О расщеплении некоторых смешанных абелевых групп

В. С. Журавский (Брест)

§ 1. Введение

Из работы Е. С. Ляпина [2] вытекает, что если смешанная абелева группа G расщепляема:

$$G = F \dotplus H,$$

то в каждом классе смежности группы G по ее периодической части F содержатся максимальные элементы. Возникает вопрос: для каких смешанных абелевых групп условие существования максимальных элементов в каждом классе смежности группы G по ее периодической части F является достаточным условием для расщепления G? Один класс таких групп определен критерием Е. С. Ляпина [1]. В настоящей работе дается обобщение критерия Е. С. Ляпина и излагаются другие достаточные критерии расщепления смешанных абелевых групп.

Условимся в дальнейшем рассматривать лишь абелевы группы; из смешанных абелевых групп будем рассматривать только такие группы G, для которых периодические части F являются редуцированными группами.

В дальнейшем нам понадобятся свойства некоторых специальных множеств натуральных чисел, получивших название характеристик.

Множество α натуральных чисел будем называть *характеристикой*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если натуральное число n принадлежит α, то и всякий делитель числа n принадлежит α;

2) если числа m и n содержатся в α, то и их наименьшее общее кратное $[m, n]$ тоже содержится в α.

Произведением характеристик $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ будем называть множество всевозможных чисел вида $n_1 n_2 \ldots n_k$, где $n_i \in \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Произведением $n\alpha$ *характеристики* α *на натуральное число* n будем называть множество всех чисел вида mr, где m пробегает все элементы характеристики α, а r — все делители числа n.

Говорят, что *характеристика* β *делит характеристику* α и пишут β/α, если существует такая характеристика γ, что $\alpha = \beta\gamma$. Можно доказать, что β/α тогда и только тогда, когда $\beta \subset \alpha$,

(1; 1). Для любого множества характеристик $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ существует единственная характеристика $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, являющаяся наибольшим общим делителем всех этих характеристик.

Такой характеристикой является пересечение характеристик $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Будем говорить, что класс смежности A группы G по некоторой ее подгруппе H делится на натуральное число n, а n является делителем A, если в G найдется такой элемент x, что $nx \in A$. Множество всех делителей класса смежности A условимся обозначать символом $\chi(A)$.

(1; 2). Теорема. *Множество $\chi(A)$ всех делителей класса смежности $A = g + H$ группы G по ее подгрупе H являэтся характеристикой.*

Характеристики классов смежности обладают следующими свойствами:

(1; 3). Если A и B — классы смежности группы G по некоторым ее подгруппам H_1 и H_2 и $A \subset B$, то $\chi(A)/\chi(B)$.

(1; 4). Если $g = a + b + c + \ldots$, то $(\chi(a), \chi(b), \chi(c), \ldots)/\chi(g)$.

(1; 5). Если группа G разложима в прямую сумму:

$$G = \dot{\sum} G_i,$$

и

$$g = g_1 + g_2 + \ldots,$$

где $g \in G$, $g_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то $\chi(g) = (\chi(g_1), \chi(g_2), \ldots)$.

(1; 6). Если $g \in G$ и n — любое натуральное число, то

$$n\chi(g)/\chi(ng).$$

(1; 7). Если G — группа без кручения, то всегда

$$n\chi(g) = \chi(ng).$$

(1; 8). Пусть H — подгруппа группы G и $G/H = \overline{G}$. Тогда для любого класса смежности $g + H = \overline{g}$, $g \in G$, $\overline{g} \in \overline{G}$, имеет место равенство

$$\chi_G(g + H) = \chi_{\overline{G}}(\overline{g}),$$

где значки G и $\overline{G}$ у χ указывают на то, что характеристики рассматриваются соответственно в группах G и $\overline{G}$.

Доказательства всех утверждений (1; 1) — (1; 8) можно найти в работе Е. С. Ляпина [2].

Элемент g класса смежности A будем называть максимальным в A, если $\chi(g) = \chi(A)$.

Иногда характеристику $\chi(A)$ класса смежности A будем задавать с помощью последовательности целых неотрицательных чисел по указанному ниже правилу.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ — последовательность всех простых чисел и A — класс смежности группы G по некоторой ее подгруппе. Поставим в соответствие классу смежности A последовательность целых неотрицательных чисел

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots),$$

где: $k_i = 0$, если A не делится на p_i; $k_i = m$, если A делится на p_i^m, но A не делится на p_i^{m+1}; и $k_i = \infty$, если A делится на p_i^l для любого натурального числа l. Тогда любой элемент n из $\chi(A)$ может быть записан в виде

$$n = \prod p_i^{\beta_i},$$

где $\beta_i \leqslant k_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и почти все показатели степеней равны нулю.

§ 2. Расщепление некоторых смешанных групп, фактор-группы по периодической части которых суть p-полные группы

Группу G будем называть p-полной по простому числу p, если каждый ее элемент делится на p. Очевидно, что всякая полная группа является p-полной по любому простому числу p.

Из определения p-полной группы следует, что каждый ее элемент делится на любое число вида p^m, где m — любое целое неотрицательное число.

Обозначим через M множество *всех простых чисел* $p_1, p_2, \ldots$, по каждому из которых рассматриваемая группа является p-полной. Тогда в характеристику каждого элемента этой группы входят все числа вида

$$n = \prod_{p_i \in M} p_i^{m_i}, \tag{1}$$

где показатели m_i принимают любые целые неотрицательные значения и для каждого n все они, кроме конечного числа, равны нулю.

(2; 1). Лемма. *Пусть группа G и ее подгруппа H удовлетворяют следующим условиям;*

1) *H сервантна в G;*

2) *если фактор-группа $G/H = \overline{G}$ является p-полной группой по каждому из простых чисел множества M, то в H только нуль делится на каждое число вида* (1);

3) *каждый класс смежности группы G по подгруппе H содержит максимальные элементы.*

Тогда подгруппа H выделяется из G прямым слагаемым.

Доказательство. По условию леммы любой элемент из $\overline{G}$ делится на каждое число вида (1), и всякий отличный от нуля элемент из H этим свойством в H не обладает. Пусть $\overline{g} \neq H$ — любой класс смежности группы G по подгруппе H, g — его максимальный элемент. Тогда, согласно (1; 8),

$$\chi_G(\overline{g}) = \chi_G(g + H) = \chi_G(g),$$

а это означает, что максимальный элемент g делится в G на любое число вида (1). Покажем теперь, что в $\overline{g}$ содержится лишь один максимальный элемент. Действительно, если бы элемент $g_1 \neq g$, $g_1 \in \overline{g}$, тоже был максимальным, то, ввиду сервантности H в G, элемент $g - g_1 = h \in H$ делился бы в H на любое число вида (1), что противоречит условию 2). Попутно мы установили, что в каждом классе смежности лишь маскимальный элемент делится на любое число вида (1).

Обозначим через G_1 множество всех максимальных элементов классов смежности вместе с нулем группы H. Если a и b — любые элементы из G_1, то из делимости их на любое число вида (1) следует, что этим свойством обладают и элементы $a+b$ и $a-b$, а так как в каждом классе смежности лишь максимальный элемент делится на любое число вида (1), то $a+b$ и $a-b$ суть максимальные элементы в тех классах смежности, которым они принадлежат, т. е. $a \pm b \in G_1$, поэтому G_1 — подгруппа группы G. Так как $\{H, G_1\} = G$ и $H \cap G_1 = 0$, то

$$G = H \dotplus G_1.$$

(2; 2). Теорема. *Пусть смешанная группа G удовлетворяет следующим условиям:*

1) *высоты отличных от нуля элементов в каждом примарном прямом слагаемом F_p периодической части F конечны;*

2) *фактор-группа $G/F=\overline{G}$ является p-полной группой по каждому простому числу из множества P тех простых чисел $p_1, p_2, \ldots$, по которым $F_p \neq 0$;*

3) *в каждом классе смежности группы G по подгруппе F содержатся максимальные элементы.*

Тогда группа G расщепляема.

Доказательство. Действительно, подгруппа F сервантна в G. Любой отличный от нуля элемент $f \in F$ делится не на всякое число вида $n=\prod\limits_{p_i \in P} p_i^{m_i}$. Если M — множество всех простых чисел $q_1, q_2, \ldots$, по каждому из которых группа $\overline{G}$ — q-полная, то $P \subset M$, поэтому f делится не на всякое число вида $n'=\prod\limits_{q_i \in M} q_i^{k_i}$. По лемме (2; 1) группа G расщепляема.

В частности, если во множестве M содержатся все простые числа, то из теоремы (2; 2) вытекает

(2; 3). Пусть смешанная группа G удовлетворяет следующим условиям:

1) любой элемент $f_p \neq 0$ каждого примарного прямого слагаемого F_p периодической части F имеет конечную высоту в F_p;

2) фактор-группа $G/F=\overline{G}$ является полной группой,

3) каждый класс смежности группы G по подгруппе F содержит максимальные элементы.

Тогда группа G расщепляема.

§ 3. Расщепление некоторых смешанных групп, фактор-группы которых по периодической части являются вполне разложимыми группами

Абелева группа G без кручения называется вполне разложимой, если она может быть разложена в *прямую сумму групп первого ранга.*

(3; 1). Теорема. *Пусть фактор-группа $G/F=\overline{G}$ смешанной группы G по ее периодической части F разлагается в прямую сумму некоторых групп:*

$$\overline{G}=\dot{\sum_{\alpha}}\overline{G}_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \ldots).$$

Обозначим через G_α подгруппу группы G, соответствующую $\overline{G}_\alpha$, такую, что $G_\alpha/F=\overline{G}_\alpha$. В этом случае G тогда и только тогда расщепляема, когда каждая подгруппа G_α расщепляема.

Доказательство. Действительно, если G расщепляема:

$$G=F \dot{+} H,$$

то $\overline{G}=G/F \simeq H$; поэтому для H можно написать: $H=\dot{\sum\limits_{\alpha}} H_\alpha$, где $\overline{G}_\alpha \simeq H_\alpha$, причем элементы подгруппы H_α являются представителями классов смежности группы G_α по подгруппе F. Так как $\{F, H_\alpha\}=G_\alpha$ и $F \cap H_\alpha=\{0\}$, то $G_\alpha=F \dot{+} H_\alpha$.

Пусть теперь каждая подгруппа G_α расщепляема: $G_\alpha = F \dotplus H_\alpha$. Тогда

$$\overline{G}_\alpha \simeq H_\alpha \text{ и } \overline{G} \simeq \dot{\sum_\alpha} H_\alpha.$$

Обозначим $\dot{\sum\limits_\alpha} H_\alpha$ через H. Очевидно, что $G = \{F, H\}$; пересечение же $F \cap H = 0$: если бы это пересечение содержало элемент $f \neq 0$, $f \in F$, $f \in H$, то из того, что $H = \dot{\sum\limits_\alpha} H_\alpha$, следовало бы равенство

$$\sum_\alpha h_\alpha = f, \tag{1}$$

где $h_\alpha \in H_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ и все h_α, кроме конечного их числа, равны нулю; равенство (1) в $\overline{G}$ запишется так:

$$\sum_\alpha \overline{h}_\alpha = 0,$$

что невозможно, ибо по указанному выше хотя бы одно слагаемое $\overline{h}_\alpha$ не равно нулю. Из того, что $\{F, H\} = G$ и $F \cap H = 0$, следует, что $G = F \dotplus H$.

По теореме (3; 1) изучение условий расщепляемости любой смешанной группы G, фактор-группа которой по ее периодической части F — вполне разложимая группа, сводится к изучению условий расщепляемости таких групп, у которых эта фактор-группа является группой первого ранга.

(3; 2). Пусть $A \neq F$ — какой-либо класс смежности группы G по ее периодической части F, содержащий максимальный элемент g. Пусть $r_0 = 1$, $r_1, r_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, входящих в характеристику $\chi(g)$, обладающая тем свойством, что числа последовательности наименьших общих кратных $[r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k] = n_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $n_0 = 1$, вместе с их делителями дают всю характеристику $\chi(g)$.

Положим

$$\frac{n_k}{n_{k-1}} = m_k.$$

(3; 3). Лемма. *Пусть фактор-группа $G/F = \overline{G}$ является группой первого ранга и в некотором классе смежности $A \neq F$ содержится максимальный элемент g, для которого можно построить последовательность элементов группы G*

$$g_1 = g, g_2, g_3 \ldots, \tag{2}$$

удовлетворяющую условиям:

$$\text{a) } g_k = m_k g_{k+1},$$

$$\text{b) } \chi(g)/n_k \chi(g_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда группа G расщепляема.

Доказательство. Построим группу $H = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ и докажем, что $G = F \dotplus H$.

$F \cap H = 0$, ибо если бы существовал элемент $f \neq 0$, принадлежащий как F, так и H, то из того, что $f \in H$, следовало бы равенство

$$f = k_1 g_{i_1} + k_2 g_{i_2} + \ldots + k_r g_{i_r}, \tag{3}$$

где g_{i_j} $(j=1, 2, \ldots, r)$ — элементы последовательности (2). Пусть в (3) i_r — наибольший из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Пользуясь условием a), равенство (3) можно переписать в виде

$$f = kg_{i_r} \text{ или } n_{i_r}f = kn_{i_r}g_{i_r} = kg_1.$$

Так как $f \in F$, то и $n_{i_r}f \in F$. Поскольку F сервантна в G, из равенства $kg_1 = n_{i_r}f$ следует, что $g_1 \in F$, а это противоречит условию леммы.

Возьмем любой элемент $c \in G$. Так как группа $\overline{G}$ — первого ранга, то можно указать такие взаимно простые числа m и n, что $m\overline{c} = n\overline{g}$. По (1; 7) и (1; 8) имеем:

$$m\chi_{\overline{G}}(\overline{c}) = n\chi_{\overline{G}}(\overline{g}) = n\chi_G(g);$$

но $(m, n) = 1$, поэтому $m \in \chi_G(g)$. По построению $\chi_G(g) = \chi_H(g)$; поэтому в H должен существовать такой элемент h, что $g = mh$. Из равенства $m\overline{c} = n\overline{g}$ в группе G получим:

$$mc = ng + f \text{ или } mc = nmh + f, \quad m(c - nh) = f.$$

Так как F сервантна в G, то $c - nh = f_1$, $f_1 \in F$, или $c = nh + f_1$. Тогда $\{F, H\} = G$ и $F \cap H = 0$; следовательно, $G = F \dot{+} H$.

Пусть G — смешанная группа, для которой $G/F = \overline{G}$ — группа первого ранга. Известно, что всякая группа без кручения первого ранга изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы R рациональных чисел ([3], § 30). Больше того, можно доказать, что всякая группа без кручения первого ранга изоморфна такой подгруппе R' группы R, в которой содержится число 1.

Пусть при этом изоморфизме числу 1 соответствует элемент $\overline{g} \in \overline{G}$; характеристику $\chi_{\overline{G}}(\overline{g})$ этого элемента зададим последовательностью

$$k = (k_1, k_2, k_3, \ldots). \tag{4}$$

Последовательность k определяет тип группы $\overline{G}$, а последний определяет и самую группу $\overline{G}$ с точностью до изоморфизма ([3], § 30). Множество всех простых чисел разобьем на два подмножества M и N: к M отнесем всякое простое число p_i, которому в последовательности k соответствует $k_i = \infty$; к N отнесем все остальные простые числа. Числа множества M условимся обозначать буквами p, а числа множества N — буквами q. Закрепим за группой все введенные выше обозначения. Для характеристики $\chi_{\overline{G}}(\overline{g})$ сохраним обозначения, указанные в (3; 2).

(3; 4). Теорема. *Пусть смешанная группа G удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$G/F = \overline{G}$ — группа первого ранга;*

2) *высоты отличных от нуля элементов примарных прямых слагаемых F_p для всех простых чисел $p \in M$ конечны;*

3) *в каждом классе смежности существуют максимальные элементы.*

Тогда группа G расщепляема.

Доказательство. Возьмем класс смежности $\overline{g}$, соответствующий числу 1 группы R'; пусть g — один из его максимальных элементов. Тогда

$$\chi_G(g) = \chi_G(g + F) = \chi_{\overline{G}}(\overline{g});$$

следовательно, $\chi(g)$ определяется последовательностью (4). В последовательности (4) множество всех конечных чисел k_i образует последовательность

$$l = (l_1, l_2, l_3, \ldots).$$

Построим последовательности чисел

$$(1, q_1^{l_1}, q_2^{l_2}, \ldots, q_j^{l_j}, \ldots) \text{ и } (1, s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots),$$

где s — числа вида

$$s = \prod_{p_i \in M} p_i^{v_i},$$

причем показатели v_i принимают целые неотрицательные значения и все v_i, кроме конечного числа, равны нулю. Перемножив эти последовательности по правилу умножения многочлена на многочлен, мы получим новую последовательность, которую занумеруем так:

$$r_0 = 1, r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots. \tag{5}$$

Очевидно, последовательность (5) и есть последовательность типа, указанного в (3; 2). Придерживаясь обозначений, введенных в (3; 2), при помощи метода индукции построим последовательность элементов

$$g_1 = g, g_2, g_3, \ldots, g_k, \ldots, \tag{6}$$

удовлетворяющих условиям:

1) $g_k = m_k g_{k+1}$,

2) $\chi(g) = n_k \chi(g_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Пусть уже построены все элементы g_i для $i \leqslant k$, построим g_{k+1}. Из условий 1) и 2) следует:

$$g = n_{k-1} g_k \text{ и } \chi(g) = n_{k-1} \chi(g_k).$$

В группе $\overline{G}$ получим: $\overline{g} = n_{k-1} \overline{g}_k$, откуда

$$\chi_G(g) = \chi_{\overline{G}}(\overline{g}) = n_{k-1} \chi_{\overline{G}}(\overline{g}_k) = n_{k-1} \chi(g_k);$$

следовательно, $\chi_{\overline{G}}(\overline{g}_k) = \chi_G(g_k + F) = \chi_G(g_k)$, т. е. элемент g_k является максимальным в классе смежности $\overline{g}_k$.

Из равенства $\chi(g) = n_{k-1} \chi(g_k)$ следует, что элемент g_k делится на любое число вида $\prod m_{k+l}$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$, а также и то, что g_k делится на любое число вида s и на любое число вида $q_j^{l_j}$, если $(q_j, n_{k-1}) = 1$.

Так как $m_k \in \chi(g_k)$, то в G существует такой элемент x_{k+1}, что $m_k x_{k+1} = g_k$. Пусть y_{k+1} — максимальный элемент в классе смежности $\overline{x}_{k+1}$; тогда в группе $\overline{G}$

$$m_k \overline{y}_{k+1} = \overline{g}_k, \tag{7}$$

откуда $m_k\chi_{\bar G}(\bar y_{k+1}) = \chi_{\bar G}(\bar g_k)$ или $m_k\chi_G(y_{k+1}) = \chi_G(g_k)$; последнее означает, что в последовательности

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots),$$

задающей характеристику $\chi(y_{k+1})$, $t_i = \infty$ для всех простых чисел $p_i \in M$, $t_j = l_j$ для простых чисел $q_j \in N$, которые не входят в каноническое разложение чисел n_{k-1} и m_k, и $t_j = 0$ для всех простых чисел $q_\nu \in N$, входящих в каноническое разложение чисел n_{k-1} и m_k, ибо из построения чисел m_k видно, что

$$m_k = q_\nu^{l_\nu} \cdot s,$$

где s не делится ни на одно из простых чисел множества N. Из равенств (7) следует, что

$$m_k y_{k+1} = g_k + f, \tag{8}$$

где $f \in F$.

Пусть

$$f = \sum_{p_i \in M} f_{p_i} + \sum_{q_j \in N} f_{q_j}, \tag{9}$$

где $f_{p_i} \in F_{p_i}$, $f_{q_j} \in F_{q_j}$ и в каждой из сумм все слагаемые, кроме конечного числа, равны нулю.

Согласно ранее установленному, элементы y_{k+1} и g_k делятся на любое число вида s; поэтому, в силу равенства (8) и сервантности F в G, элемент f делится на любое число вида s. Но в равенстве (9) второе слагаемое делится на любое число вида s; следовательно и первое слагаемое обладает этим же свойством. Так как высоты элементов f_{p_i} конечны, то установленная делимость может иметь место лишь тогда, когда $\sum\limits_{p_i \in M} f_{p_i} = 0$.

Следовательно, в состав f входят лишь компоненты из примарных подгрупп группы F по простым числам множества N.

Из равенства (8) и сервантности F в G следует, что в F существует элемент f_1 такой, что

$$f = m_k f_1.$$

Очевидно, элемент f_1, так же как и f, содержит отличные от нуля компоненты лишь из примарных слагаемых по простым числам множества N. Равенство (8) тогда можно переписать так:

$$m_k(y_{k+1} - f_1) = g_k.$$

Положим $y_{k+1} - f_1 = g_{k+1}$ и докажем, что элемент g_{k+1} является максимальным в $\bar y_{k+1} = \bar x_{k+1}$. В самом деле, элемент g_{k+1} делится на любое число вида s, ибо этим свойством обладают элементы y_{k+1} и f_1. Пусть $q_j^{l_j}$ $(q_j \in N)$ — любое число из $\chi(y_{k+1})$, тогда $q_j^{l_j} \in \chi(q_k)$; так как $m_k \in \chi(g_k)$ и $(m_k, q_j^{l_j}) = 1$, то, согласно (1; 2), $m_k q_j^{l_j} \in \chi(g_k)$, поэтому в G существует такой элемент z, что

$$m_k q_j^{l_j} z = g_k. \tag{10}$$

Из равенств (10) и $m_k g_{k+1} = g_k$ вытекает, что

$$m_k (g_{k+1} - q_j^{l_j} z) = 0,$$

следовательно,

$$g_{k+1} = q_j^{l_j} z + f_k, \tag{11}$$

где $m_k f_k = 0$. Так как $(m_k, q_j^{l_j}) = 1$, то f_k делится на $q_j^{l_j}$; следовательно, и g_{k+1} делится на $q_j^{l_j}$. Из того, что g_{k+1} делится на любое число вида s и любое число $q_j^{l_j}$ из $\chi(y_{k+1})$, вытекает, что g_{k+1} делится на все числа из $\chi(y_{k+1})$. Но элемент y_{k+1} — максимальный в $\overline{y}_{k+1}$; поэтому и g_{k+1} является максимальным элементом в $\overline{y}_{k+1}$. Из $m_k g_{k+1} = g_k$ следует, что

$$n_k g_{k+1} = g$$

или в группе $\overline{G}$

$$n_k \overline{g}_{k+1} = \overline{g},$$

а тогда

$$\chi_G(g) = \chi_{\overline{G}}(\overline{g}) = \chi_{\overline{G}}(n_k \overline{g}_{k+1}) = n_k \chi_{\overline{G}}(\overline{g}_{k+1}) = n_k \chi_G(g_{k+1}).$$

Поскольку построенная последовательность элементов

$$g_1 = g, g_2, g_3, \ldots$$

удовлетворяет условиям леммы (3; 3), группа G расщепляема.

Приведем теперь следствия из теоремы (3; 4).

(3; 5). Критерий Е. С. Ляпина. Если периодическая часть F смешанной группы G разлагается в прямую сумму циклических групп и групп типа p^∞, а ее фактор-группа G/F — в прямую сумму групп первого ранга, и в каждом классе смежности G по F существует хотя бы один максимальный элемент, то G расщепляема ([1], стр. 145).

Очевидно, что прямая сумма всех групп типа p^∞ по некоторым p, входящих в разложение F, как группа полная, выделяется из G прямым слагаемым ([3], § 23). Поэтому, не нарушая общности доказательства, можно считать в (3; 5) группу F редуцированной.

Пусть $G/F = \overline{G} = \sum\limits_{\alpha} \overline{G}_\alpha$, где $\overline{G}_\alpha$ — группа без кручения первого ранга. $\overline{G}_\alpha$ соответствует в G подгруппа G_α такая, что $G_\alpha/F = \overline{G}_\alpha$. По теореме (3; 4) G_α расщепляема (так как F разложима в прямую сумму циклических групп, то высоты отличных от нуля элементов в любом прямом примарном слагаемом F_p группы F конечны, в частности, конечны высоты и в тех F_p, для которых $p \in M$). А тогда G расщепляема в силу теоремы (3; 1).

(3; 6). В теореме (3; 4) каждое из множеств M и N может оказаться пустым. Если N — пустое множество, то теорема (3; 4) является частным случаем теоремы (2; 2). Если множество M — пустое, то мы получим, что существование максимальных элементов в каждом классе смежности группы G по ее периодической части F является достаточным условием расщепляемости G. Так, например, при выполнении только что указанных условий расщепляемой будет всякая группа G, фактор-группа G/F которой изоморфна аддитивной группе рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на k-ю степень никакого простого числа, где $k=1, 2, \ldots$. Очевидно, при $k=1$ G/F — циклическая группа. Доказано, что если G/F разлагается в прямую сумму циклических групп, то G расщепляема ([3], § 25). Однако уже при $k=2$ существуют нерасщепляемые группы. Пример такой группы построил А. Г. Курош ([3], стр. 188).

Существование максимальных элементов в каждом классе смежности группы G по F является достаточным условием расщепления любой группы G, удовлетворяющей условиям:

1) $G/F=\overline{G}$ — группа первого ранга;

2) G содержит элемент, имеющий характеристику

$$k=(1; 2; 3; 4; \ldots; n; n+1; \ldots).$$

В заключение приношу благодарность А. Г. Курошу, Е. С. Ляпину и А. П. Мишиной, советами которых я воспользовался при выполнении настоящей работы.

(Поступило в редакцию 5/XI 1957 г.)

Литература

1. Е. С. Ляпин, О разложении абелевых групп в прямые суммы групп первого ранга, Изв. АН СССР, серия матем., № 2 (1939), 141—146.
2. Е. С. Ляпин, О разложении абелевых групп в прямые суммы рациональных групп, Матем. сб., 8 (50) (1940), 205—237.
3. А. Г. Курош, Теория групп, Москва, Гостехиздат, 1953.
4. А. П. Мишина, Некоторые условия расщепления смешанных абелевых групп, Укр. матем. журн., **3** (1951).
5. Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб., **9** (**51**) (1941), 165—186.
6. Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб., **16** (58) (1945), 129—160.
7. R. Baer, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, Ann. of Math., **37** (1936), 766—781.