладает свойством 5°. Тогда существует последовательность $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ частных сумм этого ряда с возрастающими номерами n_k, которая сходится к некоторой функции $\varphi(x, E')$ почти всюду на множестве E', причем

$$\operatorname{mes} E' > 0, \quad E' \subset H \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.92}$$

Следовательно, функция $\varphi(x, E')$, определенная почти всюду на E', является предельной функцией ряда (1.4) на этом множестве, а так как M'_0 — множество всех предельных функций ряда (1.4), то

$$\varphi(x, E') \in M'_0. \tag{2.93}$$

С другой стороны, M'_0 — множество всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, которое определяется условиями A° и B° [см. (2.12) и (2.13)]. Следовательно, существует последовательность функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих условию (2.56), для которых $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле, а в таком случае, определяя множество e_0 из равенства (2.23), мы получаем условия (2.57) и (2.58) (см. определение 2, § 1). Кроме того, из условия (2.56) и равенства (2.12) (см. условие A° в определении множества) следует, что множества e_n удовлетворяют соотношениям (2.59).

Сопоставляя (2.23) и (2.59), мы видим, что $\operatorname{mes}(e_0 - E_0) = 0$, откуда на основании (2.57)

$$\operatorname{mes}(E' - E_0) = 0. \tag{2.94}$$

Так как, в силу (1.23) и (2.9),

$$(H \cdot E_0) = 0,$$

то на основании (2.92)

$$\operatorname{mes}(E' - E_0) = \operatorname{mes} E' > 0,$$

что противоречит равенству (2.94).

Таким образом, предположение, что ряд (1.4) не обладает свойством 5°, приводит к противоречию, а в таком случае теорема IV доказана. Следовательно, эта теорема выведена из теоремы C.

В начале настоящего параграфа мы вывели теорему II из теоремы B. Кроме того, в § 1 мы получили теоремы I и III как следствия теорем II и IV. Таким образом, у нас доказаны теоремы I—IV.

Докажем теперь теорему V (см. § 1). Пусть множества K, M и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям этой теоремы. Тогда, принимая во внимание (1.29) и (1.30), мы видим, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ выполняется неравенство (1.20) для любой функции $\varphi(x) \in M$.

Докажем, что множество M замкнуто в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$. В самом деле, пусть $f(x)$ — предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Тогда на основании определения 8 (§ 1) существует последовательность функций

$$\varphi_n(x) \in M \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.95}$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{2.96}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Обозначим через K_x множество всех точек (x, y), которые имеют данную абсциссу x. Так как, по условию теоремы V, проекция множества K на ось x совпадает с сегментом $[-\pi, \pi]$, то K_x — не пустое множество для любого $x \in [-\pi, \pi]$. Кроме того, по условию теоремы V, множество K замкнуто по вертикали и, следовательно, в силу определения 12 (§ 1), каждое из множеств K_x, $x \in [-\pi, \pi]$, есть линейное замкнутое множество. С другой стороны, так как каждая из функций, принадлежащих множеству M, определена почти всюду на $[-\pi, \pi]$ (см. условия теоремы V), то на основании определения множества K_x и множества M [см. (1.30)] из условия (2.95) следует, что при фиксированном x величины $y = \varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат линейному множеству K_x, причем x — любое число из сегмента $[-\pi, \pi]$, кроме, быть может, множества меры нуль. В таком случае, так как каждое из множеств K_x, $x \in [-\pi, \pi]$, есть линейное замкнутое множество, из равенства (2.96) следует, что для любого фиксированного $x \in [-\pi, \pi]$, кроме, быть может, множества меры нуль, величина $y = f(x)$ принадлежит соответствующему множеству K_x.

Принимая во внимание определение множеств K_x, мы видим таким образом, что

$$[x, f(x)] \in K \tag{2.97}$$

для всех $x \in [-\pi, \pi]$, за исключением, быть может множества меры нуль. Далее, из определения множества M (см. формулировку теоремы V) и условия (2.95) следует, что функции $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2,\ldots)$ измеримы и определены почти всюду на $[-\pi, \pi]$, а в таком случае, в силу (2.96), функция $f(x)$ также измерима и определена почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Так как условие (2.97) выполняется почти всюду на том же сегменте, то из определения множества M следует, что

$$f(x) \in M. \tag{2.98}$$

Итак, мы предположили, что $f(x)$ — произвольный предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$, и мы доказали, что выполняется условие (2.98). В таком случае, в силу определения 9 (§ 1), множество M является замкнутым в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Раньше мы уже доказали, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ выполняется неравенство (1.20) для любой функции $\varphi(x) \in M$. Следовательно, множество M и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы IV (§ 1), в которых мы полагаем $E = [-\pi, \pi]$, а тогда на основании этой теоремы существует тригонометрический ряд (1.4), обладающий свойствами 1°— 5°, в которых также полагаем $E = [-\pi, \pi]$.

Так как при $E = [-\pi, \pi]$ свойства 1°— 4° ряда (1.4), перечисленные в формулировке теоремы IV, совпадают соответственно со свойствами A, B, C и D того же ряда, перечисленными в формулировке теоремы V, то эта последняя теорема доказана.

§ 3

Докажем теперь теорему VI, сформулированную в конце § 1. Предположим, что ряд (1.1)** имеет предельную функцию $\varphi(x, E)$ на множестве E. Тогда функция $\varphi(x, E)$ определена почти всюду на E, причем

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [a, b] \tag{3.1}$$

(см. определение 1, § 1). Докажем, что ряд (1.1) имеет максимальную предельную функцию $\chi(x, H)$, *** удовлетворяющую условиям (1.33) и (1.34).

Если $\psi(x, e)$ — какая-нибудь предельная функция ряда (1.1) на соответствующем множестве e, то мы обозначим через $\Omega(\psi, e)$ множество всех предельных функций $g(x, e')$ того же ряда****, для каждой из которых выполнены условия

$$e \subset e' \subset [a, b], \quad \operatorname{mes}(e' - e) > 0, \tag{3.2}$$

$$g(x, e') = \psi(x, e) \tag{3.3}$$

* Мы обозначаем через $[x, f(x)]$ точку на плоскости с координатами x и $y = f(x)$.

** Напомним, что члены ряда (1.1) измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$.

*** См. определение 11, § 1.

**** $g(x, e')$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве e'.

почти всюду на e. Для некоторых предельных функций $\psi(x, e)$ ряда (1.1) множество $\Omega(\psi, e)$ может быть пустым. В каждом не пустом множестве $\Omega(\psi, e)$ отметим по одной функции

$$g(x, e') \equiv F(x, e';\ \psi, e). \tag{3.4}$$

Тогда $F(x, e';\ \psi, e)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве e', для которой выполняются условия (3.2), а также условия

$$F(x, e';\ \psi, e) \in \Omega(\psi, e) \tag{3.5}$$

и

$$F(x, e';\ \psi, e) = \psi(x, e) \tag{3.6}$$

почти всюду на e.

Для каждого трансфинитного числа α первого или второго класса определим некоторое множество E_α и некоторую функцию $F_\alpha(x)$, заданную почти всюду на E_α. Прежде всего для каждого трансфинитного числа второго класса и второго рода отметим последовательность трансфинитных чисел β_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих условиям

$$\beta_\lambda < \beta_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots), \tag{3.7}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \beta_\lambda = \alpha. \tag{3.8}$$

Тогда

$$\beta_\lambda < \alpha \quad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

и, следовательно, β_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ являются трансфинитными числами первого или второго класса.

Для $\alpha = 0$ мы определим $E_\alpha \equiv E_0$ и $F_\alpha(x) \equiv F_0(x)$ из равенств

$$E_0 = E, \quad F_0(x) = \varphi(x, E), \tag{3.10}$$

где $\varphi(x, E)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E, существование которой предположено в начале доказательства теоремы VI. Тогда $F_0(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_0, причем на основании (3.1)

$$\operatorname{mes} E_0 > 0, \quad E_0 \subset [a, b] \tag{3.11}$$

и, кроме того, $F_0(x)$ измерима и определена почти всюду на E_0.

Возьмем теперь какое-нибудь трансфинитное число $\alpha > 0$ первого или второго класса и предположим, что для любого трансфинитного числа β, удовлетворяющего неравенству

$$\beta < \alpha, \tag{3.12}$$

определено множество E_β и измеримая функция $F_\beta(x)$, для которых выполняются условия:

1°. $$\operatorname{mes} E_\beta > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_\beta \subset [a, b] \quad (\beta' \leqslant \beta). \tag{3.13}$$

2°. $$F_{\beta'}(x) = F_\beta(x) \quad (\beta' \leqslant \beta) \tag{3.14}$$

почти всюду на $E_{\beta'}$.

3°. $F_\beta(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_β (см. определение 1, § 1).

Мы определим множество E_α и функцию $F_\alpha(x)$ следующим образом. Предположим сперва, что α — трансфинитное число второго рода. Для этого числа у нас уже отмечена последовательность трансфинитных чисел β_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих условиям (3.7), (3.8) и, следовательно, неравенству (3.9). В таком случае, так как условия 1°, 2° и 3° выполняются для любого $\beta < \alpha$, то

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} E_{\beta_\lambda} > 0, \quad E_{\beta_\lambda} \subset E_{\beta_{\lambda+1}} \subset [a, b] \\ (\lambda = 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

и

$$F_{\beta_\lambda}(x) = F_{\beta_{\lambda+1}}(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{3.16}$$

почти всюду на E_{β_λ}, причем каждая из функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) есть предельная функция ряда (1.1) на множестве E_{β_λ} с тем же индексом λ. Тогда каждая из функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) измерима и определена почти всюду на соответствующем множестве E_β.

Положим

$$E_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\infty} E_{\beta_\lambda}, \tag{3.17}$$

$$F_\alpha(x) = F_{\beta_\lambda}(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots), \tag{3.18}$$

если $x \in E_{\beta_\lambda}$ и $F_{\beta_\lambda}(x)$ определена. Так как каждая из функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) измерима и определена почти всюду на соответствующем множестве E_{β_λ}, то на основании (3.15), (3.16), (3.17) и (3.18) функция $F_\alpha(x)$ измерима и определена однозначно почти всюду на E_α. Мы будем рассматривать $F_\alpha(x)$ только в тех точках, где она определена однозначно. Тогда равенство (3.18) выполняется почти всюду на каждом множестве E_{β_λ} ($\lambda = 1, 2, \ldots$).

Докажем, что множество E_α и функция $F_\alpha(x)$ удовлетворяют условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и условию 3°, в которых мы берем α вместо β. Возьмем произвольное трансфинитное число $\beta' < \alpha$. Из равенства (3.8) и неравенства (3.9) следует, что можно определить натуральное число λ', для которого справедливо неравенство

$$\beta' < \beta_{\lambda'} < \alpha. \tag{3.19}$$

В таком случае, так как условие (3.13) выполняется для любого $\beta < \alpha$, то, в силу (3.15) и (3.17),

$$\operatorname{mes} E_{\beta'} > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_{\beta_{\lambda'}} \subset E_\alpha \subset [a, b]. \tag{3.20}$$

Кроме того, $E_{\beta'} \subset E_\alpha$, если $\beta' = \alpha$. Из этих условий следует, что

$$\operatorname{mes} E_\alpha > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_\alpha \subset [a, b] \quad (\beta' \leqslant \alpha), \tag{3.21}$$

т. е. условие 1° (см. (3.13)) выполняется, если вместо β взять α.

Перейдем к условию 2°. Предполагая по-прежнему, что $\beta' < \alpha$ и что для натурального числа λ' выполняются условия (3.19) и (3.20), и принимая во внимание (3.18) и (3.14) для $\beta = \beta_\lambda$, мы видим, что $F_{\beta'}(x) = F_\alpha(x)$ почти всюду на множестве $E_{\beta'}$. Так как, кроме того, $E_{\beta'} = E_\alpha$, если $\beta' = \alpha$, то

$$F_{\beta'}(x) = F_\alpha(x) \quad (\beta' \leqslant \alpha) \tag{3.22}$$

почти всюду на $E_{\beta'}$, т. е. мы получаем условие 2° [см. (3.14)], в котором вместо β взято α.

Докажем теперь, что выполняется условие 3°, в котором β заменено на α. Обозначим через M множество всех предельных функций ряда (1.1). Так как $\beta_\lambda < \alpha$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ [см. (3.9)], то из условия 3° для $\beta = \beta_\lambda$ вытекает, что для любого $\lambda = 1, 2, \ldots$ функция $F_{\beta_\lambda}(x)$ есть предельная функция ряда (1.1) на множестве E_{β_λ} и, следовательно,

$$F_{\beta_\lambda}(x) \in M \quad (\lambda = 1, 2, \ldots). \tag{3.23}$$

Далее, сопоставляя (3.15), (3.17) и (3.18), мы видим, что

$$E_\alpha = \varliminf_{\lambda\to\infty} E_{\beta_\lambda}, \tag{3.24}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} F_{\beta_\lambda}(x) = F_\alpha(x) \tag{3.25}$$

почти всюду на E_α, а в таком случае, в силу (3.21) и определения 2 (§ 1), функция $F_\alpha(x)$, определенная почти всюду на E_α, есть предельный элемент в широком смысле последовательности функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ *. Мы видим отсюда, принимая во внимание условие (3.23) и определение 3 (§ 1), что $F_\alpha(x)$ — предельный элемент в широком смысле множества M.

Так как M — множество всех предельных функций ряда (1.1), то на основании теоремы B (§ 1) это множество замкнуто в узком смысле и, следовательно, в силу определения 4 (§ 1), содержит все свои предельные элементы в широком смысле. Тогда из предыдущего следует, что

$$F_\alpha(x) \in M, \tag{3.26}$$

т. е. функция $F_\alpha(x)$, определенная почти всюду на E_α, есть предельная функция ряда (1.1) на этом множестве. Таким образом, мы получаем условие 3°, в котором β заменено на α.

Итак, мы предположили, что α — произвольное трансфинитное число второго рода и второго класса, и мы определили множество E_α и функцию $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и 3°, в которых α взято вместо β.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого или второго класса и первого рода. В этом случае существует трансфинитное число $\alpha - 1$, непосредственно предшествующее числу α. Так как условие 3° выполняется для любого $\beta < \alpha$, то, полагая в этом условии $\beta = \alpha - 1$, мы

* В определении 2 мы берем $E = E' = E_\alpha$.

видим, что $F_{\alpha-1}(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\alpha-1}$. Тогда у нас определено множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$. *

Предположим сперва, что $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — пустое множество. В этом случае мы положим

$$E_\alpha = E_{\alpha-1}, \quad F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}(x). \tag{3.27}$$

Так как условия 1°, 2° [см. (3.13), (3.14)] и условие 3° выполняются для любого $\beta < \alpha$, то, полагая в этих условиях $\beta = \alpha - 1$ и принимая во внимание (3.27), мы видим, что $F_\alpha(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_α и, кроме того, выполняются условия (3.21) и равенство (3.22) почти всюду на $E_{\beta'}$ для любого $\beta' \leqslant \alpha$, т. е. функция $F_\alpha(x)$ и множество E_α удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3°, в которых α взято вместо β.

Итак, предполагая, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого или второго класса и первого рода, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — пустое, мы определяем и в этом случае функцию $F_\alpha(x)$ и множество E_α, удовлетворяющие условиям 1°, 2° и 3°, в которых β заменено на α.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого или второго класса и первого рода, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое. Если $\psi(x, e)$ — какая-нибудь предельная функция ряда (1.1) на соответствующем множестве e и если множество $\Omega(\psi, e)$, определенное для этой функции, — не пустое, то в этом множестве у нас отмечена функция $F(x, e'; \psi, e)$, удовлетворяющая условиям (3.5) и (3.6). При этом $F(x, e'; \psi, e)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве e' и это множество e' удовлетворяет условиям (3.2). В таком случае во множестве $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ у нас отмечена функция $F(x, e'; F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$, которая является предельной функцией ряда (1.1) на множестве e'. Мы обозначим это множество e' через E_α и, кроме того, положим

$$F_\alpha(x) = F(x, E_\alpha; F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}). \tag{3.28}$$

Тогда $F_\alpha(x)$ будет предельной функцией ряда (1.1) на множестве E_α, причем это множество будет удовлетворять условиям

$$E_{\alpha-1} \subset E_\alpha \subset [a, b], \quad \operatorname{mes}(E_\alpha - E_{\alpha-1}) > 0, \tag{3.29}$$

$$F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}(x) \tag{3.30}$$

почти всюду на $E_{\alpha-1}$ [см. условия (3.2) и (3.6), в которых берем E_α, $F_{\alpha-1}(x)$, $E_{\alpha-1}$ и $F_\alpha(x)$ вместо e', $\psi(x, e)$, e и $F(x, e'; \psi, e)$].

Докажем, что определенные нами функция $F_\alpha(x)$ и множество E_α удовлетворяют условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и условию 3°, в которых β заменено на α. Мы уже видели, что $F_\alpha(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_α. Следовательно, функция $F_\alpha(x)$ и множество E_α удовлетворяют условию 3°, в котором вместо β взято α.

Возьмем теперь произвольное трансфинитное число $\beta' < \alpha$. Тогда $\beta' \leqslant \alpha - 1$ и, следовательно, из условий 1° и 2° [см. (3.13) и (3.14)], в которых полагаем $\beta = \alpha - 1$, будем иметь:

* Напомним, что множество $\Omega(\psi, e)$ определено для любой предельной функции $\psi(x, e)$ ряда (1.1), причем это множество $\Omega(\psi, e)$ состоит из всех предельных функций $g(x, e')$ ряда (1.1), удовлетворяющих условиям (3.2) и (3.3).

$$\operatorname{mes} E_{\alpha-1} > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_{\alpha-1} \subset [a, b] \quad (\beta' < \alpha), \tag{3.31}$$

$$F_{\beta'}(x) = F_{\alpha-1}(x) \quad (\beta' < \alpha) \tag{3.32}$$

почти всюду на $E_{\beta'}$, а в таком случае на основании (3.29) и (3.30) мы получаем соотношения (3.21) и (3.22). Это означает, что выполняются условия 1° и 2° [см. (3.13) и (3.14)], в которых β заменено на α.

Таким образом, предполагая, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого рода и класса не выше второго, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое, мы определяем множество E_α и функцию $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие условиям 1°, 2° и 3°, где вместо β взято α.

Раньше мы определили E_α и $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие тем же условиям когда $\alpha > 0$ — трансфинитное число класса не выше второго и притом второго рода или же первого рода, но такое, что соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — пустое. Следовательно, множество E_α и функция $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие предыдущим условиям, у нас определены во всех возможных случаях. * При этом, если α — первого рода и множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое, то выполняются соотношения (3.29).

Итак, мы взяли трансфинитное число $\alpha > 0$ класса не выше второго и предположили, что для всех трансфинитных чисел $\beta < \alpha$ определены функции $F_\beta(x)$ и множества E_β, удовлетворяющие условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и условию 3°. В этих предположениях мы определили функцию $F_\alpha(x)$ и множество E_α, удовлетворяющие тем же условиям 1°, 2° и 3°, в которых β заменено на α. Раньше мы уже определили функцию $F_\alpha(x)$ и множество E_α при $\alpha = 0$ [см. (3.10)], причем, так как $F_0(x)$ есть предельная функция ряда (1.1) на множестве E_0 и, кроме того, выполняются соотношения (3.11), то условия 1°, 2° и 3° удовлетворяются для $\beta = 0$. В таком случае, в силу трансфинитной индукции, функции $F_\alpha(x)$ и множества E_α определены для всех трансфинитных чисел α класса не выше второго, причем эти функции и множества удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3°, в которых β заменено на α.

Отсюда следует, что для всех трансфинитных чисел α класса не выше второго $F_\alpha(x)$ является предельной функцией ряда (1.1) на множестве E_α и, в то же время, выполняются условия (3.21) и (3.22). Кроме того, для всех чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго, для которых соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое, выполняются условия (3.29).

Докажем теперь, что для некоторого трансфинитного числа $\gamma > 0$ первого рода и класса не выше второго соответствующее множество $\Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1})$ — пустое. В самом деле, предположим, что для любых трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго соответствующие множества $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустые. Тогда, в силу сделанного выше замечания, для любых трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго выполняются условия (3.29). Принимая во внимание (3.21), мы можем утверждать, что для различных α, обладающих перечисленными свойствами, соответствующие множества $E_\alpha - E_{\alpha-1}$ не имеют общих точек и лежат на сегменте $[a, b]$. Тогда, так как существует несчетное множество трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго и так как для

* В предыдущих рассуждениях мы все время предполагали, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число класса не выше второго и что для любого $\beta < \alpha$ выполняются условия 1°, 2° и 3°.

всех таких трансфинитных чисел выполняются условия (3.29), то мы имеем на сегменте $[a, b]$ несчетное множество множеств положительной меры попарно без общих точек, что, как известно, невозможно.

Отсюда следует, что множества $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ не могут быть не пустыми для всех трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго, т. е. существует трансфинитное число $\gamma > 0$ первого рода и класса не выше второго, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1})$ — пустое.

Докажем, что $F_{\gamma-1}(x)$ — максимальная предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\gamma-1}$ (см. определение 11, § 1). В самом деле, мы уже знаем, что для любого α класса не выше второго функция $F_\alpha(x)$ является предельной функцией ряда (1.1) на соответствующем множестве E_α. Следовательно, $F_{\gamma-1}(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\gamma-1}$. Если теперь $F_{\gamma-1}(x)$ не есть максимальная предельная функция этого ряда, то, в силу определения 11 (§ 1), существует функция $f(x, E')$, определенная почти всюду на множестве E' и такая, что $f(x, E') = F_{\gamma-1}(x)$ почти всюду на множестве $E_{\gamma-1}$, причем

$$E_{\gamma-1} \subset E' \subset [a, b], \quad \text{mes}(E' - E_{\gamma-1}) > 0,$$

а в таком случае на основании определения множеств $\Omega(\psi, e)$ [см. (3.2) и (3.3)] * будем иметь:

$$f(x, E') \in \Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1}),$$

т. е. множество $\Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1})$ не будет пустым, что невозможно. Таким образом, $F_{\gamma-1}(x)$ — максимальная предельная функция ряда (1.1).

Из условия (3.21) и равенства (3.22), в которых полагаем $\beta' = 0$, $\alpha = \gamma - 1$, мы видим, что

$$E_0 \subset E_{\gamma-1}, \tag{3.33}$$

$$F_0(x) = F_{\gamma-1}(x) \tag{3.34}$$

почти всюду на множестве E_0, откуда, полагая $E_{\gamma-1} = H$, $F_{\gamma-1}(x) = \chi(x, H)$ и принимая во внимание (3.10), получаем соотношения (1.33) и (1.34). При этом, так как $F_{\gamma-1}(x)$ — максимальная предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\gamma-1}$, то $\chi(x, H)$ — максимальная предельная функция того же ряда на H, а так как мы предположили, что $\varphi(x, E)$ — произвольная предельная функция ряда (1.1) на множестве E (см. начало § 3), то теорема VI (§ 1) доказана.

(Поступило в редакцию 28/X 1957 г.)

Литература

1. Д. Меньшов, О предельных функциях тригонометрического ряда, ДАН СССР, т. **114**, № **3** (1957), 476—478.
2. Д. Меньшов, О предельных функциях тригонометрического ряда, Труды Моск. матем. о-ва, т. **7** (1958), 291—334.
3. Д. Меньшов, О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. **XXXII** (1950), 3—97.
4. Д. Меньшов, О пределах последовательностей частных сумм тригонометрических рядов, ДАН СССР, т. **106**, № **5** (1956), 777—780.
5. Д. Меньшов, О пределах неопределенности частных сумм универсальных тригонометрических рядов, Ученые Записки МГУ, т. **VII**, вып. **165**, математика (1954), 3—33.

* В условиях (3.2) и (3.3) мы берем $E_{\gamma-1}$, E', $f(x, E')$ и $F_{\gamma-1}(x)$ вместо e, e', $g(x, e')$ и $\psi(x, e)$.

Об одном свойстве одного класса интегралов Стильтьеса

Н. А. Давыдов (Калинин)

1. Пусть комплекснозначная функция $S(x)$ определена на множестве E неотрицательных действительных чисел, $\sup E = +\infty$; пусть, далее $\overline{G}$ — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости (это может быть: 1) замкнутая выпуклая область, ограниченная или неограниченная, 2) прямая, 3) луч, 4) отрезок, 5) точка). Если $\overline{G}$ отлично от всей комплексной плоскости, то обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ замкнутую выпуклую область, которая содержит множество $\overline{G}$ и каждая точка границы которой отстоит от множества $\overline{G}$ на расстояние, меньшее или равное ε.

Определение 1. Множество $\overline{G}$, отличное от всей комплексной плоскости, мы будем называть (C)-множеством функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность отрезков $[\alpha_k; \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что

$$S(x) \in \overline{G}_\varepsilon \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1}, \quad \frac{\beta_k}{\alpha_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если, в частности, (C)-множеством функции $S(x)$ является точка, то эту точку будем называть (C)-точкой этой функции.

Определение 2. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы будем называть (C)-точкой функции $S(x)$, если найдутся число $\lambda > 1$, последовательность отрезков $[\alpha_k; \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств $\overline{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, стягивающихся * к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$S(x) \in \overline{G}_k \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1}, \quad \frac{\beta_k}{\alpha_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В работе [1] мы доказали одно важное свойство методов Чезаро суммирования рядов. Оно состоит в том, что если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

суммируется к числу S каким-нибудь методом Чезаро (каким-нибудь $(c; p)$-методом) и если множество $\overline{G}$ является (C)-множеством последовательности $\{S_n\}$ частных сумм этого ряда, то $S \in \overline{G}$.

* Мы говорим, что множества $\overline{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ стягиваются к бесконечно удаленной точке, если расстояние от точки $z = 0$ до множества $\overline{G}_k$ стремится к ∞ при $k \to \infty$.

Из доказательства этого свойства легко следует также утверждение, что если бесконечно удаленная точка является (C)-точкой последовательности $\{S_n\}$, то средние Чезаро любого порядка для этой последовательности неограничены.

Из этого свойства мы получили в той же работе целый ряд теорем тауберова типа, обобщающих известные теоремы Г. Харди, Г. Харди и Дж. Литтельвуда, Э. Ландау, Р. Шмидта и М. А. Евграфова.

В настоящей работе мы докажем одно свойство одного класса интегралов Стильтьеса, из которого, в качестве его частных случаев, мы вновь получим сформулированное выше свойство методов Чезаро суммирования рядов и, кроме того, получим одно свойство методов Чезаро суммирования интегралов Лебега, аналогичное одному свойству методов Чезаро суммирования рядов. Это, в свою очередь, позволит теоремы тауберова типа, доказанные в работе [1] для рядов, суммируемых методами Чезаро, перенести на интегралы Лебега, суммируемые теми же методами.

2. Пусть $\alpha(t)$ — неубывающая функция, определенная в промежутке $[0; +\infty)$, $\alpha(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty$, $A(x)$ — комплекснозначная функция, непрерывная в том же промежутке $[0; +\infty)$, и пусть

$$A^{(p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t), \tag{2}$$

$$B^{(p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{p-1}d\alpha(t), \tag{3}$$

$$\sigma^{*(p)}(x)=\frac{A^{(p)}(x)}{B^{(p)}(x)} \quad (p=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Определение 1. Выпуклое множество $\overline{G}$, отличное от всей комплексной плоскости, мы назовем $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такая последовательность отрезков $[\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, что

$$A(x)\in\overline{G}_\varepsilon \text{ для } \alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k<\alpha_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty, \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}<+\infty, \tag{6}$$

где

$$h_k=\frac{\beta_k-\alpha_k}{p},\qquad Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)=\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(\alpha_k+mh_k),$$

$B^{(p)}(x)$ определяется по формуле (3).

В частности, если $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$ является точка, то эту точку будем называть $(\alpha(t);\ p)$-точкой этой функции.

Определение 2. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назовем $(\alpha(t);\ p)$-точкой функции $A(x)$, если можно указать последовательность отрезков $[\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств $\overline{G}_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$A(x)\in\overline{G}_k \text{ для } \alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k<\alpha_{k+1}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty, \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}<+\infty, \tag{8}$$

где h_k, $Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)$ и $B^{(p)}(x)$ — те же, что и в определении 1.

Естественно всю комплексную плоскость считать $(\alpha(t);\ p)$-множеством всякой функции $A(x)$.

Справедлива следующая

Основная теорема. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma^{*(p)}(x)=S$ *и если множество* $\overline{G}$ *является* $(\alpha(t);\ p)$*-множеством функции* $A(x)$, *то* $S\in\overline{G}$.

Если бесконечно удаленная точка является $(\alpha(t);\ p)$*-точкой функции* $A(x)$, *то*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\ |\sigma^{*(p)}(x)|=\infty.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\dfrac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=1}^{p}\ \int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\ \sum\limits_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}(t-x-\mu h)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)}{Q^{(p)}(x;\ h)}-C\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant m\leqslant p}|\sigma^{*(p)}(x+mh)-C|\,\frac{P^{(p)}(x;\ h)}{Q^{(p)}(x;\ h)}, \tag{9}$$

где

$$P^{(p)}(x;\ h)=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh),$$

$$Q^{(p)}(x;\ h)=\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh),$$

$x\geqslant 0$, $h=\dfrac{y-x}{p}>0$, C *— произвольное комплексное число,* p *— натуральное число,* $B^{(p)}(x)$ *и* $\sigma^{*(p)}(x)$ *определяются соответственно по формулам* (3) *и* (4).

Доказательство. Имеем:

$$A^{(p)}(x+mh)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)+$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)=$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\int_0^x \sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p-1}{\nu}(x-t)^{p-1-\nu}(mh)^\nu A(t)\,d\alpha(t) +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\int_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) + \frac{1}{(p-1)!}\int_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t).$$

Таким образом,

$$A^{(p)}(x+mh) = \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) + \frac{1}{(p-1)!}\int_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t). \tag{10}$$

Рассмотрим выражение

$$C^{(p)}(x;\ h) = \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh)[\sigma^{*(p)}(x+mh)-C]. \tag{11}$$

Используя равенство (10), получим:

$$C^{(p)}(x;\ h) = \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}A^{(p)}(x+mh) -$$

$$-C\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t) -$$

$$-CQ^{(p)}(x;\ h).$$

Так как выражение

$$\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x)$$

есть многочлен относительно m степени $p-1$, то

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) = 0.$$

Следовательно,

$$C^{(p)}(x;\ h) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \int\limits_{x}^{x+mh} (x+mh-t)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t) -$$

$$- CQ^{(p)}(x;\ h). \tag{12}$$

Далее имеем:

$$\sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \int\limits_{x}^{x+mh} (x+mh-t)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh} \Big[(-1)^{p-m} \binom{p}{m} (x+mh-t)^{p-1} +$$

$$+ (-1)^{p-m-1} \binom{p}{m+1} (x+(m+1)h-t)^{p-1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p-p} \binom{p}{p} (x+ph-t)^{p-1} \Big] A(t)\, d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh} \sum_{\nu=0}^{p-m} (-1)^{\nu} \binom{p}{\nu} [x-t+(p-\nu)t]^{p-1} A(t)\, d\alpha(t).$$

Из тождества ([2], стр. 282)

$$\sum_{\nu=0}^{p} (-1)^{\nu} \binom{p}{\nu} (x'+p-\nu h)^{p-1} \equiv 0$$

при $x' = x - t + ph$ получим:

$$\sum_{\nu=0}^{p-m} (-1)^{\nu} \binom{p}{\nu} [x-t+(p-\nu)h]^{p-1} =$$

$$= - \sum_{\nu=p-m+1}^{p} (-1)^{\nu} \binom{p}{\nu} [x-t+(p-\nu)h]^{p-1} =$$

$$= - \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{p-\mu} \binom{p}{p-\mu} [x-t+\mu h]^{p-1} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} [t-x-\mu h]^{p-1},$$

и равенство (12) примет вид:

$$C^{(p)}(x;\ h) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} [t-x-\mu h]^{p-1} A(t)\, d\alpha(t) -$$

$$- CQ^{(p)}(x;\ h). \tag{13}$$

Из (11) имеем:

$$|C^{(p)}(x;\ h)| \leqslant \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} B^{(p)}(x+mh)\,|\sigma^{*(p)}(x+mh)-C| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(x+mh)-C|\, P^{(p)}(x;\ h).$$

Отсюда и из (13) получаем *:

$$\left| \frac{\dfrac{1}{(p-1)!}\displaystyle\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)}{Q^{(p)}(x;\ h)} - C\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(x+mh)-C|\,\frac{P^{(p)}(x;\ h)}{Q^{(p)}(x;\ h)}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}d\alpha(t) = Q^{(p)}(x;\ h). \quad (14)$$

Доказательство. Выше было показано (см. (12) и (13)), что

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t).$$

Отсюда при $A(t)\equiv 1$ имеем:

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}d\alpha(t) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\left[\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t)\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh) -$$

$$- \frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{0}^{x}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t) = Q^{(p)}(x;\ h),$$

* Ниже будет доказано, что $Q^{(p)}(x;\ h)>0$, если $\alpha(t)\not\equiv C$ для $x<t<x+ph$.

так как

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int_0^x (x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t)=0,$$

в силу того, что интеграл $\int_0^x (x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t)$ есть многочлен относительно m степени $p-1$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}\geqslant 0 \tag{15}$$

для $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ x+(m-1)h\leqslant t\leqslant x+mh,$ *где* $x\geqslant 0,\ h>0$ *p — натуральное число, причем неравенство* (15) *обращается в равенство только при* $t=x$ *и* $t=x+ph$, *когда* $p>1$.

Доказательство. Вводя обозначение

$$D_{m,t'}^{(p)}=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t'-\mu)^{p-1},$$

где $m-1\leqslant t'\leqslant m$, получаем:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}=h^{p-1}D_{m,t'}^{(p)}.$$

Чтобы доказать неравенство (15), достаточно доказать, что

$$D_{m,t'}^{(p)}\geqslant 0 \tag{16}$$

для $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p$ и $m-1\leqslant t'\leqslant m$, причем неравенство (16) обращается в равенство только при $t'=0$ и $t'=p$, когда $p>1$.

Неравенство (16) верно для $p=1,\ 2$ и 3. Предположим, что оно верно для $p=n$, и докажем справедливость его для $p=n+1$.

Имеем:

$$D_{m,t'}^{(n+1)}-t'D_{m,t'}^{(n)}=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(t'-\mu)^{n-1}\left[\frac{n+1}{n-\mu+1}(t'-\mu)-t'\right]=$$

$$=(t'-n-1)\sum_{\mu=1}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu-1}(t'-\mu)^{n-1}=$$

$$=(n+1-t')\sum_{\mu=0}^{m-2}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(t'-1-\mu)^{n-1}=$$

$$=(n+1-t')\sum_{\mu=0}^{m-2}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(t''-\mu)^{n-1}=$$

$$=(n+1-t')D_{m-1,t''}^{(n)},$$

где $m-2 \leqslant t'' \leqslant m-1$. Следовательно,

$$D_{m,t'}^{(n+1)} = t' D_{m,t'}^{(n)} + (n+1-t') D_{m-1,t''}^{(n)}. \qquad (17)$$

Так как

$$D_{1,t'}^{(n+1)} = (t')^{n+1} \geqslant 0,$$

$$D_{n+1,t'}^{(n+1)} = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \binom{n+1}{\mu} (t'-\mu)^n =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n+1} (-1)^{\mu} \binom{n+1}{\mu} (t'-\mu)^n -$$

$$- (-1)^{n+1} [t'-n-1]^n = (n+1-t')^n \geqslant 0,$$

причем $D_{1,t'}^{(n+1)} = 0$ только при $t'=0$, а $D_{n+1,t'}^{(n+1)} = 0$ только при $t' = n+1$, то из равенства (17) вытекает, что $D_{m,t'}^{(n+1)} \geqslant 0$ для $m = 1, 2, \ldots, n+1$ и $m-1 \leqslant t' \leqslant m$, причем $D_{m,t'}^{(n+1)} = 0$ только при $m=1$ в точке $t'=0$ и при $m=n+1$ в точке $t'=n+1$. Неравенство (16) доказано. Этим доказано и неравенство (15).

Замечание. Из равенства (14) и неравенства (15) следует, что $Q^{(p)}(x;\ h) > 0$ для $x \geqslant 0$ и $h > 0$, если $\alpha(t) \not\equiv C$ для $x < t < x+ph$.

Доказательство основной теоремы. Предположим, что множество $\overline{G}$ является $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$, непрерывной на полуотрезке $[0;\ +\infty)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется последовательность отрезков $[\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, такая что

$$A(x) \in \overline{G}_{\varepsilon} \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1} \ (k=1, 2, \ldots), \ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty, \qquad (18)$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} < +\infty. \qquad (19)$$

Из неравенства (9) при $C=S$, $x=\alpha_k$, $h=h_k=\dfrac{\beta_k-\alpha_k}{p}$ имеем:

$$\left| \frac{\dfrac{1}{(p-1)!} \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k+(m-1)h_k}^{\alpha_k+mh_k} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} (t-\alpha_k-\mu h_k)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} - S \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(\alpha_k+mh_k) - S| \frac{P^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(\alpha_k+mh_k) - S| \frac{2^p B^p(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}.$$

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$, то из последнего неравенства, в силу условия (19), следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(p-1)!} \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k+(m-1)h_k}^{\alpha_k+mh_k} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} (t-\alpha_k-\mu h_k)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} = S. \qquad (20)$$

В силу лемм 2 и 3, условия (18), а также в силу выпуклости множества $\overline{G}_\varepsilon$, можем утверждать, что число, стоящее под знаком предела в равенстве (20), принадлежит области $\overline{G}_\varepsilon$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда $S \in \overline{G}_\varepsilon$. Так как $\overline{G}$ — замкнутое множество и ε сколь угодно мало, то $S \in \overline{G}$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что бесконечно удаленная точка является $(\alpha(t); p)$-точкой функции $A(x)$. Тогда найдется последовательность отрезков $[\alpha_k; \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и последовательность $\{G_k\}$ замкнутых выпуклых множеств, стягивающихся к бесконечно удаленной точке комплексной плоскости, такие, что

$$A(x) \in \overline{G}_k \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots), \ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty, \tag{21}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k; h_k)} < +\infty.$$

Из неравенства (9) при $x = \alpha_k$, $h = h_k = \frac{\beta_k - \alpha_k}{p}$, $C = 0$ получим:

$$\left| \frac{1}{(p-1)!\ Q^{(p)}(\alpha_k; h_k)} \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k+(m-1)h_k}^{\alpha_k+mh_k} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \binom{p}{\mu} (t - \alpha_k - \mu h_k)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0 \leqslant m \leqslant p} |\sigma^{*(p)}(\alpha_k + mh_k)| \frac{P^{(p)}(\alpha_k; h_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k; h_k)}.$$

В силу лемм 2 и 3 и условия (21), а также в силу выпуклости множества $\overline{G}_k$, можем утверждать, что число, стоящее под знаком модуля в левой части последнего неравенства, принадлежит множеству $\overline{G}_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Так как расстояние точки $z = 0$ до множества $\overline{G}_k$ стремится к бесконечности при $k \to \infty$, то из последнего неравенства заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0 \leqslant m \leqslant p} |\sigma^{*(p)}(\alpha_k + mh_k)| = \infty.$$

Основная теорема доказана полностью.

Отметим непосредственные следствия основной теоремы.

Следствие 1. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$ *и если точка* A *является* $(\alpha(t); p)$-*точкой функции* $A(x)$, *то* $S = A$.

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$, *то для сходимости последовательности* $\{A(x_k)\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, *достаточно, чтобы каждая предельная точка этой последовательности была* $(\alpha(t); p)$-*точкой функции* $A(x)$.

Следствие 3. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$ *и если* $A(x) \in \overline{G}$ *для* $\alpha_k \leqslant x \leqslant \beta'_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty$ *и* $S \,\overline{\in}\, \overline{G}$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B^{(p)}(\beta'_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k; h_k)} = +\infty,$$

где

$$h_k = \frac{\beta'_k - \alpha_k}{p}.$$

В самом деле, допустим, что найдется подпоследовательность отрезков $[\alpha_{k_\nu};\ \beta'_{k_\nu}]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, для которой

$$\frac{B^{(p)}(\beta'_{k_\nu})}{Q^{(p)}(\alpha_{k_\nu};\ h_{k_\nu})} < C < +\infty.$$

Тогда множество $\overline{G}$ будет $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$ и по основной теореме $S \in \overline{G}$. А это противоречит одному из условий следствия 3.

3. Пусть $a(t)$ — комплекснозначная функция, интегрируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке $[0;\ x]$, и пусть

$$S(x) = S^{(0)}(x) = \int_0^x a(t)\,dt, \tag{22}$$

$$S^{(p)}(x) = \int_0^x S^{(p-1)}(t)\,dt, \tag{23}$$

$$\sigma^{(p)}(x) = \frac{p!}{x^p} S^{(p)}(x) \quad (p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{24}$$

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} \sigma^{(p)}(x) = S$, то говорят ([3], стр. 143), что и н т е г р а л (22) с у м м и р у е т с я к ч и с л у S м е т о д о м Ч е з а р о п о р я д к а p или $(c;\ p)$-методом.

Известно ([3], стр. 143), что

$$S^{(p)}(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t)\,dt.$$

Это равенство подсказывает распространение определения суммируемости интеграла (22) на нецелые p. Говорят, что и н т е г р а л (22) с у м м и р у е т с я к ч и с л у S $(c;\ p)$-м е т о д о м, $p \geqslant 0$, если

$$\sigma^{(p)}(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{x^p} S^{(p)}(x) = \frac{p}{x^p} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t)\,dt$$

стремится к S при $x \to +\infty$.

Одно свойство методов Чезаро суммирования интегралов Лебега (22) выражается следующим предложением.

Т е о р е м а. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом и если множество* $\overline{G}$ *является* (C)*-множеством этого интеграла, то* $S \in \overline{G}$. *Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является* (C)*-точкой интеграла* (22), *то*

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |\sigma^{(p)}(x)| = \infty \text{ *для каждого* } p,\ p \geqslant 0.$$

Доказательство. Положим в основной теореме п. 2

$$\alpha(t) = t, \quad A(x) = S(x) = \int_0^x a(t)\,dt.$$

Тогда для натурального p будем иметь:

$$A^{(p)}(x) = S^{(p)}(x), \quad B^{(p)}(x) = \frac{x^p}{p!}, \quad \sigma^{*(p)}(x) = \sigma^{(p)}(x),$$

$$Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} B^{(p)}(\alpha_k + mh_k) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \frac{(\alpha_k + mh_k)^p}{p!} = h_k^p,$$

$$\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} = \frac{\frac{1}{p!}\beta_k^p}{h_k^p} = \frac{1}{p!}\left(\frac{\beta_k}{\frac{\beta_k - \alpha_k}{p}}\right)^p = \frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha_k}{\beta_k}}\right)^p.$$

Если $\frac{\beta_k}{\alpha_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} < C < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, если множество $\overline{G}$ является (C)-множеством интеграла (22), то это множество будет $(t;\ p)$-множеством этого интеграла при любом натуральном p.

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является (C)-точкой интеграла (22), то она будет $(t;\ p)$-точкой этого интеграла при любом натуральном p.

Доказываемая теорема теперь следует из основной теоремы п. 2, если заметить, что, в силу известного предложения ([3], стр. 144, строка 10 снизу), ее достаточно доказать для всех натуральных p.

Отметим непосредственные следствия теоремы настоящего пункта.

Следствие 1. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом и если точка* A *является* (C)*-точкой этого интеграла, то* $S = A$.

Следствие. 2. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом, то для сходимости последовательности* $\{S(x_k)\}$ $(x_k \to +\infty$ *при* $k \to \infty)$ *достаточно, чтобы каждая предельная точка этой последовательности была* (C)*-точкой интеграла* (22).

Следствие 3. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом и если*

$$S(x)\in\overline{G} \text{ для } \alpha_k\leqslant x\leqslant\beta'_k \ (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty,$$

а $S\bar{\in}\overline{G}$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\beta'_k}{\alpha_k}=1.$

Доказательство следствия 3 легко проводится методом рассуждения от противного. В самом деле, допустим, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\beta'_k}{\alpha_k}=\lambda>1.$$

Тогда найдется такая подпоследовательность $\left\{\dfrac{\beta'_{k_\nu}}{\alpha_{k_\nu}}\right\}$, что $\dfrac{\beta'_{k_\nu}}{\alpha_{k_\nu}}\geqslant\lambda_1>1$ для $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 1<\lambda_1<\lambda$. Множество $\overline{G}$ будет (C)-множеством интеграла (22), и по теореме настоящего пункта число $S\in\overline{G}$, что противоречит одному из условий следствия 3.

Следствие 4. *Пусть даны число* $\lambda>1$ *и последовательность действительных положительных чисел* $\{x_k\}$, $\dfrac{x_{k+1}}{x_k}\geqslant\lambda>1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. *Если интеграл* (22), *в котором* $a(t)$ — *действительная функция, суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом, то найдется такая последовательность* $\{x'_k\}$, *что* $x_k\leqslant x'_k\leqslant x_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ *и*

$$\lim_{k\to\infty}S(x'_k)=S.$$

Это следствие также легко доказывается методом рассуждения от противного.

4. Из теоремы п. 3 вытекает целый ряд теорем тауберова типа для интеграла (22), суммируемого $(c;\ p)$-методами. Эти теоремы обобщают известные теоремы и являются аналогами соответствующих теорем тауберова типа для рядов, суммируемых $(c;\ p)$-методами ([1], стр. 518—519).

Теорема 1. *Пусть дан интеграл* (22) *и пусть*

$$a(t)=O\left(\frac{1}{t}\right)$$

для $x_k\leqslant t\leqslant y_k<x_{k+1}$, $\dfrac{y_k}{x_k}\geqslant\lambda>1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. *Если этот интеграл суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом, то*

$$\lim_{k\to\infty}S(x'_k)=S,$$

где $x_k\leqslant x'_k\leqslant y_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$. *Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S(x_k)|=\infty$, *то* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|\sigma^{(p)}(x)|=\infty$ *для каждого* $p,\ p\geqslant0.$

Теорема 2. *Пусть дан интеграл* (22), *в котором* $a(t)$ — *действительная функция, и пусть*

$$a(t) > -\frac{c}{t} \quad (c = \text{const} > 0)$$

для $x_k \leqslant t \leqslant y_k < x_{k+1}$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Если этот интеграл суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c; p)$-*методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} S(x'_k) = S,$$

где $(1+\varepsilon)x_k \leqslant x'_k \leqslant (1-\varepsilon)y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ε — *произвольно малое положительное число. Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S(x'_k)| = \infty$, *то* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|\sigma^{(p)}(x)| = \infty$ *для каждого* p, $p \geqslant 0$.

Теорема 3. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c; p)$-*методом и* $\{x_k\}$ — *заданная последовательность положительных чисел стремящаяся к бесконечности, и если* $\lim\limits_{k\to\infty}(S(y_k) - S(x_k)) = 0$ *для всякой последовательности* $\{y_k\}$, *для которой*

$$1 < \frac{y_k}{x_k} \to 1 \text{ при } k \to \infty,$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = S$.

Теорема 4. *Пусть*:

а) *интеграл* (22), *в котором* $a(t)$ — *действительная функция, суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c; p)$-*методом,* $\{x_k\}$ — *заданная последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности;*

б) $$\underline{\lim_{k\to\infty}}(S(y_k) - S(x_k)) \geqslant 0$$

для всякой последовательности $\{y_k\}$, *для которой*

$$1 < \frac{y_k}{x_k} \to 1 \text{ при } k \to \infty;$$

в) $$\underline{\lim_{k\to\infty}}(S(x_k) - S(y'_k)) \geqslant 0$$

для всякой последовательности $\{y'_k\}$, *для которой*

$$1 < \frac{x_k}{y'_k} \to 1 \text{ при } k \to \infty.$$

Тогда из а) *и* б) *следует, что*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} S(x_k) \leqslant S;$$

из а) *и* в) *следует, что*

$$\varliminf_{k\to\infty} S(x_k) \geqslant S;$$

из а), б) *и* в) *следует, что* $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = S$.

Теорема 5. *Пусть дан интеграл* (22), $\{x_k\}$ — *заданная последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, и пусть множество точек* $a(t)$* *для* $x_k \leqslant t \leqslant y_k$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1$ *попадает внутрь угла с вершиной в начале координат и раствора*

$$\alpha_k,\ \alpha_k \leqslant \alpha < \pi \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если этот интеграл суммируется к числу S *каким-нибудь* $(c;\ p)$-*методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} S(x'_k) = S,$$

где $(1+\varepsilon)x_k \leqslant x'_k \leqslant (1-\varepsilon)y_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$, ε — *произвольно малое положительное число. Если* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} |S(x'_k)| = \infty$, *то* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} |\sigma^{(p)}(x)| = \infty$ *для каждого* $p \geqslant 0$.

Доказательство теорем 1 — 5 легко проводится методом рассуждения от противного с использованием теоремы п. 3 и ее следствий 1 — 3.

5. С помощью основной теоремы п. 2 докажем теперь одно свойство методов Чезаро суммирования рядов, сформулированное в п. 1.

Положим в основной теореме п. 2 $\alpha(t) = n$ для $n \leqslant t < n+1$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Пусть $A(n) = S_n$, где S_n — частные суммы ряда (1), и $A(x)$ линейна на каждом отрезке $[n;\ n+1]$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Если ряд (1) суммируется к числи S $(c;\ p)$-методом (p-натуральное число), то

$$\lim_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{A^{(p)}(x)}{B^{(p)}(x)} = S.$$

Имеем далее ([4], стр. 205, теорема 3):

$$B^{(p)}(n_k + mh_k) = \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_0^{n_k+mh_k} (n_k + mh_k - t)^{p-1} d\alpha(t) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\nu=1}^{n_k+mh_k} (n_k + mh_k - \nu)^{p-1} = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\nu=1}^{n_k+mh_k-1} \nu^{p-1},$$

---

* Точки этого множества могут попадать и в начало координат.

где $h_k = \left[\frac{m_k - n_k}{p}\right]$. Так как ([5] стр. 15, формула 0.121)

$$\sum_{\nu=1}^{n_k+mh_k-1} \nu^{p-1} = \frac{(n_k+mh_k-1)^p}{p} + \Pi_{p-1}(n_k+mh_k-1),$$

где $\Pi_{p-1}(x)$ — многочлен степени $p-1$, то

$$B^{(p)}(n_k+mh_k) = \frac{(n_k+mh_k-1)^p}{p!} + \frac{1}{(p-1)!}\Pi_{p-1}(n_k+mh_k-1).$$

Следовательно,

$$Q^{(p)}(n_k;\ h_k) = \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(n_k+mh_k) = h_k^p$$

и

$$\frac{B^{(p)}(m_k)}{Q^{(p)}(n_k;\ h_k)} = \frac{1}{p!}\left(\frac{m_k-1}{h_k}\right)^p + \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\Pi_{p-1}(m_k-1)}{h_k^p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{1-\frac{n_k}{m_k}-\frac{p}{m_k}}\right)^p + \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\Pi_{p-1}(m_k-1)}{h_k^p}.$$

Если $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\Pi_{p-1}(m_k-1)}{h_k^p} = 0$ и $\frac{B^{(p)}(m_k)}{Q^{(p)}(n_k;\ h_k)} <$ $< C < +\infty$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$.

Таким образом, если множество $\overline{G}$ является (C)-множеством последовательности $\{S_n\}$, то это множество будет $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$ при любом натуральном p.

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости будет (C)-точкой последовательности $\{S_n\}$, то она будет и $(\alpha(t);\ p)$-точкой функции $A(x)$ при любом натуральном p.

Одно свойство методов Чезаро суммирования рядов следует теперь из основной теоремы п. 2, если заметить, что, в силу предложения Чэпмена ([3], стр. 131, теорема 43), одно свойство методов Чезаро достаточно доказать для всех натуральных p.

С помощью одного свойства методов Чезаро в работе [1], как это мы уже отмечали в п. 1, получен целый ряд теорем тауберова типа для рядов, суммируемых $(c;\ p)$-методами. Здесь мы заметим, что теорему 6 п. 3 этой работы можно несколько усилить. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть дан ряд* (1) *и пусть точки* a_n *для* $n_k < n \leqslant \leqslant m_k < n_{k+1}$, $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ *попадают внутрь угла* (*или в его вершину*) *с* *вершиной в начале координат и раствора* α_k, $\alpha_k \leqslant \alpha < \pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Если этот ряд суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{p_k} a_\nu = S,$$

где $(1+\varepsilon)n_k \leqslant p_k \leqslant (1-\varepsilon)m_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, ε — *произвольно малое положительное число. Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left|\sum\limits_{\nu=0}^{p_k} a_\nu\right| = \infty$, *то средние Чезаро любого порядка для последовательности* $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *неограничены.*

Мы приведем здесь доказательство этой теоремы. По образцу этого доказательства проводятся и доказательства теорем 1 — 5 п. 4. Обозначим через $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ частные суммы ряда (1).

Пусть точки a_n для $n_k < n \leqslant m_k < n_{k+1}$ попадают внутрь угла A_kOB_k (или в его вершину) раствора α_k, $\alpha_k \leqslant \alpha < \pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Допустим, что последовательность $\{S_{p_k}\}$ расходится. Пусть C — предельная точка последовательности $\{S_{p_k}\}$, $C \neq S$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{p_{k_\nu}} = C$. Возьмем луч OA, предельный для лучей OA_{k_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Пусть этот луч OA является пределом последовательности лучей $OA_{k_{\nu_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим подпоследовательность $\{S_{p_{k_{\nu_i}}}\}$, которую ради простоты записи будем обозначать через $\{S_{p_{k_\nu}}\}$. Можем считать, что все углы $A_{k_\nu}OB_{k_\nu}$ попадают внутрь угла $A^{(1)}OB^{(1)}$ раствора $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(1)} < \pi$. Без ограничения общности, можем считать далее, что угол $A^{(1)}OB^{(1)}$ находится в верхней полуплоскости и что стороны его образуют с осью x-ов углы, соответственно равные $\frac{1}{2}(\pi - \alpha^{(1)})$ и $\frac{1}{2}(\pi + \alpha^{(1)})$.

Здесь рассмотрим три случая:

$$1)\ \mathfrak{J}C \geqslant \mathfrak{J}S, \quad 2)\ \mathfrak{J}C < \mathfrak{J}S, \quad 3)\ C = \infty.$$

Случай 1. Можем считать, что все $S_{p_{k_\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ лежат в δ-окрестности точки C, не содержащей точки S. Из условия теоремы следует, что все $S_{p_{k_\nu}+i}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, m_{k_\nu} - p_{k_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ лежат внутри угла раствора $\alpha^{(1)}$, содержащего δ-окрестность точки C и не содержащего точки S. Так как $\frac{m_{k_\nu}}{p_{k_\nu}} \geqslant \frac{1}{1-\varepsilon} > 1$ для $\nu = 1, 2, \ldots$, то, в силу одного свойства методов Чезаро, этому углу должна принадлежать и точка S. Получили противоречие.

Случай 2. Пусть $\mathfrak{J}C < \mathfrak{J}S$. Возьмем полуплоскость $\mathfrak{J}z \leqslant \mathfrak{J}C + \delta < \mathfrak{J}S$, $\delta > 0$. Можем считать, что все $S_{p_{k_\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ принадлежат этой полуплоскости. Из условия теоремы следует, что этой же полуплоскости принадлежат и все $S_{n_{k_\nu}+i}$ для $i=0, 1, 2, \ldots, p_{k_\nu}-n_{k_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$.

Так как $\frac{p_{k_\nu}}{n_{k_\nu}} \geqslant 1+\varepsilon$, то, в силу одного свойства методов Чезаро, полуплоскости $\mathfrak{J}z \leqslant \mathfrak{J}C+\delta$ должна принадлежать и точка S. Получили противоречие.

Случай 3. Нетрудно показать, что если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S_{p_k}|=\infty$, то бесконечно удаленная точка будет (C)-точкой последовательности $\{S_n\}$ и, следовательно, в силу одного свойства методов Чезаро, средние Чезаро любого порядка для последовательности $\{S_n\}$ неограничены. Таким образом, случай 3 также приводит к противоречию. Этим теорема доказана полностью.

6. Из основной теоремы п. 2 при $p=1$,

$$\alpha(t)=p_0+p_1+\ldots+p_n \text{ для } n\leqslant t<n+1 \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$\alpha(t)=p_0 \text{ для } 0<t<1, \quad \alpha(0)=0, \quad p_0>0, \ p_n\geqslant 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_n=\infty,$$

$$A(n)=S_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

где S_n — частные суммы ряда (1), $A(x)$ — линейная функция на каждом отрезке $[n; n+1]$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, мы получаем одно свойство $(\overline{R}; p_n)$-методов суммирования рядов, отмеченное нами в работе [1] (стр. 521 — 523).

7. Пусть дана последовательность $\{S_n\}$ и пусть она суммируется каким-нибудь методом к числу S. Возникает следующий вопрос: каким условиям (необходимым, нетривиальным достаточным, необходимым и достаточным) должна удовлетворять последовательность $\{\nu_k\}$, чтобы по подпоследовательности $\{S_{\nu_k}\}$ можно было восстановить число S? Результаты п. п. 2 и 5 дают нам нетривиальные достаточные условия, налагаемые на ν_k, для того чтобы по подпоследовательности $\{S_{\nu_k}\}$ можно было восстановить число S, если к этому числу последовательность $\{S_n\}$ суммируется $(c; p)$-методом.

Действительно, если последовательность $\{S_n\}$ суммируется к числу S $(c; p)$-методом, то имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=1}^{p}\sum\limits_{\nu=1}^{h_k}\sum\limits_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}[(m-1-\mu)h_k+\nu]^{p-1}S_{n_k+(m-1)h_k+\nu}}{h_k^p}=S,$$

где

$$h_k=\left[\frac{m_k-n_k}{p}\right], \quad \lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k}>1,$$

которое получается из равенства (20), если в нем функции $\alpha(t)$ и $A(x)$ определить так, как это сделано в п. 5.

Отсюда видим, что, для того чтобы число S можно было восстановить, достаточно располагать всеми теми членами последовательности $\{S_n\}$, индексы которых составляют какую-нибудь последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k=1, 2, \ldots)$, для которой $\varliminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} > 1$. Аналогичное замечание можно сделать и для интегралов.

(Поступило в редакцию 28/X 1957 г.)

Литература

1. Н. А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., **38** (80) (1956), 509—524.
2. В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
3. Г. Харди, Расходящиеся ряды, Москвы, ИЛ, 1951.
4. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
5. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1951.

Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. II

В. Ф. Жданович (Минск)

Предметом исследования настоящей второй части работы будет линейный дифференциальный оператор

$$Ly(x) = A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) \tag{1}$$

с областью определения Θ_0, состоящей из вектор-функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$ удовлетворяющих краевому условию

$$hy \equiv MA(0)\,y'(0) + [MB(0) + N]\,y(0) + PA(l)\,y'(l) + \\ + [PB(l) + Q]\,y(l) = 0. \tag{2}$$

Такой оператор, в отличие от оператора (1), определенного для всех функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, будем обозначать через $L_0 y(x)$. При этом будем предполагать, что матрицы $A(x)$, $B(x)$, M, N, P и Q удовлетворяют всем требованиям, наложенным на них в первой части работы (см. [8], § 1). Налагая на матрицы M, N, P и Q некоторые дополнительные условия, невыполнение которых имеет характер вырождения, исследуем резольвенту оператора L_0 и изучим сходимость разложения начальной функции $f(x)$ из условия (3) ч. I по собственным и присоединенным функциям этого оператора в тех случаях, когда $f(x) \in \Theta_0$ и $f(x) \in D_2(0, l)$.

§ 1. Асимптотические формулы для фундаментальной матрицы системы с параметром

В этом параграфе будут построены асимптотические формулы для фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ системы

$$A(x)\,y'(x) + B(x)\,y(x) = \lambda y(x) \tag{3}$$

при $\lambda \to \infty$. Это будет сделано методом, развитым Биркгофом и Лангером (см. [1], стр. 80), с использованием тех обобщений и уточнений, которые впоследствии вносились в этот метод рядом авторов (см. [2], стр. 24, а также [3], стр. 48 и [4]).

Лемма 1. *Систему* (3) *линейным преобразованием*

$$y(x) = K(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w(x), \tag{4}$$

где матрица $K(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, а $S(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, можно привести к виду

$$\Lambda(x)\,w'(x) + \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda)\,w(x) = \lambda w(x),$$

где $\Lambda(x) = K^{-1}(x)\,A(x)\,K(x)$ — *диагональный вид матрицы* $A(x)$ (см. [1], § 1); *при достаточно большом* R *матрица* $C(x, \lambda)$ *непрерывна по* (x, λ), *аналитична по* λ (*в том числе и при* $\lambda = \infty$) *и равномерно ограничена по* (x, λ) *для* $x \in [0, l]$ *и* $|\lambda| > R > 0$.

Доказательство. Пусть $K_0(x)$ — какая-нибудь матрица, дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in [0, l]$ и приводящая $A(x)$ к диагональному виду $\Lambda(x)$. (Относительно $\Lambda(x)$ напомним, что она дважды непрерывно дифференцируема и ее элементы $\nu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ выбраны таким образом, что в матрице $\Lambda^{-1}(x)$ элементы по диагонали расположены в порядке убывания.) Тогда общим видом матриц, приводящих $A(x)$ к диагональному виду $\Lambda(x)$, будет $K(x) = K_0(x)\,H(x)$, где $H(x)$ — произвольная невырожденная для любого $x \in [0, l]$ диагональная матрица. Умножив левую и правую части равенства (3) на $K^{-1}(x)$ и произведя замену

$$y(x) = K(x)\,z(x), \tag{6}$$

получим:

$$\Lambda(x)\,z'(x) + B_1(x)\,z(x) = \lambda z(x), \tag{7}$$

где $B_1(x) = K^{-1}(x)\,A(x)\,K'(x) + K^{-1}(x)\,B(x)\,K(x)$. Матрицу $H(x)$ подберем так, чтобы матрица $B_1(x)$ имела по диагонали нули; это дает для нахождения элементов $\gamma_{ii}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ диагональной матрицы $H(x)$ дифференциальные уравнения

$$\nu_i(x)\frac{\gamma'_{ii}(x)}{\gamma_{ii}(x)} + \beta_{ii}(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

где β_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — диагональные элементы матрицы $B_0(x) = K_0^{-1}(x)\,A(x)\,K_0'(x) + K_0^{-1}(x)\,B(x)\,K_0(x)$. В полученной после этого системе (7) сделаем еще одну замену

$$z(x) = \left[E + \frac{1}{\lambda}S(x)\right]w(x), \tag{9}$$

где матрица $S(x)$ остается произвольной. Тогда будем иметь:

$$\Lambda(x)\left[E + \frac{1}{\lambda}S(x)\right]w'(x) + \frac{1}{\lambda}\Lambda(x)\,S'(x)\,w(x) + B_1(x)\left[E + \frac{1}{\lambda}S(x)\right]w(x) = \lambda\left[E + \frac{1}{\lambda}S(x)\right]w(x). \tag{10}$$

Выберем теперь матрицу $S(x)$ так, чтобы было

$$\Lambda^{-1}(x)\,S(x) - \Lambda^{-1}(x)\,B_1(x) = S(x)\,\Lambda^{-1}(x). \tag{11}$$

Для элементов σ_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $S(x)$ при $i \neq k$ получим формулы:

$$\sigma_{ik} = \frac{\nu_i^{-1}(x)\,b_{ik}(x)}{\nu_i^{-1}(x) - \nu_k^{-1}(x)}, \tag{12}$$

где $b_{ik}(x)$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ — элементы матрицы $B_1(x)$, причем $b_{ii}(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Диагональные элементы матрицы $S(x)$ остаются произвольными, и мы можем положить $\sigma_{ii}(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В силу соотношения (11), равенство (10) можно переписать в виде

$$\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] w'(x) + \frac{1}{\lambda} S'(x) w(x) + \frac{1}{\lambda} \Lambda^{-1}(x) B_1(x) S(x) w(x) =$$

$$= \lambda \left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] \Lambda^{-1}(x) w(x)$$

или

$$\Lambda(x) w'(x) + \frac{\Lambda(x)}{\lambda}\left[E + \frac{S(x)}{\lambda}\right]^{-1} [S'(x) + \Lambda^{-1}(x) B_1(x) S(x)] w(x) = \lambda w(x). \tag{13}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5), причем

$$C(x, \lambda) = \Lambda(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right]^{-1} [S'(x) + \Lambda^{-1}(x) B_1(x) S(x)]. \tag{14}$$

Исследуем матрицу $C(x, \lambda)$. Матрица $K(x)$, как и матрица $K_0(x)$, будет дважды непрерывно дифференцируемой, а потому $B_1(x) = K^{-1}(x) A(x) K(x) + K^{-1}(x) B(x) K(x)$ будет непрерывно дифференцируемой по $x \in [0, l]$. Из формул (12) следует, что и матрица $S(x)$ будет непрерывно дифференцируемой, а это значит, что матрица $S'(x) + \Lambda^{-1}(x) B_1(x) S(x)$ будет непрерывной по x $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Так как $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \det\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] = 1$, то можно выбрать $R > 0$ так, что $\left|\det\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right]\right| > \frac{1}{2}$ для $|\lambda| > R$. Но тогда для каждого λ, для которого $|\lambda| > R$, матрица $C(x, \lambda)$ будет непрерывной по $x \in [0, l]$, λ, и, поскольку она при этом равномерно ограничена и аналитична по λ в области $|\lambda| > R$, лемма доказана.

Теорема 1. *Если $\gamma > 0$ — достаточно большое число, то для системы* (3) *и каждой из областей* 1) $\mathscr{R}\lambda < -\gamma$, 2) $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ *и* 3) $\mathscr{R}\lambda > \gamma$ *можно построить при $x \in [0, l]$ фундаментальные матрицы $Y_{-1}(x, \lambda)$, $Y_0(x, \lambda)$ и $Y_1(x, \lambda)$ соответственно, которые будут непрерывными по (x, λ), аналитическими по λ и будут иметь представления*

$$Y_i(x, \lambda) = \left[K(x) + \frac{1}{\lambda} H_i(x, \lambda)\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\xi)\, d\xi} \quad (i = -1, 0, 1), \tag{15}$$

где матрица $K(x)$ — та же, что и в лемме 1, а матрицы $H_i(x, \lambda)$ $(i = -1, 0, 1)$ равно как и $\frac{1}{\lambda} H_i(x, \lambda)$, равномерно ограничены, когда $x \in [0, l]$, а λ остается в соответствующей области; при этом матрицу $Y_0(x, \lambda)$ можно взять такой, что $Y_0(0, \lambda) = K(0)$.

Доказательство. Пусть $W(x, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы (5); тогда

$$\Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} W(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda) W(x, \lambda) = \lambda W(x, \lambda). \tag{16}$$

Сделаем замену

$$W(x, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right] e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi}. \tag{17}$$

После сокращения на $e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi}$ получим:

$$\frac{1}{\lambda} \Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} V(x, \lambda) + \lambda \Lambda(x) \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right] \Lambda^{-1}(x) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda) \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right] = \lambda \left[E + \frac{1}{\lambda} V(x, \lambda)\right]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, \lambda) + \lambda \left[V(x, \lambda) \Lambda^{-1}(x) - \Lambda^{-1}(x) V(x, \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \Lambda^{-1}(x) C(x, \lambda) V(x, \lambda) + \Lambda^{-1}(x) C(x, \lambda) = 0. \tag{18}$$

Пусть $V(x, \lambda) = \| v_1(x, \lambda), \ v_2(x, \lambda), \ \ldots, \ v_n(x, \lambda) \|$, $C(x, \lambda) = \| c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda), \ \ldots, \ c_n(x, \lambda) \|$. Тогда из уравнения (18) получим для вектор-функций $v_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ уравнения

$$\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x} - \lambda [\Lambda^{-1}(x) - \nu_i^{-1}(x) E] v_i(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \Lambda^{-1}(x) C(x, \lambda) v_i(x, \lambda) +$$

$$+ \Lambda^{-1}(x) c_i(x, \lambda) = 0. \tag{19}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция

$$v_i(x, \lambda) = \int\limits_0^x e^{\lambda \int\limits_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} A_i f(\xi, \lambda) d\xi - \int\limits_x^l e^{-\lambda \int\limits_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} B_i f(\xi, \lambda) d\xi \tag{20}$$

при $A_i + B_i = E$ является решением неоднородного уравнения

$$\frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x} - \lambda [\Lambda^{-1}(x) - \nu_i^{-1}(x) E] v_i(x, \lambda) = f(x, \lambda). \tag{21}$$

Если же в уравнение (21) вместо функции $f(x, \lambda)$ подставить $-\frac{\Lambda^{-1}(x)}{\lambda} C(x, \lambda) v_i(x, \lambda) - \Lambda^{-1}(x) c_i(x, \lambda)$, то оно превращается в уравнение (19), а формула (20) дает для вектора $v_i(x, \lambda)$ интегральное уравнение

$$v_i(x, \lambda) = \left\{- \int\limits_0^x e^{\lambda \int\limits_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} A_i \Lambda^{-1}(\xi) c_i(\xi, \lambda) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_x^l e^{-\lambda \int\limits_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} B_i \Lambda^{-1}(\xi) c_i(\xi, \lambda) d\xi \right\} +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left\{-\int_0^x e^{\lambda\int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} A_i\Lambda^{-1}(\xi)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_x^l e^{-\lambda\int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} B_i\Lambda^{-1}(\xi)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (22)$$

В силу построения, каждое решение этого уравнения является решением уравнения (19). Положим

$$G_i(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}-e^{\lambda\int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} A_i\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant\xi<x\leqslant l),\\ e^{-\lambda\int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} B_i\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant x<\xi\leqslant l)\end{cases}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда уравнение (22) примет вид:

$$v_i(x,\lambda)=\int_0^l G_i(x,\xi,\lambda)c_i(\xi,\lambda)d\xi+\frac{1}{\lambda}\int_0^l G_i(x,\xi,\lambda)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi. \qquad (23)$$

Матрица $C(\xi,\lambda)$, в силу леммы 1, равномерно ограничена относительно (ξ,λ), непрерывна по ξ,λ и аналитична по λ для $\xi\in[0,l]$ и $|\lambda|>R$, где R — достаточно большое число, а это значит, что функции

$$g_i(x,\lambda)=\int_0^l G_i(x,\xi,\lambda)c_i(\xi,\lambda)d\xi \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

— аналитические по λ для $|\lambda|>R$ и непрерывные по x $(0\leqslant x\leqslant l)$.

Рассмотрим сначала область $\mathcal{R}\lambda<-R$ и докажем, что можно так подобрать матрицы A_i и B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, где $A_i+B_i=E$, что $\|G_i(x,\xi,\lambda)\|<M<+\infty$ для $i=1, 2, \ldots, n$; $0\leqslant x$, $\xi\leqslant l$. С этой целью заметим, что из того, что диагональные элементы матрицы $\Lambda^{-1}(x)$ расположены в убывающем порядке, следует, что первые $i-1$ диагональных элементов матрицы $\Lambda^{-1}(x)-\nu_i^{-1}(x)E$ будут положительны, i-ый элемент равен нулю, а последние $n-i$ элементов отрицательны. Положим

$$A_i=E^{(i)}=\begin{Vmatrix}E_{ii} & 0_{i\,n-i}\\ 0_{n-i\,i} & 0_{n-i\,n-i}\end{Vmatrix},\quad B_i=E_{(n-i)}=\begin{Vmatrix}0_{ii} & 0_{i\,n-i}\\ 0_{n-i\,i} & E_{n-i\,n-i}\end{Vmatrix}, \qquad (24)$$

где E_{ii} и $E_{n-i\,n-i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — единичные матрицы. Тогда при $\mathcal{R}\lambda\to-\infty$ матрицы $e^{\lambda\int_\xi^x [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} E^{(i)}$ для $\xi<x$ и матрицы $e^{-\lambda\int_x^\xi [\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta} E_{(n-i}$

для $\xi > x$ остаются ограниченными, т. е. $\| G_i^0(x, \xi, \lambda) \| < M < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где

$$G_i^0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -e^{\lambda \int\limits_{\xi}^{x} [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i^{-1}(\zeta) E] d\zeta} E^{(i)} \Lambda^{-1}(\xi) & (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ e^{-\lambda \int\limits_{x}^{\xi} [\Lambda^{-1}(\zeta) - \nu_i(\zeta) E] d\zeta} E_{(n-i)} \Lambda^{-1}(\xi) & (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{cases}$$

Будем предполагать, что число M выбрано настолько большим, что вместе с неравенством $\| G_i^0(x, \xi, \lambda) \| < M$ выполняются неравенства: $\| g_i^0(x, \lambda) \| < M$ и $\| G_i^0(x, \xi, \lambda) C(\xi, \lambda) \| < M$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $0 \leqslant x, \xi \leqslant l$, $\mathscr{R}\lambda < -R$,

$$g_i^0(x, \lambda) = \int\limits_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) c_i(\xi, \lambda) d\xi.$$

Тогда интегральные уравнения

$$v_i(x, \lambda) = \int\limits_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) c_i(\xi, \lambda) d\xi + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) C(\xi, \lambda) v_i(\xi, \lambda) d\xi$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ можно решать методом последовательных приближений. Для функций $v_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получим разложения

$$v_i(x, \lambda) = g_i^0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^l G_i^0(x, \xi, \lambda) C(\xi, \lambda) g_i^0(\xi, \lambda) d\xi + \ldots . \tag{25}$$

Эти разложения сходятся равномерно относительно (x, λ), где $x \in [0, l]$, $\mathscr{R}\lambda < -\gamma_1 < -\max\{R, Ml\}$, в силу того, что ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} M \left(\frac{Ml}{|\lambda|}\right)^s$ будет мажорантным для ряда (25). Функции $v_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, полученные по формуле (25), будут аналитическими по λ для $\mathscr{R}\lambda < -\gamma_1$, как суммы рядов аналитических функций. Кроме того, они будут непрерывными и ограниченными относительно (x, λ), где $x \in [0, l]$, $\mathscr{R}\lambda < -\gamma_1$, а это значит, что такими же свойствами обладает и матрица $V_0(x, \lambda) = \| v_1(x, \lambda), \ldots, v_n(x, \lambda) \|$. Но тогда, используя замены (6), (9) и (17), получим:

$$Y_{-1}(x, \lambda) = K(x) \left[E + \frac{1}{\lambda} S(x) \right] \left[E + \frac{1}{\lambda} V_0(x, \lambda) \right] e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi} =$$

$$= \left[K(x) + \frac{H_{-1}(x, \lambda)}{\lambda} \right] e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\xi) d\xi}, \tag{26}$$

где $H_{-1}(x, \lambda) = K(x) \left[S(x) + V_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} S(x) V_0(x, \lambda) \right]$. Если число γ_1

выбрано настолько большим, что $\det\left[E+\frac{S(x)}{\lambda}\right]\neq 0$ и $\det\left[E+\frac{V_0(x,\lambda)}{\lambda}\right]\neq 0$ для $\mathcal{R}\lambda<-\gamma_1$ и $0\leqslant x\leqslant l$, то $\det Y_{-1}(x,\lambda)\neq 0$ и матрица $Y_{-1}(x,\lambda)$ будет фундаментальной матрицей уравнения (3) для $\mathcal{R}\lambda<-\gamma_1$, удовлетворяющей требованиям теоремы 1.

Пусть теперь $\mathcal{R}\lambda>R$. Тогда в интегральном уравнении (23) положим

$$G_i(x,\xi,\lambda)=G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)\quad (i=1,2,\ldots,n),$$

где

$$G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}-e^{\lambda\int\limits_\xi^x[\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta}E_{(n-i)}\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant\xi<x\leqslant l),\\ e^{-\lambda\int\limits_\xi^x[\Lambda^{-1}(\zeta)-\nu_i^{-1}(\zeta)E]d\zeta}E^{(i)}\Lambda^{-1}(\xi) & (0\leqslant x<\xi\leqslant l),\end{cases}$$

и получим:

$$v_i(x,\lambda)=g_i^{(1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^l G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)C(\xi,\lambda)v_i(\xi,\lambda)d\xi\quad (i=1,2,\ldots,n),\tag{27}$$

где

$$g_i^{(1)}(x,\lambda)=\int\limits_0^l G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)c_i(\xi,\lambda)d\xi.$$

Если M_1 достаточно велико, то для $0\leqslant x,\ \xi\leqslant l,\ \mathcal{R}\lambda>R$ будут иметь место неравенства

$$\|g_i^{(1)}(x,\lambda)\|<M_1\quad\text{и}\quad\|G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)C(x,\lambda)\|<M_1,$$

а потому, применяя метод последовательных приближений, получим для решений $v_i(x,\lambda)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ уравнений (27) разложения

$$v_i(x,\lambda)=g_i^{(1)}(x,\lambda)+\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^l G_i^{(1)}(x,\xi,\lambda)C(\xi,\lambda)g_i^{(1)}(\xi,\lambda)d\xi+\ldots,$$

сходящиеся равномерно относительно (x,λ), $x\in[0,l]$, $\mathcal{R}\lambda>\gamma_2>\max\{R,M_1l\}$. Матрица $V_1(x,\lambda)=\|v_1(x,\lambda),\ v_2(x,\lambda),\ \ldots,\ v_n(x,\lambda)\|$, построенная из этих решений, будет непрерывной и равномерно ограниченной относительно (x,λ) и аналитической по λ для $x\in[0,l]$, $\mathcal{R}\lambda>\gamma_2$. А тогда, если γ_2 выбрано достаточно большим, то матрица

$$Y_1(x,\lambda)=K(x)\left[E+\frac{S(x)}{\lambda}\right]\left[E+\frac{V_1(x,\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int\limits_0^x\Lambda^{-1}(\xi)d\xi}=$$

$$=\left[K(x)+\frac{H_1(x,\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int\limits_0^x\Lambda^{-1}(\xi)d\xi},\tag{28}$$

где $H_1(x, \lambda) = K(x)\left[S(x) + V_1(x, \lambda) + \frac{S(x) V_1(x, \lambda)}{\lambda}\right]$, будет фундаментальной матрицей системы (3) для $\mathcal{R}\lambda > \gamma_2$. Увеличением меньшего из чисел γ_1 и γ_2 их можно сделать равными, а потому положим $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, после чего матрицы $Y_{-1}(x, \lambda)$ и $Y_1(x, \lambda)$ будут удовлетворять всем требованиям теоремы 1.

Пусть $Y_0(x, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant l;\ -\infty < \mathcal{R}\lambda < +\infty)$ — фундаментальная матрица системы (3) с начальными условиями $Y_0(0, \lambda) = K(0)$. Тогда матрица

$$W_0(x, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right]^{-1} K^{-1}(x)\, Y_0(x, \lambda) \tag{29}$$

будет фундаментальной матрицей системы (5) для $|\lambda| > R$ (см. лемму 1) с начальными условиями

$$W_0(0, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(0)\right]^{-1} K^{-1}(0)\, Y(0, \lambda) = \left[E + \frac{1}{\lambda} S(0)\right]^{-1}. \tag{30}$$

Для этой матрицы выполняется равенство

$$\Lambda(x) \frac{\partial}{\partial x} W_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} C(x, \lambda)\, W_0(x, \lambda) = \lambda W_0(x, \lambda). \tag{31}$$

Умножив равенство (31) слева на $e^{-\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(x)$ и проинтегрировав от 0 до x, получим интегральное уравнение

$$e^{-\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(x, \lambda) - W_0(0, \lambda) +$$
$$+ \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi)\, C(\xi, \lambda)\, W_0(\xi, \lambda)\, d\xi = 0$$

или

$$W_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) -$$
$$- \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\lambda \int_\xi^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi)\, C(\xi, \lambda)\, W_0(\xi, \lambda)\, d\xi. \tag{32}$$

Пусть теперь λ изменяется в области $|\lambda| > R$, $-\gamma \leqslant \mathcal{R}\lambda \leqslant \gamma$. Тогда к интегральному уравнению (32) можно применить метод последовательных приближений. Для этого заметим, что если число M — достаточно большое, то для $x \in [0, l]$, $|\lambda| > R$, $-\gamma \leqslant \mathcal{R}\lambda < \gamma$ выполняются неравенства

$$\left\| e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) \right\| \leqslant \left\| e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\| \cdot \left\| \left[E + \frac{S(0)}{\lambda}\right]^{-1} \right\| < M,$$

$$\| e^{-\lambda \int\limits_{\xi}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi) C(\xi, \lambda) \| < M.$$

Из этих оценок следует, что разложение

$$W_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int\limits_{0}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) -$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x e^{\lambda \int\limits_{\xi}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \Lambda^{-1}(\xi) C(\xi, \lambda) e^{\lambda \int\limits_{0}^{\xi} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) d\xi + \ldots, \qquad (33)$$

полученное формальным применением метода последовательных приближений, будет равномерно сходиться относительно (x, λ) для $x \in [0, l]$, $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ и $|\lambda| > R_1 > \max(R, M, l)$, ибо для него ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} M \left(\frac{Ml}{|\lambda|}\right)^s$ будет мажорантным рядом.

Из разложения (33) следует, что для $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$, $|\lambda| > R_1$

$$W_0(x, \lambda) = e^{\lambda \int\limits_{0}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} W_0(0, \lambda) + \frac{1}{\lambda} F(x, \lambda) = \left[E + \frac{F_1(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int\limits_{0}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta},$$

где $F(x, \lambda)$ и $F_1(x, \lambda)$ — ограниченные относительно (x, λ) и аналитические по λ функции для $x \in [0, l]$, $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$, $|\lambda| > R_1$. Но это значит, что матрица $Y_0(x, \lambda)$ для $|\mathscr{R}\lambda| < \gamma$, $|\lambda| > R$ имеет представление

$$Y_0(x, \lambda) = K(x)\left[E + \frac{1}{\lambda} S(x)\right] W_0(x, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H_0(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int\limits_{0}^{x} \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta},$$

где $H_0(x, \lambda) = K(x)\left[S(x) + F_1(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda} S(x) F_1(x, \lambda)\right]$. Так как матрица $Y_0(x, \lambda)$ — аналитическая по λ в полосе $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ (см. [8], теорема 3), то это представление можно продолжить на всю полосу $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$, причем функция $H_0(x, \lambda)$ при таком продолжении останется ограниченной на этой полосе, равно как и $\frac{1}{\lambda} H_0(x, \lambda)$. Теорема доказана.

§ 2. Асимптотика собственных значений оператора L_0

Теорему 1 и формулы (15) мы используем для изучения распределения собственных значений оператора L_0 при $\lambda \to \infty$.

Подставляя общее решение $y(x, \lambda) = Y(x, \lambda) c$ системы (3) в краевые условия (2), получим уравнение $D(\lambda) c = 0$, где

$$D(\lambda) = MA(0)\frac{\partial Y(0, \lambda)}{\partial x} + [MB(0) + N] Y(0, \lambda) + PA(l)\frac{\partial Y(l, \lambda)}{\partial x} +$$

$$+ [PB(l) + Q] Y(l, \lambda) \qquad (34)$$

— характеристическая матрица краевой задачи для системы (3) с краевыми условиями (2). Собственные значения оператора L_0 являются тогда нулями определителя $\Delta(\lambda) = \det D(\lambda)$.

Преобразуем характеристическую матрицу $D(\lambda)$. Так как из системы (3) следует, что $A(x)\frac{\partial Y(x,\lambda)}{\partial x} = [\lambda E - B(x)]\,Y(x,\lambda)$, то из формулы (34) получим:

$$D(\lambda) = (M\lambda + N)\,Y(0,\lambda) + (P\lambda + Q)\,Y(l,\lambda). \tag{35}$$

Разложим матрицу $D(\lambda)$ на два множителя:

$$D(\lambda) = \mathscr{E}(\lambda)\cdot D_0(\lambda) =$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda E_{qq} & 0_{q\,n-q} \\ 0_{n-q\,q} & E_{n-q\,n-q} \end{Vmatrix} \left[\left(M^0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y(l,\lambda)\right], \tag{36}$$

где E_{qq} и $E_{n-q\,n-q}$ — единичные матрицы, а матрицы M_0, P_0, N_0 и Q_0 получаются из матриц

$$\| M, P \| = \begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \quad \| N, Q \| = \begin{Vmatrix} N_{qn} & Q_{qn} \\ N_{n-q\,n} & Q_{n-q\,n} \end{Vmatrix}$$

по формулам

$$\| M_0, P_0 \| = \begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ N_{n-q\,n} & Q_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \quad \| N_0, Q_0 \| = \begin{Vmatrix} N_{qn} & Q_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \tag{37}$$

причем, согласно условию (13) из [8], $\operatorname{rang}\| M_0, P_0 \| = n$. После этого характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ представится в виде

$$\Delta(\lambda) = \lambda^q \Delta_0(\lambda), \tag{38}$$

где

$$\Delta_0(\lambda) = \det\left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y(l,\lambda)\right]. \tag{39}$$

Так как нули функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ совпадают (за исключением, может быть, $\lambda = 0$), то вместо асимптотического поведения нулей функции $\Delta(\lambda)$ будем изучать асимптотическое поведение нулей функции $\Delta_0(\lambda)$. При этом в качестве фундаментальной матрицы $Y(x,\lambda)$ возьмем фундаментальную матрицу из теоремы 1 (следует иметь в виду, что при замене фундаментальной матрицы, если она остается при этом аналитической по λ, определитель $\Delta(\lambda)$ множится на аналитическую функцию, отличную от нуля, что не влияет на нули $\Delta(\lambda)$). Получим:

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{cases} \Delta_0^{(-1)}(\lambda) = \det\left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right)Y_{-1}(0,\lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y_{-1}(l,\lambda)\right] \\ \qquad \text{для } \mathscr{R}\lambda < -\gamma, \\ \Delta_0^{(0)}(\lambda) = \det\left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right)Y_0(0,\lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y_0(l,\lambda)\right] \\ \qquad \text{для } |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma, \\ \Delta_0^{(1)}(\lambda) = \det\left[M_0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right)Y_1(0,\lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y_1(l,\lambda)\right] \\ \qquad \text{для } \mathscr{R}\lambda > \gamma, \end{cases} \tag{40}$$

или, пользуясь асимптотическими формулами (15), будем иметь:

$$\Delta_0^{(i)}(\lambda) = \det\left\{M_0K(0) + \frac{1}{\lambda}H_i^{(1)}(\lambda) + \left[P_0K(l) + \frac{1}{\lambda}H_i^{(2)}(\lambda)\right]e^{\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right\} \quad (41)$$

$$(i = -1, 0, 1),$$

где $H_i^{(1)}(\lambda)$ и $H_i^{(2)}(\lambda)$ — аналитические и равномерно ограниченные в соответствующих областях матрицы (причем $H_i^{(1)}(0) = H_i^{(2)}(0) = 0$). Разложив определитель (41) на сумму определителей, получим:

$$\Delta_0^{(i)}(\lambda) = \det\left[M_0K(0) + P_0K(l)e^{\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right] + \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{\lambda}h_i^{(k)}(\lambda)e^{\alpha_k\lambda} \quad (i = -1, 0, 1), \quad (42)$$

где $h_i^{(k)}(\lambda)$ $(i = -1, 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ — аналитические и равномерно ограниченные функции в соответствующих областях, а α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ пробегает расположенные в убывающем порядке числа: 0, каждое из чисел $\int\limits_0^l \nu_i^{-1}(\zeta)\,d\zeta$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$, их суммы по два, по три и т. д. до n.

Рассмотрим первое слагаемое в выражении (42):

$$\varphi(\lambda) = \det\left[M_0K(0) + P_0K(l)e^{\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right].$$

Оно представляет собой, если раскрыть определитель, некоторый полином Дирихле $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k\lambda}$, где α_k $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ — те же, что и в выражении (42). В частности,

$$\text{a)}\quad \alpha_1 = \sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^l \nu_k^{-1}(\zeta)\,d\zeta, \qquad \text{b)}\ \alpha_{2^n} = \sum_{k=m+1}^{n}\int\limits_0^l \nu_k^{-1}(\zeta)\,d\zeta, \quad (43)$$

где $\nu_1(\zeta), \nu_2(\zeta), \ldots, \nu_m(\zeta)$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant l)$ — положительные, а $\nu_{m+1}(\zeta), \ldots, \nu_n(\zeta)$ $(0 \leqslant \zeta \leqslant l)$ — отрицательные собственные значения матрицы $A(\zeta)$. Коэффициенты a_i $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ суть некоторые определители, составленные из столбцов матрицы $\| M_0K(0),\ P_0K(l) \|$. Вычислим, в частности, a_1 и a_{2^n}. Для этого произведем следующие разложения матриц $M_0K(0)$, $P_0K(l)$ и $\Lambda^{-1}(x)$:

$$M_0K(0) = \| M_{nm}^{(1)},\ M_{n\,n-m}^{(2)} \|, \qquad P_0K(l) = \| P_{nm}^{(1)},\ P_{n\,n-m}^{(2)} \|, \quad (44)$$

$$\Lambda^{-1}(x) = S_1(x) + S_2(x) = \begin{Vmatrix} \Lambda_{(+)}^{-1}(x) & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & 0_{n-m\,n-m} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0_{mm} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & \Lambda_{(-)}^{-1}(x) \end{Vmatrix}, \quad (45)$$

где

$$\Lambda_{(+)}(x) = \begin{Vmatrix} \nu_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu_m(x) \end{Vmatrix} \text{ и } \Lambda_{(-)}(x) = \begin{Vmatrix} \nu_{m+1}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu_{m+2}(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \nu_n(x) \end{Vmatrix}.$$

После этого можно записать:

$$M_0 K(0) + P_0 K(l) e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} =$$

$$= \left\| M_{nm}^{(1)}, \; M_{n\, n-m}^{(2)} \right\| + \left\| P_{nm}^{(1)} e^{\lambda \int_0^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta}, \; P_{n\, n-m}^{(2)} e^{\lambda \int_0^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\| =$$

$$= \left\| P_{nm}^{(1)} e^{\lambda \int_0^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta}, \; M_{n\, n-m}^{(2)} \right\| + \left\| M_{nm}^{(1)}, \; P_{n\, n-m}^{(2)} e^{\lambda \int_0^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\|,$$

т. е.

$$M_0 K(0) + P_0 K(l) e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} = A_0 e^{\lambda \int_0^l S_1(\zeta) d\zeta} + B_0 e^{\lambda \int_0^l S_2(\zeta) d\zeta}, \tag{46}$$

где

$$A_0 = \| P_{nm}^{(1)}, \; M_{n\, n-m}^{(2)} \|, B_0 = \| M_{nm}^{(1)}, \; P_{n\, n-m}^{(2)} \|. \tag{47}$$

Из представления (46) для матрицы $M_0 K(0) + P_0 K(l) e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta}$ заключаем, что

$$a_1 = \det A_0, \quad a_{2^n} = \det B_0. \tag{48}$$

Определение. Краевые условия (2) (а также краевые условия (2) из [8]) называются регулярными, если

$$a_1 = \det A_0 \neq 0, \quad a_{2^n} = \det B_0 \neq 0. \tag{49}$$

В дальнейшем будут рассматриваться только регулярные краевые условия. Для регулярных краевых условий первое слагаемое $\varphi(\lambda)$ из соотношений (42) достаточно полно определяет поведение нулей функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Если же краевые условия нерегулярны, то существенное влияние на поведение нулей функции $\Delta(\lambda)$ могут оказывать члены высшего относительно $\frac{1}{\lambda}$ порядка малости, и для исследования асимптотического поведения нулей функции $\Delta(\lambda)$ формулы (15) оказываются недостаточно точными. Полином $\varphi(\lambda)$ будем в дальнейшем называть асимптотическим характеристическим полиномом Дирихле, а уравнение $\varphi(\lambda) = 0$ — асимптотическим характеристическим уравнением. Показатели α_k ($k = 1, 2, \ldots, 2^n$), как это следует из построения, удовлетворяют неравенствам

$$\alpha_1 > \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{2^n-1} > \alpha_{2^n}. \tag{50}$$

Среди слагаемых полинома $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k \lambda}$ могут быть подобные. После приведения подобных членов получим: $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k \lambda}$, где $N \leqslant 2^n$. Важно отметить для последующего, что

$$b_1 = a_1, \quad b_N = a_{2^n}, \quad \beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_N = \alpha_{2^n}. \tag{51}$$

Отметим теперь некоторые общие свойства полиномов Дирихле вида $\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k \lambda}$, где b_k ($k = 1, 2, \ldots, N$; $N \geqslant 2$) — произвольные не равные нулю комплексные числа, а β_k ($\beta_k > \beta_{k+1}$) — произвольные действительные числа.

Лемма 2. *Для каждого полинома* $\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k \lambda}$ ($\beta_k > \beta_{k+1}$) *найдется такое число* $\sigma_0 > 0$, *что будут выполняться неравенства*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad |\psi(\lambda)| > \frac{2}{3} |b_1| e^{\beta_1 \sigma}, \ \text{когда } \sigma = \mathcal{R}\lambda > \sigma_0, \\ &\text{b)} \qquad |\psi(\lambda)| > \frac{2}{3} |b_N| e^{\beta_N \sigma}, \ \text{когда } \sigma = \mathcal{R}\lambda < -\sigma_0. \end{aligned} \tag{52}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}\lambda > 0$. Тогда полином $\psi(\lambda)$ можно представить в виде $\psi(\lambda) = e^{\beta_1 \lambda}\left[b_1 + \sum_{k=2}^{N} b_k e^{(\beta_k - \beta_1)\lambda}\right]$. Отсюда следует, что

$$|\psi(\lambda)| > e^{\beta_1 \mathcal{R}\lambda} \left\{ |b_1| - \sum_{k=2}^{N} |b_k| e^{(\beta_k - \beta_1)\mathcal{R}\lambda} \right\}.$$

Так как $\beta_k - \beta_1 < 0$ ($k = 2, 3, \ldots, N$), то $\sum_{k=2}^{N} |b_k| e^{(\beta_k - \beta_1)\mathcal{R}\lambda} \to 0$ для $\mathcal{R}\lambda \to \infty$, а потому $|b_1| - \sum_{k=2}^{N} |b_k| e^{(\beta_k - \beta_1)\mathcal{R}\lambda} > \frac{2}{3} |b_1|$, если $\mathcal{R}\lambda > \sigma_0$, где σ_0 — достаточно большое число. Это доказывает первое из неравенств (52).

Если же $\mathcal{R}\lambda < 0$, то доказательство проводится вполне аналогично, только нужно воспользоваться представлением $\psi(\lambda) = e^{\beta_N \lambda}\left[b_N + \sum_{k=1}^{N-1} b_k e^{(\beta_k - \beta_N)\lambda}\right]$.

Лемма доказана.

Следствие. *Нули полинома Дирихле* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ *лежат в некоторой полосе* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0<+\infty$.

Поскольку σ_0 мы можем произвольно увеличивать, можно считать, что нули полинома $\psi(\lambda)$ лежат не только в полосе $\mathcal{R}\lambda<\sigma_0$, но и в полосе $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0-2\delta$, где $\delta>0$ — некоторое достаточно малое число.

Полином $\psi(i\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{i\beta_k\lambda}$ является почти-периодической функцией λ (см. [5], стр. 343), а потому при изучении полинома Дирихле $\psi(\lambda)$ мы можем пользоваться общими свойствами таких функций.

Лемма 3. *Если нули полинома* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ $(\beta_k>\beta_{k+1})$ *лежат в полосе* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0-2\delta$, *где* $\delta>0$, *то существует число* $m(\delta)>0$, *для которого выполняется неравенство*

$$|\psi(\lambda)|>m(\delta), \tag{53}$$

если λ *принадлежит области* $G(\sigma_0,\delta)$, *полученной из полосы* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0+\delta$ *выбрасыванием кружков радиуса* δ *с центрами в нулях полинома* $\psi(\lambda)$.

Доказательство. Это утверждение сразу следует из леммы 1 книги [5] (стр. 347), если функцию $\psi(\lambda)$ рассмотреть в полосе $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0+2\delta$.

Теорема 2. *Если все нули полинома* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ $(\beta_k>\beta_{k+1})$ *лежат в полосе* $|\mathcal{R}\lambda|<\sigma_0$ *и если* $n(y_1,y_2)$ *обозначает число нулей полинома* $\psi(\lambda)$ *в прямоугольнике* $(-\sigma_0\leqslant\mathcal{R}\lambda\leqslant\sigma_0,\ y_1<\mathfrak{J}\lambda\leqslant y_2)$, *то*

$$n(y_1,y_2)=\frac{\beta_1-\beta_N}{2\pi}(y_2-y_1)+\omega(y_1,y_2), \tag{54}$$

где $\omega(y_1,y_2)$ $(-\infty<y_1,\ y_2<+\infty)$ — *равномерно ограниченная функция.*

Эта теорема доказана в работе [4], и, кроме того, сразу следует из теоремы 3 § 2 гл. VI книги [5].

Следствие. *Нули* λ_s^0 $(s=0,\pm1,\ldots)$ *полинома* $\psi(\lambda)=\sum_{k=1}^{N} b_k e^{\beta_k\lambda}$ $(\beta_k>\beta_{k+1})$ *допускают представление*

$$\lambda_s^0=\frac{2\pi is}{\beta_1-\beta_N}+k(s), \tag{55}$$

где $k(s)$ $(s=0,\pm1,\ldots)$ — *ограниченная функция.*

Доказательство. В формуле (54) положим $y_1=0$, а числу y_2 будем давать значения $\mathfrak{J}\lambda_s^0$, где λ_s^0 $(s=0,\pm1,\ldots)$ — нули полинома $\psi(\lambda)$, перенумерованные по мере их удаления от оси Ox в обе стороны таким образом, что λ_0^0 будет ближайшим к оси Ox нулем полинома $\psi(\lambda)$ (если таких нулей несколько, то в качестве λ_0^0 возьмем тот из этих нулей, который имеет наименьшую действительную часть) и т. д. Получим:

$$\mathfrak{J}\lambda_s^0=\frac{2\pi s}{\beta_1-\beta_N}+2\pi\frac{\omega(0,\mathcal{J}\lambda_s^0)}{\beta_N-\beta_1}\quad(s=0,\pm1,\ldots),$$

откуда и следует формула (55)

В том случае, когда условия (2) регулярны, утверждения, аналогичные лемме 2, лемме 3 и теореме 2, имеют место и для функции $\Delta_0(\lambda)$. Перейдем к их доказательству.

Лемма 4. *Если краевые условия* (2) *регулярны и если число* γ *в формуле* (40) *выбрано достаточно большим, то*

$$| \Delta_0^{(-1)}(\lambda) | > \frac{1}{3} | a_{2^n} | e^{\alpha_{2^n}\sigma} \text{ для } \sigma = \mathcal{R}\lambda < -\gamma,$$
$$| \Delta_0^{(1)}(\lambda) | > \frac{1}{3} | a_1 | e^{\alpha_1\sigma} \text{ для } \sigma = \mathcal{R}\lambda > \gamma. \tag{56}$$

Доказательство. Из формул (42) следует, что

$$\Delta_0^{(i)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} \left[a_k + \frac{1}{\lambda} h_i^{(k)}(\lambda) \right] e^{\alpha_k\lambda} \quad (i = -1, 1). \tag{57}$$

Если γ — достаточно большое число, то, повторяя доказательство леммы 2 для выражений (57), получим неравенства:

$$| \Delta_0^{(-1)}(\lambda) | > \frac{2}{3} \left| a_{2^n} + \frac{1}{\lambda} h_{(-1)}^{(2^n)}(\lambda) \right| e^{\alpha_{2^n}\sigma} \text{ для } \sigma < -\gamma,$$
$$| \Delta_0^{(1)}(\lambda) | > \frac{2}{3} \left| a_1 + \frac{1}{\lambda} h_{(1)}^{(1)}(\lambda) \right| e^{\alpha_1\sigma} \text{ для } \sigma > \gamma. \tag{58}$$

Если γ — достаточно большое, то

$$\left| a_1 + \frac{1}{\lambda} h_{(-1)}^{(1)}(\lambda) \right| > \frac{1}{2} | a_1 |, \quad \left| a_{2^n} + \frac{1}{\lambda} h_{(1)}^{(2^n)}(\lambda) \right| > \frac{1}{2} | a_{2^n} |,$$

что доказывает неравенства (56).

Следствие. *Если краевые условия* (2) *регулярны и если* γ *в формуле* (15) — *достаточно большое, то нули функции* $\Delta_0(\lambda)$ (*а значит, и собственные значения оператора* L_0) *лежат в полосе* $| \mathcal{R}\lambda | \leqslant \gamma$.

Без ограничения общности можно считать, что нули функции $\Delta_0(\lambda)$ лежат в полосе $| \mathcal{R}\lambda | < \sigma_0 - 2\delta$, где $\sigma_0 + \delta < \gamma$, а $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число.

Лемма 5. *Если краевые условия* (2) *регулярны и если нули функции* $\Delta_0(\lambda)$ *лежат в полосе* $| \mathcal{R}\lambda | < \sigma_0 - 2\delta$, *где* $\sigma_0 + \delta < \gamma$, *причем* γ — *число, входящее в условия теоремы* 1, *то найдется такое число* $m(\delta) > 0$, *что для области* $G(\sigma_0, \delta)$, *полученной из полосы* $| \mathcal{R}\lambda | < \sigma_0 + \delta$ *выбрасыванием кружков радиуса* δ *с центрами в нулях функции* $\Delta_0(\lambda)$, *будет выполняться неравенство*

$$| \Delta_0(\lambda) | > m(\delta) > 0. \tag{59}$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (42) для функции $\Delta_0^{(0)}(\lambda)$. Имеем:

$$\Delta_0^{(0)}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k\lambda}.$$

Согласно лемме 3, существует такое число $m_0(\delta) > 0$, что для $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$ выполняется неравенство $\left|\sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k \lambda}\right| > m_0(\delta)$. Найдем теперь такое $R > 0$, чтобы для $|\lambda| > R$ и $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$ было $\left|\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{\lambda} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}\right| < \frac{m_0(\delta)}{2}$. Тогда для тех же λ будет иметь место неравенство $|\Delta_0^{(0)}(\lambda)| > \frac{m_0(\delta)}{2}$. Так как для $\lambda \in G(\sigma_0, \lambda)$ и $|\lambda| \leqslant R$ $\min|\Delta_0^{(0)}(\lambda)| = m_1(\delta) > 0$, то для $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$ выполняется неравенство $|\Delta_0^{(0)}(\lambda)| \geqslant \min\left\{\frac{m_0(\delta)}{2}, m_1(\delta)\right\}$, которое и доказывает лемму 5.

Теорема 3. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то собственные значения* λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ *оператора* L_0 *допускают представление*

$$\lambda_s = \frac{2\pi s i}{\alpha_1 - \alpha_{2^n}} + \omega(s) \quad (s = 0, \pm 1, \ldots), \tag{60}$$

где комплекснозначная функция $\omega(s)$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ *ограничена и* α_1 *и* α_{2^n} — *наибольший и наименьший показатели асимптотического полинома Дирихле* $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^n} a_k e^{\alpha_k \lambda}$.

Доказательство. По формуле (42) $\Delta_0^{(0)}(\lambda) = \varphi(\lambda) + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}$. Но, согласно следствию из теоремы 2, нули λ_s^0 $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ асимптотического полинома Дирихле $\varphi(\lambda)$ допускают представление

$$\lambda_s^0 = \frac{2\pi s i}{\alpha_1 - \alpha_{2^n}} + k(s). \tag{61}$$

Пусть $G(\sigma_0, \delta)$ — область, полученная из полосы $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 - 2\delta$, содержащей все нули полинома $\varphi(\lambda)$, выбрасыванием кружков радиуса δ, и пусть $m(\delta)$ (по лемме 3) — число, для которого $|\varphi(\lambda)| > m(\delta)$, когда $\lambda \in G(\sigma_0, \delta)$. Найдем такое $R > 0$, чтобы для $|\lambda| > R$ и $\lambda \in G(\sigma_0, \lambda)$ выполнялось неравенство $\left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}\right| < m(\delta)$. Тогда для тех же λ

$$|\varphi(\lambda)| > \left|\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{2^n} h_0^{(k)}(\lambda) e^{\alpha_k \lambda}\right|. \tag{62}$$

Из формулы (54) следует, что $\sup\limits_{-\infty < y_1 < +\infty} n(y_1, y_1 + 1) = k_0 < +\infty$, т. е. на единице длины полосы $|\mathscr{R}\lambda| < \sigma_0 - \delta$ лежит лишь конечное число нулей полинома $\varphi(\lambda)$, а потому, если $\delta > 0$ — достаточно малое число, то соседние кружки с центрами в нулях полинома и радиуса δ, пересекаясь, образуют области диаметром не больше чем $2k_0\delta$. Из неравенства (62) и теоремы Руше следует, что для $|\lambda| > R$ эти области будут содержать одно и то же число нулей функций $\Delta_0^{(0)}(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, т. е. для нулей λ_s функции $\Delta_0^{(0)}(\lambda)$ при достаточно большом s будем иметь приближенную формулу:

$$\lambda_s = \lambda_s^0 + \rho_s, \tag{63}$$

где $|\rho_s| < 2k_0\delta$, а λ_s^0 — нуль функции $\varphi(\lambda)$. Если учесть (55), то формула (63) доказывает представление (60) для $|\lambda_s| > R$. При этом может случиться, что нумерация собственных значений λ_s в формуле (63) не будет совпадать с нумерацией λ_s в формуле (60). Но так как переход от одной нумерации к другой приведет лишь к замене в формуле (60) одной ограниченной функции $\omega(s)$ другой такой же функцией, то это обстоятельство не ограничивает общности рассуждений. Так как доказательство возможности представления (60) на круге $|\lambda| \leqslant R$ очевидно, то теорема доказана.

Следствие. *Кратности k_s нулей λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ ограничены, т. е.* $\sup k_s = k^0 < \infty$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$.

Замечание. Оператор

$$L^* z(x) = -\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)] + B^*(x) z(x) \tag{64}$$

с областью определения Θ_1, состоящей из функций $z(x) \in C^{(1)}(0,l)$, удовлетворяющих краевому условию

$$h^* z \equiv -R\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)]\Big|_{x=0} + [RB^*(0) - S] z(0) - V\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)]\Big|_{x=l} +$$

$$+ [VB^*(l) - W] z(l) = 0, \tag{65}$$

будем обозначать через $\overset{*}{L_0} z(x)$. В силу определений § 2 из [8], это — оператор, сопряженный с оператором $L_0 y(x)$. Если фундаментальные матрицы $Y(x, \lambda)$ и $Z(x, \lambda)$ систем $Ly(x) = \lambda y(x)$ и $\overset{*}{L} z(x) = \lambda z(x)$ выбраны таким образом, что $Z(x, \lambda) = \overset{*}{A}{}^{-1}(x) Y^{-1}(x, \lambda)$ (см. лемму 5 из [8]), то, в силу замечания к теореме 5 из [8], между характеристическими определителями $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ операторов $L_0 y(x)$ и $\overset{*}{L_0} z(x)$ будет иметь место соотношение

$$\Delta_1(\lambda) = \overline{\Delta(\overline{\lambda})\, e^{-h\lambda + \overline{a}}}, \tag{66}$$

где $h = \int\limits_0^l \sum\limits_{k=1}^n \nu_k^{-1}(\zeta)\, d\zeta$, а a — некоторое комплексное число. Из (66) следует что если для оператора L_0 условия (2) регулярны, то и для оператора $\overset{*}{L_0}$ будут регулярными краевые условия (65).

Для доказательства этого достаточно разложение (42) подставить в формулу (38), а потом полученное выражение подставить в соотношение (66). Мы будем иметь разложение

$$\Delta_1(\lambda) = \lambda^q \left[\overline{\varphi(\overline{\lambda})}\, e^{-h\lambda + \overline{a}} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\lambda}\, \overline{h_i^{(k)}(\overline{\lambda})}\, e^{(\alpha k - h)\lambda + \overline{a}}\right] \quad (i = -1, 0, 1).$$

Пусть, далее, $Z^{(1)}(x, \lambda)$ — фундаментальная матрица, построенная по формуле (15) для сопряженной системы $L^* z(x) = \lambda z(x)$. Она может отличаться от фундаментальной матрицы $Z(x, \lambda) = A^{*-1}(x) Y^{-1}(x, \lambda)$. Но, поскольку обе матрицы $Z(x, \lambda)$ и $Z^{(1)}(x, \lambda)$ при $x = 0$ во всей средней полосе $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ не зависят от λ (см. теорему 1), они там могут отличаться лишь постоянным матричным множителем. А тогда и характеристические определители, построенные с помощью этих матриц, могут в указанной полосе отличаться лишь постоянным множителем b, отличным от нуля. Отсюда следует, что асимптотический полином Дирихле $\psi(\lambda)$ для оператора L_0^* будет иметь вид:

$$\psi(\lambda) = b\overline{\varphi(\overline{\lambda})} e^{-h\lambda + \overline{a}} = \sum_{k=1}^{2^n} b\overline{a}_k e^{(\alpha_k - h)\lambda} e^{\overline{a}}.$$

Так как краевые условия (2) регулярны, то $b\overline{a}_1 e^{\overline{a}} \neq 0$ и $b\overline{a}_{2^n} e^{\overline{a}} \neq 0$, а это значит, что регулярны и краевые условия (65).

§ 3. Функция Грина

Оператор $R_\lambda f = (L_0 - \lambda E)^{-1} f$, определенный на области значений оператора L_0 (т. е. для каждого $f(x) \in C(0, l)$), будем называть **резольвентой оператора** L_0.

Теорема 4. *Если λ не является собственным значением оператора L_0, то найдется (и притом единственная) матрица-функция $G(x, \xi, \lambda)$, непрерывная на каждом из треугольников $(0 \leqslant x < \xi \leqslant l)$ и $(0 \leqslant \xi < x \leqslant l)$ вплоть до границы и такая, что для $f(x) \in C(0, l)$*

$$R_\lambda f(x) = [f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)]. \tag{67}$$

(Определение и свойства скалярного произведения [,] см. в [8], § 2.)

Функцию $G(x, \xi, \lambda)$ будем называть **функцией Грина оператора** $L_0 - \lambda E$.

Доказательство. Если функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ существует, то, поскольку $(L_0 - \lambda E) R_\lambda f(x) = f(x)$, функция $y(x, \lambda) = [f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)]$ для каждого $f(x) \in C(0, l)$ должна удовлетворять уравнению

$$A(x)\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial x} + B(x)y(x, \lambda) - \lambda y(x, \lambda) = f(x) \tag{68}$$

и краевым условиям (2). Нетрудно убедиться, что если функция Грина существует, то она не может быть непрерывной, а потому будем искать ее, по аналогии с другими случаями (см. [6], стр. 30), в виде разрывной функции со скачком вдоль диагонали $x = \xi$ квадрата $0 \leqslant x, \xi \leqslant l$. Удобнее искать две функции: $G(x, \xi, \lambda) = G_1(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant l)$ и $G(x, \xi, \lambda) = G_2(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant l)$. Тогда представление (67) перепишется в виде

$$y(x, \lambda) = \int_0^x G_1(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \int_x^l G_2(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi -$$

$$- [G_1(x, 0, \lambda) R^* + G_2(x, l, \lambda) V^*]\ [Mf(0) + Pf(l)]. \tag{69}$$

Подставив это выражение в уравнение (68), получим:

$$A(x)[G_1(x, x, \lambda) - G_2(x, x, \lambda)]f(x) + \int_0^x [LG_1(x, \xi, \lambda) - \lambda G_1(x, \xi, \lambda)]f(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_x^l [LG_2(x, \xi, \lambda) - \lambda G_2(x, \xi, \lambda)]f(\xi)\,d\xi - \{[LG_1(x, 0, \lambda) - \lambda G_1(x, 0, \lambda)]R^* +$$

$$+ [LG_2(x, l, \lambda) - \lambda G_2(x, l, \lambda)]V^*\}[Mf(0) + Pf(l)] = f(x),$$

где $LG_i(x, \xi, \lambda) = A(x)\frac{\partial G_i(x,\xi,\lambda)}{\partial x} + B(x)G_i(x, \xi, \lambda)$ $(i = 1, 2)$. Для обеспечения тождества относительно $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ необходимо и достаточно положить:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)} && A(\xi)[G_1(\xi, \xi, \lambda) - G_2(\xi, \xi, \lambda)] = E, \\ &\text{b)} && A(x)\frac{\partial}{\partial x}G_1(x, \xi, \lambda) + B(x)G_1(x, \xi, \lambda) - \lambda G_1(x, \xi, \lambda) = 0, \\ &\text{c)} && A(x)\frac{\partial}{\partial x}G_2(x, \xi, \lambda) + B(x)G_2(x, \xi, \lambda) - \lambda G_2(x, \xi, \lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Кроме того, функция $y(x, \lambda) = [f(\xi), G^*(x, \xi, \lambda)]$ должна еще удовлетворять краевым условиям (2). Пользуясь уравнением (68), эти условия преобразуем к виду

$$(M\lambda + N)y(0, \lambda) + (P\lambda + Q)y(l, \lambda) + Mf(0) + Pf(l) = 0. \quad (71)$$

Подставив сюда выражение (69), получим:

$$\int_0^l [(M\lambda + N)G_2(0, \xi, \lambda) + (P\lambda + Q)G_1(l, \xi, \lambda)]f(\xi)\,d\xi -$$

$$- \{[(M\lambda + N)G_1(0, 0, \lambda) + (P\lambda + Q)G_1(l, 0, \lambda)]R^* +$$

$$+ [(M\lambda + N)G_2(0, l, \lambda) + (P\lambda + Q)G_2(l, l, \lambda)]V^*\}[Mf(0) + Pf(l)] +$$

$$+ Mf(0) + Pf(l) = 0. \quad (72)$$

Покажем, что если к соотношениям (70) добавить соотношение

$$(M\lambda + N)G_2(0, \xi, \lambda) + (P\lambda + Q)G_1(l, \xi, \lambda) = 0, \quad (73)$$

то равенство (72) будет тождеством относительно $f(\xi) \in C(0, l)$. Для этого достаточно показать, что

$$[(M\lambda + N)G_1(0, 0, \lambda) + (P\lambda + Q)G_1(l, 0, \lambda)]R^* +$$

$$+ [(M\lambda + N)G_2(0, l, \lambda) + (P\lambda + Q)G_2(l, l, \lambda)]V^* = E_q, \quad (74)$$

где $E_q = \begin{Vmatrix} E_{qq} & 0_{q\,n-q} \\ 0_{n-q\,q} & 0_{n-q\,n-q} \end{Vmatrix}$, а E_{qq} — единичная матрица, причем, $q = \operatorname{rang} \| M, P \|$ (см. [8], § 1).

Из равенства (70) а) следует, что

$$G_1(0, 0, \lambda) = G_2(0, 0, \lambda) + A^{-1}(0), \quad G_2(l, l, \lambda) = G_1(l, l, \lambda) - A^{-1}(l). \tag{75}$$

Тогда левая часть выражения (74) примет вид:

$$[(M\lambda + N) G_2(0, 0, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, 0, \lambda)] R^* +$$

$$+ [(M\lambda + N) G_2(0, l, \lambda) + (P\lambda + Q) G_1(l, l, \lambda)] V^* +$$

$$+ [(M\lambda + N) A^{-1}(0) R^* - (P\lambda + Q) A^{-1}(l) V^*].$$

Первые два слагаемые этого выражения равны нулю в силу равенства (73), а третье слагаемое преобразуем к виду

$$[MA^{-1}(0) R^* - PA^{-1}(l) V^*] \lambda + [-QA^{-1}(l) V^* + NA^{-1}(0) R^*].$$

Из соотношений (31) работы [8] следует, что это выражение будет равно E_q. Этим доказано соотношение (74), а вместе с ним и тождество (72).

Таким образом, если функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ существует, то она удовлетворяет системе уравнений (70), (73) (и, обратно, решение этой системы образует функцию Грина.) Найдем решение этой системы. Из уравнений (70) b) и (70) c) следует, что

$$G_1(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) \Gamma_1(\xi, \lambda), \quad G_2(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) \Gamma_2(\xi, \lambda), \tag{76}$$

где $Y(x, \lambda)$ — фундаментальная матрица системы (3), а $\Gamma_1(\xi, \lambda)$ и $\Gamma_2(\xi, \lambda)$ — некоторые неизвестные матрицы. Для их определения из уравнений (70) а) и (73) получим систему:

$$\begin{gathered} A(\xi) Y(\xi, \lambda) [\Gamma_1(\xi, \lambda) - \Gamma_2(\xi, \lambda)] = E, \\ (M\lambda + N) Y(0, \lambda) \Gamma_2(\xi, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda) \Gamma_1(\xi, \lambda) = 0. \end{gathered} \tag{77}$$

Из этой системы находим, что

$$\begin{gathered} \Gamma_1(\xi, \lambda) = D^{-1}(\lambda)(M\lambda + N) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi), \\ \Gamma_2(\xi, \lambda) = -D^{-1}(\lambda)(P\lambda + Q) Y(l, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi), \end{gathered} \tag{78}$$

где $D(\lambda) = (M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda)$ — характеристическая матрица оператора L_0. А тогда, в силу формул (76),

$$\begin{gathered} G_1(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) D^{-1}(\lambda)(M\lambda + N) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ G_2(x, \xi, \lambda) = -Y(x, \lambda) D^{-1}(\lambda)(P\lambda + Q) Y(l, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{gathered} \tag{79}$$

Эти формулы доказывают существование функции Грина для каждого λ, не являющегося собственным значением оператора L_0.

Докажем единственность функции Грина. Для этого предположим, что существуют две функции Грина оператора $L_0 - \lambda E$: $G(x, \xi, \lambda)$ и $\overline{G}(x, \xi, \lambda)$.

Тогда из представления (67) следует, что для каждой функции $f(\xi)\in C(0, l)$ и каждого $x\in[0, l]$ $[f(\xi), G^*(x, \xi, \lambda)-\overline{G}^*(x, \xi, \lambda)]=0$. Если же положить $f(0)=f(l)=0$, то $\int\limits_0^l [G(x, \xi, \lambda)-\overline{G}(x, \xi, \lambda)]f(\xi)\,d\xi=0$. В силу произвольности и непрерывности $f(\xi)$ внутри интервала $(0, l)$, а также в силу непрерывности матриц $G(x, \xi, \lambda)$ и $\overline{G}(x, \xi, \lambda)$ для $x\neq\xi$ $(0\leqslant x, \xi\leqslant l)$, отсюда следует, что $G(x, \xi, \lambda)\equiv\overline{G}(x, \xi, \lambda)$ $(0\leqslant x, \xi\leqslant l;\ x\neq\xi)$. Теорема доказана.

Замечание. При изучении функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ мы очень часто будем обращаться к формулам (79) для этой функции, полученным в ходе доказательства теоремы 4. Используем их, например, для построения функции Грина $G_{(k)}(x, \xi, \lambda)$ дифференциального оператора $L_{k-1}y(x)=A_k(x)\frac{dy(x)}{dx}+B_k(x)y(x)-\widetilde{J}_k^*(0)y(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, определенного для вектор-функций $y(x)\in C^{(1)}(0, l)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$M_kA_k(0)y'(0)+[M_kB_k(0)+N_k]y(0)+P_kA_k(l)y'(l)+$$
$$+[P_kB_k(l)+Q_k]y(l)=0.$$

Здесь $A_k(x)=\mathcal{D}_kA(x)$, $B_k(x)=\mathcal{D}_kB(x)$ и т. д., а $\widetilde{J}_k(0)$ — матрица вида $\begin{Vmatrix}0 & E & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & E & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{Vmatrix}$, состоящая из $k\times k$ блоков размера $n\times n$ (E — единичная матрица); $y(x)=\begin{Vmatrix}y_1(x)\\ \cdots\\ y_k(x)\end{Vmatrix}$, где $y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$ — n-мерные векторы. (Оператор $L_{k-1}y(x)$ порождается задачей (91), (92) из [8].) В силу леммы 7 из [8], матрица $\mathcal{D}_kY(x, \lambda)$ будет фундаментальной матрицей системы $L_{k-1}y(x)=\lambda y(x)$, а потому из свойств оператора $\mathcal{D}_k$ и формул (79) следует что

$$G_k(x, \xi, \lambda)=\mathcal{D}_kG(x, \xi, \lambda)\quad (k=1, 2, \ldots), \tag{80}$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L_0-\lambda E$.

Лемма 6. *Если $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L_0-\lambda E$, а $H(x, \xi, \mu)$ $(0\leqslant x, \xi\leqslant\lambda)$ — функция Грина оператора $L_0^*-\mu E$, то между ними имеет место следующая связь*:

$$H(x, \xi, \mu)=G^*(\xi, x, \overline{\mu}). \tag{81}$$

Доказательство. Докажем сначала, что если $\lambda=\lambda_0$ не является собственным значением оператора L_0, то для любых $f(\xi)\in C(0, l)$ и $g(\xi)\in C(0, l)$ имеет место тождество

$$[R_{\lambda_0}f(\xi),\ g(\xi)]=[f(\xi),\ R^0_{\overline{\lambda}_0}\,g(\xi)], \tag{82}$$

где R_λ и R^0_μ — резольвенты операторов L_0 и L_0^* соответственно. Так как $f_1(\xi)=R_{\lambda_0}f(\xi)\in\Theta_0$ и $g_1(\xi)=R^0_{\overline{\lambda}_0}g(\xi)\in\Theta_1$, то из тождества (78) работы [8] следует равенство

$$[f_1(\xi),\ (L_0^* - \overline{\lambda}_0 E)\, g_1(\xi)] = [(L_0 - \lambda_0 E)\, f_1(\xi),\ g_1(\xi)],$$

которое равносильно тождеству (82).

В силу теоремы 4, операторы $R_{\lambda_0} f(\xi)$ и $R^0_{\overline{\lambda}_0} g(\xi)$ имеют представления:

$$R_\lambda f(\xi) = [f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)] \text{ и } R_{\overline{\lambda}_0} g(\xi) = [g(\xi),\ H^*(x, \xi, \overline{\lambda}_0)],$$

а потому из тождества (82) будем иметь:

$$\big[[f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)],\ g(x)\big] = \big[f(x),\ [g(\xi),\ H^*(x, \xi, \overline{\lambda}_0)]\big]. \tag{83}$$

Пусть $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$. Тогда

$$\int_0^l \int_0^l g^*(x)\, G(x, \xi, \lambda_0)\, f(\xi)\, dx\, d\xi = \int_0^l \int_0^l g^*(\xi)\, H^*(x, \xi, \lambda_0)\, f(x)\, d\xi\, dx.$$

Производя очевидные преобразования, получим:

$$\int_0^l \int_0^l g^*(\xi)\, [G(\xi, x, \lambda_0) - H^*(x, \xi, \overline{\lambda}_0)]\, f(x)\, d\xi\, dx = 0. \tag{84}$$

В силу произвольности непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$ внутри интервала $(0, l)$, а также непрерывности функций $G(x, \xi, \lambda)$ и $H^*(x, \xi, \lambda)$ внутри квадрата $(0 \leqslant x,\ \xi \leqslant l)$ при $x \neq \xi$ и произвольности λ_0, не являющегося собственным значением оператора L_0, из (84) следует равенство (81). Лемма доказана.

Следствие. *Если*

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} G_1(x, \xi, \lambda), & \xi < x, \\ G_2(x, \xi, \lambda), & \xi > x, \end{cases}$$

— функция Грина оператора $L_0 - \lambda E$, то

$$G_1(x, 0, \lambda)(-R^*\lambda + S^*) + G_2(x, l, \lambda)(-V^*\lambda + W^*) = 0. \tag{85}$$

Для доказательства заметим, что, согласно доказанной лемме,

$$H(x, \xi, \mu) = \begin{cases} H_1(x, \xi, \mu) = G_2^*(\xi, x, \overline{\mu}) & (\xi < x), \\ H_2(x, \xi, \mu) = G_1^*(\xi, x, \overline{\mu}) & (\xi > x) \end{cases} \tag{86}$$

будет функцией Грина оператора $L_0^* - \mu E$ и матрицы $H_1(x, \xi, \mu)$ и $H_2(x, \xi, \mu)$ будут удовлетворять системе, аналогичной системе (70), (73). В частности, вместо уравнения (73) будем иметь уравнение

$$(-R\mu + S)\, H_2(0, \xi, \mu) + (-V\mu + W)\, H_1(l, \xi, \mu) = 0, \tag{87}$$

которое, в силу формулы (86), и доказывает соотношение (85).

Получим сейчас из формул (79) асимптотические формулы для функции Грина при $\lambda \to \infty$. Для этого в формулах (79) вместо матрицы $D(\lambda)$ введем матрицу $D_0(\lambda) = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) Y(l, \lambda)$. Получим:

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} G_1(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) \times \\ \times Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, l) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ G_2(x, \xi, \lambda) = -Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) \times \\ \times Y(l, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) \quad (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{cases} \tag{88}$$

Функция Грина, будучи единственной, не зависит от выбора фундаментальной матрицы $Y(x, \lambda)$, а потому будем считать, что

$$Y(x, \lambda) = \begin{cases} Y_{-1}(x, \lambda), & \mathscr{R}\lambda < -\gamma, \\ Y_0(x, \lambda), & |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma, \\ Y_1(x, \lambda), & \mathscr{R}\lambda > \gamma, \end{cases}$$

где $Y_i(x, \lambda)$ $(i = -1, 0, 1)$ — матрицы из теоремы 1. Но тогда, в силу этой же теоремы 1, $Y(x, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta}$, где $H(x, \lambda) = H_i(x, \lambda)$ $(i = -1, 0, 1)$ в зависимости от того, принадлежит ли λ области $\mathscr{R}\lambda < \gamma$, полосе $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ или области $\mathscr{R}\lambda > \gamma$. Из (88) получим тогда следующие асимптотические формулы для функции Грина:

$$\begin{gathered} G_1(x, \xi, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H(x, \lambda)}{\lambda}\right] G_1^0(x, \xi, \lambda) \left[K(\xi) + \frac{H(\xi, \lambda)}{\lambda}\right]^{-1} A^{-1}(\xi) \\ (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ G_2(x, \xi, \lambda) = -\left[K(x) + \frac{H(x, \lambda)}{\lambda}\right] G_2^0(x, \xi, \lambda) \left[K(\xi) + \frac{H(\xi, \lambda)}{\lambda}\right]^{-1} A^{-1}(\xi) \\ (0 \leqslant x < \xi \leqslant l), \end{gathered} \tag{89}$$

где

$$\begin{gathered} \text{a)} \qquad G_1^0(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \left\{\left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] + \right. \\ \left. + \left[P_0 K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\}^{-1} \left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta}, \\ \text{b)} \qquad G_2^0(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \left\{\left[M_0 K(0) + \frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right] + \right. \\ \left. + \left[P_0 K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\}^{-1} \left[P_0 K(l) + \frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_\xi^l \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \end{gathered} \tag{90}$$

и матрицы $\Theta^{(1)}(\lambda)$ и $\Theta^{(2)}(\lambda)$ равномерно ограничены на всей комплексной плоскости. Пользуясь обозначениями (44):

$$M_0K(0)=\|M_{nm}^{(1)},\ M_{n\,n-m}^{(2)}\|,\quad P_0K(l)=\|P_{nm}^{(1)},\ P_{n\,n-m}^{(2)}\|,$$

где m — число положительных диагональных элементов у матрицы $\Lambda(x)$, запишем:

$$M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}=\left\|M_{nm}^{(1)}+\frac{\Theta_{nm}^{(1)}(\lambda)}{\lambda},\ M_{n\,n-m}^{(2)}+\frac{\Theta_{n\,n-m}^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right\|,$$

$$P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}=\left\|P_{nm}^{(1)}+\frac{\Theta_{nm}^{(2)}(\lambda)}{\lambda},\ P_{n\,n-m}^{(2)}+\frac{\Theta_{n\,n-m}^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right\|,$$

где

$$\|\Theta_{nm}^{(1)}(\lambda),\ \Theta_{n\,n-m}^{(1)}(\lambda)\|=\Theta^{(1)}(\lambda)\ \text{и}\ \|\Theta_{nm}^{(2)}(\lambda),\ \Theta_{n\,n-m}^{(2)}(\lambda)\|=\Theta^{(2)}(\lambda).$$

Если

$$\begin{aligned}B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)&=\left\|M_{nm}^{(1)}+\frac{\Theta_{nm}^{(1)}(\lambda)}{\lambda},\ P_{n\,n-m}^{(2)}+\frac{\Theta_{n\,n-m}^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right\|,\\ A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)&=\left\|P_{nm}^{(1)}+\frac{\Theta_{nm}^{(2)}(\lambda)}{\lambda},\ M_{n\,n-m}^{(2)}+\frac{\Theta_{n\,n-m}^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right\|,\end{aligned}\tag{91}$$

то, повторяя преобразования, приведенные при доказательстве формулы (46), получим:

$$\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]+\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int_0^l\Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}=$$

$$=A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta},\tag{92}$$

де (см. § 2)

$$S_1(x)=\left\|\begin{matrix}\Lambda_{(+)}^{(1)}(x) & 0_{m\,n-m}\\ 0_{n-m\,m} & 0_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|\ \text{и}\ S_2(x)=\left\|\begin{matrix}0_{mm} & 0_{m\,n-m}\\ 0_{n-m\,m} & \Lambda_{(-)}^{-1}(x)\end{matrix}\right\|,$$

$$\left\|\begin{matrix}\Lambda_{(+)}^{-1}(x) & 0_{m\,n-m}\\ 0_{n-m\,m} & \Lambda_{(-)}^{-1}(x)\end{matrix}\right\|=\Lambda^{-1}(x).$$

Лемма 7. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то для достаточно больших* $|\lambda|$ *матрицы* $A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ *и* $B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ (см. (91)) *невырождены и для них имеют место соотношения*

а) $$B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\left\|\begin{matrix}E_{mm} & R_{m\,n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ 0_{n-m\,m} & R_{n-m\,n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|,$$

b) $$B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\begin{Vmatrix} S^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m} \\ S^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m}\end{Vmatrix},$$

(93)

c) $$A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\begin{Vmatrix} R^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m} \\ R^{(2)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m}\end{Vmatrix},$$

d) $$A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]=\begin{Vmatrix} E_{mm} & S^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0_{n-m\,m} & S^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{Vmatrix},$$

где матрицы $R^{(i)}_{pq}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $S^{(i)}_{pq}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ $(i=1, 2, 3, 4;\ p, q=m, n-m)$ *при* $\lambda\to\infty$ *имеют конечные пределы, а* E_{mm} *и* $E_{n-m\,n-m}$ *— единичные матрицы.*

Доказательство. Из того, что $A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=A_0+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и $B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=$ $=B_0+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где матрицы A_0 и B_0 строятся по формуле (47), следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\det A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\det A_0=a_1$ и $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\det B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\det B_0=a_{2^n}$. Так как условия (2) регулярны, то $a_1\neq 0$ и $a_{2^n}\neq 0$, а потому для достаточно больших $|\lambda|$ матрицы $A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и $B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ невырождены.

Доказательство соотношений (93) проводится во всех четырех случаях аналогично, а потому проведем его только для случая (93)a). Если

$$B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\begin{Vmatrix} B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & B^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & B^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{Vmatrix}$$

и

$$B_0^{-1}(\lambda)=\begin{Vmatrix} X^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ X^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{Vmatrix},$$

то из равенства $B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)=E$ следует, что

$$X^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+X^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=E_{mm},$$

(94)

$$X^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+X^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=0_{n-m\,m}.$$

Если

$$M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}=\left\|M^{(1)}_{nm}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ M^{(2)}_{n\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\|,$$

где

$$M^{(2)}_{n\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left\|\begin{matrix}M^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ M^{(2)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|,$$

то из соотношений (91) следует, что

$$M^{(1)}_{nm}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\left\|\begin{matrix}B^{(1)}_{m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|.$$

Но тогда из соотношений (94) получим, что

$$B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]=$$

$$=\left\|\begin{matrix}X^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ X^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & X^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}B^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & M^{(2)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ B^{(3)}_{n-m\,m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & M^{(2)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}E_{mm} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|,$$

и соотношение (93)а) доказано.

Лемму 7 мы используем для доказательства следующей теоремы о поведении функции Грина при изменении параметра λ.

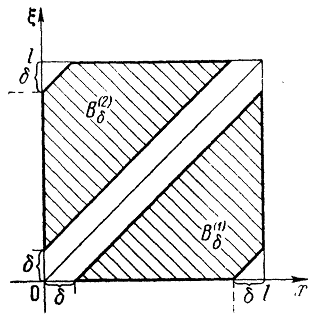
Теорема 5. *Пусть краевые условия* (2) *регулярны и пусть* $G(\rho)$ — *область, полученная из комплексной плоскости* λ *после удаления кружков радиуса* ρ *с центрами в собственных значениях оператора* L_0, *а* B_δ — *множество, полученное из квадрата* $(0\leqslant x,\ \xi\leqslant l)$ *после удаления из него полоски* $x-\delta<\xi<x+\delta$, *содержащей диагональ* $x=\xi$, *и треугольников* $0\leqslant x<\delta$, $x+l-\delta<\xi\leqslant l$ *и* $l-\delta<x\leqslant l$, $0\leqslant\xi<x-l+\delta$. *Тогда:*

1) *Функция Грина оператора* L_0 *равномерно ограничена по норме для* $x\in[0,\,l]$, $\xi\in[0,\,l]$ *и* $\lambda\in G(\rho)$.

2) *Если* $(x,\,\xi)\in B_\delta$ *и* $|\mathscr{R}\lambda|>h(\varepsilon,\,\delta)$, *где* $h(\varepsilon,\,\delta)$ — *достаточно большое число, а* $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ — *произвольные положительные числа, то* $\|G(x,\,\xi,\,\lambda)\|<\varepsilon$.

Доказательство. При доказательстве будем исходить из асимптотических формул (89). Так как множители $K(x)+\frac{H(x,\lambda)}{\lambda}$ и

$\left[K(\xi)+\frac{H(\xi\lambda)}{\lambda}\right]^{-1}A^{-1}(\xi)$ в этих формулах равномерно ограничены относительно x, ξ и λ $(0\leqslant x,\ \xi\leqslant l,\ -\infty<\mathscr{R}\lambda<+\infty)$, то теорему достаточно доказать для функций $G_1^0(x,\xi,\lambda)$ $(0\leqslant\xi<x\leqslant l)$ и $G_2^0(x,\xi,\lambda)$ $(0\leqslant x<\xi\leqslant l)$.



Докажем сначала вторую часть теоремы, причем разобьем доказательство на четыре случая: два случая ($\mathscr{R}\lambda>0$ и $\mathscr{R}\lambda<0$) для $G_1^0(x,\xi,\lambda)$ и два — для $G_2^0(x,\xi,\lambda)$.

1. $\mathscr{R}\lambda<0$, $(x,\xi)\in B_\delta^{(1)}=$ $=[\delta\leqslant x\leqslant l,\quad m_0(x)\leqslant\xi\leqslant x-\delta]$, где $m_0(x)=\max(0,\ x-l+\delta)$ (см. чертеж).

Докажем, что существует такая прямая $\mathscr{R}\lambda=-h_1(\varepsilon,\delta)$, что для $(x,\xi)\in B_\delta^{(1)}$ и $\mathscr{R}\lambda<-h_1(\varepsilon,\delta)$ будет $\|G_1^0(x,\xi,\lambda)\|<\varepsilon$.

Пользуясь тем, что

$$\left\{\left[M_0K(0)+\frac{\Theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]+\left[P_0K(l)+\frac{\Theta^{(2)}(\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int_0^l\Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\right\}^{-1}=$$

$$=\left[A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}=$$

$$=\left[B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}\cdot B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right),\tag{95}$$

из леммы 7 выводим, что выражение (90)а) для функции $G_1^0(x,\xi,\lambda)$ можно переписать в виде

$$G_1^0(x,\xi,\lambda)=e^{\lambda\int_0^x\Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\left[B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}+e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\|\begin{matrix}E_{mm} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}e^{-\lambda\int_0^\xi\Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0\\ 0 & e^{-\lambda\int_0^\xi\Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\|,\tag{96}$$

где

$$\left\|\begin{matrix}\Lambda_{(+)}(x) & 0\\ 0 & \Lambda_{(-)}(x)\end{matrix}\right\|=\Lambda(x).$$

Последние две матрицы в выражении (96) преобразуем следующим образом:

$$\left\|\begin{matrix} E_{mm} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| =$$

$$= e^{-\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} \left\|\begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\|. \tag{97}$$

Первый множитель полученного выражения объединим со вторым множителем формулы (96) и преобразуем так:

$$\left[B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + e^{\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} e^{-\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} =$$

$$= \left[e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} e^{\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} =$$

$$= e^{-\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} \left[e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} + E\right]^{-1}. \tag{98}$$

Первые два множителя из полученного выражения объединим с первым множителем из формулы (96) и перемножим:

$$e^{\lambda\int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} = \left\|\begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_\xi^x \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_x^l \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\|. \tag{99}$$

Преобразования (97), (98) и (99) приведут матрицу (96) к виду

$$G_1^0(x,\xi,\lambda) = \left\|\begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_\xi^x \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_x^l \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| \times$$

$$\times\left[e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda\int\limits_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} + E\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\|\begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} R^{(3)}_{m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\,m} & R^{(4)}_{n-m\,n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\|. \tag{100}$$

Так как

$$e^{\lambda\int\limits_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda\int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta} = \left\|\begin{matrix} e^{\lambda\int\limits_\xi^l \Lambda^{-1}_{(+)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int\limits_0^l \Lambda^{-1}_{(-)}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| \to 0$$

при $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$ равномерно относительно ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant l-\delta)$ $(\delta > 0)$, а матрица $e^{\lambda\int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ остается при этом ограниченной, то средний множитель в выражении (100) равномерно стремится к E при $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$ и $(x,\xi) \in B_\delta^{(1)}$. На основании этого, при доказательстве равномерного приближения $G_1^0(x,\xi,\lambda)$ к нулю для $(x,\xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$ средний множитель в выражении (100) можно заменить на E (так как крайние множители ограничены). Получим:

$$\left\| \begin{matrix} e^{\lambda \int_{\xi}^{x} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} & 0_{m\, n-m} \\ 0_{n-m\, m} & e^{-\lambda \int_{x}^{l} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} R^{(3)}_{m\, n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \\ 0_{n-m\, m} & R^{(4)}_{n-m\, n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{\lambda \int_{\xi}^{x} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} & e^{\lambda \int_{0}^{x} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} R^{(3)}_{m\, n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \\ 0_{n-m\, m} & e^{-\lambda \int_{x}^{l} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} R^{(4)}_{n-m\, n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \end{matrix} \right\|.$$

Так как для $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathcal{R}\lambda \to -\infty$

$$\left\| e^{\lambda \int_{\xi}^{x} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\| \to 0, \quad \left\| e^{\lambda \int_{0}^{x} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} R^{(3)}_{m\, n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\| \to 0,$$

$$\left\| e^{-\lambda \int_{x}^{l} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} R^{(4)}_{n-m\, n-m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int_{0}^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \right\| \to 0$$

равномерно, то при $\mathcal{R}\lambda \to -\infty$ $\| G_1^0(x, \xi, \lambda \| \to 0$ равномерно относительно $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. После этого существование прямой $\mathcal{R}\lambda = -h_1(\varepsilon, \delta)$ со свойством $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ для $\mathcal{R}\lambda \leqslant -h(\varepsilon, \delta)$ и $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ очевидно.

2. $\mathcal{R}\lambda > 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. Докажем, что найдется такая прямая $\mathcal{R}\lambda = h_2(\varepsilon, \delta)$, для которой при $\mathcal{R}\lambda \geqslant h_2(\varepsilon, \delta)$ будет $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ равномерно относительно $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. Для этого вынесем из второго множителя выражения (90)а) матрицу $A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и воспользуемся соотношением (93) с) для преобразования матрицы $A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left[M_0 K(0) + \frac{\theta^{(1)}(\lambda)}{\lambda}\right]$. Получим:

$$G_1^0(x, \xi, \lambda) = e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta) d\zeta} \left[e^{\lambda \int_0^l S_1(\zeta) d\zeta} + A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int_0^l S_2(\zeta) d\zeta} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} R^{(1)}_{mm}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\, n-m} \\ R^{(2)}_{n-m\, m}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\, n-m} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda \int_0^{\xi} \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta) d\zeta} & 0_{m\, n-m} \\ 0_{n-m\, m} & e^{-\lambda \int_0^{\xi} \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta) d\zeta} \end{matrix} \right\|. \quad (101)$$

Последние две матрицы в этом выражении перемножим и представим в виде

$$\left\|\begin{matrix} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & 0_{m\,n-m} \\ R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| =$$

$$= e^{-\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} \cdot \left\|\begin{matrix} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(+)}^{(-1)}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|. \tag{102}$$

Первый множитель из полученного выражения объединим со вторым множителем из (101) и, подобно выражению (98), преобразуем так:

$$\left[e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} e^{-\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} =$$

$$= \left[e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} e^{\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta} + e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} =$$

$$= e^{-\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}\left[E + e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_\xi^l S_2(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}\right]^{-1}. \tag{103}$$

Первые два множителя полученного выражения объединим с первым множителем выражения (101). В результате получим, что

$$G_1^0(x, \xi, \lambda) = \left\|\begin{matrix} e^{-\lambda\int_x^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{\lambda\int_\xi^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta}\end{matrix}\right\| \times$$

$$\times \left[E + e^{\lambda\int_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\int_\xi^l S_2(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda\int_0^l S_1(\zeta)d\zeta}\right]^{-1} \times$$

$$\times \left\|\begin{matrix} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m}\end{matrix}\right\|. \tag{104}$$

На том же основании, что и в предыдущем пункте, заменим средний множитель на E и в полученном выражении матрицы перемножим:

$$\left\| \begin{matrix} e^{-\lambda \int\limits_x^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{\lambda \int\limits_\xi^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda \int\limits_0^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda \int\limits_x^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} R_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \int\limits_0^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\|.$$

При $\mathscr{R}\lambda \to +\infty$ все элементы последней матрицы, а вместе с ними и вся матрица, а также матрицы $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ равномерно стремятся к нулю для $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$. Это доказывает существование прямой $\mathscr{R}\lambda = h_2(\varepsilon, \delta)$ такой, что $\| G_1^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$, когда $(x, \xi) \in B_\delta^{(1)}$ и $\mathscr{R}\lambda > h_2(\varepsilon, \delta)$.

3. $\mathscr{R}\lambda < 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)} = [0 \leqslant x \leqslant l - \delta < l, \quad x + \delta \leqslant \xi \leqslant m_1(x)]$, где $m_1(x) = \min(x + l - \delta, l)$. Как и для $B_\delta^{(1)}$, докажем сначала существование такой прямой $\mathscr{R}\lambda = -h_3(\varepsilon, \delta) < 0$, что при $\mathscr{R}\lambda \leqslant -h_3(\varepsilon, \delta)$ будет $\| G_2^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ для $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$. Для этого из второго множителя в выражении (90) b) вынесем матрицу $B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, воспользуемся соотношением (93) b), произведем преобразования, аналогичные преобразованиям (97), (98) и (99), и представим матрицу $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ в виде

$$G_2^0(x, \xi, \lambda) = \left\| \begin{matrix} e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ 0_{n-m\,m} & e^{-\lambda \int\limits_x^\xi \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left[e^{-\lambda \int\limits_\xi^l S_2(\zeta)d\zeta} B_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) A_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int\limits_0^l S_1(\zeta)d\zeta} e^{-\lambda \int\limits_0^\xi S_2(\zeta)d\zeta} + E \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} S_{mm}^{(1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int\limits_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\,n-m} \\ e^{-\lambda \int\limits_\xi^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} S_{n-m\,m}^{(2)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int\limits_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & E_{n-m\,n-m} \end{matrix} \right\|. \qquad (105)$$

Затем по той же схеме, что и в первых двух пунктах, доказываем, что $G_2^0(x, \xi, \lambda) \to 0$ равномерно при $\mathscr{R}\lambda \to -\infty$ для $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$, а это обеспечивает существование прямой $\mathscr{R}\lambda = -h_3(\varepsilon, \delta)$ с указанными выше свойствами.

4. $\mathscr{R}\lambda > 0$, $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$. Посредством преобразований, аналогичных предыдущим, представим матрицу $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ в виде

$$G_2^0(x, \xi, \lambda) = \left\| \begin{matrix} e^{-\lambda \int\limits_x^\xi \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} & 0_{m\, n-m} \\ 0_{n-m\, m} & e^{\lambda \int\limits_0^x \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left[E + e^{-\lambda \int\limits_\xi^l S_1(\zeta)d\zeta} A_0^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) B_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int\limits_0^l S_2(\zeta)d\zeta}\, e^{-\lambda \int\limits_0^\xi S_1(\zeta)d\zeta} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} E_{mm} & e^{-\lambda \int\limits_\xi^l \Lambda_{(+)}^{-1}(\zeta)d\zeta} S_{m\, n-m}^{(3)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int\limits_\xi^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \\ 0_{n-m\, m} & S_{n-m\, n-m}^{(4)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) e^{\lambda \int\limits_\xi^l \Lambda_{(-)}^{-1}(\zeta)d\zeta} \end{matrix} \right\|, \tag{106}$$

из которого заключаем, что $G_2^0(x, \xi, \lambda) \to 0$ равномерно относительно $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$ при $\mathscr{R}\lambda \to +\infty$, а это доказывает существование прямой $\mathscr{R}\lambda = h_4(\varepsilon, \delta)$ со свойством: $\| G_2^0(x, \xi, \lambda) \| < \varepsilon$ для $\mathscr{R}\lambda \geqslant h_4(\varepsilon, \delta)$ и $(x, \xi) \in B_\delta^{(2)}$.

Этим доказана вторая часть теоремы 5.

Из представлений (100), (104), (105), (106) следует, что функции $G_1^0(x, \xi, \lambda)$ и $G_2^0(x, \xi, \lambda)$ (а следовательно, и $G(x, \xi, \lambda)$) ограничены вне достаточно широкой полосы не только для $(x, \xi) \in B_\delta$, но и для любых $(x, \xi) \in [0, l] \times [0, l]$. Так как $G(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant l;\ x \neq \xi;\ -\infty < \mathscr{R}\lambda < +\infty)$ (что следует из формул (79)) есть мероморфная функция λ с полюсами в собственных значениях оператора L_0 и кусочно-непрерывная по (x, ξ, λ) (со скачком при $x = \xi$), то она ограничена во всякой области, полученной из круга $|\lambda| \leqslant R$ выбрасыванием кружков радиуса ρ с центрами в собственных значениях оператора L_0, лежащих в этом круге. Отсюда следует, что для доказательства ограниченности функции $G(x, \xi, \lambda)$ $(0 \leqslant \xi,\ x \leqslant l)$ в области $G(\rho)$ достаточно доказать ее ограниченность в той части $H(h, R, \rho)$ области $G(\rho)$, которая лежит внутри достаточно широкой полосы $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant h$ и вне достаточно большого круга $|\lambda| \leqslant R$. Для этого воспользуемся формулами (79).

Из асимптотических формул (15) для матрицы $Y(x, \lambda)$ следует, что требует доказательства только ограниченность матрицы $D_0^{-1}(\lambda)$, так как все остальные множители, включая $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)$ и $\mathscr{E}^{-1}(\lambda)(P\lambda+Q)$ (см. (36)), равномерно ограничены в области $H(h, R, \rho)$. Но $D_0^{-1}(\lambda)=\frac{D_0'(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$, где матрица $D_0'(\lambda)$, как матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов ограниченной в $H(h, R, \rho)$ матрицы $D_0(\lambda)$, ограничена. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что ограничена для $\lambda \in H(h, R, \rho)$ функция $\frac{1}{\Delta_0(\lambda)}$. Но так как краевые условия (2) регулярны, то это следует из леммы 5. Теорема доказана.

Следствием из этой теоремы является

Лемма 8. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то функция*

$$y(x, \lambda)=[f(\xi),\ G^*(x, \xi, \lambda)] \tag{107}$$

равномерно ограничена относительно (x, λ), *где* $x \in [0, l]$ *и* $\lambda \in G(\rho)$ $(\rho>0)$, *для каждого* $f(\xi) \in D_2(0, l)$, *причем* $\|y(x, \lambda)\|<\varepsilon$ *для* $x \in [0, l]$ *и* $|\mathscr{R}\lambda|>h(\varepsilon)$, *где* $h(\varepsilon)$ — *достаточно большое число.*

Доказательство. Если $f(\xi) \in D_2(0, l)$ и $g(\xi) \in D_2^*(0, l)$, то имеет место неравенство (см. [8], формула (61)):

$$|[f(\xi),\ g(\xi)]| \leqslant \|f(\xi)\|_{D_2(0,l)} \cdot \|g(\xi)\|_{D_2^*(0,l)},$$

из которого следует, что

$$\|y(x, \lambda)\| \leqslant \|f(\xi)\|_{D_2(0,l)} \|G^*(x, \xi, \lambda)\|_{D_2^*(0,l)} \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{108}$$

где

$$\begin{gathered}\|G^*(x, \xi, \lambda)\|^2_{D_2^*(0,l)}= \\ =\int_0^l \|G^*(x, \xi, \lambda)\|^2 d\xi+\|RG^*(x, 0, \lambda)+VG^*(x, l, \lambda)\|^2 \\ (0 \leqslant x \leqslant l).\end{gathered} \tag{109}$$

Из ограниченности $\|G^*(x, \xi, \lambda)\|$ для $(x, \xi) \in [0, l] \times [0, l]$ и $\lambda \in G(\rho)$ и из неравенства (108) вытекает ограниченность $\|y(x, \lambda)\|$ для $x \in [0, l]$ и $\lambda \in G(\rho)$. Этим доказана первая часть леммы.

Из формулы (85) следует, что

$$\|RG_1^*(x, 0, \lambda)+VG_2^*(x, l, \lambda)\|=\left\|\frac{1}{\lambda}[SG_1^*(x, 0, \lambda)+WG_2^*(x, l, \lambda)]\right\|.$$

Если $|\mathscr{R}\lambda| \rightarrow \infty$, то $G_1^*(x, 0, \lambda)$ и $G_2^*(x, l, \lambda)$ остаются ограниченными, а потому $\|RG_1^*(x, 0, \lambda)+VG_2^*(x, l, \lambda)\| \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in [0, l]$. Но при этом и $\int_0^l \|G(x, \xi, \lambda)\|^2 d\xi \rightarrow 0$, что сразу вытекает из теоремы 5. Поэтому из формулы (109) следует, что $\|G(x, \xi, \lambda)\|_{D_2^*(0,l)} \rightarrow 0$ равномерно относительно $x \in [0, l]$ при $|\mathscr{R}\lambda| \to \infty$, а тогда неравенство (108) доказывает вторую часть леммы.

Для выяснения дальнейших свойств функции Грина нам потребуются некоторые вспомогательные предложения, доказательством которых мы сейчас и займемся.

Лемма 9. *Если* $\operatorname{rang} A_{mn} = r$, *где* $0 < r \leqslant \min(m, n)$, *то матрицу* A_{mn} *можно представить в виде произведения* $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$, *где* $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} T_{rn} = r$, *и, обратно, если матрица* A_{mn} *представлена в виде произведения* $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$, *где* $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} T_{rn} = r$, *то* $\operatorname{rang} A_{mn} = r$, *причем если* $A_{mn} = S^{(1)}_{mr}T^{(1)}_{rn}$ *и* $A_{mn} = S^{(2)}_{mr}T^{(2)}_{rn}$ — *два таких представления, то найдется невырожденная матрица* K_{rr} *такая, что* $S^{(1)}_{mr} = S^{(2)}_{mr}K_{rr}$, $T^{(2)}_{rn} = K_{rr}T^{(1)}_{rn}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{rang} A_{mn} = r$, то у матрицы A_{mn} имеется минор r-го порядка, отличный от нуля. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что он стоит в левом верхнем углу. Тогда если $A_{mn} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(n)}_{m1} \|$, где c^{s}_{m1} $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — столбцы матрицы A_{mn}, то векторы $c^{(s)}_{m1}$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ линейно независимы и все столбцы матрицы A_{mn} являются их линейными комбинациями. А это значит, что если $S_{mr} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(r)}_{m1} \|$, то $\operatorname{rang} S_{mr} = r$ и $c^{(s)}_{m1} = S_{mr}a^{(s)}_{m1}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где $a^{(s)}_{m1}$ — некоторые векторы, причем $a^{(s)}_{m1}$ при $s \leqslant r$ равен i-му единичному вектору. Подставляя последние равенства для $c^{(s)}_{m1}$ в равенство $A_{mn} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(n)}_{m1} \|$, получим:

$$A_{mn} = S_{mr} \| a^{(1)}_{m1}, a^{(2)}_{m1}, \ldots, a^{(n)}_{m1} \| = S_{mr}T_{rn}, \tag{110}$$

где $T_{rn} = \| a^{(1)}_{m1}, a^{(2)}_{m1}, \ldots, a^{(n)}_{m1} \|$. Так как $\| a^{(1)}_{m1}, \ldots, a^{(r)}_{m1} \| = E_{rr}$, то и $\operatorname{rang} T_{rn} = r$.

Пусть, наоборот, дано разложение $A_{mn} = S_{mr}T_{rn}$ и известно, что $\operatorname{rang} S_{mr} = \operatorname{rang} T_{rn} = r$. Так как каждый столбец матрицы A_{mn} является линейной комбинацией r столбцов матрицы S_{mr}, то $\operatorname{rang} A_{mn} \leqslant r$. Матрицы S_{mr} и T_{rn} имеют, по крайней мере, по одному минору r-го порядка, отличному от нуля. Так как произведение этих миноров будет минором r-го порядка матрицы A_{mn}, то это доказывает, что $\operatorname{rang} A_{mn} = r$.

Пусть теперь $A_{mn} = S^{(1)}_{mr}T^{(1)}_{rn}$ и $A_{mn} = S^{(2)}_{mr}T^{(2)}_{rn}$ — два каких-нибудь разложения матрицы A_{mn}, причем $\operatorname{rang} S^{(i)}_{mr} = \operatorname{rang} T^{(i)}_{rn} = r$ $(i = 1, 2)$. Тогда если

$$A_{mn} = \| c^{(1)}_{m1}, c^{(2)}_{m1}, \ldots, c^{(n)}_{m1} \|, \quad T^{(1)}_{rn} = \| b^{(1)}_{r1}, b^{(2)}_{r1}, \ldots, b^{(n)}_{r1} \|,$$

$$T^{(2)}_{rn} = \| d^{(1)}_{r1}, d^{(2)}_{r1}, \ldots, d^{(n)}_{r1} \|,$$

то

$$c^{(s)}_{m1} = S^{(1)}_{mr}b^{(s)}_{r1} = S^{(2)}_{mr}d^{(s)}_{r1} \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{111}$$

Пусть еще $A_{mn}=S_{mr}T_{rn}$ — третье специальное разложение (110). В этом разложении $S_{mr}=\| c_{m1}^{(1)}, c_{m1}^{(2)}, \ldots, c_{m1}^{(r)} \|$. Из формул (111) следует, что

$$S_{mr}=\| c_{m1}^{(1)}, c_{m1}^{(2)}, \ldots, c_{m1}^{(r)} \| = S_{mr}^{(1)} \| b_{r1}^{(1)}, b_{r1}^{(2)}, \ldots, b_{r1}^{(r)} \| =$$

$$=S_{mr}^{(2)} \| d_{r1}^{(1)}, d_{r1}^{(2)}, \ldots, d_{r1}^{(r)} \| . \tag{112}$$

Если $P_{rr}=\| b_{r1}^{(1)}, b_{r1}^{(2)}, \ldots, b_{r1}^{(r)} \|$ и $Q_{rr}=\| d_{r1}^{(1)}, d_{r1}^{(2)}, \ldots, d_{r1}^{(r)} \|$, то из того, что $S_{mr}=S_{mr}^{(1)}P_{rr}$ и $\operatorname{rang} S_{mr}=\operatorname{rang} S_{mr}^{(1)}=r>0$, легко следует, что $\det P_{rr}\neq 0$; аналогично $\det Q_{rr}\neq 0$. А тогда из соотношений (112) получим, что $S_{mr}^{(1)}P_{rr}=S_{mr}^{(2)}Q_{rr}$ или $S_{mr}^{(1)}=S_{mr}^{(2)}K_{rr}$, где $K_{rr}=Q_{rr}P_{rr}^{-1}$. Если полученное соотношение подставить в равенство $S_{mr}^{(1)}T_{rn}^{(1)}=S_{mr}^{(2)}T_{rn}^{(2)}$, то будем иметь:

$$S_{mr}^{(2)}[K_{rr}T_{rn}^{(1)}-T_{rn}^{(2)}]=0. \tag{113}$$

Так как $\operatorname{rang} S_{mr}^{(2)}=r$, то вычеркиванием $m-r$ строк из матрицы $S_{mr}^{(2)}$ можно получить матрицу M_{rr}, для которой $\det M_{rr}\neq 0$. Из равенства (113) следует, что $M_{rr}[K_{rr}T_{rn}^{(1)}-T_{rn}^{(2)}]=0$, т. е. $T_{rn}^{(2)}=K_{rr}T_{rn}^{(1)}$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если λ_0 — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0, а матрицы $Y_{nk_0}(x)$ и $Z_{nk_0}(x)$ построены по формулам* (153), (154) *работы* [8] (§ 4) *из собственных и присоединенных функций операторов L_0 и L_0^* для собственных значений λ_0 и $\overline{\lambda}_0$ соответственно, то для любой регулярной при $\lambda=\lambda_0$ скалярной функции $\varphi(\lambda)$ имеет место разложение*

$$\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}=P_{nk_0,k_0}CQ_{nk_0,k_0}^*. \tag{114}$$

Здесь $C=C_{k_0k_0}$ — некоторая квадратная матрица, зависящая от выбора φ; P_{nk_0,k_0} и Q_{nk_0,k_0} — матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\text{a)}\qquad E_{k_0}^*[\mathscr{D}_{k_0}Y(x,\lambda)]\big|_{\lambda=\lambda_0}P_{nk_0,k_0}=Y_{nk_0}(x),$$

$$\text{b)}\qquad E_1^*[\mathscr{D}_{k_0}^0 A^{*-1}(x)\,Y^{*-1}(x,\overline{\lambda})]\big|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}Q_{nk_0,k_0}=Z_{nk_0}(x), \tag{115}$$

где матрицы E_{k_0} и E_1 состоят из k_0 блоков размерности $n\times n$ и имеют следующее строение:

$$E_{k_0}=\begin{Vmatrix}0\\0\\\cdots\\0\\E\end{Vmatrix},\qquad E_1=\begin{Vmatrix}E\\0\\\cdots\\0\end{Vmatrix}\qquad (E\text{ — единичная матрица}),$$

а операторы $\mathscr{D}_{k_0}$ и $\mathscr{D}_{k_0}^0$ определяются по формулам (95) *из* [8].

Доказательство. Из равенства $\dfrac{D'(\lambda)}{\Delta(\lambda)}=D^{-1}(\lambda)$ следует, что $D(\lambda)\,D'(\lambda)=\Delta(\lambda)\,E$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathcal{D}_{k_0}$, для $\lambda=\lambda_0$ получим:

$$\mathcal{D}_{k_0}D(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}\mathcal{D}_{k_0}D'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}=0.$$

Это значит, что каждый столбец матрицы $\mathcal{D}_{k_0}D'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}$ является решением уравнения

$$\mathcal{D}_{k_0}D(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}c=0. \tag{116}$$

Если $B_{nk_0,k_0}(x)$ — матрица, столбцами которой являются собственные функции задачи (91), (92) из [8] для $k=k_0$ и $\lambda=\lambda_0$, выбранные и расположенные так, как это требует формула (126) из [8], то последние n строк этой матрицы образуют матрицу $Y_{nk_0}(x)$, о которой идет речь в условии леммы, т. е.

$$Y_{nk_0}(x)=\overset{*}{E}_{k_0}B_{nk_0,k_0}(x). \tag{117}$$

Так как матрица $\mathcal{D}_{k_0}Y(x,\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}$, в силу леммы 7 из [8], является фундаментальной матрицей системы (91) из [8] для $k=k_0$ и $\lambda=\lambda_0$, то, по определению собственной функции, найдется матрица P_{nk_0,k_0} ранга k_0, столбцами которой являются решения уравнения (116), такая, что

$$B_{nk_0,k_0}(x)=\mathcal{D}_{k_0}Y(x,\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}P_{nk_0,k_0}. \tag{118}$$

Из формулы (117) следует, что матрица P_{nk_0,k_0} удовлетворяет соотношению (115).

Поскольку столбцы матрицы $\mathcal{D}_{k_0}D'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы P_{nk_0,k_0}, то найдется такая матрица $R^{(1)}_{k_0,nk_0}$, что

$$\mathcal{D}_{k_0}D'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}=P_{nk_0,k_0}R^{(1)}_{k_0,nk_0}, \tag{119}$$

а тогда

$$\mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}=P_{nk_0,k_0}R^{(2)}_{k_0,nk_0},$$

где

$$R^{(2)}_{k_0,nk_0}=R^{(1)}_{k_0,nk_0}\mathcal{D}_{k_0}\left[(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Если окажется, что $0<\operatorname{rang}R^{(2)}_{k_0,nk_0}=r<k_0$, то, пользуясь леммой 9, произведем дальнейшее разложение:

$$R^{(2)}_{k_0,nk_0}=T_{k_0,r}\cdot R^{(3)}_{r,nk_0}, \tag{120}$$

где $\operatorname{rang}R^{(3)}_{r,nk_0}=\operatorname{rang}T_{k_0,r}=r$. Получим:

$$\mathcal{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0}=P_{nk_0,k_0}T_{k_0,r}R^{(3)}_{r,nk_0}. \tag{121}$$

Пользуясь равенством

$$\mathscr{D}_{k_0}F^*(\overline{\lambda})\big|_{\lambda=\lambda_0}=[\mathscr{D}^0_{k_0}F(\lambda)]^*\big|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}, \tag{122}$$

выполняющимся для любой аналитической функции $F(\lambda)$ (см. [8], формула (97)), и равенством

$$D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)=Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)(-V^*\lambda+W^*)D_1^{*-1}(\overline{\lambda}) \tag{123}$$

(см. [8], § 3, формула (75) a)), левую часть выражения (121) перепишем так:

$$\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*=$$

$$=\left\{\mathscr{D}_{k_0}D_1^{*'}(\overline{\lambda})\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)(-V^*\lambda+W^*)\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\overline{\Delta_1(\overline{\lambda})}}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*=$$

$$=\mathscr{D}^0_{k_0}D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}S^{(0)}_{nk_0,nk_0}, \tag{124}$$

где

$$S^{(0)}_{nk_0,nk_0}=\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)(-V^*\lambda+W^*)\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\overline{\Delta(\overline{\lambda})}}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*.$$

Из того, что $D_1(\lambda)D_1'(\lambda)=\Delta_1(\lambda)E$, следует, что $\mathscr{D}^0_{k_0}D_1(\lambda)\big|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}\mathscr{D}^0_{k_0}D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}=0$, а это значит, что столбцы матрицы $\mathscr{D}^0_{k_0}D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}$ являются решениями уравнения

$$\mathscr{D}^0_{k_0}D_1(\lambda)\big|_{\lambda=\overline{\lambda}_0}c=0. \tag{125}$$

Пусть столбцы матрицы Q_{nk_0,k_0} образуют ту полную систему решений уравнения (125), пользуясь которой была построена матрица $Z_{nk_0}(x)$. Тогда имеет место соотношение (115) b) и

$$\mathscr{D}^0_{k_0}D_1'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}=Q_{nk_0,k_0}S^{(1)}_{k_0,nk_0}, \tag{126}$$

где $S^{(1)}_{k_0,nk_0}$ — некоторая прямоугольная матрица. Из формулы (124) получим:

$$\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*=Q_{nk_0,k_0}\cdot S^{(2)}_{k_0,nk_0}, \tag{127}$$

где $S^{(2)}_{k_0,nk_0}=S^{(1)}_{k_0,nk_0}\cdot S^{(0)}_{nk_0,nk_0}$. Пусть $0<\operatorname{rang}S^{(2)}_{k_0,nk_0}=r_1\leqslant k_0$. Тогда, пользуясь леммой 9, матрицу $S^{(2)}_{k_0,nk_0}$ можно разложить на два множителя: $S^{(2)}_{k_0,nk_0}=T^{(1)}_{k_0,r_1}S^{(3)}_{r_1,nk_0}$, где $\operatorname{rang}T^{(1)}_{k_0,r_1}=\operatorname{rang}S^{(3)}_{r_1,nk_0}=r_1$. Из соотношения (127) тогда следует, что

$$\left\{\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}\right\}^*=Q_{nk_0,k_0}T^{(1)}_{k_0,r_1}S^{(3)}_{r_1,nk_0}. \tag{128}$$

Из представлений (121) и (128) получим, что

$$\operatorname{rang}[P_{nk_0,k_0}T_{k_0,r}R^{(3)}_{r,nk_0}] = \operatorname{rang}[Q_{nk_0,k_0}T^{(1)}_{k_0,r_1}S^{(3)}_{r_1,nk_0}]. \tag{129}$$

Используя лемму 9, нетрудно подсчитать, что

$$\operatorname{rang}[P_{nk_0,k_0}T_{k_0r}\,R^{(3)}_{r,nk_0}] = r \text{ и } \operatorname{rang}[Q_{nk_0,k_0}T^{(1)}_{k_0,r_1}S^{(3)}_{r_1,nk_0}] = r_1.$$

Из равенства (129) следует, что $r_1 = r$, а тогда разложение (128) можно переписать так:

$$\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = S^{(3)^*}_{r,nk_0}T^{(1)^*}_{k_0,r}\,Q^*_{nk_0,k_0}. \tag{130}$$

Сравнивая между собой правые части представлений (121) и (130) и пользуясь леммой 9, убеждаемся, что существует невырожденная матрица $K_{r,r}$, такая, что

$$S^{(3)^*}_{r,nk_0} = P_{nk_0,k_0}T_{k_0,r}K_{r,r}, \qquad R^{(3)}_{r,nk_0} = K_{r,r}T^{(1)^*}_{k_0,r}\,Q^*_{nk_0,k_0}. \tag{131}$$

А тогда из представления (128) (или (121)) получим, что

$$\mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\,Y(0,\lambda)\,\varphi(\lambda)\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Bigg|_{\lambda=\lambda_0} = P_{nk_0,k_0}C_{k_0k_0}Q^*_{nk_0,k_0},$$

где $C_{k_0k_0} = T_{k_0,r}K_{r,r}T^{(1)^*}_{k_0,r}$ (в случае $r=0$ или $r_1=0$ можно положить $C=0$), что и требовалось доказать.

Как уже упоминалось ранее, из формул (79) для функции Грина следует, что она является мероморфной функцией λ с полюсами в собственных значениях оператора L_0. Вместе с функцией Грина $G(x,\xi,\lambda)$ мероморфными будут функции $G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}$ и $G(x,\xi,\lambda)\frac{1}{\lambda}$. Имеет место

Лемма 11. *Если λ_0 — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0 и собственное значение оператора L_0 кратности p_0, то*

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\ G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t} = -Y_{nk_0}(x)e^{I_0t}B_0^{-1}Z^*_{nk_0}(\xi),\\ &\text{b)}\ \underset{\lambda\neq\lambda_0\neq 0}{\text{выч}}\ [G(x,\xi,\lambda)\frac{1}{\lambda} = -Y_{nk_0}(x)\,I_0^{-1}B_0^{-1}Z^*_{nk_0}(\xi) \end{aligned} \tag{132}$$

$(0\leqslant x,\ \xi\leqslant l,\ x\neq\xi)$, *где*

$$Y_{nk_0}(x) = \| Y_{nm_1}(x),\ Y_{nm_2}(x),\ \ldots,\ Y_{nm_{p_0}}(x)\|$$

и $Z_{nk_0}(\xi) = \| Z_{nm_1}(\xi),\ Z_{nm_2}(\xi),\ \ldots,\ Z_{nm_{p_0}}(\xi)\|$ *— матрицы, образованные из основной системы собственных матриц по формулам* (153), (154) *работы* [8], *а*

$$B_0 = [Y_{nk_0}(x),\ Z_{nk_0}(x)] = \int_0^l Z^*_{nk_0}(\xi)\, Y_{nk_0}(\xi)\, d\xi -$$

$$- [RZ_{nk_0}(0) + VZ_{nk_0}(l)]^* \, [MY_{nk_0}(0) + PY_{nk_0}(l)]$$

и

$$I_0 = \begin{Vmatrix} J_{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_{p_0}} \end{Vmatrix},$$

где J_{m_i} $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$ — *m_i-мерные клетки Жордана.*

Доказательство. Для вычисления $\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}$ воспользуемся выражением (79) для функции Грина. С этой целью преобразуем его следующим образом: умножим левую и правую части равенства $D(\lambda) = (M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda)$ на $D^{-1}(\lambda)$ и полученное выражение $-D^{-1}(\lambda)(P\lambda + Q) Y(l, \lambda) = D^{-1}(\lambda)(M\lambda + N) Y(0, \lambda) - E$ подставим в формулы (79). Будем иметь:

$$G(x, \xi, \lambda) = Y(x, \lambda) D^{-1}(\lambda)(M\lambda + N) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) + H(x, \xi, \lambda) \tag{133}$$

где

$$H(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \xi < x \leqslant l), \\ -Y(x, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) & (0 \leqslant x < \xi \leqslant l). \end{cases}$$

Так как $H(x, \xi, \lambda)$ — целая аналитическая функция λ для $x \neq \xi$ $(0 \leqslant x, \xi \leqslant l)$, то ее вычет равен нулю, а тогда по правилу вычисления вычетов (см., например, [7], стр. 311) будем иметь:

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t} =$$

$$= \frac{1}{(k_0-1)!} \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda^{k_0-1}} \left[Y(x, \lambda) D'(\lambda)(M\lambda + N) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) e^{\lambda t} \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)} \right] \Bigg|_{\lambda=\lambda_0}. \tag{134}$$

Для преобразования выражения (134) воспользуемся следующей формулой, являющейся очевидным следствием определения оператора $\mathscr{D}_{k_0}$:

$$\frac{1}{(k_0-1)!} \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda^{k_0-1}} F(\lambda) = E^*_{k_0} [\mathscr{D}_{k_0} F(\lambda)] \cdot E_1, \tag{135}$$

где $E_{k_0} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ E \end{Vmatrix}$, $E_1 = \begin{Vmatrix} E \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Vmatrix}$ и $F(\lambda)$ — произвольная аналитическая матрица-функция. Согласно этой формуле, в силу свойств оператора $\mathscr{D}_{k_0}$, выражение (134) можно переписать в виде

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t} =$$

$$= E^*_{k_0}\mathscr{D}_{k_0}\left[Y(x, \lambda) D'(\lambda)(M\lambda+N)\, Y(0, \lambda)\, Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)\, e^{\lambda t}\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} E_1 =$$

$$= E^*_{k_0}\mathscr{D}_{k_0} Y(x, \lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}\cdot \mathscr{D}_{k_0}\left[D'(\lambda)(M\lambda+N)\, Y(0, \lambda)\, e^{\lambda t}\frac{(\lambda-\lambda_0)^{k_0}}{\Delta(\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} \times$$

$$\times\, \mathscr{D}_{k_0} Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)\big|_{\lambda=\lambda_0}\cdot E_1. \qquad (136)$$

Для преобразования последнего множителя в выражении (136) применим формулу

$$\mathscr{D}_{k_0} H(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0} E_1 = [\mathscr{D}^0_{k_0} H^*(\bar\lambda)]^*\big|_{\lambda=\bar\lambda_0} E_1, \qquad (137)$$

которая получается из (122), если в последней положить $F^*(\bar\lambda) = H(\lambda)$ и умножить левую и правую части на матрицу E_1. Пусть в формуле (137) $H(\lambda) = Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)$. Тогда

$$\mathscr{D}_{k_0} Y^{-1}(\xi, \lambda)\, A^{-1}(\xi)\big|_{\lambda=\lambda_0} E_1 = [\mathscr{D}^0_{k_0} A^{*-1}(\xi)\, Y^{*-1}(\xi, \bar\lambda)]^*\big|_{\lambda=\bar\lambda_0} E_1 =$$

$$= \{E^*_1 \mathscr{D}^0_{k_0} A^{*-1}(\xi)\, Y^{*-1}(\xi, \bar\lambda)\}^*\big|_{\lambda=\bar\lambda_0}. \qquad (138)$$

Пользуясь равенством (138) и формулами (114) и (115), соотношение (136) можно переписать в виде:

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t} =$$

$$= [E^*_{k_0}\mathscr{D}_{k_0} Y(x, \lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0} P_{nk_0,k_0}]\, C_{k_0k_0}(t)\, [E^*_1\mathscr{D}^0_{k_0} A^{*-1}(\xi)\, Y^{*-1}(\xi, \bar\lambda)]\big|_{\lambda=\bar\lambda_0} Q_{nk_0,k_0}]^* =$$

$$= Y_{nk_0}(x)\, C_{k_0k_0}(t)\, Z^*_{nk_0}(\xi). \qquad (139)$$

Для доказательства формулы (132)а) остается только доказать, что $C_{k_0k_0}(t) = -e^{I_0 t}B_0^{-1}$. Для этого рассмотрим одну из матриц $Y_{nm_s}(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, p_0)$, из которых состоит матрица $Y_{nk_0}(x) = \| Y_{nm_1}(x), Y_{nm_2}(x), \ldots, Y_{nm_{p_0}}(x) \|$.

Пусть $Y_{nm_s}(x) = \| y^0_1(x), y^0_2(x), \ldots, y^0_{m_s}(x) \|$, где $y^0_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m_s)$ — столбцы. Составим из этих столбцов вектор

$$y_0(x) = \left\| \begin{matrix} y^0_1(x) \\ y^0_2(x) \\ \cdots \\ y^0_{m_s}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Из построения матриц $Y_{nm_s}(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, p_0)$ следует, что вектор-функция $y_0(x)$ будет собственной функцией оператора (см. замечание к теореме 4)

$$L_{(m_s-1)}\, y(x) = A_{m_s}(x)\frac{dy(x)}{dx} + B_{m_s}(x)\, y(x) - \tilde{J}^*_{m_s}(0)\, y(x), \tag{140}$$

где $y(x) = \left\| \begin{matrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{m_s}(x) \end{matrix} \right\|$, $\tilde{J}^*_{m_s}(0) = \mathcal{D}_{m_s}(\lambda E)\,|_{\lambda=\lambda_0}$ (E — единичная матрица размерности $n \times n$), с областью определения $\Theta^{(m_s-1)}$, состоящей из тех вектор-функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$M_k A_k(0)\, y'(0) + [M_k B_k(0) + N_k]\, y(0) + P_k A_k(l)\, y'(l) +$$

$$+ [P_k B_k(l) + Q_k]\, y(l) = 0. \tag{141}$$

Собственным значением будет $\lambda = \lambda_0$. Ввиду этого

$$L_{(m_s-1)}\, y_0(x) - \lambda y_0(x) = (\lambda_0 - \lambda)\, y_0(x). \tag{142}$$

Поскольку функцией Грина оператора $L_{(m_s-1)}$ будет матрица $G_{m_s}(x, \xi, \lambda) = \mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)$ (см. замечание к теореме 4), из равенства (142) и теоремы 4 следует, что

$$y_0(x) = [(\lambda_0 - \lambda)\, y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)\}^*]$$

или

$$[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)\}^*] = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\, y_0(x) \tag{143}$$

(ср. [6], стр. 37). Умножим слева правую и левую части равенства (143) на $\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)$. Так как

$$\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)\,[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)\}^*] = [y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)\}^* \{\mathcal{D}_{m_s} e^{\lambda t} E\}^*] =$$

$$= [y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)\, e^{\lambda t}\}^*],$$

то из равенства (143) следует, что

$$[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} G(x, \xi, \lambda)\, e^{\lambda t}\}^*] = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\, \mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)\, y_0(x). \tag{144}$$

Нетрудно проверить правильность формул:

$$\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} [f(\xi),\ \Phi^*(\xi, \lambda)] = [f(\xi),\ \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} \Phi(\xi, \lambda)\}^*], \quad \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} \mathcal{D}_{m_s} F(\lambda) = \mathcal{D}_{m_s} \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} F(\lambda), \tag{145}$$

где $F(\lambda)$ — аналитическая по λ функция, $\Phi(\xi, \lambda)$ — аналитическая по λ и кусочно-непрерывная по (ξ, λ) $(0 \leqslant \xi \leqslant l;\ \lambda \neq \lambda_0)$ функция, $f(\xi)$ — кусочно-непрерывная функция. Из этих формул, приравнивая вычеты обеих частей равенства (144), получим, что

$$[y_0(\xi),\ \{\mathcal{D}_{m_s} \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t}\}^*] = -\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)|_{\lambda=\lambda_0} y_0(x), \tag{146}$$

где

$$\mathcal{D}_{m_s} \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t} \end{matrix} \right\|.$$

Так как

$$\mathcal{D}_{m_s}(e^{\lambda t}E)|_{\lambda=\lambda_0} y_0(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t}E & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t}{1!}e^{\lambda_0 t}E & e^{\lambda_0 t}E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t^{m_s-1}}{(m_s-1)!}e^{\lambda_0 t}E & \frac{t^{m_s-2}}{(m_s-2)!}e^{\lambda_0 t}E & \dots & e^{\lambda_0 t}E \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} y_1^0(x) \\ y_2^0(x) \\ \dots \\ y_{m_s}^0(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t} y_1^0(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_{2-k}^0(x) \\ \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=0}^{m_s-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_{m_s-k}^0(x) \end{matrix} \right\|, \tag{147}$$

то равенство (146) можно записать в виде

$$\left\| \begin{matrix} [y_1^0(\xi),\ \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t}\}^*] \\ [y_2^0(\xi),\ \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t}\}^*] \\ \dots\dots\dots \\ [y_{m_s}^0(\xi),\ \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_0} G(x,\ \xi,\ \lambda)e^{\lambda t}\}^*] \end{matrix} \right\| = -\left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t} y_1^0(x) \\ \sum\limits_{k=0}^{1} \frac{t^k}{k!} y_{2-k}^0(x) \\ \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{k=0}^{m_s-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_{m_s-k}^0(x) \end{matrix} \right\|. \tag{148}$$

Если же n-мерные компоненты векторов в правой и левой частях последнего равенства расположить в виде столбцов матрицы, то, принимая во внимание, что

$$\left\| e^{\lambda_0 t} y_1^0(x),\ \frac{t}{1!} e^{\lambda_0 t} y_1^0(x) + e^{\lambda_0 t} y_2^0(x),\ \ldots,\ \sum_{k=0}^{m_s-1} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_0 t} y_k^0(x) \right\| =$$

$$= \| y_1^0(x), y_2^0(x), \ldots, y_{m_s}^0(x) \| \cdot \left\| \begin{matrix} e^{\lambda_0 t} & \frac{t}{1!} e^{\lambda_0 t} & \ldots & \frac{t^{m_s-1}}{(m_s-1)!} e^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} & \ldots & \frac{t^{m_s-2}}{(m_s-2)!} e^{\lambda_0 t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_0 t} \end{matrix} \right\| =$$

$$= Y_{nm_s}(x) e^{J_{m_s} t},$$

где J_{m_s} — m_s-мерная клетка Жордана, получим, что

$$[Y_{nm_s}(\xi),\ \{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}\}^*] = -Y_{nm_s}(x) e^{J_{m_s} t}. \tag{149}$$

Объединяя равенства (149) для $s = 1, 2, \ldots, p_0$ в одно, будем иметь:

$$[Y_{nk_0}(\xi),\ \{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}\}^*] = -Y_{nk_0}(x) e^{I_0 t}. \tag{150}$$

Подставляя сюда найденное ранее выражение (139) для $\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) e^{\lambda t}$, получим:

$$[Y_{nk_0}(\xi),\ \{Y_{nk_0}(x) C_{k_0k_0}(t) Z^*_{nk_0}(\xi)\}^*] = -Y_{nk_0}(x) e^{I_0 t}$$

или

$$Y_{nk_0}(x) C_{k_0k_0}(t) B_0 = -Y_{nk_0}(x) e^{I_0 t},$$

где

$$B_0 = [Y_{nk_0}(\xi),\ Z_{nk_0}(\xi)].$$

Отсюда

$$Y_{nk_0}(x) \{C_{k_0k_0}(t) B_0 + e^{I_0 t}\} = 0. \tag{151}$$

Поскольку столбцы матрицы $Y_{nk_0}(x)$ (см. [8], § 3) линейно независимы, из равенства (151) следует, что

$$C_{k_0k_0}(t)B_0+e^{I_0t}=0. \qquad (152)$$

Из (152) вытекает, во-первых, что матрица B_0 — невырожденная, а, во-вторых, — что $C_{k_0k_0}(t)=-e^{I_0t}B_0^{-1}$. Формула (132) a) доказана.

Доказательство формулы (132) b) проводится по той же схеме. Заменяя в равенстве (139) функцию $e^{\lambda t}$ на $\frac{1}{\lambda}$ (все предыдущие вычисления в обоих случаях совпадают), получим:

$$\underset{\lambda=\lambda_0\neq 0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}=Y_{nk_0}(x)C_{k_0k_0}Z^*_{nk_0}(\xi), \qquad (153)$$

где $C_{k_0k_0}$ в отличие от предыдущего случая, — постоянная матрица. Для вычисления ее используем тождество (143). Умножим его слева на матрицу $\mathcal{D}_{m_s}\left(\frac{1}{\lambda}E\right)$:

$$[y_0(\xi),\ \left\{\mathcal{D}_{m_s}G(x,\xi,\lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*]=\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\mathcal{D}_{m_s}\left(\frac{1}{\lambda}E\right)y_0(x),$$

приравняем вычеты обеих частей:

$$\left\|\begin{matrix}\left[y_1^0(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]\\ \left[y_2^0(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \left[y_{m_s}^0(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]\end{matrix}\right\|=-\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\lambda_0}y_1^0(x)\\ -\frac{1}{\lambda_0^2}y_1^0(x)+\frac{1}{\lambda_0}y_2^0(x)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum\limits_{k=0}^{m_s-1}-\left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)^{k+1}y^0_{m_s-k}(x)\end{matrix}\right\|,$$

и, записывая n-мерные компоненты левой и правой части в виде столбцови двух матриц, получим равенство

$$\left[Y_{nm_s}(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]=-Y_{nm_s}(x)J^{-1}_{m_s}(\lambda_0). \qquad (154)$$

Полагая в этом равенстве $s=1,\ 2,\ \dots,\ p_0$ и объединяя все полученные таким образом равенства в одно, будем иметь:

$$\left[Y_{nk_0}(\xi),\ \left\{\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x,\ \xi,\ \lambda)\frac{1}{\lambda}\right\}^*\right]=-Y_{nk_0}(x)I_0^{-1}. \qquad (155)$$

Подставляя сюда выражение для $\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\frac{1}{\lambda}$ из формулы (153) и производя такие же преобразования, как над равенством (150) в предыдущем случае, придем к соотношению $Y_{nk_0}(x)(C_{k_0k_0}B_0 + I_0^{-1}) = 0$, из которого следует, что $C_{k_0k_0} = -I_0^{-1}B_0^{-1}$. Это доказывает формулу (132) b), а вместе с ней и лемму.

Следствие 1. *Если λ_0 — собственное значение оператора L_0, то*

$$\underset{\lambda=\lambda_0}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda) = -Y_{nk_0}(x)B_0^{-1}Z^*_{nk_0}(\xi). \tag{156}$$

Следствие 2. *Если δ — кусочно-гладкий спрямляемый контур, на котором не лежит ни одно из собственных значений оператора L_0, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\delta G(x, \xi, \lambda)e^{\lambda t}d\lambda = -\sum_{s=s_1}^{s_2} Y^{(s)}_{nk_s}(x)e^{I_s t}B_s^{-1}Z^{(s)*}_{nk_s}(\xi), \tag{157}$$

где $s_1, s_1+1, \ldots, s_2-1, s_2$ — номера собственных значений λ_s, лежащих внутри контура δ, а $Y^{(s)}_{nk_s}(x)$, I_s, B_s, $Z^{(s)}_{nk_s}(\xi)$ — соответствующие им матрицы, построенные по формулам (153), (130), (172) *и* (154) *из* [8].

На основании леммы 11 легко доказывается следующая теорема о разложении функции Грина оператора L_0.

Теорема 6. *Если ни одно из собственных значений оператора L_0 не лежит на окружности C с центром в начале координат и если число $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L_0, то имеет место разложение*

$$G(x, \xi, 0) = \sum_{s=-N_1}^{N_2} Y^{(s)}_{nk_s}(x)I_s^{-1}B_s^{-1}Z^{(s)*}_{nk_s}(\xi) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}d\lambda, \tag{158}$$

где λ_s $(s = -N_1, -N_1+1, \ldots, N_2-1, N_2)$ — собственные значения оператора L_0, лежащие внутри окружности C, а матрицы $Y^{(s)}_{nk_s}(x)$, I_s, B_s и $Z^{(s)}_{nk_s}(\xi)$ строятся по формулам (153), (130), (172) *и* (154) *из* [8]. ▌

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}d\lambda$. Полюсами подынтегральной функции являются число 0 и собственные значения оператора L_0, а потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}d\lambda = G(x, \xi, 0) + \sum_{s=-N_1}^{N_2} \underset{\lambda=\lambda_s}{\text{выч}}\, G(x, \xi, \lambda)\frac{1}{\lambda}.$$

Но, в силу формулы (132),

$$\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_s} G(x, \xi, \lambda)\frac{1}{\lambda} = -Y_{nk_s}^{(s)}(x) I_s^{-1} B_s^{-1} Z_{nk_s}^{(s)*}(\xi),$$

откуда следует (158). Это и доказывает теорему.

§ 4. Теорема разложения

Доказанные в предыдущем параграфе свойства функции Грина дают возможность доказать следующую теорему разложения.

Теорема 7. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то для каждой функции* $f(x) \in \Theta_0$ *разложение*

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x) a_s, \tag{159}$$

где

$$a_s = [f(\xi), Z_{nk_s}^{(s)}(\xi) B_s^{*-1}], \tag{160}$$

сходится равномерно к $f(x)$ *при некоторой, не зависящей от выбора* $f(x)$, *группировке членов ряда* (159).

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 12. *Пусть* $G(\rho)$, *как и прежде* (см. теорему 5), — *область, полученная из комплексной плоскости* λ *после удаления из нее кружков радиуса* ρ *с центрами в собственных значениях оператора* L_0. *Тогда если краевые условия* (2) *регулярны и если* ρ *достаточно мало, то существует такая последовательность* $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ *концентрических окружностей с центром в начале координат, что*:

1) *каждая из окружностей целиком лежит в области* $G(\rho)$,

2) *в кольце между двумя последовательными окружностями лежит, по меньшей мере, один выброшенный кружок*,

3) $R_{k+1} - R_k < m < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где R_k — радиус окружности C_k $(k = 1, 2, \ldots)$, *а* m — *некоторое достаточно большое число*.

Доказательство. Пусть $h_0 = \sup|\lambda_{s+1} - \lambda_s|$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$. Из асимптотической формулы (60) для собственных значений λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ оператора L_0 следует, что $h_0 < +\infty$. Пусть, кроме того, $\{C_k^{(0)}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ — последовательность концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусами $R_k^{(0)} = hk$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $h > h_0$. Число $n(k)$ собственных значений λ_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$, лежащих между двумя последовательными окружностями $C_k^{(0)}$ и $C_{k+1}^{(0)}$, как нетрудно заключить из той же формулы (60), удовлетворяет неравенству $1 \leqslant n(k) < n_0 < +\infty$ $(k=1, 2, \ldots)$, где n_0 — достаточно большое число. Возьмем $\rho < \frac{h}{4n_0}$ и построим еще одну последовательность окружностей $\{C_k^{(1)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ с радиусами $R_k^{(1)} = \frac{h}{2n_0}k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда хотя бы одна из окружностей $C_k^{(1)}$ (обозначим ее через C_{k_0}), лежащих между двумя последовательными окружностями $C_{2k_0}^{(0)}$ и $C_{2k_0+1}^{(0)}$, будет целиком лежать в области $G(\rho)$. (В самом деле, между $C_{k_0}^{(0)}$ и $C_{k_0+1}^{(0)}$ лежит $2n_0-1$ окружностей из последовательности $C_k^{(1)}$ ($k=1, 2, \ldots$). Если бы каждая из них пересекала выброшенный кружок радиуса ρ, то между окружностями $C_{k_0}^{(0)}$ и $C_{k_0+1}^{(0)}$ было бы расположено не менее, чем $2n_0-1>n_0$ кружков, что невозможно.) Произведя такой выбор для $k_0=1, 2, \ldots$, получим последовательность окружностей $\{C_s\}$ ($s=1, 2, \ldots$), удовлетворяющих всем условиям леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть C_k ($k=1, 2, \ldots$) — последовательность окружностей, удовлетворяющих условиям предыдущей леммы. Тогда если число $\lambda=0$ не является собственным значением оператора L_0, то для каждой из окружностей C_k ($k=1, 2, \ldots$) можно построить разложение (158) функции Грина оператора L_0:

$$G(x, \xi, 0)=\sum_{s=-m_k^{(0)}}^{m_k^{(1)}} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, I_s^{-1}B_s^{-1}Z_{nk_s}^{(s)*}(\xi)+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}\,d\lambda, \qquad (161)$$

где $-m_k^{(0)}, -m_k^{(0)}+1, \ldots, m_k^{(1)}-1, m_k^{(1)}$ — номера собственных значений, лежащих внутри окружности C_k.

Пусть $f(x)\in\Theta_0$ и $g(x)=Lf(x)\equiv A(x)f'(x)+B(x)f(x)$. Из определения (67) функции Грина следует, что

$$f(x)=[g(\xi),\; G^*(x, \xi, 0)]. \qquad (162)$$

Подставляя сюда разложение (161), получим, что

$$f(x)=\sum_{s=-m_k^{(0)}}^{m_k^{(1)}} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, I_s^{-1}b_s+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{[g(\xi),\; G^*(x, \xi, \lambda)]}{\lambda}\,d\lambda, \qquad (163)$$

где $b_s=[g(\xi),\; Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)\, B_s^{*-1}]$ ($s=-m_k^{(0)}, -m_k^{(0)}+1, \ldots, m_k^{(1)}$). Но на основании тождества (156) из [8] имеем:

$$I_s^{-1}b_s=[L_0f(\xi),\; Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)\, B_s^{*-1}I_s^{*-1}]=[f(\xi),\; L_0^*Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)\, B_s^{*-1}I_s^{*-1}]=$$

$$=[f(\xi),\; Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)\, I_s^*B_s^{*-1}I_s^{*-1}]. \qquad (164)$$

Покажем, что $I_s^*B_s^{*-1}I_s^{*-1}=B_s^{*-1}$. Для этого достаточно показать, что матрицы B_s и I_s перестановочны. Из определения матриц $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$, $Z_{nk_s}^{(s)}(x)$ и I_s

следует, что

$$LY^{(s)}_{nk_s}(x) = Y^{(s)}_{nk_s} I_s, \quad L^* Z^{(s)}_{nk_s}(x) = Z^{(s)}_{nk_s}(x) I^*_s.$$

Но из тождества (156) работы [8] имеем:

$$[LY^{(s)}_{nk_s}(x),\ Z^{(s)}_{nk_s}(x)] = [Y^{(s)}_{nk_s}(x),\ L^* Z^{(s)}_{nk_s}(x)],$$

а это значит, что $[Y^{(s)}_{nk_s}(x) I_s,\ Z^{(s)}_{nk_s}(x)] = [Y^{(s)}_{nk_s}(x),\ Z^{(s)}_{nk_s} I^*_s]$, т. е. $B_s I_s = I_s B_s$. Таким образом, доказано, что $I^*_s B^{*-1}_s I^{*-1}_s = B^{*-1}_s$.

Из соотношений (164) следует тогда, что $I^{-1}_s b_s = a_s$, где $a_s = [f(\xi),\ Z^{(s)}_{nk_s}(\xi) B^{*-1}_s]$, а из равенства (163) будем иметь разложение

$$f(x) = \sum_{s=-m^{(0)}_k}^{m^{(1)}_k} Y^{(s)}_{nk_s}(x) a_s + f_k(x), \tag{165}$$

где

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{[g(\xi),\ G^*(x,\ \xi,\ \lambda)]}{\lambda} d\lambda. \tag{166}$$

Докажем, что при $k \to \infty$ $\| f_k(x) \| \to 0$ равномерно относительно $x \in [0,\ l]$. Для этого, сделав в интеграле (166) замену $\lambda = R_k e^{i\varphi}$, где R_k — радиус окружности C_k, получим:

$$f_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [g(\xi),\ G^*(x,\ \xi,\ R_k e^{i\varphi})]\, d\varphi. \tag{167}$$

Отсюда на основании леммы 8 следует, что при $k \to \infty$ $\| f_k(x) \| \to 0$ равномерно по $x \in [0,\ l]$. Это доказывает равномерную сходимость ряда (159) при такой группировке, когда члены этого ряда, соответствующие собственным значениям, лежащим между двумя последовательными окружностями C_k и C_{k+1}, объединяются в одну группу. А это значит, что для того случая, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L_0, теорема доказана. Если же $\lambda = 0$ является собственным значением оператора L_0, то рассмотрим разложение функции $f(x) \in \Theta_0$ по собственным и присоединенным функциям оператора $L_0 - \varepsilon E$, где ε не является собственным значением оператора L_0. Это разложение совпадает с разложением (159), ибо собственные и присоединенные функции у операторов L_0 и $L_0 - \varepsilon E$ — одни и те же. Но, с другой стороны, поскольку $\lambda = 0$ не будет собственным значением оператора $L_0 - \varepsilon E$, на это второе разложение переносится приведенное выше доказательство. Теорема доказана.

Замечание. Группировка членов в разложении (159) не зависит от выбора разлагаемой функции. Более того, в случае регулярности условий

(65) она переносится и на разложение любой функции $g(x) \in \Theta_1$ по собственным и присоединенным функциям оператора L_0^*. Во всех последующих рассуждениях будем считать, что эта группировка остается неизменной, и будем называть ее группировкой в смысле теоремы разложения.

Теорема разложения дает возможность исследовать некоторые вопросы сходимости разложения (159) в пространстве $D_2(0, l)$ для $f(x) \in D_2(0, l)$. Исследуем, например, вопрос о полноте и замкнутости системы собственных и присоединенных функций оператора L_0 в этом пространстве.

Определение 1. Система функций $\{\varphi_k(x)\}$ $(\varphi_k(x) \in D_2(0,l))$ $(k=1, 2, \ldots)$ называется полной в пространстве $D_2(0, l)$, если любую функцию $f(x) \in D_2(0, l)$ можно представить в виде предела (в смысле $D_2(0, l)$) последовательности линейных комбинаций функций $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Теорема 8. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора* L_0 *полна в пространстве* $D_2(0, l)$.

Доказательство этой теоремы является очевидным следствием теоремы разложения 7 и следующей леммы.

Лемма 13. *Каждую функцию* $f(x) \in D_2(0, l)$ *можно представить в виде предела (в смысле сходимости в пространстве* $D_2(0, l)$) *последовательности функций из* Θ_0.

Доказательство. Найдем векторы g_0, g_1, g_0' и g_1' такие, чтобы они удовлетворяли равенствам

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\quad Mg_0 + Pg_1 = Mf(0) + Pf(l), \\ &\text{b)}\quad MA(0)g_0' + [MB(0)+N]g_0 + PA(l)g_1' + [PB(l)+Q]g_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Для доказательства того, что эта система разрешима и такие векторы найдутся, положим

$$A(0)g_0' + B(0)g_0 = 0, \quad A(l)g_1' + B(l)g_1 = 0. \tag{169}$$

Тогда из уравнений (168) следует, что

$$\begin{aligned} M_{qn}g_0 + P_{qn}g_1 &= M_{qn}f(0) + P_{qn}f(l), \\ Ng_0 + Qg_1 &= 0, \end{aligned} \tag{170}$$

где $\|M,\ P\| = \left\|\begin{matrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|$ (см. [8], § 1). Так как, согласно § 1 работы [8], $\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} M_{qn} & P_{qn} \\ N & Q \end{matrix}\right\| = n+q$, то система (170) разрешима, и мы найдем из нее векторы g_0 и g_1, а тогда из системы (169) следует, что $g_0' = -A^{-1}(0)B(0)g_0$ и $g_1' = -A^{-1}(l)B(l)g_0$.

Будем теперь аппроксимировать $f(x)$ в смысле $L_2(0, l)$ непрерывно дифференцируемыми функциями $g(x)$, удовлетворяющими условиям $g(0)=g_0$, $g'(0)=g_0'$, $g(l)=g_1$, $g'(l)=g_1'$. Тогда $g(x)\in\Theta_0$ и $M[f(0)-g(0)]+ +P[f(l)-g(l)]=0$ и, поскольку аппроксимация возможна с любой степенью точности, лемма доказана.

Определение 2. Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $\varphi_i(x)\in D_2(0, l)$, называется замкнутой в пространстве $D_2(0, l)$, если из условий $[\varphi_i(x), \ g_0(x)]=0$, выполняющихся для $i=1, 2, \ldots,$ следует, что $\| g_0(x)\|_{D_2^*(0,\ l)}=0$.

Теорема 9. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора* L_0 *замкнута в пространстве* $D_2(0, l)$.

Доказательство. Пусть для $s=0, \pm 1, \ldots$ и для $g_0(x)\in D_2^*(0, l)$ имеют место равенства $[Y_{nk_s}^{(s)}(x), \ g_0(x)]=0$ и пусть $f(x)\in D_2(0, l)$. Так как в случае регулярных краевых условий система функций, состоящая из столбцов матриц $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$, полна в пространстве $D_2(0, l)$, то найдется последовательность $\{f_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, $f_i(x)\in\Theta_0$, линейных комбинаций функций этой системы, сходящаяся по норме пространства $D_2(0, l)$ к функции $f(x)$, т. е. $\| f_i(x)-f(x)\|_{D_2(0,l)}\to 0$ при $i\to\infty$. Так как $[f_i(x), \ g_0(x)]=0$ для $i=1, 2, \ldots,$ то и $[f(x), \ g_0(x)]=0$. Таким образом, для всякой функции $f(x)\in D_2(0, l)$ имеет место равенство $[f(x), g_0(x)]=0$, а тогда из свойств билинейной формы $[f(x), g(x)]$ $(f(x)\in D_2(0, l)$, $g(x)\in D_2^*(0, l))$ (см. [8], § 2) следует, что $\| g_0(x)\|_{D_2^*(0,l)}=0$. Теорема доказана.

Определение 3. Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ называется базисом пространства $D_2(0, l)$, если любая функция $f(x)\in D_2(0, l)$ разлагается единственным образом в ряд по системе функций $\{\varphi_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$, причем сходимость этого ряда понимается по норме пространства $D_2(0, l)$ (возможно, с некоторой группировкой членов, не зависящей от выбора функции $f(x)$).

Теорема 10. *Если краевые условия* (65) *регулярны и ряд*

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, a_s, \tag{159}$$

где $a_s=[f(x), \ Z_{nk_s}^{(s)}(x)\, B^{*-1}]$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$ *и* $f(x)\in D_2(0, l)$, *сходится по норме пространства* $D_2(0, l)$ *при такой же группировке, как и в теореме разложения, то сумма этого ряда совпадает с функцией* $f(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)=f(x)-\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, a_s$. Тогда

$[\varphi(x), \ Z_{nk_s}^{(s)}(x)]=\left[f(x)-\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, a_s, \ Z_{nk_s}^{(s)}(x)\right]=0$ $(s=0, \ \pm 1, \ \ldots)$. Из замкнутости в пространстве $D_2^*(0, l)$ системы собственных и присоединенных функций оператора L_0^* следует, что $\|\varphi(x)\|_{D_2(0,\ l)}=0$. Это и доказывает теорему.

Замечание. В продолжении настоящей работы, как следствие более общей теоремы, будет получено утверждение, что в случае регулярных краевых условий для любой функции $f(x) \in D_2(0, l)$ разложение (159) сходится по норме пространства $D_2(0, l)$ (при такой же группировке, как и в теореме разложения 7). А поскольку единственность разложения показана в конце работы [8], это значит, что в случае регулярных краевых условий (2) система собственных и присоединенных функций оператора L_0 образует базис пространства $D_2(0, l)$.

(Поступило в редакцию 20/V 1957 г.)

Литература

1. G. D. Birkhoff, R. E. Langer, The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., **58** (1923), 51—128.
2. В. С. Пугачев, Об асимптотических представлениях интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Матем. сб., **15 (57)** (1944), 13—54.
3. И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, 1954.
4. J. D. Tamarkine, Some general problems of the theory of the ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math. Zeitschr., **27** (1927), 1—54.
5. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.
6. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
7. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1950.
8. В. Ф. Жданович, Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. I, Матем. сб., **47 (89)** (1959), 307—354.

О расщеплении некоторых смешанных абелевых групп

В. С. Журавский (Брест)

§ 1. Введение

Из работы Е. С. Ляпина [2] вытекает, что если смешанная абелева группа G расщепляема:

$$G = F \dot{+} H,$$

то в каждом классе смежности группы G по ее периодической части F содержатся максимальные элементы. Возникает вопрос: для каких смешанных абелевых групп условие существования максимальных элементов в каждом классе смежности группы G по ее периодической части F является достаточным условием для расщепления G? Один класс таких групп определен критерием Е. С. Ляпина [1]. В настоящей работе дается обобщение критерия Е. С. Ляпина и излагаются другие достаточные критерии расщепления смешанных абелевых групп.

Условимся в дальнейшем рассматривать лишь абелевы группы; из смешанных абелевых групп будем рассматривать только такие группы G, для которых периодические части F являются редуцированными группами.

В дальнейшем нам понадобятся свойства некоторых специальных множеств натуральных чисел, получивших название характеристик.

Множество α натуральных чисел будем называть *характеристикой*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если натуральное число n принадлежит α, то и всякий делитель числа n принадлежит α;

2) если числа m и n содержатся в α, то и их наименьшее общее кратное $[m, n]$ тоже содержится в α.

Произведением характеристик $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ будем называть множество всевозможных чисел вида $n_1 n_2 \ldots n_k$, где $n_i \in \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Произведением $n\alpha$ *характеристики* α *на натуральное число* n будем называть множество всех чисел вида mr, где m пробегает все элементы характеристики α, а r — все делители числа n.

Говорят, что *характеристика* β *делит характеристику* α и пишут β/α, если существует такая характеристика γ, что $\alpha = \beta\gamma$. Можно доказать, что β/α тогда и только тогда, когда $\beta \subset \alpha$,

(1; 1). Для любого множества характеристик $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ существует единственная характеристика $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, являющаяся наибольшим общим делителем всех этих характеристик.

Такой характеристикой является пересечение характеристик $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Будем говорить, что класс смежности A группы G по некоторой ее подгруппе H делится на натуральное число n, а n является делителем A, если в G найдется такой элемент x, что $nx \in A$. Множество всех делителей класса смежности A условимся обозначать символом $\chi(A)$.

(1; 2). Теорема. *Множество $\chi(A)$ всех делителей класса смежности $A = g + H$ группы G по ее подгрупе H являэтся характеристикой.*

Характеристики классов смежности обладают следующими свойствами:

(1; 3). Если A и B — классы смежности группы G по некоторым ее подгруппам H_1 и H_2 и $A \subset B$, то $\chi(A)/\chi(B)$.

(1; 4). Если $g = a + b + c + \ldots$, то $(\chi(a), \chi(b), \chi(c), \ldots)/\chi(g)$.

(1; 5). Если группа G разложима в прямую сумму:

$$G = \dot{\sum} G_i,$$

и

$$g = g_1 + g_2 + \ldots,$$

где $g \in G$, $g_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то $\chi(g) = (\chi(g_1), \chi(g_2), \ldots)$.

(1; 6). Если $g \in G$ и n — любое натуральное число, то

$$n\chi(g)/\chi(ng).$$

(1; 7). Если G — группа без кручения, то всегда

$$n\chi(g) = \chi(ng).$$

(1; 8). Пусть H — подгруппа группы G и $G/H = \overline{G}$. Тогда для любого класса смежности $g + H = \overline{g}$, $g \in G$, $\overline{g} \in \overline{G}$, имеет место равенство

$$\chi_G(g + H) = \chi_{\overline{G}}(\overline{g}),$$

где значки G и $\overline{G}$ у χ указывают на то, что характеристики рассматриваются соответственно в группах G и $\overline{G}$.

Доказательства всех утверждений (1; 1) — (1; 8) можно найти в работе Е. С. Ляпина [2].

Элемент g класса смежности A будем называть максимальным в A, если $\chi(g) = \chi(A)$.

Иногда характеристику $\chi(A)$ класса смежности A будем задавать с помощью последовательности целых неотрицательных чисел по указанному ниже правилу.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ — последовательность всех простых чисел и A — класс смежности группы G по некоторой ее подгруппе. Поставим в соответствие классу смежности A последовательность целых неотрицательных чисел

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots),$$

где: $k_i = 0$, если A не делится на p_i; $k_i = m$, если A делится на p_i^m, но A не делится на p_i^{m+1}; и $k_i = \infty$, если A делится на p_i^l для любого натураль ного числа l. Тогда любой элемент n из $\chi(A)$ может быть записан в виде

$$n = \prod p_i^{\beta_i},$$

где $\beta_i \leqslant k_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и почти все показатели степеней равны нулю.

§ 2. Расщепление некоторых смешанных групп, фактор-группы по периодической части которых суть p-полные группы

Группу G будем называть p-полной по простому числу p, если каждый ее элемент делится на p. Очевидно, что всякая полная группа является p-полной по любому простому числу p.

Из определения p-полной группы следует, что каждый ее элемент делится на любое число вида p^m, где m — любое целое неотрицательное число.

Обозначим через M множество *всех простых чисел* $p_1, p_2, \ldots$, по каждому из которых рассматриваемая группа является p-полной. Тогда в характеристику каждого элемента этой группы входят все числа вида

$$n = \prod_{p_i \in M} p_i^{m_i}, \tag{1}$$

где показатели m_i принимают любые целые неотрицательные значения и для каждого n все они, кроме конечного числа, равны нулю.

(2; 1). Лемма. *Пусть группа G и ее подгруппа H удовлетворяют следующим условиям;*

1) *H сервантна в G;*

2) *если фактор-группа $G/H = \overline{G}$ является p-полной группой по каждому из простых чисел множества M, то в H только нуль делится на каждое число вида* (1);

3) *каждый класс смежности группы G по подгруппе H содержит максимальные элементы.*

Тогда подгруппа H выделяется из G прямым слагаемым.

Доказательство. По условию леммы любой элемент из $\overline{G}$ делится на каждое число вида (1), и всякий отличный от нуля элемент из H этим свойством в H не обладает. Пусть $\overline{g} \neq H$ — любой класс смежности группы G по подгруппе H, g — его максимальный элемент. Тогда, согласно (1; 8),

$$\chi_G(\overline{g}) = \chi_G(g + H) = \chi_G(g),$$

а это означает, что максимальный элемент g делится в G на любое число вида (1). Покажем теперь, что в $\overline{g}$ содержится лишь один максимальный элемент. Действительно, если бы элемент $g_1 \neq g$, $g_1 \in \overline{g}$, тоже был максимальным, то, ввиду сервантности H в G, элемент $g - g_1 = h \in H$ делился бы в H на любое число вида (1), что противоречит условию 2). Попутно мы установили, что в каждом классе смежности лишь маскимальный элемент делится на любое число вида (1).

Обозначим через G_1 множество всех максимальных элементов классов смежности вместе с нулем группы H. Если a и b — любые элементы из G_1, то из делимости их на любое число вида (1) следует, что этим свойством обладают и элементы $a + b$ и $a - b$, а так как в каждом классе смежности лишь максимальный элемент делится на любое число вида (1), то $a + b$ и $a - b$ суть максимальные элементы в тех классах смежности, которым они принадлежат, т. е. $a \pm b \in G_1$, поэтому G_1 — подгруппа группы G. Так как $\{H, G_1\} = G$ и $H \cap G_1 = 0$, то

$$G = H \dotplus G_1.$$

(2; 2). Теорема. *Пусть смешанная группа G удовлетворяет следующим условиям:*

1) *высоты отличных от нуля элементов в каждом примарном прямом слагаемом F_p периодической части F конечны;*

2) *фактор-группа $G/F = \overline{G}$ является p-полной группой по каждому простому числу из множества P тех простых чисел $p_1, p_2, \ldots$, по которым $F_p \neq 0$;*

3) *в каждом классе смежности группы G по подгруппе F содержатся максимальные элементы.*

Тогда группа G расщепляема.

Доказательство. Действительно, подгруппа F сервантна в G. Любой отличный от нуля элемент $f \in F$ делится не на всякое число вида $n = \prod\limits_{p_i \in P} p_i^{m_i}$. Если M — множество всех простых чисел $q_1, q_2, \ldots$, по каждому из которых группа $\overline{G}$ — q-полная, то $P \subset M$, поэтому f делится не на всякое число вида $n' = \prod\limits_{q_i \in M} q_i^{k_i}$. По лемме (2; 1) группа G расщепляема.

В частности, если во множестве M содержатся все простые числа, то из теоремы (2; 2) вытекает

(2; 3). Пусть смешанная группа G удовлетворяет следующим условиям:

1) любой элемент $f_p \neq 0$ каждого примарного прямого слагаемого F_p периодической части F имеет конечную высоту в F_p;

2) фактор-группа $G/F = \overline{G}$ является полной группой,

3) каждый класс смежности группы G по подгруппе F содержит максимальные элементы.

Тогда группа G расщепляема.

§ 3. Расщепление некоторых смешанных групп, фактор-группы которых по периодической части являются вполне разложимыми группами

Абелева группа G без кручения называется вполне разложимой, если она может быть разложена в *прямую сумму групп первого ранга.*

(3; 1). Теорема. *Пусть фактор-группа $G/F = \overline{G}$ смешанной группы G по ее периодической части F разлагается в прямую сумму некоторых групп:*

$$\overline{G} = \dot{\sum_{\alpha}} \overline{G}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через G_α подгруппу группы G, соответствующую $\overline{G}_\alpha$, такую, что $G_\alpha/F = \overline{G}_\alpha$. В этом случае G тогда и только тогда расщепляема, когда каждая подгруппа G_α расщепляема.

Доказательство. Действительно, если G расщепляема:

$$G = F \dotplus H,$$

то $\overline{G} = G/F \simeq H$; поэтому для H можно написать: $H = \dot{\sum\limits_{\alpha}} H_\alpha$, где $\overline{G}_\alpha \simeq H_\alpha$, причем элементы подгруппы H_α являются представителями классов смежности группы G_α по подгруппе F. Так как $\{F, H_\alpha\} = G_\alpha$ и $F \cap H_\alpha = \{0\}$, то $G_\alpha = F \dotplus H_\alpha$.

Пусть теперь каждая подгруппа G_α расщепляема: $G_\alpha = F \dot{+} H_\alpha$. Тогда

$$\overline{G}_\alpha \simeq H_\alpha \text{ и } \overline{G} \simeq \dot{\sum_\alpha} H_\alpha.$$

Обозначим $\dot{\sum\limits_\alpha} H_\alpha$ через H. Очевидно, что $G = \{F, H\}$; пересечение же $F \cap H = 0$: если бы это пересечение содержало элемент $f \neq 0$, $f \in F$, $f \in H$, то из того, что $H = \dot{\sum\limits_\alpha} H_\alpha$, следовало бы равенство

$$\sum_\alpha h_\alpha = f, \tag{1}$$

где $h_\alpha \in H_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ и все h_α, кроме конечного их числа, равны нулю; равенство (1) в $\overline{G}$ запишется так:

$$\sum_\alpha \overline{h}_\alpha = 0,$$

что невозможно, ибо по указанному выше хотя бы одно слагаемое $\overline{h}_\alpha$ не равно нулю. Из того, что $\{F, H\} = G$ и $F \cap H = 0$, следует, что $G = F \dot{+} H$.

По теореме (3; 1) изучение условий расщепляемости любой смешанной группы G, фактор-группа которой по ее периодической части F — вполне разложимая группа, сводится к изучению условий расщепляемости таких групп, у которых эта фактор-группа является группой первого ранга.

(3; 2). Пусть $A \neq F$ — какой-либо класс смежности группы G по ее периодической части F, содержащий максимальный элемент g. Пусть $r_0 = 1$, $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, входящих в характеристику $\chi(g)$, обладающая тем свойством, что числа последовательности наименьших общих кратных $[r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k] = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $n_0 = 1$, вместе с их делителями дают всю характеристику $\chi(g)$.

Положим

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} = m_k.$$

(3; 3). Лемма. *Пусть фактор-группа $G/F = \overline{G}$ является группой первого ранга и в некотором классе смежности $A \neq F$ содержится максимальный элемент g, для которого можно построить последовательность элементов группы G*

$$g_1 = g, g_2, g_3 \ldots, \tag{2}$$

удовлетворяющую условиям:

$$\text{a) } g_k = m_k g_{k+1},$$

$$\text{b) } \chi(g)/n_k \chi(g_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда группа G расщепляема.

Доказательство. Построим группу $H = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ и докажем, что $G = F \dot{+} H$.

$F \cap H = 0$, ибо если бы существовал элемент $f \neq 0$, принадлежащий как F, так и H, то из того, что $f \in H$, следовало бы равенство

$$f = k_1 g_{i_1} + k_2 g_{i_2} + \ldots + k_r g_{i_r}, \tag{3}$$

где g_{i_j} $(j=1, 2, \ldots, r)$ — элементы последовательности (2). Пусть в (3) i_r — наибольший из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Пользуясь условием а), равенство (3) можно переписать в виде

$$f = kg_{i_r} \text{ или } n_{i_r} f = kn_{i_r} g_{i_r} = kg_1.$$

Так как $f \in F$, то и $n_{i_r} f \in F$. Поскольку F сервантна в G, из равенства $kg_1 = n_{i_r} f$ следует, что $g_1 \in F$, а это противоречит условию леммы.

Возьмем любой элемент $c \in G$. Так как группа $\overline{G}$ — первого ранга, то можно указать такие взаимно простые числа m и n, что $m\overline{c} = n\overline{g}$. По (1; 7) и (1; 8) имеем:

$$m\chi_{\overline{G}}(\overline{c}) = n\chi_{\overline{G}}(\overline{g}) = n\chi_G(g);$$

но $(m, n) = 1$, поэтому $m \in \chi_G(g)$. По построению $\chi_G(g) = \chi_H(g)$; поэтому в H должен существовать такой элемент h, что $g = mh$. Из равенства $m\overline{c} = n\overline{g}$ в группе G получим:

$$mc = ng + f \text{ или } mc = nmh + f, \quad m(c - nh) = f.$$

Так как F сервантна в G, то $c - nh = f_1$, $f_1 \in F$, или $c = nh + f_1$. Тогда $\{F, H\} = G$ и $F \cap H = 0$; следовательно, $G = F \dot{+} H$.

Пусть G — смешанная группа, для которой $G/F = \overline{G}$ — группа первого ранга. Известно, что всякая группа без кручения первого ранга изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы R рациональных чисел ([3], § 30). Больше того, можно доказать, что всякая группа без кручения первого ранга изоморфна такой подгруппе R' группы R, в которой содержится число 1.

Пусть при этом изоморфизме числу 1 соответствует элемент $\overline{g} \in \overline{G}$; характеристику $\chi_{\overline{G}}(\overline{g})$ этого элемента зададим последовательностью

$$k = (k_1, k_2, k_3, \ldots). \tag{4}$$

Последовательность k определяет тип группы $\overline{G}$, а последний определяет и самую группу $\overline{G}$ с точностью до изоморфизма ([3], § 30). Множество всех простых чисел разобьем на два подмножества M и N: к M отнесем всякое простое число p_i, которому в последовательности k соответствует $k_i = \infty$; к N отнесем все остальные простые числа. Числа множества M условимся обозначать буквами p, а числа множества N — буквами q. Закрепим за группой все введенные выше обозначения. Для характеристики $\chi_{\overline{G}}(\overline{g})$ сохраним обозначения, указанные в (3; 2).

(3; 4). Теорема. *Пусть смешанная группа G удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$G/F = \overline{G}$ — группа первого ранга;*

2) *высоты отличных от нуля элементов примарных прямых слагаемых F_p для всех простых чисел $p \in M$ конечны;*

3) *в каждом классе смежности существуют максимальные элементы.*

Тогда группа G расщепляема.

Доказательство. Возьмем класс смежности $\bar{g}$, соответствующий числу 1 группы R'; пусть g — один из его максимальных элементов. Тогда

$$\chi_G(g) = \chi_G(g+F) = \chi_{\bar{G}}(\bar{g});$$

следовательно, $\chi(g)$ определяется последовательностью (4). В последовательности (4) множество всех конечных чисел k_i образует последовательность

$$l = (l_1, l_2, l_3, \ldots).$$

Построим последовательности чисел

$$(1, q_1^{l_1}, q_2^{l_2}, \ldots, q_j^{l_j}, \ldots) \text{ и } (1, s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots),$$

где s — числа вида

$$s = \prod_{p_i \in M} p_i^{v_i},$$

причем показатели v_i принимают целые неотрицательные значения и все v_i, кроме конечного числа, равны нулю. Перемножив эти последовательности по правилу умножения многочлена на многочлен, мы получим новую последовательность, которую занумеруем так:

$$r_0 = 1, r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots. \tag{5}$$

Очевидно, последовательность (5) и есть последовательность типа, указанного в (3; 2). Придерживаясь обозначений, введенных в (3; 2), при помощи метода индукции построим последовательность элементов

$$g_1 = g, g_2, g_3, \ldots, g_k, \ldots, \tag{6}$$

удовлетворяющих условиям:

1) $g_k = m_k g_{k+1}$,

2) $\chi(g) = n_k \chi(g_{k+1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть уже построены все элементы g_i для $i \leqslant k$, построим g_{k+1}. Из условий 1) и 2) следует:

$$g = n_{k-1} g_k \text{ и } \chi(g) = n_{k-1}\chi(g_k).$$

В группе $\bar{G}$ получим: $\bar{g} = n_{k-1}\bar{g}_k$, откуда

$$\chi_G(g) = \chi_{\bar{G}}(\bar{g}) = n_{k-1}\chi_{\bar{G}}(\bar{g}_k) = n_{k-1}\chi(g_k);$$

следовательно, $\chi_{\bar{G}}(\bar{g}_k) = \chi_G(g_k + F) = \chi_G(g_k)$, т. е. элемент g_k является максимальным в классе смежности $\bar{g}_k$.

Из равенства $\chi(g) = n_{k-1}\chi(g_k)$ следует, что элемент g_k делится на любое число вида $\prod m_{k+l}$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$, а также и то, что g_k делится на любое число вида s и на любое число вида $q_j^{l_j}$, если $(q_j, n_{k-1}) = 1$.

Так как $m_k \in \chi(g_k)$, то в G существует такой элемент x_{k+1}, что $m_k x_{k+1} = g_k$. Пусть y_{k+1} — максимальный элемент в классе смежности $\bar{x}_{k+1}$; тогда в группе $\bar{G}$

$$m_k \bar{y}_{k+1} = \bar{g}_k, \tag{7}$$

откуда $m_k\chi_{\overline{G}}(\overline{y}_{k+1})=\chi_{\overline{G}}(\overline{g}_k)$ или $m_k\chi_G(y_{k+1})=\chi_G(g_k)$; последнее означает, что в последовательности

$$t=(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots),$$

задающей характеристику $\chi(y_{k+1})$, $t_i=\infty$ для всех простых чисел $p_i\in M$, $t_j=l_j$ для простых чисел $q_j\in N$, которые не входят в каноническое разложение чисел n_{k-1} и m_k, и $t_j=0$ для всех простых чисел $q_\nu\in N$, входящих в каноническое разложение чисел n_{k-1} и m_k, ибо из построения чисел m_k видно, что

$$m_k=q_\nu^{l_\nu}\cdot s,$$

где s не делится ни на одно из простых чисел множества N. Из равенств (7) следует, что

$$m_k y_{k+1}=g_k+f, \tag{8}$$

где $f\in F$.

Пусть

$$f=\sum_{p_i\in M} f_{p_i}+\sum_{q_j\in N} f_{q_j}, \tag{9}$$

где $f_{p_i}\in F_{p_i}$, $f_{q_j}\in F_{q_j}$ и в каждой из сумм все слагаемые, кроме конечного числа, равны нулю.

Согласно ранее установленному, элементы y_{k+1} и g_k делятся на любое число вида s; поэтому, в силу равенства (8) и сервантности F в G, элемент f делится на любое число вида s. Но в равенстве (9) второе слагаемое делится на любое число вида s; следовательно и первое слагаемое обладает этим же свойством. Так как высоты элементов f_{p_i} конечны, то установленная делимость может иметь место лишь тогда, когда $\sum\limits_{p_i\in M} f_{p_i}=0$.

Следовательно, в состав f входят лишь компоненты из примарных подгрупп группы F по простым числам множества N.

Из равенства (8) и сервантности F в G следует, что в F существует элемент f_1 такой, что

$$f=m_k f_1.$$

Очевидно, элемент f_1, так же как и f, содержит отличные от нуля компоненты лишь из примарных слагаемых по простым числам множества N. Равенство (8) тогда можно переписать так:

$$m_k(y_{k+1}-f_1)=g_k.$$

Положим $y_{k+1}-f_1=g_{k+1}$ и докажем, что элемент g_{k+1} является максимальным в $\overline{y}_{k+1}=\overline{x}_{k+1}$. В самом деле, элемент g_{k+1} делится на любое число вида s, ибо этим свойством обладают элементы y_{k+1} и f_1. Пусть $q_j^{l_j}$ $(q_j\in N)$ — любое число из $\chi(y_{k+1})$, тогда $q_j^{l_j}\in\chi(q_k)$; так как $m_k\in\chi(g_k)$ и $(m_k, q_j^{l_j})=1$, то, согласно (1; 2), $m_k q_j^{l_j}\in\chi(g_k)$, поэтому в G существует такой элемент z, что

$$m_k q_j^{l_j} z=g_k. \tag{10}$$

Из равенств (10) и $m_k g_{k+1} = g_k$ вытекает, что

$$m_k (g_{k+1} - q_j^{l_j} z) = 0,$$

следовательно,

$$g_{k+1} = q_j^{l_j} z + f_k, \tag{11}$$

где $m_k f_k = 0$. Так как $(m_k, q_j^{l_j}) = 1$, то f_k делится на $q_j^{l_j}$; следовательно, и g_{k+1} делится на $q_j^{l_j}$. Из того, что g_{k+1} делится на любое число вида s и любое число $q_j^{l_j}$ из $\chi(y_{k+1})$, вытекает, что g_{k+1} делится на все числа из $\chi(y_{k+1})$. Но элемент y_{k+1} — максимальный в $\overline{y}_{k+1}$; поэтому и g_{k+1} является максимальным элементом в $\overline{y}_{k+1}$. Из $m_k g_{k+1} = g_k$ следует, что

$$n_k g_{k+1} = g$$

или в группе $\overline{G}$

$$n_k \overline{g}_{k+1} = \overline{g},$$

а тогда

$$\chi_G(g) = \chi_{\overline{G}}(\overline{g}) = \chi_{\overline{G}}(n_k \overline{g}_{k+1}) = n_k \chi_{\overline{G}}(\overline{g}_{k+1}) = n_k \chi_G(g_{k+1}).$$

Поскольку построенная последовательность элементов

$$g_1 = g, g_2, g_3, \ldots$$

удовлетворяет условиям леммы (3; 3), группа G расщепляема.

Приведем теперь следствия из теоремы (3; 4).

(3; 5). Критерий Е. С. Ляпина. Если периодическая часть F смешанной группы G разлагается в прямую сумму циклических групп и групп типа p^∞, а ее фактор-группа G/F — в прямую сумму групп первого ранга, и в каждом классе смежности G по F существует хотя бы один максимальный элемент, то G расщепляема ([1], стр. 145).

Очевидно, что прямая сумма всех групп типа p^∞ по некоторым p, входящих в разложение F, как группа полная, выделяется из G прямым слагаемым ([3], § 23). Поэтому, не нарушая общности доказательства, можно считать в (3; 5) группу F редуцированной.

Пусть $G/F = \overline{G} = \sum\limits_{\alpha} \overline{G}_\alpha$, где $\overline{G}_\alpha$ — группа без кручения первого ранга. $\overline{G}_\alpha$ соответствует в G подгруппа G_α такая, что $G_\alpha/F = \overline{G}_\alpha$. По теореме (3; 4) G_α расщепляема (так как F разложима в прямую сумму циклических групп, то высоты отличных от нуля элементов в любом прямом примарном слагаемом F_p группы F конечны, в частности, конечны высоты и в тех F_p, для которых $p \in M$). А тогда G расщепляема в силу теоремы (3; 1).

(3; 6). В теореме (3; 4) каждое из множеств M и N может оказаться пустым. Если N — пустое множество, то теорема (3; 4) является частным случаем теоремы (2; 2). Если множество M — пустое, то мы получим, что существование максимальных элементов в каждом классе смежности группы G по ее периодической части F является достаточным условием расщепляемости G. Так, например, при выполнении только что указанных условий расщепляемой будет всякая группа G, фактор-группа G/F которой изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на k-ю степень никакого простого числа, где $k=1, 2, \ldots$. Очевидно, при $k=1$ G/F — циклическая группа. Доказано, что если G/F разлагается в прямую сумму циклических групп, то G расщепляема ([3], § 25). Однако уже при $k=2$ существуют нерасщепляемые группы. Пример такой группы построил А. Г. Курош ([3], стр. 188).

Существование максимальных элементов в каждом классе смежности группы G по F является достаточным условием расщепления любой группы G, удовлетворяющей условиям:

1) $G/F=\overline{G}$ — группа первого ранга;

2) G содержит элемент, имеющий характеристику

$$k=(1; 2; 3; 4; \ldots; n; n+1; \ldots).$$

В заключение приношу благодарность А. Г. Курошу, Е. С. Ляпину и А. П. Мишиной, советами которых я воспользовался при выполнении настоящей работы.

(Поступило в редакцию 5/XI 1957 г.)

Литература

1. Е. С. Ляпин, О разложении абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга, Изв. АН СССР, серия матем., № 2 (1939), 141—146.
2. Е. С. Ляпин, О разложении абелевых групп в прямые суммы рациональных групп, Матем. сб., 8 (50) (1940), 205—237.
3. А. Г. Курош, Теория групп, Москва, Гостехиздат, 1953.
4. А. П. Мишина, Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп, Укр. матем. журн., **3** (1951).
5. Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб., **9** (**51**) (1941), 165—186.
6. Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб., **16** (58) (1945), 129—160.
7. R. Baer, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, Ann. of Math., **37** (1936), 766—781.

Matematičeskij Sbornik

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 48 (90)

СОДЕРЖАНИЕ

Технический редактор *С. Н. Кондрашова*

По всем делам редакции следует обращаться по адресу: **Москва, В-134,**
1-й Академический пр., д. 28, Редакция журнала «Математический сборник»

Т-08929 Подписано к печати 30/VII—1959 г. Печ. л. 9,5 Уч.-изд. л. 9,0
Формат бумаги 70×108 1/16. Бум. л. 3 1/2 Зак. 3514 **Тираж 2275 экз.**

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10