1959 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 48(90), № 4

О сходящихся последовательностях частных сумм тригонометрического ряда

Д. Е. Меньшов (Москва)

§ 1. Введение

Возьмем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \tag{1.1}$$

члены которого являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Положим

$$Q_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

и введем следующее

Определение 1. Функцию $\varphi(x) \equiv \varphi(x, E)$, определенную почти всюду на некотором множестве $E \subset [a, b]$* положительной меры, мы будем называть предельной функцией ряда (1.1) на этом множестве, если существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел ρ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{k\to\infty} Q_{\rho_k}(x) = \varphi(x) \tag{1.3}$$

почти всюду на E.

Возьмем какое-нибудь множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ измеримых функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на некотором множестве $E \subset [-\pi, \pi]$ положительной меры. (Множества E могут быть различными для различных функций $\varphi(x, E) \in M$.) В [1] и [2] дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы множество M было множеством всех предельных функций** некоторого тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.4}$$

Чтобы сформулировать это условие, введем следующие определения (см. [1] и [2]).

---

* Когда мы говорим, что измеримая функция определена почти всюду на некотором измеримом множестве, то мы не исключаем возможности того, что эта функция равна $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

** Мы называем $\varphi(x, E)$ предельной функцией тригонометрического ряда, если она является предельной функцией этого ряда на соответствующем множестве E.

Определение 2. Возьмем последовательность функций

$$\varphi_n(x, E_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.5}$$

каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве E_n. Положим

$$E = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \tag{1.6}$$

и предположим, что множество E и некоторое другое множество E' удовлетворяют условиям

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad \operatorname{mes} E' > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - E) = 0. \tag{1.7}$$

Мы скажем, что функция $f(x, E')$, определенная почти всюду на множестве E', есть предельный элемент в широком смысле последовательности (1.5), если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, E_n) = f(x, E') \tag{1.8}$$

почти всюду на E'*.

Легко видеть, что предельный элемент в широком смысле последовательности (1.5) определяется не однозначно. В самом деле, если $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности (1.5) и $\operatorname{mes} E'' > 0$, $\operatorname{mes}(E'' - E') = 0$, то функция $\varphi(x, E'')$, равная $\varphi(x, E')$ почти всюду на E'', также будет предельным элементом в широком смысле последовательности (1.5).

Определение 3. Возьмем какое-нибудь множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ функций $\varphi(x, E)$, каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$. Мы будем называть функцию $f(x, E')$, определенную почти всюду на множестве E' положительной меры, предельным элементом в широком смысле множества M, если существует последовательность функций $\varphi_n(x, E_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, принадлежащих множеству M, для которой $f(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле.**

В этом определении функции $\varphi_n(x, E_n)$ не обязательно должны быть различны для различных n. В таком случае, как легко показать, любая функция $\varphi(x, E)$ множества $M = \{\varphi(x, E)\}$ есть предельный элемент в широком смысле этого множества.

Определение 4. Пусть множество $M = \{\varphi(x, E)\}$ удовлетворяет тем же условиям, как в определении 3. Мы будем называть это множество замкнутым в узком смысле, если оно содержит все свои предельные элементы в широком смысле.

* Отметим, что имеет смысл говорить о пределе функции $\varphi_n(x, E_n)$ при $n \to \infty$ почти всюду на E', так как на основании (1.6) и (1.7) в любой точке $x \in E'$, кроме, быть может, множества меры нуль, функция $\varphi_n(x, E_n)$ определена для всех достаточно больших значений n. Ясно, в каком смысле надо понимать равенство (1.8), если $\varphi_n(x, E_n)$ принимают значения $+\infty$ или $-\infty$. В дальнейшем мы будем предполагать, что все множества E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат некоторому интервалу $[a, b]$, и будем рассматривать только те предельные элементы в широком смысле последовательности (1.5), для которых $E' \subset [a, b]$.

** В этом определении мы можем всегда предположить, что $E_n \subset E'$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так как $(E \cdot E') = \overline{\lim_{n\to\infty}} (E_n \cdot E')$, если E определяется из равенства (1.6), и $\operatorname{mes}(E \cdot E') = \operatorname{mes} E'$, в силу (1.7), и, следовательно, множества E_n можно заменить множествами $(E_n \cdot E')$.

В [2] доказана следующая

Теорема А. *Пусть $M = \{\varphi(x, E)\}$ — множество измеримых функций, каждая из которых определена почти всюду на некотором множестве E положительной меры, лежащем на $[-\pi, \pi]$.*

Для того чтобы M было множеством всех предельных функций тригонометрического ряда (1.4), необходимо и достаточно, чтобы это множество было замкнутым в узком смысле.

Теорема А может быть получена как следствие более общих теорем. Прежде, чем сформулировать эти теоремы, напомним некоторые определения, содержащиеся в [3].*

Определение 5. Пусть задана последовательность измеримых функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$, определенных почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Мы скажем, что измеримая функция $F(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, есть верхний предел по мере на $[a, b]$ последовательности функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$, если $F(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a°.\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) > \varphi(x)]\cdot E[\varphi(x) > F(x)]\} = 0^{**} \tag{1.9}$$

для любой измеримой функции $\varphi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$.

$$b°.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) > \psi(x)]\cdot E[F(x) > \psi(x)]\} > 0 \tag{1.10}$$

для любой измеримой функции $\psi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[F(x) > \psi(x)] > 0$.

Определение 6. Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ обладают теми же свойствами, как в определении 5. Мы скажем, что измеримая функция $G(x)$, определенная почти всюду на $[a, b]$, есть нижний предел по мере на этом сегменте последовательности функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$, если $G(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha°.\ \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) < \tau(x)]\cdot E[\tau(x) < G(x)]\} = 0 \tag{1.11}$$

для любой измеримой функции $\tau(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$.

$$\beta°.\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname{mes}\{E[f_n(x) < \chi(x)]\cdot E[G(x) < \chi(x)]\} > 0 \tag{1.12}$$

для любой измеримой функции $\chi(x)$, определенной почти всюду на $[a, b]$ и такой, что $\operatorname{mes} E[G(x) < \chi(x)] > 0$.

Можно доказать, что верхний и нижний пределы по мере определяются однозначно с точностью до множества меры нуль и обладают многими свойствами, аналогичными соответствующим свойствам обычных верхних и нижних пределов***.

---

* [3], стр. 4.

** Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — две какие-нибудь измеримые функции, определенные почти всюду на $[a, b]$, то мы будем обозначать, как обычно, через $E[\varphi_1(x) > \varphi_2(x)]$ множество всех точек на $[a, b]$, для которых $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$.

*** [3], § 2, стр. 6—15, теоремы A, B, C, D, E. В [3] предполагалось, что функции $f_n(x)$ $(n=1, 2, \dots)$ конечны почти всюду на $[a, b]$. Но определения верхнего и нижнего пределов по мере имеют смысл и без этого ограничения, причем теоремы A, B, C, D, E, также справедливы без этого ограничения и их доказательства остаются без изменения.

Возьмем теперь ряд (1.1), члены которого являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на сегменте $[a, b]$. Введем еще следующее

Определение 7. Мы скажем, что измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$, определенные почти всюду на $[a, b]$, являются верхним и нижним пределами по мере на $[a, b]$ ряда (1.1), если $F(x)$ и $G(x)$ равны соответственно верхнему и нижнему пределам по мере на $[a, b]$ последовательности частных сумм того же ряда. *

В [2] первая часть теоремы A, т. е необходимость условия, входящего в ее формулировку, получается из следующей теоремы.

Теорема B. *Пусть члены ряда* (1.1) *измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте* $[a, b]$ *и пусть функции* $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на* $[a, b]$ *этого ряда. Тогда множество* $M = \{\varphi(x, E)\}$ *всех предельных функций ряда* (1.1) *удовлетворяет следующим условиям:*

α. *M замкнуто в узком смысле.*

β. *Если* $\varphi(x, F) \in M$, *то* $\varphi(x, E)$ *измерима на* E *и*

$$G(x) \leqslant \varphi(x, E) \leqslant F(x) \tag{1.13}$$

почти всюду на этом множестве.

γ. *Если* $\varphi(x, E) \in M$ *и если*

$$E_0 = E + E[F(x) = G(x)], \tag{1.14}$$

то функция $\varphi_0(x, E_0)$, *определяемая из равенства*

$$\varphi_0(x, E_0) = \begin{cases} \varphi(x, E) & (x \in E), \\ F(x) & (x \in E_0 - E), \end{cases} \tag{1.15}$$

также принадлежит множеству M **.

Вторая часть теоремы A, т. е. достаточность содержащегося в ней условия, получается из следующей теоремы.

Теорема C. *Пусть* $M = \{\varphi(x, E)\}$ — *не пустое множество функций* $\varphi(x, E)$, *каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве* E, *причем*

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [-\pi, \pi]. \tag{1.16}$$

Предположим, что множество M *удовлетворяет условиям* α, β *и* γ *теоремы* B, *где* $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются измеримыми функциями, определенными почти всюду на* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяющими неравенству*

$$G(x) \leqslant F(x) \tag{1.17}$$

*почти всюду на этом сегменте.****

---

* Это определение дано в [4] (определение 5, стр. 779).

** В равенстве (1.15) мы определяем функции $\varphi(x, E)$ и $F(x)$ произвольным образом на множестве меры нуль, где они первоначально не были определены.

*** Мы предполагаем, что условия α, β и γ формулируются для сегмента $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

В таком случае существует тригонометрический ряд (1.4), *обладающий следующими свойствами*:

a. *M есть множество всех предельных функций ряда* (1.4).

b. *F(x) и G(x) являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (1.4).

$$\text{c. } \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0\text{*}. \tag{1.18}$$

В настоящей работе мы докажем теоремы, которые были сформулированы без доказательства в [4], причем некоторые из них мы докажем в более общем виде. Все эти теоремы получатся, как следствия, из теорем A, B и C формулировки которых были даны выше.

Прежде всего напомним некоторые определения, содержащиеся в [4], а также введем еще одно определение (определение 11).

Определение 8. Мы будем говорить, что функция $f(x)$, определенная почти всюду на некотором множестве E положительной меры, является предельным элементом в смысле сходимости почти всюду на E для множества $M=\{\varphi(x)\}$ функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на E, если существует последовательность функций $\varphi_n(x)\in M$ $(n=1,2,\ldots)$, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду на E**.

Предельный элемент $f(x)$ некоторого множества M в смысле сходимости почти всюду является частным случаем предельного элемента в широком смысле (см. определение 2), если этот предельный элемент и все функции $\varphi(x, E)\in M$ определены почти всюду на одном и том же множестве E.

Определение 9. Мы будем говорить, что множество $M=\{\varphi(x)\}$ функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на некотором множестве E положительной меры, является замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E, если всякая функция, являющаяся предельным элементом множества M в смысле сходимости почти всюду на E, принадлежит этому множеству M.

Как обычно, пустое множество и множество, состоящее из конечного числа функций, мы будем считать замкнутыми.

Определение 10. Пусть члены ряда (1.1) измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Мы скажем, что функция $f(x)$ — предельная функция в узком смысле ряда (1.1) на множестве $E\subset[a, b]$, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел n_k $(k=1, 2, \ldots)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

a. Последовательность частных сумм $Q_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ряда (1.1) сходится к $f(x)$ почти всюду на множестве E.

b. Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n'_k $(k=1, 2, \ldots)$, содержащейся в последовательности n_k $(k=1, 2, \ldots)$, частные суммы $Q_{n'_k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ряда (1.1) не сходятся ни к какому

---

* Теорема сформулирована в [1] и доказана в [2].

** [4], стр. 777. В [4] мы называли предельный элемент предельной функцией. В этом определении функции $f(x)$ и $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ могут принимать значения $+\infty$ или $-\infty$ на множествах положительной меры.

пределу (ни к конечному, ни к бесконечному определенного знака) почти всюду на множестве $[a, b] - E$ *.

Определение 11. Предельную функцию $\varphi(x, E)$ ряда (1.1) на множестве E мы будем называть **максимальной**, если не существует другой предельной функции $f(x, E')$ того же ряда на множестве E', удовлетворяющей условиям:

a°. $E \subset E' \subset [a, b]$, $\operatorname{mes}(E' - E) > 0$.

b°. $f(x, E') = \varphi(x, E)$ почти всюду на множестве E.

Легко доказать, что любая максимальная предельная функция $\varphi(x, E)$ ряда (1.1) на множестве E есть предельная функция в узком смысле ряда (1.1) на том же множестве. Но обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места.

В самом деле, если бы некоторая максимальная предельная функция $\varphi(x, E)$ ряда (1.1) на множестве E не являлась предельной функцией в узком смысле того же ряда на E, то существовала бы возрастающая последовательность натуральных чисел n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и содержащаяся в ней подпоследовательность n'_k $(k = 1, 2, \ldots)$, которые удовлетворяют условиям:

1) $$\lim_{k \to \infty} Q_{n_k}(x) = \varphi(x, E)$$

почти всюду на E,

2) $$\lim_{k \to \infty} Q_{n'_k}(x) = g(x)$$

почти всюду на некотором множестве e, где

$$e \subset [a, b] - E, \quad \operatorname{mes} e > 0$$

и $g(x)$ — некоторая функция, определенная почти всюду на e.

Тогда, полагая

$$E' = E + e,$$

$$f(x, E') = \varphi(x, E)$$

почти всюду на E,

$$f(x, E') = g(x)$$

почти всюду на e, мы получили бы:

$$\lim_{k \to \infty} Q_{n'_k}(x) = f(x, E')$$

почти всюду на E', а так как

$$\operatorname{mes}(E' - E) = \operatorname{mes} e > 0,$$

то $\varphi(x, E)$ не могла бы быть предельной функцией в узком смысле ряда (1.1) на множестве E. Таким образом, всякая максимальная функция ряда (1.1) на множестве E является предельной в узком смысле этого ряда на том же множестве.

---

* Если $\operatorname{mes} E = b - a$, то определение предельной функции в узком смысле совпадает с данным ранее определением предельной функции (см. определение 1).

С другой стороны, возьмем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x),$$

члены которого являются измеримыми функциями, определенными и конечными на сегменте $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, и предположим, что любая последовательность частных сумм этого ряда не сходится ни к какому пределу почти всюду на $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Положим

$$u_{2k}(x)=\sum_{s=0}^{k} v_s(x), \quad u_{2k+1}(x)=-\sum_{s=0}^{k} v_s(x) \quad \left(0\leqslant x<\frac{1}{2};\ k=0,1,2,\ldots\right),$$

$$u_n(x)=0 \quad \left(\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1;\ n=0,1,2,\ldots\right).$$

Возьмем ряд (1.1), члены которого определяются из последних равенств. Легко видеть, что функция $\varphi(x)\equiv 0$ является предельной функцией в узком смысле ряда (1.1) на сегменте $\left[\frac{1}{2},1\right]$, но не является максимальной предельной функцией этого ряда на $\left[\frac{1}{2},1\right]$.*

Формулируем теперь четыре теоремы, которые или содержатся в [4], или являются обобщениями теорем, содержащихся в [4].

Теорема I. *Для того чтобы множество $M=\{\varphi(x)\}$ измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на некотором множестве $E\subset[-\pi,\pi]$ положительной меры, было множеством всех предельных функций некоторого тригонометрического ряда* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы M было замкнутым в смысле сходимости почти всюду.* **

Теорема II. *Если члены ряда* (1.1) *являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на некотором сегменте $[a,b]$, и если $E\subset[a,b]$, $\operatorname{mes} E>0$, то множество всех предельных функций ряда* (1.1) *на E есть замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на E* ***.

Теорема III. *Пусть $M=\{\varphi(x)\}$ — некоторое множество измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на множестве $E\subset[-\pi,\pi]$ положительной меры. Предположим, что M — замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на E.*

---

* В определении предельной функции в узком смысле (определение 10) мы берем $[a,b]=[0,1]$, $E=\left[\frac{1}{2},1\right]$, $n_k=2k$ $(k=1,2,\ldots)$.

** [4], теорема 2. В [4] мы дали определение предельной функции ряда на множестве E, не требуя, чтобы выполнялось условие $\operatorname{mes} E>0$. Однако во всем дальнейшем изложении мы будем вводить это требование, так как в смысле определения, данного в [4], любая функция, определенная на множестве меры нуль, является предельной для любого ряда вида (1.1).

*** [4], теорема 3. В теореме 3 мы предполагали, что члены $u_n(x)$ ряда (1.1) конечны почти всюду на ограниченном множестве E, но мы можем считать, что $u_n(x)$ конечны почти всюду на некотором сегменте $[a,b]$, содержащем множество E, так как мы можем положить $u_n(x)=0$ на $[a,b]-E$.

В таком случае можно определить тригонометрический ряд (1.4), *который обладает следующими свойствами*:

α) *Каждая из функций* $\varphi(x) \in M$ *есть максимальная предельная функция ряда* (1.4) *на множестве* E.

β) *Если* $f(x)$ — *предельная функция ряда* (1.4) *на множестве* E, *то* $f(x) \in M$.

γ) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *.

Теорема IV. *Возьмем множество* E *положительной меры, содержащееся в* $[-\pi, \pi]$, *и измеримые функции* $F(x)$, $G(x)$, *определенные почти всюду на* $[-\pi, \pi]$ *и удовлетворяющие условию*

$$G(x) \leqslant F(x) \tag{1.19}$$

почти всюду на этом сегменте.

Возьмем, далее, множество $M = \{\varphi(x)\}$ *измеримых функций* $\varphi(x)$, *определенных почти всюду на* E *и удовлетворяющих условию*

$$G(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant F(x) \tag{1.20}$$

почти всюду на этом множестве. Предположим, что M — *замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на* E.

Тогда можно определить тригонометрический ряд (1.4), *обладающий следующими свойствами*:

1°. M *есть множество всех предельных функций ряда* (1.4) *на множестве* E.

2°. *Если какая-нибудь последовательность частных сумм* $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *ряда* (1.4) *с возрастающими номерами* n_k *сходится всюду на некотором множестве* $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, *к функции* $f(x)$, *то существует такая последовательность функций* $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{1.21}$$

почти всюду на e.

3°. $F(x)$ *и* $G(x)$ *являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на* $[-\pi, \pi]$ *ряда* (1.4).

4°. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{1.22}$$

5°. *Если множество*

$$H = \{([-\pi, \pi] - E) \cdot E[G(x) < F(x)]\} \tag{1.23}$$

имеет положительную меру, то для любой возрастающей последовательности натуральных чисел n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *соответствующая последовательность частных сумм* $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *ряда* (1.4) *не сходится ни к какому*

---

* Так как всякая максимальная предельная функция некоторого ряда на множестве E есть предельная функция в узком смысле того же ряда на E (см. замечание после определения 11), то теорема III содержит, как частный случай, теорему 4 из [4].

В определении 11, которым мы пользуемся при формулировке теоремы III, мы полагаем $[a, b] = [-\pi, \pi]$.

*пределу (ни к конечному, ни к бесконечному определенного знака) почти всюду на множестве H**.

Ясно, что теорема I является следствием теорем II и III. Далее, легко видеть, что теорема III получается, как следствие, из теоремы IV. В самом деле, пусть $M=\{\varphi(x)\}$ — некоторое множество измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на множестве E положительной меры, лежащем на $[-\pi, \pi]$. Предположим, что M — замкнутое множество в смысле сходимости почти всюду на E. Положим теперь в теореме IV

$$G(x)=-\infty, \quad F(x)=+\infty \quad (x \in [-\pi, \pi]). \tag{1.24}$$

Тогда для функций $F(x)$, $G(x)$ и $\varphi(x) \in M$ будет выполняться неравенство (1.20) почти всюду на E, а для функций $F(x)$ и $G(x)$ будет выполняться неравенство (1.19) всюду на $[-\pi, \pi]$. Следовательно, мы находимся в условиях применимости теоремы IV, а в таком случае на основании этой теоремы можно определить тригонометрический ряд (1.4), удовлетворяющий всем условиям 1°—5° из формулировки теоремы IV. При этом множество H, входящее в условие 5°, определяется из равенства

$$H=[-\pi, \pi]-E. \tag{1.25}$$

Условие 4° теоремы IV совпадает с условием γ) теоремы III. Далее из условия 1° теоремы IV следует, что каждая функция $\varphi(x) \in M$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E и, обратно, если $f(x)$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E, то $f(x) \in M$. Тогда ряд (1.4) удовлетворит условию β) теоремы III. Поэтому, чтобы закончить доказательство этой теоремы, нам достаточно доказать, что ряд (1.4) удовлетворяет условию α).

Мы уже доказали, что каждая из функций $\varphi(x) \in M$ есть предельная функция ряда (1.4) на множестве E. Докажем теперь, что каждая из этих функций есть максимальная предельная функция ряда (1.4) на множестве E. Предположим, что одна из функций $\varphi_0(x) \in M$ не является максимальной предельной функцией ряда (1.4) на множестве E. Так как мы уже доказали, что всякая функция $\varphi(x) \in M$ — предельная функция ряда (1.4) на E, то из определения максимальной предельной функции (см. определение 11)** следует, что для функции $\varphi_0(x)$ существует предельная функция $f(x, E')$ ряда (1.4) на некотором множестве E', удовлетворяющем условиям

$$E \subset E' \subset [-\pi, \pi), \quad \operatorname{mes}(E'-E)>0, \tag{1.26}$$

причем

$$f(x, E')=\varphi_0(x)$$

почти всюду на E.

Так как $f(x, E')$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E', то существует такая последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k, что

$$\lim_{k \to \infty} S_{n_k}(x)=f(x, E') \tag{1.27}$$

почти всюду на E' и, следовательно, почти всюду на $E'-E$.

---

* Теорема IV является небольшим обобщением теоремы 5, сформулированной в [4].

** В определении 11 полагаем $[a, b]=[-\pi, \pi]$.

С другой стороны, из равенства (1.25) и условий (1.26) следует, что

$$E' - E \subset H. \tag{1.28}$$

Кроме того, в силу условия 5° теоремы IV, последовательность функций $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \dots)$ не сходится ни к какому пределу почти всюду на множестве H, а это невозможно, так как на основании (1.26) $\operatorname{mes}(E' - E) > 0$.

Таким образом, предположение, что $\varphi_0(x)$ не является максимальной предельной функцией ряда (1.4) на множестве E, приводит к противоречию, и, следовательно, любая функция $\varphi(x) \in M$ есть максимальная предельная функция ряда (1.4) на множестве E, т. е. ряд (1.4) удовлетворяет условию α) теоремы III.

Как мы уже отметили, этим завершается доказательство теоремы III, т. е. теорема III является следствием теоремы IV.

Из всего сказанного следует, что для доказательства теорем I—IV достаточно доказать теоремы II и IV. В § 2 настоящей работы мы получим доказательства этих двух последних теорем, пользуясь теоремами В и С, формулированными в начале настоящей работы.

Из теоремы IV можно получить, как следствия, теоремы 2 и 3, доказанные в [3]. Кроме того, из той же теоремы IV мы получим, как следствие, еще одну теорему. Для ее формулировки введем следующее

Определение 12. Пусть K — некоторое множество точек (x, y) на плоскости. (Пары чисел $(x, +\infty)$ и $(x, -\infty)$ мы также будем рассматривать как точки на плоскости.)

Мы будем называть множество K **замкнутым по вертикали**, если для любого действительного x множество K_x всех значений y, для которых $(x, y) \in K$ при данном x, есть линейное замкнутое множество. *

В конце § 2 будет доказана следующая

Теорема V. *Пусть K — плоское множество, замкнутое по вертикали, проекция которого на ось x совпадает с сегментом $[-\pi, \pi]$. Предположим, что две измеримые функции $F(x)$ и $G(x)$ определены почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$, причем для каждого x этого сегмента, за исключением, быть может, множества меры нуль, выполняется неравенство*

$$G(x) \leqslant y \leqslant F(x) \tag{1.29}$$

для любого y, для которого соответствующая точка $(x, y) \in K$. Пусть, далее, $M = \{\varphi(x)\}$ — множество всех измеримых функций, определенных почти всюду на $[-\pi, \pi]$, для каждой из которых выполняется условие

$$[x, \varphi(x)] \in K, \tag{1.30}$$

*каково бы ни было $x \in [-\pi, \pi]$, кроме, быть может, множества меры нуль**.*

Тогда существует тригонометрический ряд (1.4), удовлетворяющий следующим условиям:

А. *M — множество всех предельных функций на $[-\pi, \pi]$ ряда (1.4).*

---

* Множество K_x может содержать числа $y = +\infty$ и $y = -\infty$. Ясно, как надо определять в этом случае линейное замкнутое множество. Множество K_x может быть также пустым.

** Мы обозначаем через $[x, \varphi(x)]$ точку на плоскости с координатами x и $y = \varphi(x)$.

B. *Если какая-нибудь последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k=1, 2,\ldots)$ ряда* (1.4) *с возрастающими номерами n_k сходится к функции $f(x)$ на некотором множестве $e \subset [-\pi, \pi]$, $\operatorname{mes} e > 0$, то существует такая последовательность функций $\varphi_n(x) \in M$ $(n=1, 2, \ldots)$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{1.31}$$

почти всюду на e.

C. *$F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно верхним и нижним пределами по мере на $[-\pi, \pi]$ ряда* (1.4).

D. $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{1.32}$$

Предположим по-прежнему, что члены ряда (1.1) являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$. В § 3 настоящей работы мы докажем, что всякий такой ряд имеет по крайней мере одну максимальную предельную функцию, если множество его предельных функций не пустое; а именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема VI. *Если $\varphi(x, E)$ — предельная функция ряда* (1.1) *на множестве E, то существует максимальная предельная функция $\chi(x, H)$ этого ряда на некотором множестве H, которая удовлетворяет следующим условиям:*

$$E \subset H, \tag{1.33}$$

$$\chi(x, H) = \varphi(x, E) \tag{1.34}$$

почти всюду на E.

§ 2. Вывод теоремы II из теоремы B

Возьмем ряд (1.1), члены которого являются измеримыми функциями, конечными почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$. Предположим, что множество E удовлетворяет условиям

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [a, b], \tag{2.1}$$

и обозначим через $M = \{\varphi(x, E)\}$ множество всех предельных функций ряда (1.1) на данном множестве E. Докажем, что M замкнуто в смысле сходимости почти всюду на E.

Если M — пустое множество, то теорема II доказана. Предположим теперь, что M — не пустое множество. Обозначим через $M' = \{\psi(x, e)\}$ множество *всех* предельных функций ряда (1.1). Тогда каждая из функций $\psi(x, e) \in M$ определена почти всюду на соответствующем множестве e, причем

$$\operatorname{mes} e > 0, \quad e \subset [a, b]. \tag{2.2}$$

Ясно, что

$$M \subset M' \tag{2.3}$$

и, кроме того, в силу теоремы B, M' замкнуто в узком смысле (см. условие α теоремы B).

Из (2.3) следует, что M' — не пустое множество. Пусть $f(x, E)$ — произвольный предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на E (см. определение 8, § 1). Из определения 9 (§ 1) следует, что для доказательства теоремы II достаточно доказать, что

$$f(x, E) \in M. \tag{2.4}$$

Так как $f(x, E)$—предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на E, то из определения 8 следует, что существует такая последовательность функций $\varphi_n(x, E)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\varphi_n(x, E) \in M \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x, E) = f(x, E) \tag{2.6}$$

почти всюду на E, причем каждая из функций $\varphi_n(x, E)$ определена почти всюду на этом множестве.

Принимая во внимание условия (2.1) и определение 2, в котором полагаем $E' = E$, $E_n = E$ $(n = 1, 2, \ldots)$, мы видим, что функция $f(x, E)$, определенная почти всюду на E, есть предельный элемент в широком смысле последовательности функций $\varphi_n(x, E)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а тогда на основании (2.3), (2.5) и определения 3 (§ 1) функция $f(x, E)$ есть предельный элемент в широком смысле множества M'.

Так как мы уже доказали, что множество M' замкнуто в узком смысле и, следовательно, в силу определения 4, содержит все свои предельные элементы в широком смысле, то

$$f(x, E) \in M'. \tag{2.7}$$

Так как $f(x, E)$ определена почти всюду на E, то из определения множества M' и условия (2.7) следует, что $f(x, E)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E. В таком случае, в силу определения множества M, выполняется условие (2.4), и теорема II доказана.

Вывод теоремы IV из теоремы C. Предположим, что точечное множество E, функции $F(x)$, $G(x)$ и множество $M = \{\varphi(x)\}$ измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на E, удовлетворяют условиям теоремы IV (§ 1). Докажем, что тогда можно определить тригонометрический ряд (1.4), обладающий свойствами 1°— 5° (см. формулировку теоремы IV).

По условию теоремы IV, имеем для множества E:

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.8}$$

Положим

$$E_0 = E + E[F(x) = G(x)], \tag{2.9}$$

откуда, в силу (2.8),

$$E \subset E_0, \quad \operatorname{mes} E_0 > 0, \quad E_0 \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.10}$$

Для каждой функции $\varphi(x) \in M$ определим функцию $\varphi_0(x)$ равенством

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \in E), \\ F(x) & (x \in E_0 - E). \end{cases} \tag{2.11}$$

В этом равенстве мы определяем функции $\varphi(x)$ и $F(x)$ произвольным образом на множестве меры нуль, где они первоначально не были определены. Ясно, что для каждой функции $\varphi(x) \in M$ соответствующая функция $\varphi_0(x)$ определяется однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль. При этом $\varphi_0(x)$ измерима на E_0 так как $\varphi(x)$ измерима на E и $F(x)$ измерима на $[-\pi, \pi]$.

Множество E_0 и функция $\varphi_0(x)$ получаются из множества E и функции $\varphi(x)$ таким же образом, как в условии γ теоремы B (§ 1), в котором вместо $\varphi(x, E)$ и $\varphi_0(x, E_0)$ мы берем $\varphi(x)$ и $\varphi_0(x)$.

Обозначим через $M_0 = \{\psi(x, e)\}$ множество всех функций $\psi(x, e)$, каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве e и удовлетворяет условиям:

$$\text{A}^\circ. \quad \operatorname{mes} e > 0, \quad e \subset [-\pi, \pi], \quad \operatorname{mes}(e - E_0) = 0. \tag{2.12}$$

B°. Для $\psi(x, e)$ можно определить такую функцию $\varphi_0(x)$, соответствующую одной из функций $\varphi(x) \in M$ [см. (2.11)], что

$$\psi(x, e) = \varphi_0(x) \tag{2.13}$$

почти всюду на e.

Принимая во внимание равенства (2.8), (2.10), (2.11) и условия A°, B°, мы видим, что

$$M \subset M_0. \tag{2.14}$$

Обозначим через M'_0 множество всех предельных элементов в широком смысле множества M_0 (см. определение 3, § 1)*. Так как всякий элемент множества M_0 есть предельный элемент в широком смысле этого множества (см. замечание после определения 3), то

$$M_0 \subset M'_0 \tag{2.15}$$

и, следовательно, в силу (2.14),

$$M \subset M'_0. \tag{2.16}$$

Докажем, что всякий предельный элемент в широком смысле множества M'_0 является предельным элементом в широком смысле множества M_0. Предварительно сделаем следующее замечание.

Предположим, что $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле некоторой последовательности функций

$$\psi_n(x, e_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.17}$$

каждая из которых определена почти всюду на соответствующем множестве e_n (см. определение 2, § 1). Мы докажем, что для любого положительного

---

* К множеству M'_0 мы причисляем только те предельные элементы $\varphi(x, E')$ в широком смысле, для которых $E' \subset [-\pi, \pi]$ (см. примечание к определению 2 (§ 1), в котором берем $[a, b] = [-\pi, \pi]$). Вообще, E' может содержать точки вне $[-\pi, \pi]$; однако всегда справедливо равенство $\operatorname{mes}(E' - [-\pi, \pi]) = 0$. В дальнейшем, когда мы будем говорить о множестве всех предельных функций $\varphi(x, E')$ в широком смысле для множества M_0, то мы всегда будем подразумевать, что $E' \subset [-\pi, \pi]$.

числа ε можно определить такое множество E'' и такое натуральное число N, что выполняются следующие условия:

$$\text{mes}\, E'' > \text{mes}\, E' - \varepsilon, \quad E'' \subset E', \tag{2.18}$$

$$E'' \subset e_n \quad (n \geqslant N); \tag{2.19}$$

$$|\, \varphi(x, E') - \psi_n(x, e_n) \,| < \varepsilon, \quad -\infty < \psi_n(x, e_n) < +\infty, \tag{2.20}$$

если $\varphi(x, E')$ конечна, $x \in E''$ и $n \geqslant N$;

$$\psi_n(x, e_n) > \frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.21}$$

если $\varphi(x, E') = +\infty$, $x \in E''$, $n \geqslant N$, и

$$\psi_n(x, e_n) < -\frac{1}{\varepsilon}, \tag{2.22}$$

если $\varphi(x, E') = -\infty$, $x \in E''$, $n \geqslant N$.

В самом деле, так как $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций (2.17), то, полагая

$$e_0 = \varliminf_{n \to \infty} e_n \tag{2.23}$$

и принимая во внимание определение 2 (§ 1), будем иметь:

$$\text{mes}\, e_0 > 0, \quad \text{mes} E' > 0, \quad \text{mes}\,(E' - e_0) = 0 \tag{2.24}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(x, e_n) = \varphi(x, E') \tag{2.25}$$

почти всюду на E'.

Обозначим через H_m $(m = 1, 2, \ldots)$ множество всех точек x, для каждой из которых выполняется условие

$$x \in e_n \quad (n \geqslant m). \tag{2.26}$$

Тогда на основании (2.23)

$$e_0 = \sum_{m=1}^{\infty} H_m \tag{2.27}$$

и, кроме того,

$$H_m \subset e_n, \quad H_m \subset H_{m+1} \quad (n \geqslant m;\ m = 1, 2, \ldots). \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что

$$\text{mes}\, e_0 = \lim_{m \to \infty} \text{mes}\, H_m, \tag{2.29}$$

а в таком случае для любого положительного числа ε можно определить такое натуральное число m_0, что

$$\text{mes}\, H_m > \text{mes}\, e_0 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (m \geqslant m_0). \tag{2.30}$$

Из (2.28) следует, что

$$H_{m_0} \subset e_n \quad (n \geqslant m_0),$$

а в таком случае, функции $\psi_n(x, e_n)$ определены почти всюду на H_{m_0} для всех $n \geqslant m_0$. Кроме того, в силу (2.25), последовательность функций

$$\psi_n(x, e_n) \quad (n = m_0, m_0+1, \ldots) \tag{2.31}$$

сходится к $\varphi(x, E')$ почти всюду на $(E' \cdot H_{m_0})$, причем, в силу (2.24) и (2.30)

$$\operatorname{mes}(E' \cdot H_{m_0}) > \operatorname{mes} E' - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.32}$$

Применяя теорему Егорова, мы можем определить множество E'', которое удовлетворяет условиям

$$\operatorname{mes} E'' > \operatorname{mes}(E' \cdot H_{m_0}) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad E'' \subset (E' \cdot H_{m_0}) \tag{2.33}$$

и на котором последовательность (2.31) сходится равномерно к функции $\varphi(x, E')$. *

Следовательно, для взятого нами положительного числа ε можно подобрать такое натуральное число $N > m_0$, что будут выполняться условия (2.20), (2.21) и (2.22). Так как, в силу (2.28), (2.32), (2.33) и неравенства $N > m_0$, выполняются также условия (2.18) и (2.19), то высказанное нами утверждение доказано.

Предположим теперь, что $\varphi(x, E')$ — произвольный предельный элемент в широком смысле множества M'_0. Тогда существует последовательность (2.17) функций $\psi_n(x, e_n)$, принадлежащих множеству M'_0, для которой $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле. Следовательно, полагая $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и принимая во внимание предыдущее замечание, мы можем опре-

---

* У нас функция $\varphi(x, E')$ может равняться $+\infty$ или $-\infty$ на множестве положительной меры. В этом случае равномерная сходимость последовательности (2.31) к функции $\varphi(x, E')$ на множестве E'' определяется следующим образом:

Мы будем говорить, что последовательность (2.31) сходится равномерно к $\varphi(x, E')$ на E'', если для любого положительного числа σ можно определить такое натуральное число N, что для всех $n > N$ и для всех $x \in E''$ выполняется одно из следующих условий:

$$|\varphi(x, E') - \psi_n(x, e_n)| < \sigma, \quad -\infty < \psi_n(x, e_n) < +\infty,$$

если $\varphi(x, E')$ конечна,

$$\psi_n(x, e_n) > \frac{1}{\sigma},$$

если $\varphi(x, E') = +\infty$, и

$$\psi_n(x, e_n) < -\frac{1}{\sigma},$$

если $\varphi(x, E') = -\infty$ ([5], определение 3, стр. 22).

Можно доказать, что теорема Егорова справедлива и при таком определении равномерной сходимости ([5], лемма K, стр. 22).

делить натуральные числа N_m и множества Ω_m $(m=1, 2,\ldots)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{mes}\Omega_m > \operatorname{mes} E' - \frac{1}{2^m}, \quad \Omega_m \subset E' \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.34}$$

$$\Omega_m \subset e_{N_m} \subset E'^{\,*} \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.35}$$

$$\left.\begin{array}{c}|\varphi(x,E') - \psi_{N_m}(x, e_{N_m})| < \frac{1}{2^m}, \quad -\infty < \psi_{N_m}(x,e_{N_m}) < +\infty \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.36}$$

если $\varphi(x, E')$ конечна и $x \in \Omega_m$,

$$\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) > 2^m \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.37}$$

если $\varphi(x, E') = +\infty$, $x \in \Omega_m$, и

$$\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) < -2^m \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.38}$$

если $\varphi(x, E') = -\infty$, $x \in \Omega_m$.

Мы уже знаем, что

$$\psi_n(x, e_n) \in M'_0 \quad (n=1, 2,\ldots). \tag{2.39}$$

В таком случае, в силу определения множества M'_0, для любого $m=1,2,\ldots$ функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ есть предельный элемент в широком смысле множества M_0. Следовательно, на основании определения 3 (§ 1), для любого $m = 1,2,\ldots$ существует последовательность функций

$$g_{mk}(x, e'_{mk}) \in M_0 \quad (k=1, 2,\ldots), \tag{2.40}$$

для которой $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ — предельный элемент в широком смысле.**

Принимая во внимание сделанное выше замечание, в котором опять полагаем $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ $(m=1, 2,\ldots)$, мы можем утверждать, что для любого $m=1,2,\ldots$ существует такое множество Ω'_m и такое натуральное число k_m, что будут выполняться следующие условия:

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{mes}\Omega'_m > \operatorname{mes} e_{N_m} - \frac{1}{2^m}, \quad \Omega'_m \subset e_{N_m} \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.41}$$

$$\Omega'_m \subset e'_{m,k_m} \quad (m=1,2,\ldots), \tag{2.42}$$

$$\left.\begin{array}{c}|\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) - g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m})| < \frac{1}{2^m}, \\ -\infty < g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) < +\infty \\ (m=1, 2,\ldots),\end{array}\right\} \tag{2.43}$$

---

* В силу примечания к определению 3 (§ 1) мы можем предположить, что $e_n \subset E'$ $(n=1, 2,\ldots)$.

** Каждая из функций $g_{mk}(x, e'_{mk})$ определена почти всюду на соответствующем множестве e'_{mk}.

если $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ конечна и $x \in \Omega'_m$,

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) > 2^m \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{2.44}$$

если $\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) = +\infty$, $x \in \Omega'_m$, и

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) < -2^m \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{2.45}$$

если $\psi_{N_m}(x, e_{N_m}) = -\infty$, $x \in \Omega'_m$.

Сопоставляя (2.34), (2.35), (2.41) и (2.42), получаем:

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} e'_{m,k_m} \geqslant \operatorname{mes}(\Omega'_m \cdot \Omega_m) > \operatorname{mes} E' - \frac{1}{2^{m-2}}, \quad \Omega'_m \subset E' \\ (m = 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \tag{2.46}$$

Далее, полагая

$$e' = \varliminf_{m\to\infty} e'_{m,k_m}, \tag{2.47}$$

$$\omega = \varliminf_{m\to\infty} (\Omega'_m \cdot \Omega_m), \tag{2.48}$$

будем иметь на основании (2.42) и (2.46):

$$\omega \subset e', \quad \omega \subset E', \quad \operatorname{mes} \omega = \operatorname{mes} E'. \tag{2.49}$$

Принимая во внимание (2.24) * и (2.49), получаем:

$$\operatorname{mes} e' > 0, \quad \operatorname{mes} E' > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - e') = 0. \tag{2.50}$$

Если $x \in (\Omega'_m \cdot \Omega_m)$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(x, E')$ конечна, то на основании (2.36) функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ также конечна, а тогда, в силу (2.36) и (2.43),

$$|\varphi(x, E') - g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m})| < \frac{1}{2^{m-1}}. \tag{2.51}$$

Далее, если $x \in (\Omega'_m \cdot \Omega_m)$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(x, E') = +\infty$, то на основании (2.37) функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ или конечна, или равна $+\infty$, а в таком случае, в силу (2.37), (2.43) и (2.44),

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) > 2^m - \frac{1}{2^m}. \tag{2.52}$$

Наконец, если $x \in (\Omega'_m \cdot \Omega_m)$ для какого-нибудь $m = 1, 2, \ldots$ и $\varphi(x, E') = -\infty$, то на основании (2.38) функция $\psi_{N_m}(x, e_{N_m})$ или конечна, или равна $-\infty$, а тогда, в силу (2.38), (2.43) и (2.45),

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) < -2^m + \frac{1}{2^m}. \tag{2.53}$$

* Так как $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то выполняются условия (2.24), где e_0 определяется из равенства (2.23).

Сопоставляя равенство (2.48) с неравенствами (2.51), (2.52) и (2.53), мы видим, что

$$\lim_{m\to\infty} g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) = \varphi(x, E') \tag{2.54}$$

для всех $x \in \omega$ и, следовательно, на основании (2.49) это равенство выполняется почти всюду на множестве E'. В таком случае, принимая во внимание (2.47), (2.50) и определение 2 (§ 1), мы видим, что $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций $g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m})$ $(m = 1, 2,\ldots)$. Так как на основании (2.40)

$$g_{m,k_m}(x, e'_{m,k_m}) \in M_0 \quad (m = 1, 2,\ldots),$$

то из определения 3 (§ 1) следует, что $\varphi(x,E')$ — предельный элемент в широком смысле множества M_0.

Мы предположили, что $\varphi(x, E')$—произвольный предельный элемент в широком смысле множества M'_0. Следовательно, любой предельный элемент в широком смысле множества M'_0 является также предельным элементом в широком смысле множества M_0. Так как, по определению, множество M'_0 состоит из всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, то отсюда следует, что множество M'_0 содержит все свои предельные элементы в широком смысле, а в таком случае, в силу определения 4 (§ 1), множество M'_0 замкнуто в узком смысле.

Докажем теперь, что множество M'_0 и функции $F(x), G(x)$, входящие в формулировку теоремы IV, удовлетворяют условиям α, β и γ теоремы В (§ 1), если в этих условиях взять M'_0 вместо M. Так как множество M'_0 замкнуто в узком смысле, то оно удовлетворяет условию α. Докажем, что множество M'_0 и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям β и γ.

Пусть $\varphi(x, E')$ — произвольная функция, принадлежащая множеству M'_0. Тогда $\varphi(x, E')$ определена почти всюду на E', причем

$$\operatorname{mes} E' > 0, \quad E' \subset [-\pi, \pi]^{*}. \tag{2.55}$$

Так как множество M'_0 состоит из всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, то, в силу определения 3 (§ 1), существует последовательность функций

$$\psi_n(x, e_n) \in M_0 \quad (n = 1, 2,\ldots),^{**} \tag{2.56}$$

для которой $\varphi(x, E')$—предельный элемент в широком смысле.

В таком случае, определяя множество e_0 из равенства (2.23) и принимая во внимание определение 2 (§ 1), будем иметь:

$$\operatorname{mes} e_0 > 0, \quad \operatorname{mes}(E' - e_0) = 0, \tag{2.57}$$

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x, e_n) = \varphi(x, E') \tag{2.58}$$

почти всюду на E'.

---

* См. примечание к определению множества M'_0.

** Каждая из функций $\psi_n(x, e_n)$ определена почти всюду на соответствующем множестве e_n.

Из определения множества M_0 (см. условия A° и B°, т. е. равенства (2.12), (2.13)) и условия (2.56) следует, что

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} e_n > 0, \quad e_n \subset [-\pi, \pi], \quad \operatorname{mes}(e_n - E_0) = 0 \\ (n = 1,2,\ldots) \end{array}\right\} \tag{2.59}$$

и, кроме того, существуют функции

$$\varphi_n(x) \in M \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{2.60}$$

и функции $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1, 2,\ldots)$, которые определены соответственно почти всюду на множествах E и E_0 и для которых удовлетворяются условия:

a°.
$$\psi_n(x, e_n) = \varphi_{0n}(x) \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{2.61}$$
почти всюду на e_n;

b°.
$$\left.\begin{array}{c} \varphi_{0n}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & (x \in E), \\ F(x) & (x \in E_0 - E) \end{cases} \\ (n = 1, 2,\ldots), \end{array}\right\} \tag{2.62}$$

т. е. $\varphi_{0n}(x)$ определяется через функцию $\varphi_n(x)$ таким же образом, как $\varphi_0(x)$ определяется через $\varphi(x)$ при помощи равенства (2.11).* При этом функции $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1, 2,\ldots)$ измеримы на множестве E_0.

Принимая во внимание (2.23) и (2.59), получаем:

$$\operatorname{mes}(e_0 - E_0) = 0,$$

откуда, в силу (2.57),

$$\operatorname{mes}(E' - E_0) = 0. \tag{2.63}$$

Так как $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2,\ldots)$ (см. (2.60)), то, по условию теоремы IV,

$$G(x) \leqslant \varphi_n(x) \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{2.64}$$

почти всюду на множестве E, откуда на основании (2.62)

$$G(x) \leqslant \varphi_{0n}(x) \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{2.65}$$

почти всюду на множестве E_0, а в таком случае, в силу (2.59) и (2.61),

$$G(x) \leqslant \psi_n(x, e_n) \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2,\ldots) \tag{2.66}$$

почти всюду на соответствующем множестве e_n. Сопоставляя (2.23), (2.57) (2.58) и (2.66), мы видим, что выполняется неравенство

$$G(x) \leqslant \varphi(x, E') \leqslant F(x) \tag{2.67}$$

почти всюду на множестве E'.

---

* Напомним, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_0(x)$, входящие в условие B°, определены соответственно на множествах E и E_0 (см. определение множества M в начале доказательства теоремы IV и равенство (2.11).

Так же, как в равенстве (2.11), мы определяем функции $\varphi_{0n}(x)$ произвольным образом на том множестве меры нуль, на котором функции $\varphi_n(x)$ и $F(x)$ первоначально не были определены.

Кроме того, так как функции $\varphi_{0n}(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ измеримы на множестве E_0, то, в силу (2.59) и (2.61), каждая из функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n=1, 2,\ldots)$ измерима на соответствующем множестве e_n, а тогда на основании (2.58) и (2.59) функция $\varphi(x, E')$ измерима на множестве E'.

Итак, мы взяли произвольную функцию $\varphi(x, E')\in M'_0$ и доказали, что выполняется неравенство (2.67) почти всюду на соответствующем множестве E', причем $\varphi(x, E')$ измерима на E'. В таком случае множество M'_0 и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условию β теоремы В (§ 1).

Докажем теперь, что множество M'_0 удовлетворяет условию γ той же теоремы.* Когда мы приступили к доказательству того, что множество M_0 и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям β и γ, мы взяли произвольную функцию $\varphi(x, E')\in M'_0$ и определили для нее функции $\psi_n(x, e_n)$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_{0n}(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ и множество e_0, удовлетворяющие условиям (2.23) и (2.56) — (2.66).

Положим

$$e'_n=e_n+E[F(x)=G(x)] \quad (n=1,2,\ldots), \tag{2.68}$$

$$\left.\begin{array}{c}\psi_{0n}(x, e'_n)=\begin{cases}\psi_n(x, e_n) & (x\in e_n),\\ F(x) & (x\in e'_n-e_n)\end{cases}\\ (n=1, 2,\ldots),^{**}\end{array}\right\} \tag{2.69}$$

$$E'_0=E'+E[F(x)=G(x)], \tag{2.70}$$

$$\varphi_0(x, E'_0)=\left\{\begin{array}{ll}\varphi(x, E') & (x\in E'),\\ F(x) & (x\in E'_0-E').\end{array}\right\} \tag{2.71}$$

Множества e'_n и E'_0 получаются соответственно из множеств e_n и E' таким же образом, как множество E_0 получается из множества E при помощи равенства (1.14). Точно так же, функции $\psi_{0n}(x, e'_n)$ и $\varphi_0(x,E'_0)$ получаются соответственно из функций $\psi_n(x, e_n)$ и $\varphi(x, E')$ таким же образом, как функция $\varphi_0(x, E_0)$ получается из функции $\varphi(x, E)$ при помощи равенства (1.15).

Докажем, что $\varphi_0(x, E'_0)$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций

$$\psi_{0n}(x, e'_n) \quad (n=1, 2,\ldots) \tag{2.72}$$

(см. определение 2, § 1). В самом деле, положим

$$e'_0=e_0+E[F(x)=G(x)]. \tag{2.73}$$

Тогда, принимая во внимание (2.23) и (2.68), будем иметь:

$$e'_0=\varliminf_{n\to\infty} e'_n. \tag{2.74}$$

Далее, сопоставляя (2.57), (2.70) и (2.73), получаем:

$$\operatorname{mes} e'_0>0, \quad \operatorname{mes}(E'_0-e'_0)=0. \tag{2.75}$$

---

* В условии γ мы берем M'_0 вместо M.

** По поводу равенства (2.69) нужно сделать такое же пояснение, какое было сделано в примечании к равенству (1.15). В дальнейшем в аналогичных случаях мы не будем делать соответствующего пояснения.

Кроме того, из (2.55) и (2.70) следует, что

$$\operatorname{mes} E'_0 > 0. \tag{2.76}$$

Принимая во внимание (2.23), (2.57), (2.58), (2.69) и (2.71), мы видим, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi_{0n}(x, e'_n) = \varphi_0(x, E'_0) \tag{2.77}$$

почти всюду на E'.

В силу (2.71), равенство

$$\varphi_0(x, E'_0) = F(x) \tag{2.78}$$

справедливо на множестве $E'_0 - E'$.* Далее, на основании (2.70)

$$E'_0 - E' \subset E\,[F(x) = G(x)],$$

откуда, в силу (2.66), $\psi_n(x, e_n) = F(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ почти всюду на множестве $[e_n \cdot (E'_0 - E')]$ с тем же индексом n, а тогда, сопоставляя (2.68), (2.69) и (2.78), получаем:

$$\psi_{0n}(x, e'_n) = F(x) = \varphi_0(x, E'_0) \tag{2.79}$$

почти всюду на множестве $[e'_n \cdot (E'_0 - E')]$ с тем же индексом n.

Из равенства (2.74) следует, что

$$[e'_0 \cdot (E'_0 - E')] = \varliminf_{n\to\infty} [e'_n \cdot (E'_0 - E')]$$

а так как, в силу (2.75),

$$\operatorname{mes} [e'_0 \cdot (E'_0 - E')] = \operatorname{mes} (E'_0 - E'),$$

то на основании (2.79) равенство (2.77) выполняется почти всюду на множестве $E'_0 - E'$. Мы уже доказали, что то же равенство выполняется почти всюду на множестве E'. Следовательно, равенство (2.77) выполняется почти всюду на множестве E'_0, а в таком случае, принимая во внимание (2.74), (2.75), (2.76) и определение 2 (§ 1), мы видим, что $\varphi_0(x, E'_0)$ есть предельный элемент в широком смысле последовательности функций (2.72).

Докажем теперь, что

$$\psi_{0n}(x, e'_n) \in M_0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.80}$$

В самом деле, из (2.9), (2.59) и (2.68) следует, что

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} e'_n > 0, \quad e'_n \subset [-\pi, \pi], \quad \operatorname{mes} (e'_n - E_0) = 0 \\ (n = 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \tag{2.81}$$

* В равенстве (2.71) функция $F(x)$ определяется произвольным образом на том множестве меры нуль, где она первоначально не была определена. Если же считать, что $F(x)$ определена почти всюду на $[-\pi, \pi]$, то равенство (2.78) будет выполняться почти всюду на множестве $E'_0 - E'$.

Далее, на основании (2.9) и (2.68)

$$e'_n - e_n \subset E\,[F(x) = G(x)] \subset E_0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.82}$$

откуда, в силу (2.65),

$$\varphi_{0n}(x) = F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.83}$$

почти всюду на множестве $e'_n - e_n$ с тем же индексом n. В таком случае, в силу (2.61) и (2.69), получаем:

$$\psi_{0n}(x, e'_n) = \varphi_{0n}(x) \quad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{2.84}$$

почти всюду на множестве e'_n с тем же индексом n.

Мы уже знаем, что каждая функция $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ определяется через соответствующую функцию $\varphi_n(x) \in M$ таким же образом, как функция $\varphi_0(x)$ определяется через функцию $\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — произвольная функция, принадлежащая множеству M [см. (2.11) и (2.62)]. В таком случае, сопоставляя условия A° и B° [см. (2.12) и (2.13)] с условиями (2.81), (2.84) и принимая во внимание определение множества M_0 при помощи условий A° и B°, мы видим, что выполняется условие (2.80).

Мы уже доказали, что $\varphi_0(x, E'_0)$ — предельный элемент в широком смысле последовательности функций (2.72). Тогда, так как M'_0 — множество всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, то из условия (2.80) следует, что

$$\varphi_0(x, E'_0) \in M'_0. \tag{2.85}$$

Итак, мы взяли произвольную функцию $\varphi(x, E') \in M'_0$ и доказали, что соответствующая функция $\varphi_0(x, E'_0)$, определяемая из равенства (2.71), также принадлежит множеству M'_0. При этом множество E'_0 определяется из равенства (2.70). В таком случае множество M'_0 удовлетворяет условию γ теоремы B (§ 1).*

Раньше мы уже доказали, что множество M'_0 удовлетворяет условиям α и β теоремы B. Кроме того, для любой функции $\varphi(x, E') \in M'_0$ выполняется условие (2.55). Следовательно, на основании теоремы C (§ 1) мы можем определить тригонометрический ряд (1.4), который обладает свойствами a, b и c, содержащимися в формулировке этой теоремы.**

Докажем, что ряд (1.4) обладает свойствами 1°—5°, перечисленными в формулировке теоремы IV (§ 1). Свойства b и c совпадают соответственно со свойствами 3° и 4°. Докажем, что ряд (1.4) обладает свойством 2°, содержащимся в формулировке теоремы IV.

Предположим, что какая-нибудь последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k сходится всюду на некотором множестве $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, к функции $f(x) \equiv f(x, e)$. Тогда эта функция определена всюду на e и является предельной функцией ряда (1.4) на этом множестве (см. определение 1, § 1).

* В условии γ мы берем множества M'_0, E', E'_0 вместо множеств M, E, E_0 и функции $\varphi(x, E')$, $\varphi_0(x, E'_0)$ вместо функций $\varphi(x, E)$, $\varphi_0(x, E_0)$.

** В свойстве a мы заменяем множество M множеством M'_0.

Из свойства а ряда (1.4) следует, что M'_0 есть множество всех предельных функций этого ряда, откуда вытекает, что

$$f(x) \in M'_0.$$

Множество M'_0, по определению, состоит из всех предельных элементов в широком смысле множества M_0. В таком случае, принимая во внимание определения 2 и 3 (§ 1), мы можем определить последовательность функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и множество e_0, для которых удовлетворяются условия (2.23), (2.56), а также соотношения

$$\operatorname{mes} e_0 > 0, \quad \operatorname{mes}(e - e_0) = 0 \tag{2.86}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x, e_n) = f(x) \tag{2.87}$$

почти всюду на e. При этом, каждая из функций $\psi_n(x, e_n)$ определена почти всюду на соответствующем множестве e_n.

Из условия (2.56) и определения множества M_0 [см. условия A°, B°, т. е. равенства (2.12) и (2.13)], следует, что выполняются соотношения (2.59) и, кроме того, существуют функции $\varphi_n(x) \in M$ и $\varphi_{0n}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определенные соответственно почти всюду на множествах E^* и E_0, для которых удовлетворяются условия a° и b°, т. е. равенства (2.61) и (2.62).

Из равенства (2.23) получаем:

$$(e \cdot e_0) = \underline{\lim}_{n\to\infty} (e \cdot e_n), \tag{2.88}$$

причем, в силу (2.86),

$$\operatorname{mes}(e \cdot e_0) = \operatorname{mes} e. \tag{2.89}$$

С другой стороны, так как $e \subset E$, то $(e \cdot e_n) \subset E$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и, следовательно, сопоставляя (2.61) и (2.62), мы видим, что

$$\psi_n(x, e_n) = \varphi_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.90}$$

почти всюду на соответствующем множестве $(e \cdot e_n)$, откуда на основании (2.87), (2.88) и (2.89) ясно, что выполняется равенство (1.21) почти всюду на e.

Итак, мы предположили, что некоторая последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k сходится всюду на множестве $e \subset E$, $\operatorname{mes} e > 0$, к функции $f(x)$, и мы доказали, что существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой выполняется равенство (1.21) почти всюду на e. Следовательно, ряд (1.4) обладает свойством 2°, содержащимся в формулировке теоремы IV.

Докажем теперь, что ряд (1.4) обладает свойством 1°, содержащимся в формулировке той же теоремы. Предположим, что $f(x)$ — предельная функция ряда (1.4) на множестве E. Тогда, в силу определения 1 (§ 1), существует последовательность частных сумм $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ряда (1.4) с возрастающими номерами n_k, которая сходится к $f(x)$ почти всюду на E. Следовательно, принимая во внимание уже доказанное свойство 2° ряда (1.4),

* Все функции $\varphi(x) \in M$ определены почти всюду на множестве E (см. начало доказательства теоремы IV).

в котором предполагаем, что $e \subset E$, $\operatorname{mes} e = \operatorname{mes} E$, мы можем утверждать, что существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которой выполняется равенство (1.21) почти всюду на E, а в таком случае, принимая во внимание определение 8 (§ 1), мы видим, что $f(x)$ является предельным элементом в смысле сходимости почти всюду на E для множества M.

По условию теоремы IV(§ 1), множество M замкнуто в смысле сходимости почти всюду на E. Следовательно, принимая во внимание определение 9 (§ 1), мы можем утверждать, что

$$f(x) \in M. \tag{2.91}$$

Итак, мы предположили, что $f(x)$ — произвольная предельная функция ряда (1.4) на множестве E, и мы доказали, что выполняется условие (2.91). Раньше мы уже доказали, что $M \subset M'_0$ (см. (2.16)). С другой стороны, мы уже знаем, что M'_0 есть множество всех предельных функций ряда (1.4) и, кроме того, все функции, принадлежащие множеству M, определены почти всюду на E. В таком случае M есть множество всех предельных функций ряда (1.4) на множестве E, т. е. ряд (1.4) обладает свойством 1°, содержащимся в формулировке теоремы IV.

Так как мы уже доказали, что ряд (1.4) обладает свойствами 2°, 3°, 4°, указанными в формулировке этой теоремы, то для завершения ее доказательства достаточно показать, что ряд (1.4) обладает свойством 5° (см. формулировку той же теоремы).

Предположим, что множество H, определяемое из равенства (1.23), имеет положительную меру и, в то же время, ряд (1.4) не обладает свойством 5°. Тогда существует последовательность $S_{n_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ частных сумм этого ряда с возрастающими номерами n_k, которая сходится к некоторой функции $\varphi(x, E')$ почти всюду на множестве E', причем

$$\operatorname{mes} E' > 0, \quad E' \subset H \subset [-\pi, \pi]. \tag{2.92}$$

Следовательно, функция $\varphi(x, E')$, определенная почти всюду на E', является предельной функцией ряда (1.4) на этом множестве, а так как M'_0 — множество всех предельных функций ряда (1.4), то

$$\varphi(x, E') \in M'_0. \tag{2.93}$$

С другой стороны, M'_0 — множество всех предельных элементов в широком смысле множества M_0, которое определяется условиями A° и B° [см. (2.12) и (2.13)]. Следовательно, существует последовательность функций $\psi_n(x, e_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих условию (2.56), для которых $\varphi(x, E')$ — предельный элемент в широком смысле, а в таком случае, определяя множество e_0 из равенства (2.23), мы получаем условия (2.57) и (2.58) (см. определение 2, § 1). Кроме того, из условия (2.56) и равенства (2.12) (см. условие A° в определении множества) следует, что множества e_n удовлетворяют соотношениям (2.59).

Сопоставляя (2.23) и (2.59), мы видим, что $\operatorname{mes}(e_0 - E_0) = 0$, откуда на основании (2.57)

$$\operatorname{mes}(E' - E_0) = 0. \tag{2.94}$$

Так как, в силу (1.23) и (2.9),

$$(H \cdot E_0) = 0,$$

то на основании (2.92)

$$\text{mes}\,(E' - E_0) = \text{mes}\,E' > 0,$$

что противоречит равенству (2.94).

Таким образом, предположение, что ряд (1.4) не обладает свойством 5°, приводит к противоречию, а в таком случае теорема IV доказана. Следовательно, эта теорема выведена из теоремы C.

В начале настоящего параграфа мы вывели теорему II из теоремы B. Кроме того, в § 1 мы получили теоремы I и III как следствия теорем II и IV. Таким образом, у нас доказаны теоремы I—IV.

Докажем теперь теорему V (см. § 1). Пусть множества K, M и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют условиям этой теоремы. Тогда, принимая во внимание (1.29) и (1.30), мы видим, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ выполняется неравенство (1.20) для любой функции $\varphi(x) \in M$.

Докажем, что множество M замкнуто в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$. В самом деле, пусть $f(x)$ — предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Тогда на основании определения 8 (§ 1) существует последовательность функций

$$\varphi_n(x) \in M \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.95}$$

для которой

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \tag{2.96}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Обозначим через K_x множество всех точек (x, y), которые имеют данную абсциссу x. Так как, по условию теоремы V, проекция множества K на ось x совпадает с сегментом $[-\pi, \pi]$, то K_x — не пустое множество для любого $x \in [-\pi, \pi]$. Кроме того, по условию теоремы V, множество K замкнуто по вертикали и, следовательно, в силу определения 12 (§ 1), каждое из множеств K_x, $x \in [-\pi, \pi]$, есть линейное замкнутое множество. С другой стороны, так как каждая из функций, принадлежащих множеству M, определена почти всюду на $[-\pi, \pi]$ (см. условия теоремы V), то на основании определения множества K_x и множества M [см. (1.30)] из условия (2.95) следует, что при фиксированном x величины $y = \varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат линейному множеству K_x, причем x — любое число из сегмента $[-\pi, \pi]$, кроме, быть может, множества меры нуль. В таком случае, так как каждое из множеств K_x, $x \in [-\pi, \pi]$, есть линейное замкнутое множество, из равенства (2.96) следует, что для любого фиксированного $x \in [-\pi, \pi]$, кроме, быть может, множества меры нуль, величина $y = f(x)$ принадлежит соответствующему множеству K_x.

Принимая во внимание определение множеств K_x, мы видим таким образом, что

$$[x, f(x)] \in K \tag{2.97}$$

для всех $x \in [-\pi, \pi]$, за исключением, быть может множества меры нуль. Далее, из определения множества M (см. формулировку теоремы V) и условия (2.95) следует, что функции $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ измеримы и определены почти всюду на $[-\pi, \pi]$, а в таком случае, в силу (2.96), функция $f(x)$ также измерима и определена почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Так как условие (2.97) выполняется почти всюду на том же сегменте, то из определения множества M следует, что

$$f(x) \in M. \tag{2.98}$$

Итак, мы предположили, что $f(x)$ — произвольный предельный элемент множества M в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$, и мы доказали, что выполняется условие (2.98). В таком случае, в силу определения 9 (§ 1), множество M является замкнутым в смысле сходимости почти всюду на $[-\pi, \pi]$.

Раньше мы уже доказали, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$ выполняется неравенство (1.20) для любой функции $\varphi(x) \in M$. Следовательно, множество M и функции $F(x)$, $G(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы IV (§ 1), в которых мы полагаем $E = [-\pi, \pi]$, а тогда на основании этой теоремы существует тригонометрический ряд (1.4), обладающий свойствами 1°— 5°, в которых также полагаем $E = [-\pi, \pi]$.

Так как при $E = [-\pi, \pi]$ свойства 1°— 4° ряда (1.4), перечисленные в формулировке теоремы IV, совпадают соответственно со свойствами A, B, C и D того же ряда, перечисленными в формулировке теоремы V, то эта последняя теорема доказана.

§ 3

Докажем теперь теорему VI, сформулированную в конце § 1. Предположим, что ряд (1.1)** имеет предельную функцию $\varphi(x, E)$ на множестве E. Тогда функция $\varphi(x, E)$ определена почти всюду на E, причем

$$\operatorname{mes} E > 0, \quad E \subset [a, b] \tag{3.1}$$

(см. определение 1, § 1). Докажем, что ряд (1.1) имеет максимальную предельную функцию $\chi(x, H)$,*** удовлетворяющую условиям (1.33) и (1.34).

Если $\psi(x, e)$ — какая-нибудь предельная функция ряда (1.1) на соответствующем множестве e, то мы обозначим через $\Omega(\psi, e)$ множество всех предельных функций $g(x, e')$ того же ряда****, для каждой из которых выполнены условия

$$e \subset e' \subset [a, b], \quad \operatorname{mes}(e' - e) > 0, \tag{3.2}$$

$$g(x, e') = \psi(x, e) \tag{3.3}$$

* Мы обозначаем через $[x, f(x)]$ точку на плоскости с координатами x и $y = f(x)$.

** Напомним, что члены ряда (1.1) измеримы и конечны почти всюду на некотором сегменте $[a, b]$.

*** См. определение 11, § 1.

**** $g(x, e')$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве e'.

почти всюду на e. Для некоторых предельных функций $\psi(x, e)$ ряда (1.1) множество $\Omega(\psi, e)$ может быть пустым. В каждом не пустом множестве $\Omega(\psi, e)$ отметим по одной функции

$$g(x, e') \equiv F(x, e'; \psi, e). \tag{3.4}$$

Тогда $F(x, e'; \psi, e)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве e', для которой выполняются условия (3.2), а также условия

$$F(x, e'; \psi, e) \in \Omega(\psi, e) \tag{3.5}$$

и

$$F(x, e'; \psi, e) = \psi(x, e) \tag{3.6}$$

почти всюду на e.

Для каждого трансфинитного числа α первого или второго класса определим некоторое множество E_α и некоторую функцию $F_\alpha(x)$, заданную почти всюду на E_α. Прежде всего для каждого трансфинитного числа второго класса и второго рода отметим последовательность трансфинитных чисел β_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих условиям

$$\beta_\lambda < \beta_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots), \tag{3.7}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \beta_\lambda = \alpha. \tag{3.8}$$

Тогда

$$\beta_\lambda < \alpha \quad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

и, следовательно, β_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) являются трансфинитными числами первого или второго класса.

Для $\alpha = 0$ мы определим $E_\alpha \equiv E_0$ и $F_\alpha(x) \equiv F_0(x)$ из равенств

$$E_0 = E, \quad F_0(x) = \varphi(x, E), \tag{3.10}$$

где $\varphi(x, E)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E, существование которой предположено в начале доказательства теоремы VI. Тогда $F_0(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_0, причем на основании (3.1)

$$\operatorname{mes} E_0 > 0, \quad E_0 \subset [a, b] \tag{3.11}$$

и, кроме того, $F_0(x)$ измерима и определена почти всюду на E_0.

Возьмем теперь какое-нибудь трансфинитное число $\alpha > 0$ первого или второго класса и предположим, что для любого трансфинитного числа β, удовлетворяющего неравенству

$$\beta < \alpha, \tag{3.12}$$

определено множество E_β и измеримая функция $F_\beta(x)$, для которых выполняются условия:

1°. $$\operatorname{mes} E_\beta > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_\beta \subset [a, b] \quad (\beta' \leqslant \beta). \tag{3.13}$$

2°. $$F_{\beta'}(x) = F_\beta(x) \quad (\beta' \leqslant \beta) \tag{3.14}$$

почти всюду на $E_{\beta'}$.

3°. $F_\beta(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_β (см. определение 1, § 1).

Мы определим множество E_α и функцию $F_\alpha(x)$ следующим образом. Предположим сперва, что α — трансфинитное число второго рода. Для этого числа у нас уже отмечена последовательность трансфинитных чисел β_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющих условиям (3.7), (3.8) и, следовательно, неравенству (3.9). В таком случае, так как условия 1°, 2° и 3° выполняются для любого $\beta < \alpha$, то

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{mes} E_{\beta_\lambda} > 0, \quad E_{\beta_\lambda} \subset E_{\beta_{\lambda+1}} \subset [a, b] \\ (\lambda = 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

и

$$F_{\beta_\lambda}(x) = F_{\beta_{\lambda+1}}(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots) \tag{3.16}$$

почти всюду на E_{β_λ}, причем каждая из функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) есть предельная функция ряда (1.1) на множестве E_{β_λ} с тем же индексом λ. Тогда каждая из функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) измерима и определена почти всюду на соответствующем множестве E_β.

Положим

$$E_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\infty} E_{\beta_\lambda}, \tag{3.17}$$

$$F_\alpha(x) = F_{\beta_\lambda}(x) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots), \tag{3.18}$$

если $x \in E_{\beta_\lambda}$ и $F_{\beta_\lambda}(x)$ определена. Так как каждая из функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) измерима и определена почти всюду на соответствующем множестве E_{β_λ}, то на основании (3.15), (3.16), (3.17) и (3.18) функция $F_\alpha(x)$ измерима и определена однозначно почти всюду на E_α. Мы будем рассматривать $F_\alpha(x)$ только в тех точках, где она определена однозначно. Тогда равенство (3.18) выполняется почти всюду на каждом множестве E_{β_λ} ($\lambda = 1, 2, \ldots$).

Докажем, что множество E_α и функция $F_\alpha(x)$ удовлетворяют условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и условию 3°, в которых мы берем α вместо β. Возьмем произвольное трансфинитное число $\beta' < \alpha$. Из равенства (3.8) и неравенства (3.9) следует, что можно определить натуральное число λ', для которого справедливо неравенство

$$\beta' < \beta_{\lambda'} < \alpha. \tag{3.19}$$

В таком случае, так как условие (3.13) выполняется для любого $\beta < \alpha$, то, в силу (3.15) и (3.17),

$$\operatorname{mes} E_{\beta'} > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_{\beta_{\lambda'}} \subset E_\alpha \subset [a, b]. \tag{3.20}$$

Кроме того, $E_{\beta'} \subset E_\alpha$, если $\beta' = \alpha$. Из этих условий следует, что

$$\operatorname{mes} E_\alpha > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_\alpha \subset [a, b] \quad (\beta' \leqslant \alpha), \tag{3.21}$$

т. е. условие 1° (см. (3.13)) выполняется, если вместо β взять α.

Перейдем к условию 2°. Предполагая по-прежнему, что $\beta' < \alpha$ и что для натурального числа λ' выполняются условия (3.19) и (3.20), и принимая во внимание (3.18) и (3.14) для $\beta = \beta_\lambda$, мы видим, что $F_{\beta'}(x) = F_\alpha(x)$ почти всюду на множестве $E_{\beta'}$. Так как, кроме того, $E_{\beta'} = E_\alpha$, если $\beta' = \alpha$, то

$$F_{\beta'}(x) = F_\alpha(x) \quad (\beta' \leqslant \alpha) \tag{3.22}$$

почти всюду на $E_{\beta'}$, т. е. мы получаем условие 2° [см. (3.14)], в котором вместо β взято α.

Докажем теперь, что выполняется условие 3°, в котором β заменено на α. Обозначим через M множество всех предельных функций ряда (1.1). Так как $\beta_\lambda < \alpha$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ [см. (3.9)], то из условия 3° для $\beta = \beta_\lambda$ вытекает, что для любого $\lambda = 1, 2, \ldots$ функция $F_{\beta_\lambda}(x)$ есть предельная функция ряда (1.1) на множестве E_{β_λ} и, следовательно,

$$F_{\beta_\lambda}(x) \in M \quad (\lambda = 1, 2, \ldots). \tag{3.23}$$

Далее, сопоставляя (3.15), (3.17) и (3.18), мы видим, что

$$E_\alpha = \varliminf_{\lambda \to \infty} E_{\beta_\lambda}, \tag{3.24}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} F_{\beta_\lambda}(x) = F_\alpha(x) \tag{3.25}$$

почти всюду на E_α, а в таком случае, в силу (3.21) и определения 2 (§ 1), функция $F_\alpha(x)$, определенная почти всюду на E_α, есть предельный элемент в широком смысле последовательности функций $F_{\beta_\lambda}(x)$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$ * Мы видим отсюда, принимая во внимание условие (3.23) и определение 3 (§ 1), что $F_\alpha(x)$ — предельный элемент в широком смысле множества M.

Так как M — множество всех предельных функций ряда (1.1), то на основании теоремы В (§ 1) это множество замкнуто в узком смысле и, следовательно, в силу определения 4 (§ 1), содержит все свои предельные элементы в широком смысле. Тогда из предыдущего следует, что

$$F_\alpha(x) \in M, \tag{3.26}$$

т. е. функция $F_\alpha(x)$, определенная почти всюду на E_α, есть предельная функция ряда (1.1) на этом множестве. Таким образом, мы получаем условие 3°, в котором β заменено на α.

Итак, мы предположили, что α — произвольное трансфинитное число второго рода и второго класса, и мы определили множество E_α и функцию $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и 3°, в которых α взято вместо β.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого или второго класса и первого рода. В этом случае существует трансфинитное число $\alpha - 1$, непосредственно предшествующее числу α. Так как условие 3° выполняется для любого $\beta < \alpha$, то, полагая в этом условии $\beta = \alpha - 1$, мы

* В определении 2 мы берем $E = E' = E_\alpha$.

видим, что $F_{\alpha-1}(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\alpha-1}$. Тогда у нас определено множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$. *

Предположим сперва, что $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — пустое множество. В этом случае мы положим

$$E_\alpha = E_{\alpha-1}, \quad F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}(x). \tag{3.27}$$

Так как условия 1°, 2° [см. (3.13), (3.14)] и условие 3° выполняются для любого $\beta < \alpha$, то, полагая в этих условиях $\beta = \alpha - 1$ и принимая во внимание (3.27), мы видим, что $F_\alpha(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_α и, кроме того, выполняются условия (3.21) и равенство (3.22) почти всюду на $E_{\beta'}$ для любого $\beta' \leqslant \alpha$, т. е. функция $F_\alpha(x)$ и множество E_α удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3°, в которых α взято вместо β.

Итак, предполагая, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого или второго класса и первого рода, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — пустое, мы определяем и в этом случае функцию $F_\alpha(x)$ и множество E_α, удовлетворяющие условиям 1°, 2° и 3°, в которых β заменено на α.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого или второго класса и первого рода, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое. Если $\psi(x, e)$ — какая-нибудь предельная функция ряда (1.1) на соответствующем множестве e и если множество $\Omega(\psi, e)$, определенное для этой функции, — не пустое, то в этом множестве у нас отмечена функция $F(x, e'; \psi, e)$, удовлетворяющая условиям (3.5) и (3.6). При этом $F(x, e'; \psi, e)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве e' и это множество e' удовлетворяет условиям (3.2). В таком случае во множестве $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ у нас отмечена функция $F(x, e'; F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$, которая является предельной функцией ряда (1.1) на множестве e'. Мы обозначим это множество e' через E_α и, кроме того, положим

$$F_\alpha(x) = F(x, E_\alpha; F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1}). \tag{3.28}$$

Тогда $F_\alpha(x)$ будет предельной функцией ряда (1.1) на множестве E_α, причем это множество будет удовлетворять условиям

$$E_{\alpha-1} \subset E_\alpha \subset [a, b], \quad \operatorname{mes}(E_\alpha - E_{\alpha-1}) > 0, \tag{3.29}$$

$$F_\alpha(x) = F_{\alpha-1}(x) \tag{3.30}$$

почти всюду на $E_{\alpha-1}$ [см. условия (3.2) и (3.6), в которых берем E_α, $F_{\alpha-1}(x)$, $E_{\alpha-1}$ и $F_\alpha(x)$ вместо e', $\psi(x, e)$, e и $F(x, e'; \psi, e)$].

Докажем, что определенные нами функция $F_\alpha(x)$ и множество E_α удовлетворяют условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и условию 3°, в которых β заменено на α. Мы уже видели, что $F_\alpha(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве E_α. Следовательно, функция $F_\alpha(x)$ и множество E_α удовлетворяют условию 3°, в котором вместо β взято α.

Возьмем теперь произвольное трансфинитное число $\beta' < \alpha$. Тогда $\beta' \leqslant \alpha - 1$ и, следовательно, из условий 1° и 2° [см. (3.13) и (3.14)], в которых полагаем $\beta = \alpha - 1$, будем иметь:

* Напомним, что множество $\Omega(\psi, e)$ определено для любой предельной функции $\psi(x, e)$ ряда (1.1), причем это множество $\Omega(\psi, e)$ состоит из всех предельных функций $g(x, e')$ ряда (1.1), удовлетворяющих условиям (3.2) и (3.3).

$$\operatorname{mes} E_{\alpha-1} > 0, \quad E_{\beta'} \subset E_{\alpha-1} \subset [a, b] \quad (\beta' < \alpha), \tag{3.31}$$

$$F_{\beta'}(x) = F_{\alpha-1}(x) \quad (\beta' < \alpha) \tag{3.32}$$

почти всюду на $E_{\beta'}$, а в таком случае на основании (3.29) и (3.30) мы получаем соотношения (3.21) и (3.22). Это означает, что выполняются условия 1° и 2° [см. (3.13) и (3.14)], в которых β заменено на α.

Таким образом, предполагая, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число первого рода и класса не выше второго, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое, мы определяем множество E_α и функцию $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие условиям 1°, 2° и 3°, где вместо β взято α.

Раньше мы определили E_α и $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие тем же условиям когда $\alpha > 0$ — трансфинитное число класса не выше второго и притом второго рода или же первого рода, но такое, что соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — пустое. Следовательно, множество E_α и функция $F_\alpha(x)$, удовлетворяющие предыдущим условиям, у нас определены во всех возможных случаях. * При этом, если α — первого рода и множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое, то выполняются соотношения (3.29).

Итак, мы взяли трансфинитное число $\alpha > 0$ класса не выше второго и предположили, что для всех трансфинитных чисел $\beta < \alpha$ определены функции $F_\beta(x)$ и множества E_β, удовлетворяющие условиям 1°, 2° [см. (3.13) и (3.14)] и условию 3°. В этих предположениях мы определили функцию $F_\alpha(x)$ и множество E_α, удовлетворяющие тем же условиям 1°, 2° и 3°, в которых β заменено на α. Раньше мы уже определили функцию $F_\alpha(x)$ и множество E_α при $\alpha = 0$ [см. (3.10)], причем, так как $F_0(x)$ есть предельная функция ряда (1.1) на множестве E_0 и, кроме того, выполняются соотношения (3.11), то условия 1°, 2° и 3° удовлетворяются для $\beta = 0$. В таком случае, в силу трансфинитной индукции, функции $F_\alpha(x)$ и множества E_α определены для всех трансфинитных чисел α класса не выше второго, причем эти функции и множества удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3°, в которых β заменено на α.

Отсюда следует, что для всех трансфинитных чисел α класса не выше второго $F_\alpha(x)$ является предельной функцией ряда (1.1) на множестве E_α и, в то же время, выполняются условия (3.21) и (3.22). Кроме того, для всех чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго, для которых соответствующее множество $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустое, выполняются условия (3.29).

Докажем теперь, что для некоторого трансфинитного числа $\gamma > 0$ первого рода и класса не выше второго соответствующее множество $\Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1})$ — пустое. В самом деле, предположим, что для любых трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго соответствующие множества $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ — не пустые. Тогда, в силу сделанного выше замечания, для любых трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго выполняются условия (3.29). Принимая во внимание (3.21), мы можем утверждать, что для различных α, обладающих перечисленными свойствами, соответствующие множества $E_\alpha - E_{\alpha-1}$ не имеют общих точек и лежат на сегменте $[a, b]$. Тогда, так как существует несчетное множество трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго и так как для

* В предыдущих рассуждениях мы все время предполагали, что $\alpha > 0$ — трансфинитное число класса не выше второго и что для любого $\beta < \alpha$ выполняются условия 1°, 2° и 3°.

всех таких трансфинитных чисел выполняются условия (3.29), то мы имеем на сегменте $[a, b]$ несчетное множество множеств положительной меры попарно без общих точек, что, как известно, невозможно.

Отсюда следует, что множества $\Omega(F_{\alpha-1}, E_{\alpha-1})$ не могут быть не пустыми для всех трансфинитных чисел $\alpha > 0$ первого рода и класса не выше второго, т. е. существует трансфинитное число $\gamma > 0$ первого рода и класса не выше второго, для которого соответствующее множество $\Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1})$ — пустое.

Докажем, что $F_{\gamma-1}(x)$ — максимальная предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\gamma-1}$ (см. определение 11, § 1). В самом деле, мы уже знаем, что для любого α класса не выше второго функция $F_\alpha(x)$ является предельной функцией ряда (1.1) на соответствующем множестве E_α. Следовательно, $F_{\gamma-1}(x)$ — предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\gamma-1}$. Если теперь $F_{\gamma-1}(x)$ не есть максимальная предельная функция этого ряда, то, в силу определения 11 (§ 1), существует функция $f(x, E')$, определенная почти всюду на множестве E' и такая, что $f(x, E') = F_{\gamma-1}(x)$ почти всюду на множестве $E_{\gamma-1}$, причем

$$E_{\gamma-1} \subset E' \subset [a, b], \quad \text{mes}(E' - E_{\gamma-1}) > 0,$$

а в таком случае на основании определения множеств $\Omega(\psi, e)$ [см. (3.2) и (3.3)] * будем иметь:

$$f(x, E') \in \Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1}),$$

т. е. множество $\Omega(F_{\gamma-1}, E_{\gamma-1})$ не будет пустым, что невозможно. Таким образом, $F_{\gamma-1}(x)$ — максимальная предельная функция ряда (1.1).

Из условия (3.21) и равенства (3.22), в которых полагаем $\beta' = 0$, $\alpha = \gamma - 1$, мы видим, что

$$E_0 \subset E_{\gamma-1}, \tag{3.33}$$

$$F_0(x) = F_{\gamma-1}(x) \tag{3.34}$$

почти всюду на множестве E_0, откуда, полагая $E_{\gamma-1} = H$, $F_{\gamma-1}(x) = \chi(x, H)$ и принимая во внимание (3.10), получаем соотношения (1.33) и (1.34). При этом, так как $F_{\gamma-1}(x)$ — максимальная предельная функция ряда (1.1) на множестве $E_{\gamma-1}$, то $\chi(x, H)$ — максимальная предельная функция того же ряда на H, а так как мы предположили, что $\varphi(x, E)$ — произвольная предельная функция ряда (1.1) на множестве E (см. начало § 3), то теорема VI (§ 1) доказана.

(Поступило в редакцию 28/X 1957 г.)

Литература

1. Д. Меньшов, О предельных функциях тригонометрического ряда, ДАН СССР, т. **114**, № **3** (1957), 476—478.
2. Д. Меньшов, О предельных функциях тригонометрического ряда, Труды Моск. матем. о-ва, т. **7** (1958), 291—334.
3. Д. Меньшов, О сходимости по мере тригонометрических рядов, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. **XXXII** (1950), 3—97.
4. Д. Меньшов, О пределах последовательностей частных сумм тригонометрических рядов, ДАН СССР, т. **106**, № **5** (1956), 777—780.
5. Д. Меньшов, О пределах неопределенности частных сумм универсальных тригонометрических рядов, Ученые Записки МГУ, т. **VII**, вып. **165**, математика (1954), 3—33.

* В условиях (3.2) и (3.3) мы берем $E_{\gamma-1}$, E', $f(x, E')$ и $F_{\gamma-1}(x)$ вместо e, e', $g(x, e')$ и $\psi(x, e)$.