Об одном свойстве одного класса интегралов Стильтьеса

Н. А. Давыдов (Калинин)

1. Пусть комплекснозначная функция $S(x)$ определена на множестве E неотрицательных действительных чисел, $\sup E = +\infty$; пусть, далее $\overline{G}$ — замкнутое выпуклое множество в комплексной плоскости (это может быть: 1) замкнутая выпуклая область, ограниченная или неограниченная, 2) прямая, 3) луч, 4) отрезок, 5) точка). Если $\bar{G}$ отлично от всей комплексной плоскости, то обозначим через $\bar{G}_\varepsilon$ замкнутую выпуклую область, которая содержит множество $\overline{G}$ и каждая точка границы которой отстоит от множества $\overline{G}$ на расстояние, меньшее или равное ε.

Определение 1. Множество $\overline{G}$, отличное от всей комплексной плоскости, мы будем называть (C)-множеством функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и такая последовательность отрезков $[\alpha_k; \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что

$$S(x) \in \overline{G}_\varepsilon \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1}, \quad \frac{\beta_k}{\alpha_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если, в частности, (C)-множеством функции $S(x)$ является точка, то эту точку будем называть (C)-точкой этой функции.

Определение 2. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы будем называть (C)-точкой функции $S(x)$, если найдутся число $\lambda > 1$, последовательность отрезков $[\alpha_k; \beta_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств $\overline{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, стягивающихся * к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$S(x) \in \overline{G}_k \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1}, \quad \frac{\beta_k}{\alpha_k} \geqslant \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В работе [1] мы доказали одно важное свойство методов Чезаро суммирования рядов. Оно состоит в том, что если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

суммируется к числу S каким-нибудь методом Чезаро (каким-нибудь $(c; p)$-методом) и если множество $\overline{G}$ является (C)-множеством последовательности $\{S_n\}$ частных сумм этого ряда, то $S \in \overline{G}$.

* Мы говорим, что множества $\overline{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ стягиваются к бесконечно удаленной точке, если расстояние от точки $z = 0$ до множества $\overline{G}_k$ стремится к ∞ при $k \to \infty$.

Из доказательства этого свойства легко следует также утверждение, что если бесконечно удаленная точка является (C)-точкой последовательности $\{S_n\}$, то средние Чезаро любого порядка для этой последовательности неограничены.

Из этого свойства мы получили в той же работе целый ряд теорем тауберова типа, обобщающих известные теоремы Г. Харди, Г. Харди и Дж. Литтельвуда, Э. Ландау, Р. Шмидта и М. А. Евграфова.

В настоящей работе мы докажем одно свойство одного класса интегралов Стильтьеса, из которого, в качестве его частных случаев, мы вновь получим сформулированное выше свойство методов Чезаро суммирования рядов и, кроме того, получим одно свойство методов Чезаро суммирования интегралов Лебега, аналогичное одному свойству методов Чезаро суммирования рядов. Это, в свою очередь, позволит теоремы тауберова типа, доказанные в работе [1] для рядов, суммируемых методами Чезаро, перенести на интегралы Лебега, суммируемые теми же методами.

2. Пусть $\alpha(t)$ — неубывающая функция, определенная в промежутке $[0; +\infty)$, $\alpha(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty$, $A(x)$ — комплекснозначная функция, непрерывная в том же промежутке $[0; +\infty)$, и пусть

$$A^{(p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^x (x-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t), \tag{2}$$

$$B^{(p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^x (x-t)^{p-1}d\alpha(t), \tag{3}$$

$$\sigma^{*(p)}(x)=\frac{A^{(p)}(x)}{B^{(p)}(x)}\quad (p=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Определение 1. Выпуклое множество $\overline{G}$, отличное от всей комплексной плоскости, мы назовем $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такая последовательность отрезков $\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, что

$$A(x)\in\overline{G}_\varepsilon \text{ для } \alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k<\alpha_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty, \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}<+\infty, \tag{6}$$

где

$$h_k=\frac{\beta_k-\alpha_k}{p},\qquad Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)=\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(\alpha_k+mh_k),$$

$B^{(p)}(x)$ определяется по формуле (3).

В частности, если $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$ является точка, то эту точку будем называть $(\alpha(t);\ p)$-точкой этой функции.

Определение 2. Бесконечно удаленную точку комплексной плоскости мы назовем $(\alpha(t);\ p)$-точкой функции $A(x)$, если можно указать последовательность отрезков $[\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, а также последовательность замкнутых выпуклых множеств $\bar{G}_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что

$$A(x)\in\bar{G}_k \text{ для } \alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k<\alpha_{k+1}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{k\to\infty}\alpha_k=+\infty, \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}<+\infty, \tag{8}$$

где h_k, $Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)$ и $B^{(p)}(x)$ — те же, что и в определении 1.

Естественно всю комплексную плоскость считать $(\alpha(t);\ p)$-множеством всякой функции $A(x)$.

Справедлива следующая

Основная теорема. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma^{*(p)}(x)=S$ *и если множество* $\bar{G}$ *является* $(\alpha(t);\ p)$*-множеством функции* $A(x)$, *то* $S\in\bar{G}$.

Если бесконечно удаленная точка является $(\alpha(t);\ p)$*-точкой функции* $A(x)$, *то*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|\sigma^{*(p)}(x)|=\infty.$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся три леммы.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$\left|\frac{\dfrac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum\limits_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}(t-x-\mu h)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)}{Q^{(p)}(x;\ h)}-C\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{0\leqslant m\leqslant p}|\sigma^{*(p)}(x+mh)-C|\,\frac{P^{(p)}(x;\ h)}{Q^{(p)}(x;\ h)}, \tag{9}$$

где

$$P^{(p)}(x;\ h)=\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh),$$

$$Q^{(p)}(x;\ h)=\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh),$$

$x\geqslant 0$, $h=\dfrac{y-x}{p}>0$, C — *произвольное комплексное число*, p — *натуральное число*, $B^{(p)}(x)$ *и* $\sigma^{*(p)}(x)$ *определяются соответственно по формулам* (3) *и* (4).

Доказательство. Имеем:

$$A^{(p)}(x+mh)=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)=$$

$$=\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)+$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)=$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_0^x \sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p-1}{\nu}(x-t)^{p-1-\nu}(mh)^\nu A(t)\,d\alpha(t) +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) + \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t).$$

Таким образом,

$$A^{(p)}(x+mh) = \sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) + \frac{1}{(p-1)!}\int\limits_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t). \tag{10}$$

Рассмотрим выражение

$$C^{(p)}(x;\ h) = \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh)\,[\sigma^{*(p)}(x+mh)-C]. \tag{11}$$

Используя равенство (10), получим:

$$C^{(p)}(x;\ h) = \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}A^{(p)}(x+mh) -$$

$$-C\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) +$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_x^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t) -$$

$$-CQ^{(p)}(x;\ h).$$

Так как выражение

$$\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x)$$

есть многочлен относительно m степени $p-1$, то

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\sum_{\nu=0}^{p-1}\frac{(mh)^\nu}{\nu!}A^{(p-\nu)}(x) = 0.$$

Следовательно,

$$C^{(p)}(x;\ h)=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)-$$

$$-CQ^{(p)}(x;\ h). \tag{12}$$

Далее имеем:

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)=$$

$$=\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\Big[(-1)^{p-m}\binom{p}{m}(x+mh-t)^{p-1}+$$

$$+(-1)^{p-m-1}\binom{p}{m+1}(x+(m+1)h-t)^{p-1}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-p}\binom{p}{p}(x+ph-t)^{p-1}\Big]A(t)\,d\alpha(t)=$$

$$=\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\nu=0}^{p-m}(-1)^{\nu}\binom{p}{\nu}[x-t+(p-\nu)t]^{p-1}A(t)\,d\alpha(t).$$

Из тождества ([2], стр. 282)

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{\nu}\binom{p}{\nu}(x'+p-\nu h)^{p-1}\equiv 0$$

при $x'=x-t+ph$ получим:

$$\sum_{\nu=0}^{p-m}(-1)^{\nu}\binom{p}{\nu}[x-t+(p-\nu)h]^{p-1}=$$

$$=-\sum_{\nu=p-m+1}^{p}(-1)^{\nu}\binom{p}{\nu}[x-t+(p-\nu)h]^{p-1}=$$

$$=-\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{p-\mu}\binom{p}{p-\mu}[x-t+\mu h]^{p-1}=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}[t-x-\mu h]^{p-1},$$

и равенство (12) примет вид:

$$C^{(p)}(x;\ h)=\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}[t-x-\mu h]^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)-$$

$$-CQ^{(p)}(x;\ h). \tag{13}$$

Из (11) имеем:

$$|C^{(p)}(x;\ h)| \leqslant \sum_{m=0}^{p} \binom{p}{m} B^{(p)}(x+mh)\,|\sigma^{*(p)}(x+mh)-C| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(x+mh)-C|\, P^{(p)}(x;\ h).$$

Отсюда и из (13) получаем *:

$$\left|\frac{\dfrac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum\limits_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t)}{Q^{(p)}(x;\ h)}-C\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p}|\sigma^{*(p)}(x+mh)-C|\,\frac{P^{(p)}(x;\ h)}{Q^{(p)}(x;\ h)}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}d\alpha(t) = Q^{(p)}(x;\ h). \tag{14}$$

Доказательство. Выше было показано (см. (12) и (13)), что

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t).$$

Отсюда при $A(t)\equiv 1$ имеем:

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{x+(m-1)h}^{x+mh}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}d\alpha(t) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{x}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\left[\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x+mh}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t) -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{(p-1)!}\int\limits_{0}^{x}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t)\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}B^{(p)}(x+mh) -$$

$$-\frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int\limits_{0}^{x}(x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t) = Q^{(p)}(x;\ h),$$

* Ниже будет доказано, что $Q^{(p)}(x;\ h)>0$, если $\alpha(t)\not\equiv C$ для $x<t<x+ph$.

так как

$$\sum_{m=0}^{p}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}\int_0^x (x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t)=0,$$

в силу того, что интеграл $\int_0^x (x+mh-t)^{p-1}d\alpha(t)$ есть многочлен относительно m степени $p-1$.

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}\geqslant 0 \tag{15}$$

для $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ x+(m-1)h\leqslant t\leqslant x+mh,$ *где* $x\geqslant 0,\ h>0$ p — *натуральное число, причем неравенство* (15) *обращается в равенство только при* $t=x$ *и* $t=x+ph$, *когда* $p>1$.

Доказательство. Вводя обозначение

$$D_{m,t'}^{(p)}=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t'-\mu)^{p-1},$$

где $m-1\leqslant t'\leqslant m$, получаем:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{p}{\mu}(t-x-\mu h)^{p-1}=h^{p-1}D_{m,t'}^{(p)}.$$

Чтобы доказать неравенство (15), достаточно доказать, что

$$D_{m,t'}^{(p)}\geqslant 0 \tag{16}$$

для $m=1,\ 2,\ \ldots,\ p$ и $m-1\leqslant t'\leqslant m$, причем неравенство (16) обращается в равенство только при $t'=0$ и $t'=p$, когда $p>1$.

Неравенство (16) верно для $p=1$, 2 и 3. Предположим, что оно верно для $p=n$, и докажем справедливость его для $p=n+1$.

Имеем:

$$D_{m,t'}^{(n+1)}-t'D_{m,t'}^{(n)}=\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(t'-\mu)^{n-1}\left[\frac{n+1}{n-\mu+1}(t'-\mu)-t'\right]=$$

$$=(t'-n-1)\sum_{\mu=1}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu-1}(t'-\mu)^{n-1}=$$

$$=(n+1-t')\sum_{\mu=0}^{m-2}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(t'-1-\mu)^{n-1}=$$

$$=(n+1-t')\sum_{\mu=0}^{m-2}(-1)^{\mu}\binom{n}{\mu}(t''-\mu)^{n-1}=$$

$$=(n+1-t')D_{m-1,t''}^{(n)},$$

где $m-2 \leqslant t'' \leqslant m-1$. Следовательно,

$$D_{m,t'}^{(n+1)} = t' D_{m,t'}^{(n)} + (n+1-t') D_{m-1,t''}^{(n)}. \tag{17}$$

Так как

$$D_{1,t'}^{(n+1)} = (t')^{n+1} \geqslant 0,$$

$$D_{n+1,t'}^{(n+1)} = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \binom{n+1}{\mu} (t'-\mu)^n =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n+1} (-1)^{\mu} \binom{n+1}{\mu} (t'-\mu)^n -$$

$$-(-1)^{n+1} [t'-n-1]^n = (n+1-t')^n \geqslant 0,$$

причем $D_{1,t'}^{(n+1)} = 0$ только при $t'=0$, а $D_{n+1,t'}^{(n+1)} = 0$ только при $t'=n+1$, то из равенства (17) вытекает, что $D_{m,t'}^{(n+1)} \geqslant 0$ для $m=1, 2, \ldots, n+1$ и $m-1 \leqslant t' \leqslant m$, причем $D_{m,t'}^{(n+1)} = 0$ только при $m=1$ в точке $t'=0$ и при $m=n+1$ в точке $t'=n+1$. Неравенство (16) доказано. Этим доказано и неравенство (15).

Замечание. Из равенства (14) и неравенства (15) следует, что $Q^{(p)}(x;\ h) > 0$ для $x \geqslant 0$ и $h > 0$, если $\alpha(t) \not\equiv C$ для $x < t < x+ph$.

Доказательство основной теоремы. Предположим, что множество $\overline{G}$ является $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$, непрерывной на полуотрезке $[0;\ +\infty)$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется последовательность отрезков $[\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k=1, 2, \ldots)$, такая что

$$A(x) \in \overline{G}_{\varepsilon} \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1} \ (k=1, 2, \ldots),\ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty, \tag{18}$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} < +\infty. \tag{19}$$

Из неравенства (9) при $C=S$, $x=\alpha_k$, $h=h_k=\dfrac{\beta_k-\alpha_k}{p}$ имеем:

$$\left| \frac{\dfrac{1}{(p-1)!} \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \int_{\alpha_k+(m-1)h_k}^{\alpha_k+mh_k} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} (t-\alpha_k-\mu h_k)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} - S \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} | \sigma^{*(p)}(\alpha_k+mh_k) - S | \frac{P^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} | \sigma^{*(p)}(\alpha_k+mh_k) - S | \frac{2^p B^p(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}.$$

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$, то из последнего неравенства, в силу условия (19), следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(p-1)!} \displaystyle\sum_{m=1}^{p} \int_{\alpha_k+(m-1)h_k}^{\alpha_k+mh_k} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} (t-\alpha_k-\mu h_k)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} = S. \tag{20}$$

В силу лемм 2 и 3, условия (18), а также в силу выпуклости множества $\overline{G}_\varepsilon$, можем утверждать, что число, стоящее под знаком предела в равенстве (20), принадлежит области $\overline{G}_\varepsilon$ для всех $k=1, 2, \ldots$. Отсюда $S \in \overline{G}_\varepsilon$. Так как $\overline{G}$ — замкнутое множество и ε сколь угодно мало, то $S \in \overline{G}$. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что бесконечно удаленная точка является $(\alpha(t);\ p)$-точкой функции $A(x)$. Тогда найдется последовательность отрезков $[\alpha_k;\ \beta_k]$ $(k=1, 2, \ldots)$ и последовательность $\{G_k\}$ замкнутых выпуклых множеств, стягивающихся к бесконечно удаленной точке комплексной плоскости, такие, что

$$A(x) \in \overline{G}_k \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta_k < \alpha_{k+1} \quad (k=1, 2, \ldots),\ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty, \tag{21}$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} < +\infty.$$

Из неравенства (9) при $x=\alpha_k$, $h=h_k=\frac{\beta_k-\alpha_k}{p}$, $C=0$ получим:

$$\left|\frac{1}{(p-1)!\ Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{\alpha_k+(m-1)h_k}^{\alpha_k+mh_k} \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^\mu \binom{p}{\mu} (t-\alpha_k-\mu h_k)^{p-1} A(t)\, d\alpha(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(\alpha_k+mh_k)| \frac{P^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)}.$$

В силу лемм 2 и 3 и условия (21), а также в силу выпуклости множества $\overline{G}_k$, можем утверждать, что число, стоящее под знаком модуля в левой части последнего неравенства, принадлежит множеству $\overline{G}_k$ для всех $k=1, 2, \ldots$. Так как расстояние точки $z=0$ до множества $\overline{G}_k$ стремится к бесконечности при $k\to\infty$, то из последнего неравенства заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0\leqslant m\leqslant p} |\sigma^{*(p)}(\alpha_k+mh_k)| = \infty.$$

Основная теорема доказана полностью.

Отметим непосредственные следствия основной теоремы.

Следствие 1. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$ *и если точка* A *является* $(\alpha(t);\ p)$*-точкой функции* $A(x)$, *то* $S=A$.

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$, *то для сходимости последовательности* $\{A(x_k)\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$, *достаточно, чтобы каждая предельная точка этой последовательности была* $(\alpha(t);\ p)$*-точкой функции* $A(x)$.

Следствие 3. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = S$ *и если* $A(x) \in \overline{G}$ *для* $\alpha_k \leqslant x \leqslant \beta'_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty$ *и* $S \bar{\in} \overline{G}$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{B^{(p)}(\beta'_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} = +\infty,$$

где

$$h_k = \frac{\beta'_k - \alpha_k}{p}.$$

В самом деле, допустим, что найдется подпоследовательность отрезков $[\alpha_{k_\nu}; \beta'_{k_\nu}]$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), для которой

$$\frac{B^{(p)}(\beta'_{k_\nu})}{Q^{(p)}(\alpha_{k_\nu}; h_{k_\nu})} < C < +\infty.$$

Тогда множество $\overline{G}$ будет $(\alpha(t); p)$-множеством функции $A(x)$ и по основной теореме $S \in \overline{G}$. А это противоречит одному из условий следствия 3.

3. Пусть $a(t)$ — комплекснозначная функция, интегрируемая по Лебегу на каждом конечном отрезке $[0; x]$, и пусть

$$S(x) = S^{(0)}(x) = \int_0^x a(t)\,dt, \tag{22}$$

$$S^{(p)}(x) = \int_0^x S^{(p-1)}(t)\,dt, \tag{23}$$

$$\sigma^{(p)}(x) = \frac{p!}{x^p} S^{(p)}(x) \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} \sigma^{(p)}(x) = S$, то говорят ([3], стр. 143), что интеграл (22) суммируется к числу S методом Чезаро порядка p или $(c; p)$-методом.

Известно ([3], стр. 143), что

$$S^{(p)}(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t)\,dt.$$

Это равенство подсказывает распространение определения суммируемости интеграла (22) на нецелые p. Говорят, что интеграл (22) суммируется к числу S $(c; p)$-методом, $p \geqslant 0$, если

$$\sigma^{(p)}(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{x^p} S^{(p)}(x) = \frac{p}{x^p} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t)\,dt$$

стремится к S при $x \to +\infty$.

Одно свойство методов Чезаро суммирования интегралов Лебега (22) выражается следующим предложением.

Теорема. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c; p)$*-методом и если множество* $\overline{G}$ *является* (C)*-множеством этого интеграла, то* $S \in \overline{G}$. *Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является* (C)*-точкой интеграла* (22), *то*

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |\sigma^{(p)}(x)| = \infty \text{ для каждого } p,\ p \geqslant 0.$$

Доказательство. Положим в основной теореме п. 2

$$\alpha(t) = t, \quad A(x) = S(x) = \int_0^x a(t)\,dt.$$

Тогда для натурального p будем иметь:

$$A^{(p)}(x) = S^{(p)}(x), \quad B^{(p)}(x) = \frac{x^p}{p!}, \quad \sigma^{*(p)}(x) = \sigma^{(p)}(x),$$

$$Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} B^{(p)}(\alpha_k + mh_k) =$$

$$= \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} \frac{(\alpha_k + mh_k)^p}{p!} = h_k^p,$$

$$\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} = \frac{\frac{1}{p!}\beta_k^p}{h_k^p} = \frac{1}{p!}\left(\frac{\beta_k}{\frac{\beta_k - \alpha_k}{p}}\right)^p = \frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{1 - \frac{\alpha_k}{\beta_k}}\right)^p.$$

Если $\frac{\beta_k}{\alpha_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k;\ h_k)} < C < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, если множество $\overline{G}$ является (C)-множеством интеграла (22), то это множество будет $(t;\ p)$-множеством этого интеграла при любом натуральном p.

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости является (C)-точкой интеграла (22), то она будет $(t;\ p)$-точкой этого интеграла при любом натуральном p.

Доказываемая теорема теперь следует из основной теоремы п. 2, если заметить, что, в силу известного предложения ([3], стр. 144, строка 10 снизу), ее достаточно доказать для всех натуральных p.

Отметим непосредственные следствия теоремы настоящего пункта.

Следствие 1. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *какимнибудь* $(c;\ p)$*-методом и если точка* A *является* (C)*-точкой этого интеграла, то* $S = A$.

Следствие. 2. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *какимнибудь* $(c;\ p)$*-методом, то для сходимости последовательности* $\{S(x_k)\}$ $(x_k \to +\infty$ *при* $k \to \infty)$ *достаточно, чтобы каждая предельная точка этой последовательности была* (C)*-точкой интеграла* (22).

Следствие 3. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *какимнибудь* $(c;\ p)$*-методом и если*

$$S(x) \in \bar{G} \text{ для } \alpha_k \leqslant x \leqslant \beta'_k \ (k=1,\ 2,\ \ldots),\ \lim_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty,$$

а $S \bar{\in} \bar{G}$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\beta'_k}{\alpha_k} = 1.$

Доказательство следствия 3 легко проводится методом рассуждения от противного. В самом деле, допустим, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\beta'_k}{\alpha_k} = \lambda > 1.$$

Тогда найдется такая подпоследовательность $\left\{\frac{\beta'_{k_\nu}}{\alpha_{k_\nu}}\right\}$, что $\frac{\beta'_{k_\nu}}{\alpha_{k_\nu}} \geqslant \lambda_1 > 1$ для $\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 1 < \lambda_1 < \lambda$. Множество $\bar{G}$ будет (C)-множеством интеграла (22), и по теореме настоящего пункта число $S \in \bar{G}$, что противоречит одному из условий следствия 3.

Следствие 4. *Пусть даны число* $\lambda > 1$ *и последовательность действительных положительных чисел* $\{x_k\}$, $\frac{x_{k+1}}{x_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$. *Если интеграл* (22), *в котором* $a(t)$ — *действительная функция, суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом, то найдется такая последовательность* $\{x'_k\}$, *что* $x_k \leqslant x'_k \leqslant x_{k+1}$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$ *и*

$$\lim_{k\to\infty} S(x'_k) = S.$$

Это следствие также легко доказывается методом рассуждения от противного.

4. Из теоремы п. 3 вытекает целый ряд теорем тауберова типа для интеграла (22), суммируемого $(c;\ p)$-методами. Эти теоремы обобщают известные теоремы и являются аналогами соответствующих теорем тауберова типа для рядов, суммируемых $(c;\ p)$-методами ([1], стр. 518—519).

Теорема 1. *Пусть дан интеграл* (22) *и пусть*

$$a(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

для $x_k \leqslant t \leqslant y_k < x_{k+1}$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$. *Если этот интеграл суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$*-методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} S(x'_k) = S,$$

где $x_k \leqslant x'_k \leqslant y_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots)$. *Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S(x_k)| = \infty$, *то* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |\sigma^{(p)}(x)| = \infty$ *для каждого* p, $p \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть дан интеграл* (22), *в котором* $a(t)$ — *действительная функция, и пусть*

$$a(t) > -\frac{c}{t} \quad (c = \text{const} > 0)$$

для $x_k \leqslant t \leqslant y_k < x_{k+1}$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Если этот интеграл суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$-*методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} S(x'_k) = S,$$

где $(1+\varepsilon)x_k \leqslant x'_k \leqslant (1-\varepsilon)y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ε — *произвольно малое положительное число. Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S(x'_k)| = \infty$, *то* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|\sigma^{(p)}(x)| = \infty$ *для каждого* p, $p \geqslant 0$.

Теорема 3. *Если интеграл* (22) *суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$-*методом и* $\{x_k\}$ — *заданная последовательность положительных чисел стремящаяся к бесконечности, и если* $\lim\limits_{k\to\infty}(S(y_k) - S(x_k)) = 0$ *для всякой последовательности* $\{y_k\}$, *для которой*

$$1 < \frac{y_k}{x_k} \to 1 \text{ при } k \to \infty,$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = S$.

Теорема 4. *Пусть*:

а) *интеграл* (22), *в котором* $a(t)$ — *действительная функция, суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c;\ p)$-*методом*, $\{x_k\}$ — *заданная последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности*;

б) $$\underline{\lim_{k\to\infty}}(S(y_k) - S(x_k)) \geqslant 0$$

для всякой последовательности $\{y_k\}$, *для которой*

$$1 < \frac{y_k}{x_k} \to 1 \text{ при } k \to \infty;$$

в) $$\underline{\lim_{k\to\infty}}(S(x_k) - S(y'_k)) \geqslant 0$$

для всякой последовательности $\{y'_k\}$, *для которой*

$$1 < \frac{x_k}{y'_k} \to 1 \text{ при } k \to \infty.$$

Тогда из а) *и* б) *следует, что*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} S(x_k) \leqslant S;$$

из а) *и* в) *следует, что*

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} S(x_k) \geqslant S;$$

из а), б) *и* в) *следует, что* $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = S$.

Теорема 5. *Пусть дан интеграл* (22), $\{x_k\}$ — *заданная последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, и пусть множество точек* $a(t)$* *для* $x_k \leqslant t \leqslant y_k$, $\frac{y_k}{x_k} \geqslant \lambda > 1$ *попадает внутрь угла с вершиной в начале координат и раствора*

$$\alpha_k, \ \alpha_k \leqslant \alpha < \pi \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если этот интеграл суммируется к числу S *каким-нибудь* (c; p)-*методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} S(x'_k) = S,$$

где $(1+\varepsilon)x_k \leqslant x'_k \leqslant (1-\varepsilon)y_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ε — *произвольно малое положительное число. Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S(x'_k)| = \infty$, *то* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} |\sigma^{(p)}(x)| = \infty$ *для каждого* $p \geqslant 0$.

Доказательство теорем 1 — 5 легко проводится методом рассуждения от противного с использованием теоремы п. 3 и ее следствий 1 — 3.

5. С помощью основной теоремы п. 2 докажем теперь одно свойство методов Чезаро суммирования рядов, сформулированное в п. 1.

Положим в основной теореме п. 2 $\alpha(t) = n$ для $n \leqslant t < n+1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Пусть $A(n) = S_n$, где S_n — частные суммы ряда (1), и $A(x)$ линейна на каждом отрезке $[n; n+1]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если ряд (1) суммируется к числи S (c; p)-методом (p-натуральное число), то

$$\lim_{x\to+\infty} \sigma^{*(p)}(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{A^{(p)}(x)}{B^{(p)}(x)} = S.$$

Имеем далее ([4], стр. 205, теорема 3):

$$B^{(p)}(n_k + mh_k) = \frac{1}{(p-1)!} \int\limits_0^{n_k+mh_k} (n_k + mh_k - t)^{p-1} d\alpha(t) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=1}^{n_k+mh_k} (n_k + mh_k - \nu)^{p-1} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{\nu=1}^{n_k+mh_k-1} \nu^{p-1},$$

* Точки этого множества могут попадать и в начало координат.

где $h_k = \left[\frac{m_k - n_k}{p}\right]$. Так как ([5] стр. 15, формула 0.121)

$$\sum_{\nu=1}^{n_k+mh_k-1} \nu^{p-1} = \frac{(n_k + mh_k - 1)^p}{p} + \Pi_{p-1}(n_k + mh_k - 1),$$

где $\Pi_{p-1}(x)$ — многочлен степени $p-1$, то

$$B^{(p)}(n_k + mh_k) = \frac{(n_k + mh_k - 1)^p}{p!} + \frac{1}{(p-1)!}\Pi_{p-1}(n_k + mh_k - 1).$$

Следовательно,

$$Q^{(p)}(n_k;\ h_k) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m}\binom{p}{m} B^{(p)}(n_k + mh_k) = h_k^p$$

и

$$\frac{B^{(p)}(m_k)}{Q^{(p)}(n_k;\ h_k)} = \frac{1}{p!}\left(\frac{m_k - 1}{h_k}\right)^p + \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\Pi_{p-1}(m_k - 1)}{h_k^p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p^p}{p!}\left(\frac{1}{1 - \frac{n_k}{m_k} - \frac{p}{m_k}}\right)^p + \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{\Pi_{p-1}(m_k - 1)}{h_k^p}.$$

Если $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\Pi_{p-1}(m_k - 1)}{h_k^p} = 0$ и $\frac{B^{(p)}(m_k)}{Q^{(p)}(n_k;\ h_k)} <$ $< C < +\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом, если множество $\bar{G}$ является (C)-множеством последовательности $\{S_n\}$, то это множество будет $(\alpha(t);\ p)$-множеством функции $A(x)$ при любом натуральном p.

Если бесконечно удаленная точка комплексной плоскости будет (C)-точкой последовательности $\{S_n\}$, то она будет и $(\alpha(t);\ p)$-точкой функции $A(x)$ при любом натуральном p.

Одно свойство методов Чезаро суммирования рядов следует теперь из основной теоремы п. 2, если заметить, что, в силу предложения Чэпмена ([3], стр. 131, теорема 43), одно свойство методов Чезаро достаточно доказать для всех натуральных p.

С помощью одного свойства методов Чезаро в работе [1], как это мы уже отмечали в п. 1, получен целый ряд теорем тауберова типа для рядов, суммируемых $(c;\ p)$-методами. Здесь мы заметим, что теорему 6 п. 3 этой работы можно несколько усилить. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть дан ряд* (1) *и пусть точки* a_n *для* $n_k < n \leqslant$ $\leqslant m_k < n_{k+1}$, $\frac{m_k}{n_k} \geqslant \lambda > 1$ *попадают внутрь угла* (*или в его вершину*) *с* *вершиной в начале координат и раствора* α_k, $\alpha_k \leqslant \alpha < \pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Если этот ряд суммируется к числу* S *каким-нибудь* $(c; p)$*-методом, то*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{p_k} a_\nu = S,$$

где $(1+\varepsilon) n_k \leqslant p_k \leqslant (1-\varepsilon) m_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, ε *— произвольно малое положительное число. Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left|\sum\limits_{\nu=0}^{p_k} a_\nu\right| = \infty$, *то средние Чезаро любого порядка для последовательности* $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *неограничены.*

Мы приведем здесь доказательство этой теоремы. По образцу этого доказательства проводятся и доказательства теорем 1 — 5 п. 4. Обозначим через $S_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ частные суммы ряда (1).

Пусть точки a_n для $n_k < n \leqslant m_k < n_{k+1}$ попадают внутрь угла A_kOB_k (или в его вершину) раствора α_k, $\alpha_k \leqslant \alpha < \pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Допустим, что последовательность $\{S_{p_k}\}$ расходится. Пусть C — предельная точка последовательности $\{S_{p_k}\}$, $C \neq S$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{p_{k_\nu}} = C$. Возьмем луч OA, предельный для лучей OA_{k_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Пусть этот луч OA является пределом последовательности лучей $OA_{k_{\nu_i}}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Рассмотрим подпоследовательность $\{S_{p_{k_{\nu_i}}}\}$, которую ради простоты записи будем обозначать через $\{S_{p_{k_\nu}}\}$. Можем считать, что все углы $A_{k_\nu}OB_{k_\nu}$ попадают внутрь угла $A^{(1)}OB^{(1)}$ раствора $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(1)} < \pi$. Без ограничения общности, можем считать далее, что угол $A^{(1)}OB^{(1)}$ находится в верхней полуплоскости и что стороны его образуют с осью x-ов углы, соответственно равные $\frac{1}{2}(\pi - \alpha^{(1)})$ и $\frac{1}{2}(\pi + \alpha^{(1)})$.

Здесь рассмотрим три случая:

$$1)\ \mathfrak{J}C \geqslant \mathfrak{J}S, \quad 2)\ \mathfrak{J}C < \mathfrak{J}S, \quad 3)\ C = \infty.$$

Случай 1. Можем считать, что все $S_{p_{k_\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ лежат в δ-окрестности точки C, не содержащей точки S. Из условия теоремы следует, что все $S_{p_{k_\nu}+i}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, m_{k_\nu} - p_{k_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ лежат внутри угла раствора $\alpha^{(1)}$, содержащего δ-окрестность точки C и не содержащего точки S. Так как $\frac{m_{k_\nu}}{p_{k_\nu}} \geqslant \frac{1}{1-\varepsilon} > 1$ для $\nu = 1, 2, \ldots$, то, в силу одного свойства методов Чезаро, этому углу должна принадлежать и точка S. Получили противоречие.

Случай 2. Пусть $\mathfrak{J}C < \mathfrak{J}S$. Возьмем полуплоскость $\mathfrak{J}z \leqslant \mathfrak{J}C + \delta < \mathfrak{J}S$, $\delta > 0$. Можем считать, что все $S_{p_{k_\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ принадлежат этой полуплоскости. Из условия теоремы следует, что этой же полуплоскости принадлежат и все $S_{n_{k_\nu}+i}$ для $i=0, 1, 2, \ldots, p_{k_\nu}-n_{k_\nu}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$.

Так как $\frac{p_{k_\nu}}{n_{k_\nu}}\geqslant 1+\varepsilon$, то, в силу одного свойства методов Чезаро, полуплоскости $\mathfrak{J}z\leqslant\mathfrak{J}C+\delta$ должна принадлежать и точка S. Получили противоречие.

Случай 3. Нетрудно показать, что если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|S_{p_k}|=\infty$, то бесконечно удаленная точка будет (C)-точкой последовательности $\{S_n\}$ и, следовательно, в силу одного свойства методов Чезаро, средние Чезаро любого порядка для последовательности $\{S_n\}$ неограничены. Таким образом, случай 3 также приводит к противоречию. Этим теорема доказана полностью.

6. Из основной теоремы п. 2 при $p=1$,

$$\alpha(t)=p_0+p_1+\ldots+p_n \text{ для } n\leqslant t<n+1 \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$\alpha(t)=p_0 \text{ для } 0<t<1, \quad \alpha(0)=0, \quad p_0>0, \ p_n\geqslant 0, \sum_{n=0}^{\infty}p_n=\infty,$$

$$A(n)=S_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

где S_n — частные суммы ряда (1), $A(x)$ — линейная функция на каждом отрезке $[n;\ n+1]$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, мы получаем одно свойство $(\overline{R};\ p_n)$-методов суммирования рядов, отмеченное нами в работе [1] (стр. 521 — 523).

7. Пусть дана последовательность $\{S_n\}$ и пусть она суммируется каким-нибудь методом к числу S. Возникает следующий вопрос: каким условиям (необходимым, нетривиальным достаточным, необходимым и достаточным) должна удовлетворять последовательность $\{\nu_k\}$, чтобы по подпоследовательности $\{S_{\nu_k}\}$ можно было восстановить число S? Результаты п. п. 2 и 5 дают нам нетривиальные достаточные условия, налагаемые на ν_k, для того чтобы по подпоследовательности $\{S_{\nu_k}\}$ можно было восстановить число S, если к этому числу последовательность $\{S_n\}$ суммируется $(c;\ p)$-методом.

Действительно, если последовательность $\{S_n\}$ суммируется к числу S $(c;\ p)$-методом, то имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(p-1)!}\sum\limits_{m=1}^{p}\sum\limits_{\nu=1}^{h_k}\sum\limits_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{p-m}\binom{p}{m}[(m-1-\mu)h_k+\nu]^{p-1}S_{n_k+(m-1)h_k+\nu}}{h_k^p}=S,$$

где

$$h_k=\left[\frac{m_k-n_k}{p}\right], \quad \lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k}>1,$$

которое получается из равенства (20), если в нем функции $\alpha(t)$ и $A(x)$ определить так, как это сделано в п. 5.

Отсюда видим, что, для того чтобы число S можно было восстановить, достаточно располагать всеми теми членами последовательности $\{S_n\}$, индексы которых составляют какую-нибудь последовательность отрезков $[n_k;\ m_k]$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, для которой $\varliminf_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k} > 1$. Аналогичное замечание можно сделать и для интегралов.

(Поступило в редакцию 28/X 1957 г.)

Литература

1. Н. А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., **38** (80) (1956), 509—524.
2. В. А. Кречмар, Задачник по алгебре, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
3. Г. Харди, Расходящиеся ряды, Москвы, ИЛ, 1951.
4. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1950.
5. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1951.