Ю. А. Неретин[1], Г. И. Ольшанский[2]

ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, ОСОБЫЕ УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $O(p,q)$ И ИХ ПРЕДЕЛЫ ПРИ $q \to \infty$

Начиная с работ В. Баргмана [32] и И. М. Гельфанда, М. А. Наймарка [54], положивших начало теории бесконечномерных представлений, в теории унитарных представлений полупростых групп часто встречаются гильбертовы пространства со скалярными произведениями вида

$$\langle f,g\rangle = \int_M \int_M K(x,y)f(x)\overline{g(y)}dx\,dy, \tag{0.1}$$

где M – некоторое многообразие, а $K(x,y)$ – (обобщенная) функция на $M \times M$. Эрмитовы формы такого вида не имеют априорных причин быть положительно определенными, и в каждом отдельном случае проверка положительной определенности является более или менее сложной задачей (иногда очень сложной).

Эти функциональные пространства не привлекали особого внимания аналитиков (хотя ряд объектов такого рода изучался, например, в форме (0.1) записывается скалярное произведение в соболевских пространствах: $M = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \|x-y\|^\lambda$); с другой стороны, в теории представлений подобные гильбертовы пространства рассматриваются как "вместилище" алгебраической структуры, а не как объект, заслуживающий самостоятельного размышления.

Цель настоящей работы – показать, что существует ряд явлений некоммутативного гармонического анализа и теории представлений (часть из них рассматривается обычно как алгебраические явления сложной природы), которые в своей основе имеют утверждения типа "теоремы о следе". Речь идет о следующем. Может оказаться, что в функциональном пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным

---

[1]При поддержке Международного научного фонда и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95–01–00814).

[2]При поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95–01–00814).

произведением (0.1) корректно определен оператор ограничения функции f на подмногообразие $N \subset M$ достаточно большой размерности (и достаточно удачно расположенное). Подчеркнем, что при этом значение функции f в отдельно взятой точке $x \in N$ вполне может быть не определено. Явления такого рода известны в анализе (например, ограничение на границу в пространствах Харди; ограничение на подмногообразия в Соболевских пространствах (см. например, [8], §3.2; [26], §1.3); теорема Нагеля–Рудина об ограничении функции из H^∞ в шаре на удачно расположенную кривую на сфере, см. [25], §11.2; некоторые вопросы теории исключительных множеств см. [65], [10]. Пространство $E(N)$ всех функций на N, которые могут быть получены ограничением функции $f \in \mathcal{H}$ на N, является факторпространством пространства $\mathcal{H}$, поэтому $E(N)$ само является гильбертовым пространством.

Двойственным образом может случиться, что пространство $\mathcal{H}$ содержит обобщенные функции, имеющие носитель, лежащий на многообразии N. Тогда пространство $E^\circ(N)$ всех таких обобщенных функций также является гильбертовым пространством как подпространство пространства $\mathcal{H}$.

Пусть теперь на M действует группа Ли G преобразованиями $g : x \mapsto x^g$, причем N является G-инвариантным подмногообразием. Допустим, что нам дано унитарное представление ρ группы G в $\mathcal{H}$, задаваемое формулами вида

$$\rho(g)f(x) = c(g,x)f(x^g).$$

Тогда мы автоматически получаем унитарное представление G в $E(N)$ (или $E^\circ(N)$).

Этот прием может быть использован в теории представлений с двумя целями – для предъявления частично дискретных спектров и для построения экзотических унитарных представлений.

В работе Пуканского [45] изучалась задача о разложении тензорного произведения неприводимых представлений группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Оказалось, что ответы в этой задаче несколько однообразны (например, произведение почти не зависит от перемножаемых сомножителей; основная серия может входить в тензорное произведение только полностью и притом в виде непрерывного прямого интеграла). Поведение дополнительной серии в такого рода задачах оказалось, однако, очень любопытным. А именно, представление дополнительной серии не может входить в тензорное произведение неприводимых представлений, за исключением случая, когда перемножаются представления дополнительной серии. В этом последнем случае тензорное произведение содержит в качестве прямого слагаемого одно или ни одного представления дополнительной серии (о некоторых применениях теоремы Пуканского к бесконечномерным группам см., [5], [17]). Аналогичный результат для $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ был получен Наймарком [15]. Впоследствии такого рода явления были обнаружены в целом ряде спектральных задач, см., в частности, статьи Бойера [33], Молчанова [12], Цушикавы [50]. Как было показано в работе одного из авторов [16], все эти явления очень прозрачно объясняются с помощью теорем о следе.

Фленстед–Йенсен в [36] изучал разложение L^2 на псевдоримановых симметрических пространствах; оказалось, что эти разложения имеют частично дискретные спектры, и дискретная часть спектра состоит из очень странных унитарных представлений, которые не укладывались в известные ранее типы конструкций (сейчас для работы с такого рода неприводимыми представлениями существует чисто алгебраическая техника, однако, очень сложная, см. [31]). После работы Фленстеда–Йенсена поиску "экзотических" унитарных представлений в различных дискретных спектрах была посвящена довольно большая литература, см., например, статьи Адамса [30], Шлихткрулля [48], Кобаяши [41], [63].

Один из авторов (см. [19], [21]) получил классификацию унитарных представлений групп $O(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$, непрерывных относительно слабой топологии. Оказалось, что в задачах ограничения унитарных представлений с $O(p,\infty)$ на $O(p,n)$ появляется частично дискретный спектр, состоящий из странных унитарных представлений $O(p,n)$ (аналогично для $U(p,n)$, $Sp(p,n)$). Оказалось также, что эти спектры пересекаются со спектрами из работ Шлихткрулля [48] и Адамса [30].

Настоящая работа (она частично аннонсирована в [16], [21], [22]) сложилась из работ двух авторов, предпринятых с целями, выглядевшими совершенно различными: один из авторов изучал аппроксимацию унитарных представлений групп $O(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ представлениями конечномерных групп $O(p,n)$, $U(p,n)$, $Sp(p,n)$, а другой автор пытался понять природу странных явлений, связанных с дополнительными сериями.

В §1 статьи излагаются некоторые стандартные факты о гильбертовых пространствах голоморфных функций в областях $\Omega \subset \mathbb{C}^N$.

В §2 содержится очень простая аналитическая конструкция. Мы показываем, что при выполнении некоторых дополнительных условий для гильбертовых пространств голоморфных функций в области $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ корректно определен оператор ограничения на некоторые подмножества M, содержащиеся в границе области Ω. Мы подробно разбираем один наглядный пример. А именно, рассматривается единичный шар $B_q \subset \mathbb{C}^q$, его граница – сфере S^{2q-1}. В качестве M рассматривается вещественный экватор – сфера $S^{q-1} = \mathbb{R}^q \cap S^{2q-1}$. Оказывается, что для некоторых пространств голоморфных функций в B_q корректно определен оператор ограничения на S^{q-1}. На языке теории представлений это означает, что представления группы $O(1,q)$ дополнительной серии вкладываются в представления группы $U(1,q)$ со старшим весом.

В §3 рассматривается частный случай нашей основной конструкции. Пусть $B_{p,q}$ – матричный шар (= область Картана первого рода), т.е. множество матриц размера $p \times q$ с нормой < 1. Рассматриваются гильбертовы пространства голоморфных функций в $B_{p,q}$, введенные Березиным в [4]. В качестве аналога вещественного экватора рассматривается многообразие Штифеля M – вещественная часть границы Шилова шара $B_{p,q}$. Мы показываем, что (при некоторых ограничениях на параметры) в пространствах Березина определен оператор ограничения на M. На языке теории представлений это означает, что в ограничении представления группы $U(p,q)$ со старшим весом на подгруппу $O(p,q)$ мы предъявляем неприводимое подпредставление группы $O(p,q)$.

В §4 мы переносим конструкцию §3 на произвольные унитарные представления групп $U(p,q)$ со старшим весом. Это означает, что от гильбертовых пространств скалярных функций на M мы переходим к гильбертовым пространствам векторнозначных функций. Аналитические оценки, обеспечивающие существование ограничения на границу, здесь остаются теми же, однако алгебраическая структура резко усложняется, и в пространствах граничных значений голоморфных функций на M возникают "особые" унитарные представления групп $O(p,q)$.

Некоторые свойства этих "особых" представлений обсуждаются в §5 (этот параграф почти не используется ниже).

В §6 мы приводим явные конструкции всех неприводимых унитарных представлений группы $O(p,\infty)$, снабженной слабой топологией (см. [19]), и для каждого такого представления ρ в гильбертовом пространстве H мы строим цепочку подпространств

$$H_k \subset H_{k+1} \subset H_{k+2} \subset \dots$$

такую, что H_j инвариантно относительно $O(p,j)$, и представление группы $O(p,j)$ в H_j неприводимо (здесь k достаточно велико и зависит от ρ).

Индуктивные пределы классических некомпактных групп Ли имеют необозримо много неприводимых унитарных представлений. Однако лишь в очень редких случаях эти представления являются индуктивными пределами *неприводимых* представлений. Фактически такие цепочки известны лишь для представлений $O(p,\infty)$, $U(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$, непрерывных в слабой топологии, а также в (очевидном) случае представлений $Sp(2\infty,\mathbb{R})$ и $SO^*(2\infty)$ со старшим весом. Кажется любопытным вопрос, бывают ли иные случаи, кроме только что перечисленных.

В §7 обсуждаются несколько иных примеров применения теорем о следе. Сначала (пп. 7.1–7.8) мы решаем для представлений сферической основной серии группы $O(1,q)$ задачу о разложении тензорного произведения представлений, а также даем простое решение задачи (решенной Бойером в [33]) об ограничении этих представлений на подгруппу $O(1,q-1)$. Далее в п. 7.10 мы замечаем, что сказанное про дополнительные серии $O(1,q)$ без труда обобщается на "особые" представления групп $O(p,q)$, построенные нами в §§3–5. В частности, здесь тоже присутствует частично дискретный спектр в задачах о разложении тензорного произведения и о разложении ограничения на подгруппу. Еще одно удивительное свойство особых представлений – существование базисов Гельфанда–Цетлина (см. [22]), в этой статье мы опускаем обсуждение данного вопроса.

Основная часть нашей статьи посвящена представлениям групп серии $O(p,q)$. В действительности все то же самое может быть сказано и о сериях $U(p,q)$ и $Sp(p,q)$. Необходимые замечания по этому поводу сделаны в пп. 7.12–7.14.

Как мы отмечали выше, построенный нами набор особых представлений пересекается с представлениями, построенными Адамсом при изучении дуальных пар типа $(Sp(2k,\mathbb{R}),\ O(p,q))$, и с представлениями, построенными Шлихткруллем, изучавшим разложение пространства L^2 на индефинитном многообразии Штифеля $O(p,q)/O(p-\alpha,q)$. Наличие такого пересечения имеет простые априорные причины, объяснение этого составляет содержание заключительного §8. Отметим, что наша конструкция содержит непрерывный параметр, в то время как конструкции Адамса, Шлихткрулля и Кобаяши зависят лишь от дискретных параметров.

Отметим также, что наша конструкция чрезвычайно проста как с идейной точки зрения, так и с технической (техническая часть состоит в оценке некоторого интеграла), из теории представлений полупростых групп мы используем лишь раздел, в целом простой и самостоятельный, посвященный представлениям со старшим весом. По этой причине мы имели возможность сделать наш текст почти замкнутым в себе, и пытались достичь этой цели.

В заключение мы благодарим В. Ф. Молчанова, Х. Шлихткрулля, Г. Цукермана за обсуждение данного предмета.

§ 1. Гильбертовы пространства голоморфных функций: предварительные замечания

1.1. Положительно определенные ядра. (см. [11]) Пусть X – некоторое множество. Функция $K(x,y)$ на $X \times X$ называется положительно определенным ядром, если

а) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$

б) Для любых $x_1, \dots, x_n \in X$ матрица

$$\begin{pmatrix} K(x_1,x_1) & \dots & K(x_1,x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(x_n,x_1) & \dots & K(x_n,x_n) \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена.

Пусть дано отображение $x \mapsto \Psi_x$ множества X в гильбертово пространство H. Тогда функция

$$K(x,y) = \langle \Psi_x, \Psi_y \rangle \tag{1.1}$$

является положительно определенным ядром на X.

Обратно, пусть $K(x,y)$ – положительно определенное ядро. Тогда существует гильбертово пространство $H = H_K(X)$ и тотальная система векторов $\Psi_x \in H$ такая, что выполнено (1.1). Более того, пространство H единственно в том смысле, что если H' – другое такое пространство и $\Psi'_x \in H$ – соответствующая система векторов, то существует унитарный оператор $U : H \to H'$ такой, что $U\Psi_x = \Psi'_x$ для всех $x \in X$.

Пусть $h \in H_K(X)$. Тогда определена функция $(Ih)(x)$ на X, задаваемая формулой

$$Ih(x) = \langle h, \Psi_x \rangle_{H_K(X)}.$$

Лемма 1.1. а) *Если $h_1 \neq h_2$, то $Ih_1 \neq Ih_2$.*

б) *Если $h_j \to h$ слабо в $H_K(X)$, то Ih_j сходится к Ih поточечно.*

Доказательство очевидно. •

С этого момента мы отождествляем пространство $H_K(X)$ с соответствующим пространством функций на X. Заметим, что линейный функционал на $H_K(X)$, задаваемый формулой

$$l_x(f) = f(x) = \langle f, \Psi_x \rangle$$

непрерывен для любого $x \in X$.

1.2. Гильбертовы пространства голоморфных функций. (см. например, [55], IX.2) Пусть Ω – ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{C}^N$, пусть $\bar{\Omega}$ – его замыкание, $\partial\Omega$ – его граница. Мы скажем, что Ω – *правильная круговая область*, если

1^0. Для любого $z \in \Omega$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ такого, что $|\lambda| \leqslant 1$, выполнено $\lambda z \in \Omega$.

2^0. Для любого $z \in \partial\Omega$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ такого, что $|\lambda| < 1$, выполнено $\lambda z \in \Omega$

Ниже по умолчанию Ω всегда удовлетворяет этим требованиям.

Замечание. Напомним, что полной круговой областью называется область в $\mathbb{C}^N$, удовлетворяющая только условию 1^0. Примером полной круговой области, не являющейся правильной круговой областью, является бидиск $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$, из которого выброшено кольцо $\{(z, z) : \frac{1}{2} \leqslant z < 1\}$.

Напомним (см. [29], §I.3.8), что любая голоморфная функция f в полной круговой области Ω разлагается в сходящийся в Ω ряд

$$f = \sum f_j$$

по однородным многочленам.

Пусть H – некоторое линейное подпространство в пространстве голоморфных функций на Ω. Мы скажем, что H – *гильбертово пространство голоморфных функций на* Ω, если в H введено положительно определенное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такое, что

а) H – гильбертово пространство

б) Для любого $z \in \Omega$ линейный функционал

$$l_z(f) = f(z)$$

непрерывен на H.

в) Операторы

$$R_\varphi f(z) = f(e^{i\varphi} z)$$

унитарны в H и слабо непрерывно зависят от $\varphi \in \mathbb{R}$.

Примеры см. ниже в пп. 1.4–1.5.

В силу непрерывности линейных функционалов l_u существует система функций $\psi_u \in H$ (где $u \in \Omega$) такая, что

$$h(u) = \langle h, \psi_u \rangle \quad \forall h \in H.$$

Определим функцию $K(z, \bar{u})$ ("воспроизводящее ядро") на $\Omega \times \Omega$ по формуле

$$K(z, \bar{u}) = \langle \psi_u, \psi_z \rangle = \psi_u(z) = \overline{\psi_z(u)}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что

1^0. Ядро $K(z, \bar{u})$ положительно определено

2^0. Функция $K(z, \bar{u})$ голоморфна по z и антиголоморфна по u.

3^0. $K(e^{i\varphi} z, e^{-i\varphi} \bar{u}) = K(z, \bar{u})$

Предложение 1.1. а) *Пусть $K(z, \bar{u})$ – функция на $\Omega \times \Omega$, удовлетворяющая условиям 1^0–3^0. Тогда $H_K(\Omega)$ – гильбертово пространство голоморфных функций на Ω, причем система функций $\psi_u \in H_K(\Omega)$ задается формулой*

$$\psi_u(z) = K(z, \bar{u}).$$

б) *Для любой $f \in H_K(\Omega)$ выполнено*

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{H_k(\Omega)} \cdot \sqrt{K(z, \bar{z})}. \tag{1.3}$$

в) *Операции построения гильбертова пространства H по ядру K и ядра K по гильбертову пространству H взаимно обратны.*

г) *Если $h_j \to h$ слабо в $H_K(\Omega)$, то $h_j \to h$ равномерно на компактах в Ω.*

Доказательство. Утверждение б) следует из неравенства Коши–Буняковского. Перейдем к доказательству а). По определению $H_K(\Omega)$ конечные линейные комбинации голоморфных функций ψ_u плотны в $H_K(\Omega)$. Пусть θ_j последовательность таких функций, сходящаяся в $H_K(\Omega)$ к некоторой функции θ. Тогда θ_j сходится поточечно (в силу леммы 1.1) и ограничена на компактах в силу (1.3) (надо использовать еще тот факт, что функция $K(z, \bar{z})$ непрерывна в силу теоремы Гартогса). Поэтому, в силу принципа компактности, θ голоморфна. Все остальные высказывания очевидны. •

1.3. Многочлены. Обозначим через Pol пространство многочленов в $\mathbb{C}^N$, а через Pol_j пространство однородных многочленов степени j.

Предложение 1.2. *Пусть $H = H_K(\Omega)$ – гильбертово пространство голоморфных функций в правильной круговой области Ω. Тогда*

$$H = \bigoplus_{j=0}^{\infty} (H \cap \mathrm{Pol}_j).$$

Замечание. Подчеркнем, что вполне возможна (и в ряде случаев это действительно так) ситуация, когда Pol не содержится в H целиком.

Доказательство. Очевидно, голоморфные функции, собственные относительно операторов $f(z) \mapsto f(e^{i\varphi} x)$, суть однородные многочлены. С другой стороны, эти операторы образуют компактную абелеву группу, и поэтому любой вектор $f \in H$ должен разлагаться в сходящийся ряд по собственным векторам.

Замечание. В силу свойства 3^0 п.1.2, ядро $K(z,\bar{u})$ разлагается в ряд вида

$$K(z,\bar{u}) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(z,\bar{u}),$$

где K_j – однородный многочлен степени j по z и однородный многочлен степени j по $\bar{u}$. Тогда гильбертово пространство голоморфных функций $H_K(\Omega) \cap \mathrm{Pol}_j$ задается положительно определенным ядром $K_j(z,\bar{u})$.

Замечание. Покажем, что ядро $K(z,\bar{u})$ определено, если $z \in \Omega$, $u \in \bar{\Omega}$. Действительно, в силу однородности слагаемых K_j, ядро $K(z,\bar{u})$ инвариантно относительно преобразований $(z,u) \mapsto (c^{-1}z, cu)$. Теперь мы можем выбрать положительное $c < 1$ так, что $c^{-1}z \in \Omega$, и положить для $z \in \Omega$, $u \in \bar{\Omega}$

$$K(z,\bar{u}) := K(c^{-1}z, \overline{cu}).$$

1.4. Пример: весовые пространства. Пусть ν – мера в $\mathbb{C}^N$, инвариантная относительно преобразований $z \mapsto e^{i\varphi}z$. Пусть для любого ненулевого многочлена $P(z)$ выполнено

$$0 < \int |p(z)|^2 \, d\nu(z) < \infty.$$

Тогда формула

$$\langle f, g \rangle = \int f(z)\overline{g(z)} \, d\nu(z)$$

задает скалярное произведение в Pol. Пусть $H(\nu)$ – пополнение Pol по этому скалярному произведению. Пусть Ξ – множество всех $u \in \mathbb{C}^N$, для которых линейный функционал $P \mapsto P(u)$ на Pol продолжается до непрерывного линейного функционала на $H(\nu)$. Пусть Ω – множество внутренних точек в Ξ. Если Ω непусто, то $H(\nu)$ – гильбертово пространство голоморфных функций на Ω (это вытекает из [25], 1.5.6).

Пример 1. Пусть $N = 1$, а ν – мера Лебега на окружности $|z| = 1$. Тогда $H(\nu)$ – пространство Харди H^2 в круге $|z| < 1$.

Пример 2. Пусть мера ν имеет плотность $e^{-|z|^2}$ относительно меры Лебега на $\mathbb{C}^N$. Тогда $\Omega = \mathbb{C}^N$, а $H(\nu)$ – бозонное пространство Фока (см. ниже п. 8.1).

2 Заказ 765

При всей важности весовых пространств в анализе, нас интересуют главным образом пространства, которые не укладываются в только что описанную конструкцию.

1.5. Пример: гильбертовы пространства голоморфных функций в шаре. Обозначим через B_q открытый шар $\sum_{k=1}^{q} |z_k|^2 < 1$ в $\mathbb{C}^q$.

Пусть сначала $s > q$. Рассмотрим пространство H_s голоморфных функций в B_q, удовлетворяющих условию

$$\int_{B_q} |f(z)|^2 (1 - |z|^2)^{s-q-1}\, dz\, d\bar{z} < \infty.$$

Введем в H_s скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\tau_{q,s}} \int_{B_q} f(z)\overline{g(z)}\, (1 - |z|^2)^{s-q-1}\, dz\, d\bar{z},$$

где $\tau_{q,s}$ определяется из условия $\langle 1, 1\rangle = 1$. Несложно проверить, что H_s – гильбертово пространство голоморфных функций, причем соответствующее воспроизводящее ядро задается формулой

$$K_s(z, \bar{u}) = \left(1 - \sum_{k=1}^{q} z_k \bar{u}_k\right)^{-s}. \tag{1.4}$$

Предложение 1.3. *Ядро $K_s(z, \bar{u})$ положительно определено при всех $s \geqslant 0$.*

Доказательство. Очевидно,

$$K_s(z, \bar{u}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{j!} \left(\sum z_k \bar{u}_k\right)^j. \tag{1.5}$$

Все коэффициенты этого ряда положительны, и теперь утверждение очевидно. •

Пусть теперь $s \geqslant 0$. Определим пространство $H_s = H_s(B_q)$ как гильбертово пространство голоморфных функций в шаре B_q, определяемое ядром (1.4).

Замечание. Пусть $f, g \in H_s$; а $f = \sum f^{(j)}$, $g = \sum g^{(j)}$ – их разложения по однородным многочленам. Тогда в силу (1.5) и [25], I.4.9

$$\langle f, g\rangle_{H_s} = \sum \frac{s(s+1)\dots(s+j-1)}{(q+1)\dots(q+j)} \langle f^{(j)}, g^{(j)}\rangle_{L^2(B^q)}.$$

Замечание. Пространство H_0 одномерно и состоит лишь из констант.

Замечание. Пространство $H_{q+1}(B_q)$ есть пространство Бергмана, пространство $H_q(B_q)$ совпадает с пространством Харди H^2, пространства $H_s(B_q)$ при $s > q$ обсуждаются, например, в [1]. Нас интересует главным образом случай $0 < s < \frac{q-1}{2}$.

1.6. Обобщенные функции. С точки зрения идеологии "когерентных состояний" (см. например, [4], [23]) систему функций ψ_u естественно рассматривать как своего рода "базис" в пространстве $H_K(\Omega)$. Сейчас мы введем соответствующий формализм.

Пусть как обычно

$$\mathcal{D}_x^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_N} x_N}.$$

Пусть Ω, $H_K(\Omega)$ – те же, что и выше. Пусть $u \in \Omega$, пусть $\psi_u^\alpha(z) = \mathcal{D}_{\bar{u}}^\alpha K(z, \bar{u})$.

Лемма 1.2. *Функции $\psi_u^{(\alpha)}(z)$ лежат в $H_K(\Omega)$, при этом*

$$\begin{aligned} \langle h, \psi_z^{(\alpha)} \rangle &= \mathcal{D}_z^{(\alpha)} h(z) \quad \forall h \in H_K(\Omega) \\ \langle \psi_u^{(\alpha)}, \psi_z^{(\beta)} \rangle &= \mathcal{D}_{\bar{u}}^{(\alpha)} \mathcal{D}_z^{(\beta)} K(z, \bar{u}). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Доказательство для простоты обозначений мы проведем для одномерной области и для производных первого порядка. Нужно проверить, что семейство функций

$$\tau_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon}(\psi_{u+\varepsilon}(z) - \psi_u(z))$$

слабо сходится в $H_K(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Поточечная сходимость очевидна, и нам достаточно проверить, что $\tau_\varepsilon(z)$ равномерно ограничены. Имеем

$$\|\tau_\varepsilon\|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}(K(u+\varepsilon, \bar{u}+\varepsilon) - K(u, \bar{u}+\varepsilon) - K(u+\varepsilon, \bar{u}) + K(u, \bar{u})).$$

Последнее выражение есть $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{w}} K(z, \bar{w})$ в некоторой точке, близкой к $(u, \bar{u})$. Это доказывает, что $\psi_u^{(\alpha)} \in H_K$, а также первое из тождеств. Второе тождество есть частный случай первого. •

Пусть A – подмножество в $\mathbb{C}^N$. Обозначим через $\mathcal{D}'(A)$ множество обобщенных функций на $\mathbb{C}^N$ с носителем, лежащим в A.

Пусть $\chi \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. Введем функцию

$$(\Xi\chi)(z) = \int K(z, \bar{u}) \chi(u) du, \tag{1.7}$$

голоморфную на Ω.

Предложение 1.4. *Если* $\chi \in \mathcal{D}'(\Omega)$, *то* $\Xi\chi \in H_K(\Omega)$. *При этом для любого* $h \in H_K(\Omega)$

$$\langle h, \Xi\chi \rangle = \int h(z)\overline{\chi(z)}\, dz. \tag{1.8}$$

В частности, для любых χ, $\tilde{\chi} \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \Xi\chi, \Xi\tilde{\chi} \rangle = \int\int \overline{K(z,\bar{u})}\chi(z)\overline{\tilde{\chi}(u)}\, dz\, du. \tag{1.9}$$

Доказательство. Носитель обобщенной функции χ содержится в некотором компакте $M \subset \Omega$, а при $u \in M$, $|\alpha| \leqslant K$ выражения $\|\psi_u^{(\alpha)}\|$ равномерно ограничены (см. (1.6)). Поэтому $\Xi\chi$ оказывается центром тяжести конечной меры, сосредоточенной на ограниченном подмножестве в $H_K(\Omega)$ (состоящем из функций вида $\psi_u^{(\alpha)}$). Теперь все высказывания очевидны. •

Перейдем к обсуждению обобщенных функций с носителями в замкнутой области $\bar{\Omega}$.

Лемма 1.3. *Пусть* $\chi \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *Пусть* $0 < c < 1$. *Пусть*

$$(\Xi_c\chi)(z) = \int K(z, c\bar{u})\chi(u)du.$$

Тогда $\Xi_c\chi \in H_K(\Omega)$, *а* $\|\Xi_c\chi\|_{H_K(\Omega)}$ *монотонно возрастает в интервале* $0 < c < 1$.

Доказательство. Пусть $K = \sum K^{(j)}$ – разложение ядра K в ряд по однородным многочленам. Определим векторы

$$\Xi^{(j)}\chi(z) = \int K^{(j)}(z, \bar{u})\chi(u)du \in \mathrm{Pol}_j \cap H_K(\Omega).$$

Тогда

$$\Xi_c\chi = \sum_{j=0}^{\infty} c^j(\Xi^{(j)}\chi) \tag{1.10}$$

и теперь утверждение очевидно. •

Из формулы (1.10) вытекает также, что

$$\|\Xi_c\chi\|^2 = \sum c^{2j}\|\Xi^{(j)}\chi\|^2 = \sum c^{2j}\int\int \overline{K^{(j)}(z,\bar{u})}\,\chi(z)\overline{\chi(u)}\, dz\, du$$
$$= \int\int \overline{K(cz, c\bar{u})}\chi(z)\overline{\chi(u)}\, dz\, du. \tag{1.11}$$

Предложение 1.5. а) *Пусть* $\chi \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$. *Тогда следующие условия равносильны:*

i) *Выражение* $\|\Xi_c\chi\|^2_{H_K(\Omega)}$ *ограничено при* $0 < c < 1$.

ii) $\Xi\chi \in H_K(\Omega)$.

iii) *Линейный функционал на* $\mathrm{Pol} \cap H_K(\Omega)$, *задаваемый обобщенной функцией* χ, *продолжается до ограниченного линейного функционала на* $H_K(\Omega)$.

б) *Пусть* χ *и* $\tilde{\chi}$ *удовлетворяет условиям* i)-iii). *Тогда*

$$\langle \Xi\chi, \Xi\tilde{\chi}\rangle = \lim_{c\to 1-0}\langle \Xi_c\chi, \Xi_c\tilde{\chi}\rangle$$

$$= \lim_{c\to 1-0}\int\int \overline{K(cz, c\bar{u})}\chi(z)\overline{\chi(u)}\,dz\,du. \quad (1.12)$$

Доказательство: все высказывания с очевидностью вытекают из леммы 1.3 и формул (1.10), (1.11). •

1.7. Инвариантные ядра. Пусть теперь на области Ω действует биголоморфными преобразованиями связная группа Ли G (фактически нас интересуют области Картана, пример $\Omega = B_q$ обсуждается в следующем пункте). Образ точки $z \in \Omega$ под действием элемента $g \in G$ мы будем обозначать через z^g

Обозначим через $j(g, z)$ комплексный якобиан отображения $z \mapsto z^g$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим действие

$$\rho_\lambda(g)f(z) = j(g, z)^\lambda f(z^g) \quad (1.13)$$

группы G в пространстве голоморфных функций на Ω. При $\lambda \in \mathbb{Z}$ выполнено соотношение

$$\rho_\lambda(g_1g_2) = \rho_\lambda(g_1)\rho_\lambda(g_2), \quad (1.14)$$

т.е. ρ_λ – линейное представление группы G.

Случай, когда $\lambda \notin \mathbb{Z}$, нуждается в некоторых пояснениях. В этом случае формулу (1.13) можно понимать двояко.

А. Так как $j(g, z)$ не обращается в ноль, при фиксированном g многозначная функция $j(g, z)^\lambda$ на (односвязной) области Ω распадается на счетное множество голоморфных однозначных ветвей. Эти ветви отличаются друг от друга на множители вида $\exp(2\pi i\lambda k)$. Поэтому можно считать, что каждому $g \in G$ соответствует оператор $\rho_\lambda(g)$, определенный с точностью до множителя. Тогда для любых $g_1, g_2 \in G$ выполнено соотношение

$$\rho_\lambda(g_1g_2) = \theta(g_1, g_2)\rho_\lambda(g_1)\rho_\lambda(g_2),$$

где $\theta(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}$, $|\theta| = 1$. Иными словами, мы имеем проективное представление группы G.

Б. Пусть $\tilde{G}$ – универсальная накрывающая группа для группы G. Тогда функция $j(g,z)^\lambda$ может рассматриваться как однозначная функция на $\tilde{G}\times\Omega$, и тогда формула (1.13) задает линейное представление группы $\tilde{G}$.

Нас интересуют скалярные произведения, инвариантные относительно операторов $\rho_\lambda(g)$.

Предложение 1.6. *Пусть $H_K(\Omega)$ – гильбертово пространство голоморфных функций. Пусть фиксировано $\lambda\in\mathbb{R}$. Пусть операторы $\rho_\lambda(g)$ оставляют пространство $H_K(\Omega)$ инвариантным и унитарны в $H_K(\Omega)$. Тогда*

а) *Ядро $K(z,\bar{u})$ удовлетворяет тождеству*

$$K(z^g,\overline{u^g}) = j(g,z)^{-\lambda}\overline{j(g,u)}^{-\lambda}K(z,\bar{u}). \tag{1.15}$$

б)

$$\rho_\lambda(g^{-1})\psi_z = j(g,z)^\lambda\psi_{z^g}. \tag{1.16}$$

Доказательство.

$$\langle h,\rho_\lambda(g^{-1})\psi_z\rangle = \langle\rho_\lambda(g)h,\psi_z\rangle = j(g,z)^\lambda h(z^g) = j(g,z)^\lambda\langle h,\psi_{z^g}\rangle$$

т.е. мы доказали утверждение б). Утверждение а) следует из б) и (1.2). •

Пусть теперь группа G действует на Ω транзитивно. Тогда уравнение (1.15) на ядро $K(z,\bar{u})$ легко решается. А именно, ядро $K(z,\bar{u})$ полностью определяется своими значениями на диагонали, т.е. функцией $\varkappa_\lambda(z) := K(z,\bar{z})$. В силу (1.15) эта функция удовлетворяет уравнению

$$\varkappa_\lambda(z^g) = |j(g,z)|^{-2\lambda}\varkappa_\lambda(z). \tag{1.17}$$

Выберем для каждого $z\in\Omega$ некоторый элемент g_z такой, что $z=0^{g_z}$. Тогда

$$\varkappa_\lambda(z) = |j(g_z,0)|^{-2\lambda}\varkappa_\lambda(0),$$

т.е. решение уравнения (1.17), если оно существует, однозначно определено и для него есть явная формула, причем зависимость $\varkappa_\lambda$ от λ имеет вид $\varkappa_\lambda(z) = a(z)^\lambda$.

Однако вопрос о положительной определенности получающихся ядер оказывается сложным. В случае областей Картана он потребовал значительных училий и был решен в [4, 47, 51, 56] (см. также ниже п.3.5).

1.8. Пример: инвариантные ядра в шаре B_q. Обозначим через $U(1,q)$ группу блочных матриц размера $(1+q)\times(1+q)$, удовлетворяющих уравнению

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1_q \end{pmatrix},$$

где через 1_q обозначена единичная матрица размера $q\times q$. Через $SU(1,q)$ мы обозначим группу матриц $g\in U(1,q)$ с определителем 1.

Псевдоунитарная группа $U(1,q)$ действует на B_q дробно-линейными преобразованиями вида

$$z\mapsto z^g = (a+zc)^{-1}(b+zd), \tag{1.18}$$

где $z=(z_1\dots z_q)$ рассматривается как матрица-строка.

Эти преобразования переводят шар B_q в себя, и все биголоморфные преобразования шара B_q в себя исчерпываются отображениями (1.18) (см., например, [25], глава 2). Скалярным матрицам $h=e^{i\theta}\cdot 1_{(1+q)}$ соответствует тождественное отображение $z\mapsto z^h$, поэтому без ограничения общности мы можем считать, что в формуле (1.18) выполнено $g\in SU(1,q)$. Группа $SU(1,q)$ действует на B_q транзитивно, причем стабилизатор точки 0 состоит из линейных унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^q$:

$$z\mapsto zh;\quad h\in U(q).$$

Поэтому как однородное пространство B_q есть

$$B_q\simeq SU(1,q)/U(q)\simeq U(1,q)/(U(1)\times U(q)).$$

Пусть $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SU(1,q)$ (подчеркнем, что $SU(1,q)$, а не $U(1,q)$). Тогда якобиан отображения $z\mapsto z^g$ задается формулой

$$j(g,z)=(a+zc)^{-(q+1)}.$$

Пусть $s>0$. Рассмотрим проективное представление ρ_s группы $SU(1,q)$ в пространстве H_s (см. п. 1.5), задаваемое формулой

$$\rho_s(g)f(z)=(a+zc)^{-s}f(z^g)$$

(наши обозначения здесь чуть-чуть не согласуются с (1.13)).

Предложение 1.7. *Операторы $\rho_s(g)$ унитарны в H_s.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что

$$\langle\rho_s(g^{-1})\psi_u,\rho_s(g^{-1})\psi_v\rangle_{H_s}=\langle\psi_u,\psi_v\rangle_{H_s}. \tag{1.19}$$

Легко проверить, что функции ψ_u преобразуются под действием операторов ρ_s в соответствии с формулой (1.16):

$$\rho_s(g^{-1})\psi_u = (a + zc)^{-s}\psi_{u^g}.$$

Теперь (1.19) равносильно тождеству (1.15), которое, в свою очередь легко проверяется. •

Замечание. Собственно это утверждение и является причиной введения пространств H_s. В терминологии теории представлений представления ρ_s суть "скалярные" представления со старшим весом, при $s > q$ мы имеем дискретную серию Хариш-Чандры, при $s = q$ – предельную точку дискретной серии, при $0 < s < q$ – аналитическое продолжение дискретной серии.

1.9. Гильбертовы пространства векторнозначных голоморфных функций. Описанная выше конструкция может быть слегка обобщена (нам это обобщение не понадобится вплоть до §4).

Пусть T – конечномерное евклидово пространство, пусть End (T) – множество линейных операторов в T. Пусть H – некоторое линейное подпространство в пространстве голоморфных T-значных функций на Ω. Мы скажем, что H *–гильбертово пространство T-значных голоморфных функций*, если

а) В H фиксировано скалярное произведение, и H полно.

б) Для любого $u \in \Omega$ линейный оператор

$$A_u f = f(u)$$

из H в T непрерывен.

в) Операторы

$$R_\varphi f(z) = f(e^{i\varphi}z); \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

унитарны и образуют слабо непрерывную группу.

Определим воспроизводящее ядро как End (T)-значную функцию $K(z, \bar{u})$ на $\Omega \times \Omega$, заданную формулой

$$K(z, \bar{u}) = A_z A_u^*. \tag{1.20}$$

Определим End (T)-значные функции ψ_u на Ω формулой

$$\psi_u(z) = K(z, \bar{u}).$$

Тогда для любого $\xi \in T$

$$\langle h, \psi_u \xi\rangle_H = \langle h(u), \xi\rangle_T. \tag{1.21}$$

Матричнозначное ядро $K(z,\bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам

а) Функция

$$\tilde{K}((z,\xi),(\bar{u},\eta)) := \langle K(z,\bar{u})\xi,\eta\rangle$$

является положительно определенным ядром на $\Omega \times T$.

б) Функция $K(z,\bar{u})$ голоморфна по z и антиголоморфна по u.

в) $K(e^{i\varphi}z, e^{-i\varphi}\bar{u}) = K(z,\bar{u})$.

Обратно, по любому End(T)-значному ядру на Ω, удовлетворяющему условиям а)–в), строится гильбертово пространство голоморфных функций на Ω, которое мы обозначаем через $H_K(\Omega)$.

Утверждение п.1.6 об обобщенных функциях переносится на случай пространства векторнозначных функций дословно. Об аналогах инвариантных ядер пп.1.7–1.8 речь пойдет ниже в §4, там же будут приведены содержательные примеры гильбертовых пространств векторнозначных голоморфных функций. Сейчас мы приведем лишь два простых примера, показывающих как векторнозначные функции возникают при работе со скалярными функциями.

Пример 1. Пусть Jet_m – пространство m-струй голоморфных функций на $\mathbb{C}^N$. Пусть $H_K(\Omega)$ – некоторое пространство голоморфных функций на Ω. Любой $f \in H_K(\Omega)$ мы поставим в соответствие Jet_m-значную функцию $L^{(m)}f$ такую, что $L^{(m)}f(z)$ есть m-струя f в точке z. Таким образом мы получаем гильбертово пространство Jet_m-значных голоморфных функций на Ω.

Пример 2. Пусть $L \subset \mathbb{C}^N$ – линейное подпространство, пусть $\Sigma = \Omega \cap L$. Пусть $H_K(\Omega)$ – некоторое гильбертово пространство голоморфных функций на Ω. Пусть $\mathcal{F}_j$ – пространство всех $f \in H_K(\Omega)$, имеющих ноль порядка $\geqslant j$ на Σ. Тогда мы имеем фильтрацию $H_K(\Omega)$ замкнутыми подпространствами

$$H_K(\Omega) = \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \dots .$$

Элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}_j = \mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j+1}$ отождествляется с голоморфной функцией на Σ со значениями в пространстве однородных многочленов степени j на $\mathbb{C}^N/L$. При этом $H_K(\Omega) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j$.

§ 2. Граничные гильбертовы пространства и граничные представления

2.1. Граничные операторы. Пусть Ω, K – те же, что в §1. Пусть μ –некоторая мера на $\partial\Omega$, а M – носитель μ (в качестве примера можно представлять себе $H_K(\Omega) = H_s(B_q)$, M –вещественный экватор сферы S^{2q-1}, т.е. $M = \partial B_q \cap \mathbb{R}^q$).

Пусть μ удовлетворяет условиям

1*. Почти всюду на $M \times M$ по мере $\mu \times \mu$ существует

$$K^*(z, \bar{u}) = \lim_{c \to 1-0} K(cz, c\bar{u}). \tag{2.1}$$

2*. Этот предел является мажорируемым, т.е. существует функция $\varkappa(z, \bar{u}) \in L^1(M \times M)$ такая, что для всех $c \in (0,1)$ выполнено

$$|K(cz, c\bar{u})| \leqslant \varkappa(z, \bar{u}).$$

Через $L^1(\mu)$ и $L^\infty(\mu)$ мы обозначим пространства функций на M класса L^1 и L^∞ соответственно.

Для любой $\varphi \in L^\infty(\mu)$ определим функцию

$$I\varphi = \int\limits_M K(z, \bar{u})\varphi(u)\, d\mu(u).$$

Отметим, что $\varphi\mu$ можно рассматривать как обобщенную функцию на $\mathbb{C}^N$, и тогда (см. (1.7))

$$I\varphi = \Xi(\varphi\mu).$$

Теорема 2.1. *При выполнении условий* $1^* - 2^*$ *оператор* I *отображает* $L^\infty(\mu)$ *в* $H_K(\Omega)$. *Этот оператор непрерывен в следующем смысле: если последовательность* $\varphi_j \in L^\infty(\mu)$ *ограничена и сходится почти всюду к* φ, *то* $I\varphi_j \to I\varphi$ *в метрике пространства* $H_K(\Omega)$.

Доказательство. Условия $1^* - 2^*$ обеспечивают выполнение условий предложения 1.5. Далее

$$\|I\varphi_j - I\varphi\|^2_{H_K(\Omega)} = \lim_{c \to 1-0} \int\int \overline{K(cz, c\bar{u})}$$
$$\times \left(\varphi_j(z)\overline{\varphi_j(u)} - \varphi_j(z)\overline{\varphi(u)} - \varphi(z)\overline{\varphi_j(u)} + \varphi(z)\overline{\varphi(u)}\right) d\mu(z)\, d\mu(u).$$

В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости это выражение стремится к 0. •

Теорема 2.2. *При выполнении условий* $1^* - 2^*$ *для любой функции* $f \in H_K(\Omega)$ *существует предел в метрике пространства* $L^1(\mu)$

$$Jf(z) = \lim_{c \to 1-0} f(cz). \tag{2.2}$$

При этом оператор J ограничен как оператор $H_K(\Omega) \to L^1(\mu)$. Кроме того, оператор J сопряжен к оператору I.

Доказательство. Пусть $J : H_K(\Omega) \to L^\infty(\mu)^*$ – оператор, сопряженный к I. Пространство $L^\infty(\mu)^*$, сопряженное к $L^\infty(\mu)$, необозримо, но линейный функционал $l = Jf$ на $L^\infty(\mu)$ непрерывен в смысле Теоремы 2.1, т.е. если $\varphi_j \to \varphi$ почти всюду, и последовательность φ_j ограничена в L^∞, то $l(\varphi_j) \to l(\varphi)$. Поэтому линейный функционал l однозначно определяется своими значениями на пространстве непрерывных функций на M, и следовательно l имеет вид

$$l(\varphi) = \int_M \varphi \, d\sigma,$$

где σ – некоторая конечная комплексно-значная мера на M, а функция φ предполагается борелевской. Если $\varphi = 0$ в смысле L^∞ (т.е. $\varphi = 0$ почти всюду), то $l(\varphi) = 0$, а поэтому мера σ абсолютно непрерывна относительно μ. Поэтому $\sigma = \rho \cdot \mu$, где $\rho \in L^1(\mu)$.

Итак, оператор J отображает $H_K(\Omega)$ в $L^1(\mu)$. Раскладывая f по однородным полиномам, мы видим, что семейство функций $F_c(z) = f(cz)$ непрерывно зависит от c, и теперь существование радиального предела (2.2) оказывается следствием непрерывности оператора J. •

2.2. Граничные гильбертовы пространства $E^\circ(\mu)$ и $E(\mu)$. Оператор I отображает $L^\infty(\mu)$ в $H_K(\Omega)$, и тем самым на $L^\infty(\mu)$ индуцируется скалярное произведение

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle I\varphi_1, I\varphi_2 \rangle_{H_K(\Omega)} = \int\int \overline{K^*(z, \bar{u})}\, \varphi(z) \overline{\varphi(u)} \, d\mu(z) \, d\mu(u). \quad (2.3)$$

Это скалярное произведение может оказаться вырожденным. Профакторизуем $L^\infty(\mu)$ по ядру скалярного произведения (2.3), а далее пополним полученное предгильбертово пространство. В итоге мы получим гильбертово пространство, которое мы обозначим через $E^\circ(\mu)$. Теперь оператор I может рассматриваться как оператор изометрического вложения

$$I : E^\circ(\mu) \to H_K(\Omega).$$

Обозначим образ оператора J через $E(\mu)$, а ядро оператора J через $\operatorname{Ker} J$. Пространство $H_K(\Omega)/\operatorname{Ker} J$ является гильбертовым пространством, а оператор J отображает его биективно на $E(\mu)$. Отождествляя $H_K(\Omega)/\operatorname{Ker} J$ с $E(\mu)$, мы получаем на $E(\mu)$ структуру гильбертова пространства.

По построению, пространства $E^\circ(\mu)$ и $E(\mu)$ двойственны друг другу. Каноническое спаривание

$$B : E^\circ(\mu) \times E(\mu) \to \mathbb{C}$$

задается формулой

$$B(\varphi, f) = \int_M \varphi(z)\overline{f(z)}\, d\mu(z); \tag{2.4}$$

она имеет буквальный смысл, если $\varphi \in L^\infty$, а $f \in E(\mu)$.

Кроме того, пространства $E^\circ(\mu)$ и $E(\mu)$ канонически изоморфны, а именно оператор

$$JI : E^\circ(\mu) \to E(\mu)$$

унитарен (в самом деле, $J = I^*$, поэтому $IM\,I$ есть ортогональное дополнение до $\operatorname{Ker} J$; далее, I изометрично отображает $E^\circ(\mu)$ на $IM\,I$, а J изометрично отображает $IM\,I$ на $E(\mu)$). Заметим, что для этого оператора есть явная формула

$$(JI\varphi)(z) = \int K^*(z, u)\varphi(u)\, d\mu(u). \tag{2.5}$$

2.3. Граничные представления. Пусть теперь группа G действует на Ω биголоморфными преобразованиями $z \mapsto z^g$ (для нас интересен случай, когда G не совпадает со всей группой автоморфизмов области Ω). Пусть $j(g, z)$ – комплексный якобиан отображения $z \mapsto z^g$. Рассмотрим ситуацию, описанную в п.1.7, т.е. пусть группа G действует в $H_K(\Omega)$ унитарными операторами вида

$$\rho(g)f(z) = j(g, z)^s f(z^g). \tag{2.6}$$

Пусть M – некоторое компактное G-инвариантное подмногообразие в $\partial\Omega$, пусть μ – поверхностная мера Лебега на M. Пусть ядро $K(z, \bar{u})$ и мера μ удовлетворяют условиям 1^*–2^*. Тогда в пространствах $E(\mu)$ и $E^\circ(\mu)$ очевидным образом возникают унитарные представления группы G. А именно, в $E(\mu)$ группа G действует по формуле

$$\nu(g)f(x) = j(g, x)^s\, f(x^g), \tag{2.7}$$

совпадающей с формулой (2.6), а в $E^\circ(\mu)$ – по формуле

$$\nu^\circ(g)f(x) = l(g, x)j(g, x)^{-s}\, f(x^g), \tag{2.8}$$

где $l(g, x)$ – якобиан отображения $M \to M$, заданного формулой $x \mapsto x^g$.

Представления ν° и ν двойственны друг другу относительно формы B, заданной формулой (2.4), т.е.

$$B(\nu^\circ(g)\varphi, \nu(g)f) = B(\varphi, f). \tag{2.9}$$

С другой стороны ν° и ν эквивалентны, сплетающий оператор задается формулой (2.5).

2.4. Пример: ограничение голоморфных функций в шаре на вещественный экватор. Пусть $\Omega = B^q$. Пусть $M = S^{q-1}$ – сфера в $\mathbb{R}^q \subset \mathbb{C}^q$, заданная уравнением

$$\sum_{k=1}^q x_k^2 = 1; \qquad x_j \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим в $SU(1,q)$ подгруппу $SO(1,q)$, состоящую из вещественных матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1_q \end{pmatrix}; \quad \det(g) = 1$$

(иными словами, $SO(1,q)$ – подгруппа в $SU(1,q)$, состоящая из вещественных матриц.)

Группа $SU(1,q)$ действует на B^q преобразованиями (1.18). Несложно показать, что сфера S^{q-1} инвариантна относительно преобразований $x \mapsto x^g$, где $g \in SO(1,q)$, и, более того, эти преобразования являются конформными преобразованиями сферы S^{q-1}. Коэффициент растяжения преобразования $x \mapsto x^g$, заданного матрицей $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, в точке x равен $(a + xc)^{-1}$. Поэтому якобиан $l(q,x)$ преобразования $x \mapsto x^g$ сферы в себя задается формулой

$$l(g,x) = (a + xc)^{-(q-1)}.$$

Пусть $s > 0$, пусть ядро $K_s(z, \bar{u})$ и пространство H_s – те же, что и в п.1.5. Рассмотрим действие ρ_s группы $SU(1,q)$ в H_s унитарными операторами вида (см. п.1.8)

$$\rho_s(g)f(z) = (a + zc)^{-s} f(z^g).$$

Пусть

$$0 < s < (q-1)/2.$$

Тогда, для $M = S^{q-1}$ и естественной меры μ на M, как легко видеть, выполнены условия $1^* - 2^*$, причем

$$K^*(x,y) = (1 - \sum x_j y_j)^{-s} = \|x - y\|^{-2s},$$

где $x, y \in S^{q-1}$, а $\|\cdot\|$ обозначает естественную евклидову норму в $\mathbb{R}^q$.

Опишем пространства

$$E(\mu) = E_s(S^{q-1}); \quad E^\circ(\mu) = E_s^\circ(S^{q-1})$$

и унитарные представления ν_s, ν_s° группы $SO(1,q)$ в этих пространствах.

Скалярное произведение (2.3) в $L^\infty(\mu) = L^\infty(S^{q-1})$ равно

$$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = \int\limits_{S^{q-1}} \int\limits_{S^{q-1}} \frac{\varphi_1(x_1)\overline{\varphi_2(x_2)}dx_1 dx_2}{\|x_1 - x_2\|^{2s}}. \tag{2.10}$$

Пространство $E_s^\circ(S^{q-1})$ есть пополнение $L^\infty(S^{q-1})$ по норме, задаваемой этим скалярным произведением. Согласно (2.8) группа $SO(1,q)$ действует в $E_s^\circ(S^{q-1})$ унитарными операторами

$$\nu_s^\circ(g)f(x) = (a + xc)^{-(q-1)+s} \cdot f(x^g). \tag{2.11}$$

В $E_s(S^{q-1})$ группа $SO(1,q)$ действует унитарными операторами

$$\nu_s(g)f(x) = (a + xc)^{-s} f(x^g). \tag{2.12}$$

Само пространство $E_s(S^{q-1})$ мы опишем чуть ниже, в п.2.6, там же мы более точно опишем пространство $E_s^\circ(S^{q-1})$.

Замечание. Представления $\nu_s \simeq \nu_s^\circ$ группы $SO(1,q)$ называются представлениями сферической дополнительной серии. Наша конструкция показывает, что эти представления входят в ограничения “скалярных” представлений $SU(1,q)$ со старшим весом на $SO(1,q)$.

2.5. Вариация конструкции: гильбертовы пространства $F^\circ(M)$. Пусть $H_K(\Omega)$ – некоторое гильбертово пространство голоморфных функций. Пусть $M \subset \partial\Omega$ некоторое подмногообразие. Пусть μ – поверхностная мера Лебега на M. Обозначим через $\mathcal{D}^\circ(M)$ пространство обобщенных функций на M; любой элемент $\chi \in \mathcal{D}^\circ(M)$ можно рассматривать как обобщенную функцию на $\mathbb{C}^N$. Через $\mathcal{H}(\Omega)$ мы обозначим пространство всех голоморфных функций в Ω с топологией равномерной сходимости на компактах. Оператор Ξ, заданный формулой (1.7), является непрерывным оператором $\mathcal{D}^\circ(M) \to \mathcal{H}(\Omega)$. Пусть $\mathcal{F}(M)$ – множество всех $\chi \in \mathcal{D}^\circ(M)$ таких, что $\Xi\chi \in H_K(\Omega)$. Тогда на $\mathcal{F}(M)$ возникает скалярное произведение

$$\langle\chi, \tilde\chi\rangle = \langle\Xi\chi, \Xi\chi\rangle_{H_k(\Omega)}.$$

Профакторизуем $\mathcal{F}(M)$ по ядру этого скалярного произведения и пополнение полученного предгильбертова пространства обозначим через $F^\circ(M)$. Естественно возникают следующие вопросы:

А) Верно ли, что условия $1^* - 2^*$ необходимы для нетривиальности пространства $F^\circ(M)$?

Б) Верно ли, что при выполнении условий $1^* - 2^*$ $F^\circ(M) = E^\circ(\mu)$?

В) Верно ли, что любой элемент $F^\circ(M)$ есть обобщенная функция? Точнее, верно ли, что отображение $\mathcal{F}(M) \to F^\circ(M)$ сюръективно?

Ответ на вопрос А) может оказаться отрицательным даже в самых простых случаях, см. ниже п.2.8.

Ответ на вопрос В) также, вообще говоря, отрицателен (например, может случиться, что M лежит в оболочке голоморфности области Ω, и тогда обобщенные функции явно представляют не все элементы $F^\circ(M)$). Однако во всех случаях, рассматриваемых в нашей работе, ответ на вопрос В) все же положителен. Никаких общих высказываний по этому поводу нам не известно.

Сейчас мы покажем, что ответ на вопрос Б) положителен в одном очень частном, но достаточном для наших целей случае.

Предложение 2.1. *Пусть на Ω действует линейными преобразованиями компактная группа L. Пусть $M \subset \partial\Omega$ является орбитой группы L. Пусть выполнены условия $1^* - 2^*$. Тогда $F^\circ(M) = E^\circ(M)$*

Доказательство. Пусть $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots$ – все неприводимые характеры группы L. Любая $\chi \in \mathcal{D}^\circ(M)$ разлагается в сходящийся в $\mathcal{D}^\circ(M)$ ряд $\chi = \sum \chi^{(j)}$, где

$$\chi^{(j)}(x) = \int_L \theta^{(j)}(g)\chi(x^g)dg;$$

при этом в силу гладкости функций $\theta^j(g)$, функции $\chi^{(j)}$ также являются гладкими. Соответственно $\Xi\chi$ разлагается в ряд, сходящийся в $\mathcal{H}(\Omega)$,

$$\Xi\chi = \sum \Xi(\chi^{(j)}) = \sum (\Xi\chi)^{(j)},$$

где

$$(\Xi\chi)^{(j)}(g) = \int_L \theta^{(j)}(g)(\Xi\chi)(z^g)dg.$$

Пусть $\chi \in \mathcal{F}(M)$. Тогда $\Xi\chi \in H_K(\Omega)$, а следовательно ряд $\sum(\Xi\chi)^{(j)}$ сходится к $\Xi\chi$ в смысле $H_K(\Omega)$, а это по определению означает, что $\sum \chi^{(j)}$ сходится к χ в $F^\circ(M)$. Но $\chi^{(j)} \in E^\circ(\mu)$. •

2.6. Пример: описание пространств $E_s^\circ(S^{q-1})$ и $E_s(S^{q-1})$. Пусть Harm_j – пространство однородных гармонических многочленов на $\mathbb{R}^q$ степени j, ограниченных на сферу S^{q-1} (подробнее см. [6]). Известно, что

$$L^2(S^{q-1}) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathrm{Harm}_j;$$

при этом представление $SO(q)$ в Harm_j неприводимо. Любая обобщенная функция f на S^{q-1} разлагается в ряд $f = \sum f^{(j)}$, где $f^{(j)} \in \mathrm{Harm}_j$ причем ряд сходится в смысле обобщенных функций, и

$$\exists n : \|f^{(j)}\|_{L^2(S^{q-1})} = O(j^n); \quad j \to \infty.$$

При этом

$$f \in C^\infty(S^{q-1}) \Longleftrightarrow \forall n : \|f^{(j)}\|_{L^2(S^{q-1})} = O(j^{-n}); \quad j \to \infty$$

Предложение 2.2. *Пусть $f_1, f_2 \in C^\infty(S^{q-1})$. Тогда*

$$\langle f_1, f_2\rangle_{E_s^\circ} = C(s,q) \sum \frac{\Gamma(j+s)}{\Gamma(j+q-s-1)} \langle f_1^{(j)}, f_2^{(j)}\rangle_{L^2(S^{q-1})}, \tag{2.13}$$

где $C(q,s)$ некоторая постоянная, не зависящая от j.

Доказательство: см. [5], X.2.5, [53]. •

Следствие. *Пусть f - обобщенная функция на S^{q-1}. Тогда*

$$f \in E_s^\circ(S^{q-1}) \Longleftrightarrow \sum j^{-(q-2s-1)} \|f^{(j)}\|^2_{L^2(S^{q-1})} < \infty. \tag{2.14}$$

Доказательство. Формула (2.13) влечет условие

$$f \in E_s^\circ(S^{q-1}) \Longleftrightarrow \sum \frac{\Gamma(j+s)}{\Gamma(j+q-s-1)} \|f^{(j)}\|^2_{L^2(S^{q-1})} < \infty,$$

которое равносильно искомому условию в силу формулы Стирлинга. •

Условие (2.14) труднопроверяемо, существуют однако два удобных критерия для проверки того, верно $f \in E_s^\circ(S^{q-1})$ или нет.

Предложение 2.3. *Пусть f – обобщенная функция на сфере S^{q-1}. Пусть $0 < c < 1$. Тогда выражение*

$$\gamma(c) = \int_{S^{q-1}} \int_{S^{q-1}} \frac{f(x)\overline{f(y)}\, dx\, dy}{(1 - c^2 \sum x_k y_k)^s} \tag{2.15}$$

монотонно возрастает. При этом $f \in E_s^\circ(S^{q-1})$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{c \to 1-0} \gamma(c)$. Этот предел совпадает с $\|f\|^2_{E^\circ(S^{q-1})}$.

Доказательство: это частный случай предложения 1.5. •

Предложение 2.4. *Пространство $E_s^\circ(S^{q-1})$ есть Соболевское пространство $W^{-((q-1)/2-s)}$ на S^{q-1}.*

Определение Соболевских пространств см., например, [8], [26].

Доказательство. Обозначим через Δ оператор Лапласа на сфере. В пространстве Harm_j он действует как умножение на $-j(j+q-1)$ (см. [5], IX.5.1). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $(-1-\Delta)^\alpha$ есть псевдодифференциальный оператор порядка 2α, и следовательно при всех $\sigma \in \mathbb{R}$ он отображает непрерывно $W^\sigma(S^{q-1}) \to W^{\sigma-2\alpha}(S^{q-1})$ (см. [26], 2.6) и, более того, является изоморфизмом между этими пространствами (обратный оператор есть $(-1-\Delta)^{-\alpha}$). Теперь берем в качестве W^σ пространство $W^\circ = L^2$ и применяем формулу (2.14). •

Пространство $E_s(S^{q-1})$ описывается теперь как пространство, двойственное к $E_s^\circ(S^{q-1})$. А именно, как топологические векторное пространство, $E_s(S^{q-1})$ есть Соболевское пространство $W^{(q-1)/2-s}(S^{q-1})$. Кроме того,

$$f \in E_s(S^{q-1}) \Longleftrightarrow \sum j^{q-2s-1}\|f_j\|^2_{L^2(S^{q-1})} < \infty,$$

а скалярное произведение в $E_s(S^{q-1})$ задается формулой

$$\langle f_1, f_2\rangle = \sum \frac{\Gamma(j+q-s-1)}{\Gamma(j+s)} \langle f_1^{(j)}, f_2^{(j)}\rangle_{L^2(S^{q-1})}.$$

Эту формулу принято записывать в виде

$$\langle f_1, f_2\rangle = C(q,s) \int\limits_{S^{q-1}} \int\limits_{S^{q-1}} \frac{f_1(x)\overline{f_2(y)}\,dx\,dy}{\|x-y\|^{2(q-1-s)}}.$$

Интеграл в правой части этой формулы расходится, и ядро $\|x-y\|^{-\lambda}$ здесь следует понимать как обобщенную функцию, являющуюся аналитическим (по λ) продолжением функции $\|x-y\|^{-\mu}$, которая интегрируема при $\mu < q-1$ (см. [7], [33]).

2.7. Еще одна вариация конструкции. Пусть M – подмногообразие в $\partial\Omega$, и пусть $\mathcal{D}'(M)$ – пространство обобщенных функций на $\mathbb{C}^N$ с носителем в M. Рассмотрим множество $R(M)$ всех

$\chi \in \mathcal{D}'(M)$ таких, что $\Xi\chi \in H_K(\Omega)$. Заметим, что $R(M)$, вообще говоря, больше, чем пространство $\mathcal{F}(M)$ из п.2.5, потому что $R(M)$ может содержать частные производные от функций $\chi \in \mathcal{D}^\circ(M)$ по направлениям, нормальным к M. Обозначим через $Q^\circ(M)$ пополнение $R(M)$ по скалярному произведению $\langle \chi, \tilde{\chi} \rangle = \langle \Xi\chi, \Xi\tilde{\chi} \rangle$.

Пример. Пусть в условиях п.2.4 k – целое число, $k < (q-1)/2 - s$. Тогда пространство $Q^\circ(M)$ содержит нормальные частные производные порядка $\leqslant k$ от гладких δ-функций, сосредоточенных на $S^{q-1} \subset S^{2q-1} = \partial B_q$.

2.8. Пример: двумерный поликруг. Рассмотрим в двумерном поликруге $\mathcal{D}^2 : |z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ положительно определенное ядро

$$K_{s_1,s_2}(z_1, z_2; \bar{u}_1, \bar{u}_2) = (1 - z_1\bar{u}_1)^{-s_1}(1 - z_2\bar{u}_2)^{-s_2},$$

где $s_1 > 0$, $s_2 > 0$. Пусть H_{s_1,s_2} – соответствующее гильбертово пространство голоморфных функций. Пусть $\mathbb{T}^2$ – тор $|z_1| = |z_2| = 1$. Пусть $M \subset \mathbb{T}^2$ – гладкая кривая. Оказывается, что свойства операторов ограничения на M очень сильно зависят от расположения M. Мы вкратце обсудим несколько примеров.

Пример 1. Пусть M – кривая $z_1 = e^{i\varphi}$, $z_2 = 1$. Тогда оператор ограничения на M функции $f \in H_{s_1,s_2}$ ни в каком смысле не определен.

Пример 2. Пусть M трансверсальна к параллелям и диагоналям тора $\mathbb{T}^2$. Пусть $s_1 + s_2 < 1$. Тогда выполнены условия $1^* - 2^*$ п.2.1. Поэтому определено ограничение функции $f \in H_{s_1,s_2}$ на M (в смысле радиального L^1-предела). При этом получающуюся функция на M является Соболевской функцией класса $1 - s_1 - s_2$. Если при этом M задана уравнением $z_1 = e^{i\varphi}$, $z_2 = e^{-i\varphi}$, то любая Соболевская функция класса $1 - s_1 - s_2$ является ограничением функции $f \in H_{s_1,s_2}$ на M. При других M это, вообще говоря, неверно.

Пример 3. Пусть $\Delta \subset \mathcal{D}^2$ – диагональ, т.е. подмножество, выделяемое уравнением $z_1 = z_2$. Пусть M – граница Δ. Пусть δ_M – дельта-функция кривой M, (т.е. мера Лебега на M, рассматриваемая как обобщенная функция на $\mathbb{C}^2$). Пусть $\delta_M^{(j)}$ – частная производная δ_M порядка k в направлении касательном к $\mathbb{T}^2$ и нормальном к M. Тогда пространство $R(M)$ из п.2.7 содержит все обобщенные функции вида $f \cdot \delta_M^{(k)}$, где $f \in C^\infty(M)$ $k \geqslant 0$.

2.9. Пример: ограничение на канторовское множество. Пусть M – стандартное канторовское множество на окружности $|z| = 1$ (мы делим окружность на 4 равные части, две противоположные части выкидываем; две оставшиеся части делим каждую на три равных части, средние выкидываем и т.д.). Тогда в пространстве $H_s(B_1)$ при $s < \ln 2/\ln 3$ определен оператор ограничения голоморфной функции на M (а именно, для естественной меры μ на M выполнены условия $1^* - 2^*$).

2.10. Замечания. Граничной теории голоморфных функций посвящена огромная литература (мы ограничимся ссылками на монографию Рудина [25] и обзор Александрова [1]). Наши цели ощутимо отличаются от задач, обычно рассматриваемых в анализе. Ограничение голоморфных функций на "маленькие" подмножества в границе рассматривалось в анализе для ряда функциональных пространств. Упомянем теорему Нагеля–Рудина (см. [25]) об ограничении функций из $H^\infty(B_q)$ на подходяще расположенные кривые в S^{2q-1}. Отметим, что в случае, когда M является интерполяционным множеством, существуют функции из $H^\infty(\Omega)$, для которых радиальный предел не существует нигде на M (см. [25], 11.2.2), обсуждение интерполяционных множеств см., например, в [25], гл.10; [66], §V.5; [1], гл. [5] (заметим, что интересующие нас пространства, вообще говоря, не содержат H^∞). Наш пример из п.2.9 относится к теории исключительных множеств и по-существу известен (см. книгу [65], V, теорема 3 обзор [10]).

С другой стороны, наши конструкции родственны известной теореме о следе в Соболевских пространствах, см. [8], §3.2; [26], §1.3.

2.11. Граничные значения векторнозначных функций. Все сказанное выше легко обобщается на гильбертовы пространства векторнозначных функций. Пусть Ω, K, T – те же, что в п.1.9. Пусть $M \subset \partial\Omega$ – компактное подмножество, пусть μ – конечная положительная мера на M. Пусть $\mathrm{End}\,(T)$-значное ядро K удовлетворяет условиям

1^{**}. На $M \times M$ почти всюду по мере $\mu \times \mu$ существует

$$K^*(z, \bar{u}) = \lim_{c \to 1-0} K(cz, \overline{cu}).$$

2^{**}. Этот предел является мажорируемым, т.е. существует числовая функция $\varkappa$ на $M \times M$, интегрируемая по мере $\mu \times \mu$ такая, что для всех $c \in (0, 1)$ выполнено

$$\|K(cz, c\bar{u})\| \leqslant \varkappa(z, \bar{u}).$$

Тогда теоремы 2.1 и 2.2 остаются в силе вместе с их доказательствами; под L^1 и L^∞ в этом случае следует понимать пространства L^1 и L^∞ функций на M со значениями в конечномерном пространстве T.

Буквально так же как в п.2.2 определяются гильбертовы пространства $E^\circ(\mu)$ и $E(\mu)$. Скалярное произведение в $E^\circ(\mu)$ задается формулой

$$\langle f_1, f_2\rangle_{E^\circ(\mu)} = \int\limits_M \int\limits_M \langle f_1(z), K^*(z,\bar{u}) f_2(u)\rangle_T \, d\mu(z)\, d\mu(u). \qquad (2.16)$$

Каноническое спаривание $E^\circ(\mu) \times E(\mu) \to \mathbb{C}$ задается формулой

$$B(f,h) = \int\limits_M \langle f(z), h(z)\rangle_T \, d\mu(z), \qquad (2.17)$$

а канонический изоморфизм $E^\circ(\mu) \to E(\mu)$ имеет вид (2.5).

Пусть группа Ли G действует на Ω биголоморфными преобразованиями $z \mapsto z^g$; пусть дано унитарное представление G в $H_K(\Omega)$, заданное операторами вида

$$\rho(g)f(z) = R(g,z)\, f(z^g), \qquad (2.18)$$

где R – функция $G \times \Omega \mapsto GL(T)$, голоморфная по z (подробнее обсуждение этой ситуации см. ниже в п.4.0). Пусть $M \subset \partial\Omega$ – многообразие, инвариантное относительно G. Тогда в случае выполнения условий $1^{**} - 2^{**}$ мы получаем унитарные представления ν° и ν группы G в гильбертовых пространствах $E^\circ(\mu)$ и $E(\mu)$. Представление ν в пространстве $E(\mu)$ задается формулой

$$\nu(g)f(x) = R(g,x)f(x^g); \quad g \in G, \quad x \in M \qquad (2.19)$$

(по существу эта формула совпадает с (2.18)). Представление ν° в пространстве $E^\circ(\mu)$ задается формулой

$$\nu^\circ(g)f(x) = l(g,x)[R(g,x)^*]^{-1} f(x^g), \qquad (2.20)$$

где $l(g,x)$ – якобиан отображения $M \to M$, задаваемого формулой $x \mapsto x^g$.

§ 3. Скалярные функции в матричных шарах

В пп.3.1–3.4 мы приводим необходимые нам сведения по геометрии матричных шаров

$$B_{p,q} = U(p,q)/(U(p) \times U(q)).$$

Далее мы описываем естественные гильбертовы пространства голоморфных функций в матричных шарах, введенные Березиным в [4] (п.3.5), и строим оператор ограничения на некоторое специальное подмногообразие в границе Шилова $B_{p,q}$, инвариантное относительно группы $O(p,q)$.

3.1. Группа $U(p,q)$. Пусть $p \leqslant q$. Обозначим через $\mathbb{C}^{p,q}$ пространство $\mathbb{C}^{p+q}$, снабженное индефинитной эрмитовой формой

$$s((x_1,\dots,x_{p+q});(y_1,\dots,y_{p+q})) = -\sum_{i=1}^{p} x_i\bar{y}_i + \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j\bar{y}_i. \qquad (3.1)$$

Через $U(p,q)$ мы обозначим группу преобразований в $\mathbb{C}^{p,q}$, сохраняющих форму $s(\cdot,\cdot)$. Элементы группы $U(p,q)$ мы будем записывать в виде блочных матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $(p+q)\times(p+q)$. Легко видеть, что $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(p,q)$ равносильно тождеству

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1_p & \\ & 1_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -1_p & \\ & 1_q \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Через $SU(p,q)$ обозначается подгруппа в $U(p,q)$, состоящая из матриц с определителем единица. Подгруппа в $U(p,q)$, состоящая из вещественных матриц, обозначается через $O(p,q)$. Группа $O(p,q)$ состоит из четырех компонент связности; компонента связности, содержащая единицу, обозначается через $SO_0(p,q)$. При этом $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(p,q)$ содержится в $SO_0(p,q)$, если выполнены 3 условия:

$$\det(g) = +1; \quad \det(a) > 0; \quad \det(d) > 0$$

(любые два из этих условий влекут третье).

Алгебра Ли $u(p,q)$ группы $U(p,q)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad \delta + \alpha^* = 0, \quad \alpha + \delta^* = 0, \quad \beta = \gamma^*.$$

Алгебра Ли $o(p,q)$ группы $O(p,q)$ – это подалгебра в $u(p,q)$, состоящая из вещественных матриц.

3.2. Матричные шары $B_{p,q}$. Через $B_{p,q}$ (соответственно $\overline{B_{p,q}}$) мы обозначим множество всех комплексных матриц z размера $p\times q$, таких, что $\|z\| < 1$ (соответственно $\|z\| \leqslant 1$); через $\|\cdot\|$ мы обозначаем обычную норму матрицы как оператора из $\mathbb{C}^q$ в $\mathbb{C}^p$.

Группа $U(p,q)$ действует на $B_{p,q}$ биголоморфными преобразованиями

$$z \mapsto z^g = (a+zc)^{-1}(b+zd). \qquad (3.3)$$

Заметим, что скалярной матрице g соответствует тождественное преобразование $z \mapsto z^g$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $g \in SU(p,q)$. Дифференциал отображения $z \mapsto z^g$ задается формулой

$$[\delta z] \mapsto -(a+zc)^{-1}[\delta z](-cz^g+d). \tag{3.4}$$

Если $g \in SU(p,q)$, то комплексный якобиан отображения (3.3) равен

$$j(g,z) = \det{}^{-(p+q)}(a+zc). \tag{3.5}$$

Замечание 1. То, что $z \in B_{p,q}$ влечет $z^g \in B_{p,q}$, вытекает из изложенной ниже конструкции п.3.4. Далее, в силу (3.2) мы имеем $a^*a = 1 + c^*c$, поэтому $|a| > |c|$, а поэтому матрица $a + zc$ обратима для всех $z \in B_{p,q}$, $g \in U(p,q)$, т.е. отображение $z \mapsto z^g$ непрерывно на $\overline{B_{p,q}}$.

Замечание 2. Преобразованиями (2.3) при $p \neq q$ исчерпываются все биголоморфные преобразования $B_{p,q}$ в себя; при $p = q$ добавляется еще транспонирование $z \mapsto z^t$, см. [34], [42].

Замечание 3. Группа $U(p,q)$ действует на $B_{p,q}$ транзитивно, причем стабилизатор точки $0 \in B_{p,q}$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $a \in U(p)$, $d \in U(q)$, поэтому как однородное пространство

$$B_{p,q} \simeq U(p,q)/(U(p) \times U(q)).$$

Замечание 4. Области $B_{p,q}$ образуют одну из четырех серий классических однородных областей Картана (или, что то же самое, некомпактных эрмитовых симметрических пространств, см. [34], [24], [27], [28]).

3.3. Граница Шилова. Граница $\partial B_{p,q}$ области $B_{p,q} \subset \mathbb{C}^{pq}$ состоит из матриц z таких, что $\|z\| = 1$. Множество $\partial B_{p,q}$ состоит из p орбит $N_0, \dots, N_{p-1}$ группы $U(p,q)$; орбита N_j выделяется условием $\operatorname{rank}(1 - zz^*) = j$, см. [24]. Очевидно, замыкание орбиты N_j содержит орбиту N_{j-1}. Нас будет интересовать лишь самая маленькая орбита N_0, она состоит из матриц z, удовлетворяющих условию $zz^* = 1$. Множество N_0 является границей Шилова области $B_{p,q}$ в обычном смысле слова.

Условие $zz^* = 1$ означает, что отображение $\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^q$, заданное формулой $x \mapsto xz$, есть изометрическое вложение. Его образ есть p-мерное подпространство в $\mathbb{C}^q$, причем в этом подпространстве есть выделенный ортонормированный базис – образ стандартного базиса в $\mathbb{C}^p$. Таким образом, N_0 отождествляется с многообразием всех ортонормированных p-реперов в $\mathbb{C}^q$, т.е. с комплексным многообразием Штифеля.

Аналогом "вещественного экватора" $S^{q-1} \subset \partial B_q$ из §2 в нашем случае будет вещественное многообразие Штифеля $M = M_{p,q}$, оно состоит из вещественных матриц, удовлетворяющих условию $zz^* = 1$, или, что то же самое, из изометрических вложений $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

3.4. Вложение $B_{p,q}$ в грассманиан. Обозначим через $\mathcal{L}_-$ множество всех p-мерных подпространств в $\mathbb{C}^{p,q}$, на которых форма (3.1) строго отрицательно определена.

Пусть $z \in B_{p,q}$. Обозначим через $\Gamma_z \subset \mathbb{C}^{p,q}$ график оператора $z : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^q$. Легко видеть, что $\Gamma_z \in \mathcal{L}_-$, и более того, отображение $z \mapsto \Gamma_z$ является биекцией $B_{p,q} \to \mathcal{L}_-$.

Группа $U(p,q)$ очевидным образом действует на $\mathcal{L}_-$, а следовательно, и на $B_{p,q}$. Это действие и задается формулой (3.3).

Опишем, что означают на этом языке остальные объекты пп.3.2–3.3.

а) $z \in \overline{B_{p,q}}$ означает, что форма (3.1) неположительно определена на Γ_z.

б) $z \in N_j$ означает, что форма (3.1) вырождена на Γ_z, и ее ранг на Γ_z равен j.

в) $z \in N_0$ равносильно изотропности Γ_z (т.е. форма (3.1) равна 0 на Γ_z.

г) Точки $z \in M$ соответствуют вещественным изотропным подпространствам в $\mathbb{R}^{p+q} \subset \mathbb{C}^{p,q}$.

3.5. Пространства H_s. Пусть группа $U(p,q)$ (точнее, ее универсальная накрывающая) действует в пространстве голоморфных функций на $B_{p,q}$ по формуле

$$\rho_s(g)f(z) = \det{}^{-s}(a + zc)f(z^g) \tag{3.6}$$

(т.е. мы находимся в ситуации, описанной в п.1.7). Несложные рассуждения, аналогичные рассуждениям п.1.8 (мы проведем их в большей общности ниже в п.4.3) показывают, что скалярное произведение, инвариантное относительно операторов $\rho_s(g)$, может задаваться лишь ядром вида

$$K_s(z, \bar{u}) = \det{}^{-s}(1 - zu^*). \tag{3.7}$$

Обозначим через Σ_+ луч $s > p-1$ на оси $\mathbb{R}$, а через Σ множество Σ_+, к которому добавлены точки $0, 1, \dots, p-1$.

Теорема Березина (см. [4]). *Ядро $K_s(z,\bar{u})$ положительно определено на $B_{p,q}$ тогда и только тогда, когда $s \in \sum$. При выполнении этого условия представление ρ_s унитарно в $H_s = H_{K_s}(B_{p,q})$.*

Обозначим через $H_s = H_s(B_{p,q})$ гильбертово пространство голоморфных функций на $B_{p,q}$, определяемое ядром $K_s(z,\bar{u})$.

Замечание 1. Если $s \in \Sigma_+$, то пространство H_s содержит пространство Pol всех многочленов. При $s \in \Sigma \setminus \Sigma_+$ это уже не так. Описание $H_s \cap \mathrm{Pol}$ в этом случае можно найти в статье Березина [4] (стр. 1272–1273 русского издания). Там же содержится описание скалярного произведения в H_s в терминах $U(p)\times U(q)$-гармоник на $\mathbb{C}^{pq}$. При $s = 0$ пространство H_s одномерно.

Замечание 2. При $s > p+q-1$ скалярное произведение в H_s может быть записано формулой

$$\langle f_1, f_2\rangle_{H_s} = c(s)\int\limits_{B_{p,q}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\det{}^{s-p-q}(1-zz^*)dz\,d\bar{z},$$

где $c(s)$ – некоторый нормировочный множитель. Точка $s = q-1$ соответствует одному из аналогов пространства Харди H^2:

$$\langle f_1, f_2\rangle_{H_{q-1}} = \int\limits_{N_0} f_1(z)\overline{f_2(z)}dz\,d\bar{z}.$$

3.6. Многообразия Штифеля. Опишем подробнее многообразие $M \subset \mathbb{C}^{pq}$ (см. п.2.3). На M преобразованиями (3.3) действует группа $SO_0(p,q)$. Подгруппа $SO(p)\times SO(q) \subset SO_0(p,q)$ действует на M преобразованиями вида

$$z \mapsto a^{-1}zd,$$

где $a \in SO(p)$, $d \in SO(q)$. Легко понять, что группа $SO(q)$ действует на M транзитивно, причем стабилизатор точки

$$z_0 = (1_p\; 0) \in M \tag{3.8}$$

есть $SO(q-p)$ (это совсем очевидно, если перейти в модель п.3.4).

Следовательно и группа $SO_0(p,q)$ действует на M транзитивно. Опишем стабилизатор P точки z_0 в $SO_0(p,q)$. Пусть $l_1,\dots,l_{p+q}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{p+q}$.

Введем в $\mathbb{R}^{p+q}$ новый базис $f_1,\dots,f_{p+q}$:

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_i + l_{i+p});\quad i \leqslant p$$

$$f_j = l_{j+p};\quad p < j \leqslant q$$

$$f_{k+q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_k - l_{k+p});\quad k \leqslant p.$$

Подпространство Γ_{z_0} (график оператора z_0, см. п.3.4) натянуто на векторы $f_1, \ldots, f_p$, а ортогональное дополнение к Γ_{z_0} относительно формы (3.1) натянуто на базисные векторы $f_1, \ldots, f_q$. Элемент $g \in P$, по определению, стабилизирует Γ_{z_0}, а значит и ортогональное дополнение к Γ_{z_0}. Таким образом, $g \in P$ в базисе f_j имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}p \\ \}q-p \end{matrix} \quad ; g \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} g^t = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Подгруппа P есть произведение редуктивной подгруппы R и максимальной нильпотентной подгруппы $\mathcal{N}$. Редуктивная часть $R \subset P$ состоит из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & & \\ & g_{22} & \\ & & g_{11}^{t-1} \end{pmatrix}; \quad g_{11} \in GL_+(p, \mathbb{R}), \quad g_{22} \in SO(q-p). \quad (3.10)$$

где через $GL_+(p, \mathbb{R})$ обозначена группа матриц с положительным определителем. Нильпотентная подгруппа $\mathcal{N}$ состоит из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 \\ g_{31} & -g_{21}^t & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{31} + g_{31}^t = -g_{21}^t g_{21}. \quad (3.11)$$

Отметим, что

$$R = GL_+(p, \mathbb{R}) \times SO(q-p).$$

Нам будет необходимо писать явные формулы в старом базисе $l_1, \ldots, l_{p+q}$ в $\mathbb{R}^{p+q}$. В этом случае элементы $g \in P \subset SO_0(p,q)$ имеют вид

$$g = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & d_{11} & -b_2 \\ c_2 & c_2 & d_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}p \\ \}q-p \end{matrix} \quad ; \quad a + c_1 = b_1 + d_{11}. \quad (3.12)$$

Полупростая часть $R \subset P$ записывается матрицами вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b_1 & \\ b_1 & a & \\ & & d_{22} \end{pmatrix}; \quad aa^t - b_1 b_1^t = 1, \quad d_{22} \in SO(q-p). \quad (3.13)$$

Блоки матрицы (3.10) выражаются через a, b_1, d_{22} по формуле

$$g_{11} = a + b_1^t \quad g_{11}^{t-1} = a - b_1^t \quad g_{22} = d_{22}.$$

Пусть μ – поверхностная мера Лебега на поверхности $M \subset \mathbb{C}^{pq}$. Ясно, что мера μ является $SO(p) \times SO(q)$-инвариантной.

Предложение 3.1. *Пусть $g \in SO_0(p,q)$. Тогда якобиан $L(g,z)$ отображения $z \mapsto z^g$ многообразия M в себя задается формулой*

$$l(g,z) = \det{}^{-(q-1)}(a+cz). \tag{3.14}$$

Доказательство. И левая, и правая часть равенства (3.14) инвариантны относительно преобразований $(g,z) \mapsto (gh^{-1}, z^h)$, где $h \in SO(q)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $z = z_0$. Далее, обе части равенства (3.14) инвариантны относительно преобразований $(g,z) \mapsto (\tau g, z)$, где $\tau \in SO(p)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $z_0^g = z_0$, т.е. $g \in P$. Для вычисления $l(g, z_0)$ при $g \in P$ достаточно вычислить определитель Det_g дифференциала преобразования $z \mapsto z^g$ в касательном пространстве T в точке z_0.

Пространство T есть пространство блочных матриц $(\xi\eta)$ размера $p \times (p + (q-p))$, таких, что $\xi + \xi^t = 0$. Если $g \in P$ лежит в максимальной нильпотентной подгруппе, то $\mathrm{Det}_g = 1$ (так как нильпотентная подгруппа действует унипотентными операторами). Поэтому мы можем ограничиться случаем, когда $g \in R = GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q)$, т.е. g имеет вид (3.10). Легко видеть, что в этом случае дифференциал отображения $z \mapsto z^g$ в точке z_0 задается формулой

$$(\xi\,\eta) \mapsto \begin{pmatrix} g_{11}^{-1}\xi\, g_{11}^{t-1} & g_{11}^{-1}\eta\, g_{22}\end{pmatrix}$$

и теперь высказывание очевидно. •

3.7. $SO(q)$-конечные функции. Напомним несколько определений, относящихся к рядам Фурье, связанным с компактными группами (см. [40], [9]). Пусть τ – представление компактной группы K в полном топологическом векторном пространстве V. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ – полный набор неприводимых представлений группы K, пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots$ – их характеры. Определим операторы $\pi_i : V \to V$ по формуле

$$\pi_i v = \dim\lambda_i \int_K \overline{\theta_i(g)}\tau(g) v\, dg. \tag{3.15}$$

Тогда $\pi_i^2 = \pi_i$. Пусть $V_i = \pi_i V$. Тогда V_i – изотопическая компонента V, соответствующая представлению λ_i (т.е. V_i есть сумма всех подпредставлений в V, эквивалентных λ_i). Любой гладкий вектор $v \in V$ разлагается в сходящийся в V ряд $v = \sum \pi_i v$. Вектор $v \in V$ называется K-конечным, если лишь конечное число векторов $\pi_i v$ отлично от 0 (или, что равносильно, линейная оболочка векторов $\tau(g)v$ конечномерна).

Пусть $SO(q)$ действует в пространстве $\mathcal{D}^0(M)$ обобщенных функций на M. Из транзитивности действия вытекает, что пространства $\pi_i\mathcal{D}^0(M)$ конечномерны. Из (3.15) видно, что они состоят из C^∞-гладких функций. Обозначим через Fin пространство всех $SO(q)$ -конечных функций на M.

Предложение 3.2. *Пространство* Fin *состоит в точности из ограничений на M голоморфных многочленов в $\mathbb{C}^{pq}$.*

Доказательство. Пусть σ : Pol $\to$ Fin – оператор ограничения. Тогда в силу теоремы Стоуна–Вейерштрасса $\sigma(\mathrm{Pol})$ плотно в $C(M)$. Рассмотрим последовательность подпространств $\sigma(\pi_k \mathrm{Pol}_j) \subset \pi_k(\mathrm{Fin})$, возрастающую с ростом j. Их объединение совпадает с $\sigma(\pi_k\mathrm{Pol})$ и поэтому плотно в $\pi_k(\mathrm{Fin})$. Но $\pi_k(\mathrm{Fin})$ конечномерно, и поэтому для некоторого j выполнено $\sigma(\pi_k\mathrm{Pol}_j) = \pi_k(\mathrm{Fin})$ что и требовалось доказать. •

3.8. Существование граничных операторов. Теорема 3.1. *Пусть*

$$s \in \Sigma \quad \text{и} \quad s < (q - 2p + 1)/2. \tag{3.16}$$

Тогда для M, μ и K_s выполнены условия $1^* - 2^*$ *п.2.1.*

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.16). *Тогда функция*

$$h(z) = \det{}^{-s}(1 - z z^*) \tag{3.17}$$

интегрируема на M.

Замечание. Если записать z в виде блочно $p\times(p+(q-p))$ матрицы $z(z^{(1)}z^{(2)})$, то $z = z_0^* = z^{(1)}$.

Выведем теорему 3.1 из теоремы 3.2.

Доказательство теоремы 3.1. Очевидно, что почти всюду на $M\times M$

$$\lim_{c\to 1-0} \det{}^{-s}(1 - c^2 zu^*) = \det{}^{-s}(1 - zu^*).$$

Далее, очевидно, что

$$\det{}^{-s}(1 - c^2 zu^*) \leqslant 2^{ps} \det{}^{-s}(1 - zu^*).$$

Действительно, пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ – собственные числа zu^*. Тогда $|\sigma_j| \leqslant 1$, и наше неравенство сводится к очевидному неравенству

$$2(1 - c^2\sigma_j) \geqslant 1 - \sigma_j.$$

Далее, из соображений $SO(q)$-инвариантности и теоремы 3.2 вытекает, что для любого $u \in M$ функция $h_u(z) = \det{}^{-s}(1 - zu^*)$

интегрируема на M. Поэтому интегрируема на $M \times M$ функция $\det^{-s}(1 - zu^*)$. •

3.9. Оценка интеграла (3.17).

Лемма 3.1. *Пусть A – квадратная матрица. Пусть $\|A\| < 1$. Тогда*

$$|\det(1 - A)| \geqslant \det(1 - |A|). \tag{3.18}$$

Через $|A|$ мы обозначили матрицу $|A| = (A^*A)^{1/2}$.

Доказательство. Пусть λ_j – собственные числа матрицы A, а α_i – сингулярные числа (т.е. собственные числа матрицы $|A|$). Нам нужно проверить неравенство

$$\prod_j |1 - \lambda_j| \geqslant \prod_j (1 - \alpha_j).$$

Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\prod_j (1 - |\lambda_j|) \geqslant \prod_j (1 - \alpha_j)$$

или, что равносильно,

$$\sum_j \ln(1 - |\lambda_j|) \geqslant \sum_j \ln(1 - \alpha_j).$$

Перепишем последнее неравенство в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_j |\lambda_j|^n \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_j |\alpha_j|^n \right).$$

Но это в свою очередь вытекает из неравенства

$$\sum_j |\lambda_j|^n \leqslant \sum_j \alpha_j^n,$$

которое есть частный случай неравенств Г. Вейля для собственных и сингулярных чисел, см. [52], [2].

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $z = (z^{(1)} z^{(2)} \in M$. В силу леммы

$$\det{}^{-s}(1 - zz_0^*) = \det{}^{-s}(1 - z^{(1)}) \leqslant \det{}^{-s}(1 - |z^{(1)}|).$$

Последнее выражение, очевидно, инвариантно относительно действия группы $SO(p) \times SO(p) \times SO(q - p) \subset SO_0(p, q)$, т.е. относительно преобразований вида

$$(z^{(1)} z^{(2)}) \mapsto x^{-1} (z^{(1)} z^{(2)}) \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

где $x \in SO(p)$, $y \in SO(p)$, $h \in SO(q-p)$. Легко видеть, что при $q > 2p$ (а это неравенство следует из (3.16)) любая матрица $z \in M$ с помощью преобразований (3.19) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} r_1 & & & \sqrt{1-r_1^2} & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & 0 \\ & & r_p & & & \sqrt{1-r_p^2} & \end{pmatrix},$$

где $1 \geqslant r_1 \geqslant \ldots \geqslant r_p \geqslant 0$. Обозначим через Δ множество всех таких наборов r_j. Функция $\det^{-s}(1-|z^{(1)}|)$ теперь может рассматриваться как функция на Δ:

$$\det{}^{-s}(1-|z^{(1)}|) = \prod (1-r_j)^{-s}.$$

Проекция меры μ на симплекс Δ задается формулой

$$C \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (r_i^2 - r_j^2) \prod_{i=1}^{p} (1-r_i^2)^{(q-2p-1)/2} \prod_{i=1}^{p} dr_i,$$

где C – некоторая постоянная. Эта формула равносильна формуле для радиальной части инвариантной меры на симметрическом пространстве $SO(q)/(SO(p) \times SO(q-p)$ см., [27], X.I. Теперь утверждение очевидно. •

3.10. Граничные представления группы $SO_0(p,q)$. Итак, пусть $s \in \Sigma$ удовлетворяет условию

$$s < (q-2p+1)/2$$

Тогда применимо все сказанное в пп.2.1–2.2. В частности, в пространстве $L^\infty(M)$ определено скалярное произведение по формуле

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_M \int_M \det{}^{-s}(1-zu^*) f_1(z) \overline{f_2(u)}\, d\mu(z)\, d\mu(u), \tag{3.20}$$

и это скалярное произведение неотрицательно определено (что отнюдь не очевидно из вида формулы (3.20)). В гильбертовом пространстве $E_s^0(M) := E^0(\mu)$ со скалярным произведением (3.20) мы имеем унитарное представление группы $SO_0(p,q)$, задаваемое формулой

$$\nu_s^0(g) f(z) = \det{}^{-(q-1)+s}(a+cz) f(z^g) \tag{3.21}$$

(см. (2.8) и формулу для якобиана (3.14)). В пространстве $E_s(M) = E(\mu)$, двойственном к $E_s^0(M)$, группа $SO_0(p,q)$ действует унитарными операторами

$$\nu_s(g)f(z) = (a+zc)^{-s}f(z^g)$$

(см. 2.7). Подчеркнем, что представления ν_s^0 и ν_s эквивалентны.

Замечание 1. Сказанное, в частности, означает, что ограничение унитарного представления ρ_s группы $SU(p,q)$ на подгруппу $SO_0(p,q)$ содержит ν_s в качестве подпредставления.

Замечания 2. По своему виду представления ν_s^0 и ν_s напоминают представления вырожденной дополнительной серии и, быть может при $s \in \Sigma_+$ ими являются. Вырожденная основная серия здесь соответствует $s = (q-1)/2 + i\sigma$, где $\sigma \in \mathbb{R}$. Нам не известно, будут ли представления ν_s унитарными при $s \in [(q-2p+1)/2,\ (q-1)/2)$.

3.11. Замечания о пространствах E_s^0 и E_s. Пусть сначала $s \in \Sigma$. Тогда $H_s(B_{p,q}) \supset \mathrm{Pol}$, и в силу предложения 3.2 пространство $E_s(M)$ содержит Fin (и тем самым $E_s(M)$ есть некоторое пополнение Fin). Из соображений двойственности естественная проекция Fin $\to E_s^0(M)$ инъективна, а ее образ плотен (последнее вытекает из плотности Fin в $C(M)$). Поэтому $E_s^0(M)$ является пополнением Fin относительно скалярного произведения 3.2.1.

Прямых описаний $E_s^0(M)$ и $E_s(M)$ в духе п.2.6 нам не известно. Подчеркнем лишь, что эти пространства не являются Соболевскими пространствами (при $p > 1$).

Если $s \in \Sigma \setminus \Sigma_+$, то $E_s(M) \cap \mathrm{Fin}$ является подпространством в Fin, отличным от самого Fin. Проекция Fin $\to E_s^0(M)$ в этом случае имеет нетривиальное ядро.

Предложение 2.1 в нашем случае влечет

Предложение 3.3. *Пусть f – обобщенная функция на M. Тогда $f \in E^0(M)$ тогда и только тогда, когда величина*

$$\gamma(c) = \int_M \int_M \det{}^{-s}(1 - c^2 z u^*) f(z)\overline{f(u)}\, dz\, du$$

ограничена при $0 < c < 1$. При этом

$$\|f\|_{E_s^0} = \lim_{c \to 1-0} \gamma(c).$$

Пусть S – подмногообразие в M. Пусть σ – поверхностная мера Лебега на S. Пусть δ_S – мера σ, рассматриваемая как обобщенная функция на M.

Теорема 3.3. *Пусть интеграл*

$$\int_S \int_S \det{}^{-s}(1 - zu^*)d\sigma(z)\, d\sigma(u) \tag{3.21}$$

сходится. Тогда для любой $\varphi \in L^\infty(S)$ *обобщенная функция* $\varphi \cdot \delta_S$ *содержится в* $E^0_s(M)$.

Доказательство: это частный случай предложения 3.3. •

Замечание 1. Несложно доказать и аналогичное утверждение для нормальных производных функции δ_S.

Замечание 2. Сходимость или расходимость интеграла (3.21) зависит не только от размерности S, но и от его расположения. Было бы любопытно получить условия сходимости в терминах касательных пространств к S (возможно, однако, таких условий не существует).

§ 4. Гильбертовы пространства векторнозначных функций в матричных шарах

4.0. Мультипликаторные и индуцированные представления. Пусть группа G действует на пространстве X преобразованиями $x \mapsto x^g$. Пусть V – линейное пространство, а $GL(V)$ – группа обратимых операторов в V. Допустим, что группа G действует в пространстве $\mathcal{F}$ функций $X \to V$ по формуле вида

$$T(g)f(x) = R(g,x)f(x^g), \tag{4.1}$$

где $g \in G$, $x \in X$, а $R(g,x)$ фиксированная функция $G \times X \to GL(V)$. Тождество $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$, как легко видеть, равносильно тождеству

$$R(g_1g_2, x) = R(g_2, x^{g_1})R(g_1, x). \tag{4.2}$$

Операторнозначные функции $R(g,x)$, удовлетворяющие тождеству (4.2) называются *мультипликаторами*.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{F}$ некоторое преобразование $f(x) \mapsto A(x)f(x)$, где $A : X \to GL(V)$ – фиксированная функция. Тогда операторы (4.1) переходят в операторы того же вида, но с новым мультипликатором

$$\tilde{R}(g,x) = A(x^g)^{-1}R(g,x)A(x). \tag{4.3}$$

Мультипликаторы R и $\tilde{R}$, связанные соотношением (4.3), естественно считать эквивалентными.

В случае, когда X является G-однородным пространством, описание всех измеримых мультипликаторов с точностью до эквивалентности хорошо известно (см. [9], 13.2). А именно, пусть $x_0 \in X$ и H – стабилизатор точки x_0. Тогда $\pi(g) = R(g, x_0)$ является представлением группы H, т.е. мы имеем отображение из множества мультипликаторов, определенных с точностью до эквивалентности, в множество представлений группы H (в случае разрывных мультипликаторов (не являющемся патологическим) это рассуждение требует некоторой аккуратности). Оказывается, что это отображение является биекцией; описание обратного отображения см., например в [9], 13.2. В частности, любому представлению π группы H ставится в соответствие мультипликаторное представление вида (4.1) группы G в пространстве "всех" функций на X. Эта операция называется индуцированием.

Напомним один из способов построения индуцированного представления (для нас это будет существенно лишь в §5 и п.7.7). Пусть V – пространство представления π группы H. Рассмотрим произведение W пространств G и V над H, т.е. факторпространство пространства $G \times V$ по отношению эквивалентности

$$(hg, \pi(h)\delta) \sim (g, \delta); \quad g \in G \quad \delta \in V, \quad h \in H.$$

Пространство W очевидным образом проектируется на $X = G/H$ (а именно, точке $(g, v) \in G \times V$ ставится в соответствие точка $Hg \in G/H$; это отображение $G \times V \to G/H$ постоянно на классах эквивалентности). При этом прообраз любой точки $x \in X$ отождествляется с пространством V, т.е. W есть векторное расслоение над X.

Группа G действует на $G \times V$ преобразованиями $p : (g, \delta) \mapsto (gp, \delta)$, где $p \in G$, эти преобразования переводят классы эквивалентности в классы эквивалентности. Поэтому мы получаем действие G на W. Следовательно, группа G действует на сечениях расслоения W над $X = G/H$ (действительно, график сечения $X \to W$ есть подмножество в W, группа G действует в пространстве сечений, переставляя их графики).

Действие G в сечениях W и есть искомое индуцированное представление. Рассмотрим теперь какое-нибудь измеримое отображение $W \to X \times V$ такое, что слой над любой точкой $x \in X$ отображается линейно на множество $x \times V \subset X \times V$ (мы отождествляем $x \times V$ с V). Тогда сечениям расслоения W соответствуют функции $X \to V$. Соответствующее действие группы в пространстве функций $X \to V$ имеет вид (4.1).

Вообще говоря, свойства полученного представления сильно зависят от того, какую топологию ввести в пространстве функций на X. В одном очень важном частном случае, когда G – полупростая группа Ли, а X компактно, от этой топологии по-существу ничего не зависит, и конструкция индуцированного представления может рассматриваться как чисто алгебраическая.

4.1. Мультипликаторные представления групп $U(p,q)$. Определим функции

$$\gamma_1 : U(p,q)\times B_{p,q}\to GL(p,\mathbb{C})$$
$$\gamma_2 : U(p,q)\times B_{p,q}\to GL(q,\mathbb{C}),$$

заданные равенствами

$$\begin{aligned}\gamma_1(g,z)&=(a+zc)^{-1}\\ \gamma_2(g,z)&=-d+cz^{g}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Прямое вычисление показывает, что

$$\gamma_i(g_1g_2,z)=\gamma_i(g_2,z^{g_1})\gamma_i(g_1,z),$$

т.е. γ_1 и γ_2 являются мультипликаторами в смысле п.4.0, см. также (3.4).

Пусть π – голоморфное представление группы $GL(p,\mathbb{C})\times GL(q,\mathbb{C})$ или ее универсальной накрывающей (термин "голоморфное представление" означает, что матричнозначная функция π голоморфна). Тогда, очевидно, функция

$$R(g,z)=\pi(\gamma_1(g,z),\gamma_2(g,z))\tag{4.5}$$

является мультипликатором.

Последний пример является универсальным в том смысле, что любое мультипликаторное представление $U(p,q)$ (или ее универсальной накрывающей) в пространстве голоморфных векторнозначных функций задается мультипликатором (4.5).

4.2. Голоморфные представления $GL(n,\mathbb{C})$ (предварительные сведения). Опишем сперва так называемые фундаментальные представления. Пусть $\tau(g)=g$ – тавтологическое n-мерное представление группы $GL(n,\mathbb{C})$. Пусть $\Lambda^j\mathbb{C}^n$ – пространство всех j-поливекторов на $\mathbb{C}^n$, т.е. пространство всех выражений вида

$$\sum a_{\alpha_1,\dots,\alpha_j}e_{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge e_{\alpha_j},$$

где $\wedge$ обозначает внешнее умножение, а $\{e_k\}$ стандартный базис в $\mathbb{C}^n$. Пусть τ_j – естественное представление группы $GL(n,\mathbb{C})$ в $\Lambda^j(\mathbb{C}^n)$; $j\leqslant n$. Обозначим через v_j вектор

$$v_j=e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_j\in\Lambda^j\mathbb{C}^n.$$

Обозначим через $\widetilde{GL}(n,\mathbb{C})$ универсальную накрывающую группу группы $GL(n,\mathbb{C})$. Все голоморфные неприводимые представления группы $\widetilde{GL}(n,\mathbb{C})$ нумеруются сигнатурами

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

где $\lambda_j \in \mathbb{C}$, а $\lambda_j - \lambda_{j+1}$ – целые неотрицательные числа. Представление ρ_Λ соответствующее сигнатуре Λ и пространство V_Λ представления ρ_Λ будут сейчас описаны.

Рассмотрим тензорное произведение

$$W = \bigotimes_{j=1}^{n-1} (\Lambda^j \mathbb{C}^n)^{\otimes(\lambda_j - \lambda_{j+1})}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим в W выделенный вектор

$$v_\Lambda = \bigotimes_{j=1}^{n-1} v_j^{\otimes(\lambda_j - \lambda_{j+1})}. \tag{4.7}$$

Группа $\widetilde{GL}(n,\mathbb{C})$ действует в W по формуле

$$\pi_\Lambda(g) = \det{}^{\lambda_n}(g) \bigotimes_{j=1}^{n-1} \tau_j(g)^{\otimes(\lambda_j - \lambda_{j+1})}. \tag{4.8}$$

Тогда V_Λ, по определению, есть линейная оболочка векторов $\hat{\pi}_\Lambda(g) v_\Lambda$, где g пробегает $\widetilde{GL}(n,\mathbb{C})$. Представление π_Λ, по определению, есть подпредставление представления $\hat{\pi}_\Lambda$, действующее в пространстве Π_Λ.

Замечание. Вектор v_Λ есть вектор старшего веса в обычном смысле слова, т.е. для любой матрицы вида

$$g = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

выполнено

$$\pi_\Lambda(g) v = r_{11}^{\lambda_1} \cdot r_{22}^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot r_{nn}^{\lambda_n} v.$$

Пусть теперь $\lambda_j \in \mathbb{R}$ (только этот случай нас интересует). Тогда в пространстве V_Λ существует единственное с точностью до пропорциональности положительно определенное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\Lambda}$ такое, что

$$\langle \pi_\Lambda(g)\omega, (\pi_\Lambda(g)^*)^{-}1\omega' \rangle_{V_\Lambda} = \langle \omega, \omega' \rangle_{V_\Lambda} \tag{4.9}$$

(оно определяется очень просто: берем стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, тогда у нас есть скалярное произведение в $\Lambda^j\mathbb{C}^n$, а следовательно и в (4.6), а следовательно и в V_Λ).

Пример. Представлению τ_j соответствует сигнатура $(1,\dots, 1,0, \dots,0)$, где в начале стоит j единиц. Одномерное представление $g \mapsto \det{}^\lambda(g)$ имеет сигнатуру $(\lambda,\dots,\lambda)$.

4.3. Инвариантные ядра. Рассмотрим сигнатуру

$$\Lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_p;\ \lambda_{p+1},\dots,\lambda_{p+q}), \tag{4.10}$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, и при всех $j \neq p$ разность $\lambda_p - \lambda_{p+1}$ есть целое неотрицательное число. Рассмотрим сигнатуры

$$\Lambda' = (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \quad \Lambda'' = (\lambda_{p+1},\dots,\lambda_{p+q}) \tag{4.11}$$

для групп $\widetilde{GL}(p,\mathbb{C})$ и $\widetilde{GL}(q,\mathbb{C})$ соответственно. Рассмотрим представление

$$\pi_\Lambda := \pi_{\Lambda'} \otimes \pi_{\Lambda''} \tag{4.12}$$

группы $\widetilde{GL}(p,\mathbb{C}) \times \widetilde{GL}(q,\mathbb{C})$ в пространстве

$$V_\Lambda = V_{\Lambda'} \otimes V_{\Lambda''}. \tag{4.13}$$

Пусть $\mathcal{H}_\Lambda$ – пространство всех голоморфных V_Λ-значных функций на $B_{p,q}$. Рассмотрим представление ρ_Λ универсальной накрывающей группы $U(p,q)$ в $\mathcal{H}_\Lambda$, связанное с мультипликатором

$$R_\Lambda(g,z) = \pi_{\Lambda'}(a+zc) \otimes \pi_{\Lambda''}(d - cz^g). \tag{4.14}$$

Оно задается формулой

$$\rho_\Lambda(g)f(z) = R_\Lambda(g,z)f(z^g). \tag{4.15}$$

Замечание. Рассмотрим действие алгебры Ли $gl(p+q)$ (комплексификации $u(p,q)$) в $\mathcal{H}_\Lambda$, соответствующее действию (4.15) (формулы легко выписываются). Тогда постоянная функция

$$v_\Lambda = v_{\Lambda'} \otimes v_{\Lambda''} \tag{4.16}$$

в $\mathcal{H}_\Lambda$ является вектором старшего веса в ρ_Λ, т.е. аннулируется верхнетреугльными матрицами из $gl(p+q)$.

Теорема 4.1. *Допустим, что существует гильбертово пространство V_Λ-значных голоморфных функций на Ω, в котором операторы $\rho_\Lambda(g)$ унитарны. Тогда это гильбертово пространство определяется ядром*

$$K = K_\Lambda(z,\bar{u}) = \pi_{\Lambda'}(1 - zu^*) \otimes \pi_{\Lambda''}(1 - u^*z)^{-1}. \tag{4.17}$$

Обратно, если ядро K_Λ, задаваемое формулой (4.17) *положительно определено, то представление ρ_Λ унитарно в гильбертовом пространстве, определяемом этим ядром.*

Лемма 4.1. *Унитарность операторов $\rho_\Lambda(g)$ в $H_K(\Omega)$ равносильна уравнению*

$$K(z,\bar{u}) = R_\Lambda(g,z)K(z^g,\overline{u^g})R_\Lambda(g,u)^*. \tag{4.18}$$

Доказательство Леммы. Пусть операторы $A_z : H_K(B_{p,q}) \to V_\Lambda$ те же, что в п.1.9, т.е. $A_z f = f(z)$. Тогда

$$A_u\rho_\Lambda(g)f = A_u[R_\Lambda(g,z)f(z^g)] = R_\Lambda(g,u)f(u^g) = R_\Lambda(g,u)A_u f.$$

Пусть операторы $\rho_\Lambda(g)$ унитарны. Тогда

$$K(z,\bar{u}) = A_z A_u^* = [A_z\rho_\Lambda(g)][A_u\rho_\Lambda(g)]^* = R_\Lambda(g,z)K(z^g,\overline{u^g})R_\Lambda(g,u)^*.$$

Обратно, выполнение тождества (4.18) в силу последнего вычисления влечет

$$A_z A_u^* = A_z(\rho_\Lambda(g)\rho_\Lambda(g)^*)A_u^*.$$

Пусть $\xi \in V_\Lambda$. Введем функции $\psi_{u,\xi} = A_u^*\xi \in H_K(B_{p,q})$. Тогда последнее равенство равносильно

$$\langle \psi_{z,\eta}, \psi_{u,\xi}\rangle = \langle \psi_{z,\eta}, \rho_\Lambda(g)\rho_\Lambda(g)^*\psi_{u,\xi}\rangle$$

и теперь $\rho_\Lambda(g)\rho_\Lambda(g)^* = 1$ очевидно. ●

Доказательство Теоремы. Тождество (4.18) для K_Λ вытекает из двух тождеств

$$1_p - zu^* = (a+zc)(1_p - (z^g)(u^g)^*)(a+uc)^*$$
$$(d-u^g c)^*(1_q - u^*z)(d - z^g c) = 1_q - (u^g)^* z^g,$$

которые проверяются непосредственно с помощью (3.2).

Докажем единственность. Ядро $K(z,\bar{u})$ однозначно восстанавливается по своим значениям на диагонали, т.е. по функции $K(z,\bar{z})$. Далее, в силу $U(p,q)$-однородности области $B_{p,q}$ и тождества (4.18) функция $K(z,\bar{z})$ однозначно восстанавливается, если известно $K(0,0)$. Возьмем $h \in U(p)\times U(q)$, в этом случае $0^h = 0$. Тогда (4.18) влечет

$$K(0,0) = \pi_\Lambda(h)K(0,0)\pi_\Lambda(h)^*$$

Учитывая, что операторы $\pi_\Lambda(h)$ унитарны, см. (4.9), мы получаем, что $K(0,0) \in GL(V_\Lambda)$ коммутирует с действием группы

$U(p) \times U(q) \subset GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$, и, в силу неприводимости π_Λ, оператор $K(0,0)$ является скалярным. •

4.4. Условия положительной определенности. Согласно известной конструкции Хариш-Чандры [37], унитарные мультипликаторные представления полупростой группы Ли G в пространствах векторнозначных голоморфных функций – это то же самое, что унитарные представления G со старшим весом. Напомним, что такие представления существуют лишь у групп автоморфизмов областей Картана (т.е. у групп $U(p,q)$, $Sp(2n,\mathbb{R})$, $SO^*(2n)$, $SO_0(n,2)$ и двух вещественных форм групп E_6 и E_7). Описание всех унитарных мультипликаторных представлений в пространствах скалярнозначных функций было получено независимо разными способами рядом автором (Березин [4], Гиндикин [56]; Воллах [51]; Росси, Вернь [47]; см. также изложение этих результатов в [55], XIII). Для однозначных представлений $U(p,q)$ в пространствах векторнозначных функций ответ был получен Кашиварой и Вернь [39] и Якобсеном [57], для представлений $U(p,q)$ – одним из авторов [20]. Наконец, окончательный ответ для универсальной накрывающей группы всех G был получен Энрайтом, Хау и Воллахом в [35], а позднее другим методом в работах Энрайта и Джозефа [67, 68].

Приведем ответ в интересующем нас случае $G = U(p,q)$. Пусть

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}) \tag{4.19}$$

– сигнатура вида (4.10), т.е. $\lambda_j - \lambda_{j+1}$ целые неотрицательные числа для всех $j \neq p$, пусть $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Обозначим через a число координат λ_i, таких, что $i \leqslant p$, $\lambda_i \neq \lambda_1$. Аналогично, пусть b – число координат λ_j, таких, что $j \geqslant p+1$, $\lambda_j \neq \lambda_{p+q}$. Пусть

$$c = \min(p+b, q+a) - 1.$$

Обозначим через Σ множество всех сигнатур Λ вида (4.19), удовлетворяющих дополнительному условию: $t = \lambda_{p+q} - \lambda_1$ лежит в множестве

$$\{a+b; a+b+1; \dots ; c\} \cup \{t > c\}.$$

Через Σ_+ мы обозначим подмножество в Σ, выделенное условием $t > c$.

Теорема 4.2. *Ядро K_Λ, задаваемое формулой* (4.17)*б положительно определено тогда и только тогда, когда $\Lambda \in \Sigma$.*

Доказательство см. в [20, 35, 67, 68]. •

Через $H_\Lambda = H_\Lambda(B_{p,q})$ мы обозначим гильбертово пространство V_Λ-значных голоморфных функций, ассоциированное с ядром

$K_\Lambda(z,\bar{u})$. Итак, при $\Lambda \in \Sigma$ мы имеем унитарное представление ρ_Λ универсальной накрывающей группы $U(p,q)$ в H_Λ.

Через $\operatorname{Pol}_\Lambda$ мы обозначим пространство V_Λ-значных полиномиальных функций на $B_{p,q}$, тогда $H_\Lambda \cap \operatorname{Pol}_\Lambda$ плотно в H_Λ, см. п.1.3. Как показано в [20],

$$\Lambda \in \sum\nolimits_+ \Longleftrightarrow H_\Lambda \supset \operatorname{Pol}_\Lambda. \tag{4.20}$$

4.5. Существование граничных операторов.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$q \geqslant 2p; \quad \Lambda \in \sum; \quad \lambda_{p+1} - \lambda_p < (q-2p+1)/2. \tag{4.21}$$

Тогда для многообразия Штифеля M и меры μ на M выполнены условия $1^{**} - 2^{**}$ *из п.*2.11.

Доказательство. Пусть $z, u \in M$, $0 < c < 1$. Тогда

$$\|K_\Lambda(cz, c\bar{u})\| = \|\pi_{\Lambda'}(1 - c^2 zu^*)\| \cdot \|\pi_{\Lambda''}(1 - c^2 u^* z)^{-1}\|.$$

Далее,

$$\pi_{\Lambda'}(h) = \det{}^{\lambda_p}(h) \cdot \pi_{\tilde{\Lambda}'}(h),$$

где $\tilde{\Lambda}' = (\lambda_1 - \lambda_p, \dots, \lambda_{p-1} - \lambda_p, 0)$. Представление $\pi_{\tilde{\Lambda}'}$ группы $GL(p,\mathbb{C})$ полиномиально (т.е. его матричные элементы суть многочлены от матричных элементов h, см. явную конструкцию п.4.2). Поэтому выражение $\|\pi_{\tilde{\Lambda}'}(1 - c^2 zu^*)\|$ ограничено на $M \times M \times [0,1]$.

Аналогично,

$$\pi_{\Lambda''}(h) = \det{}^{-\lambda_{p+1}} \cdot \pi_{\tilde{\Lambda}''}(h),$$

где $\tilde{\Lambda}'' = (0, \lambda_{p+2} - \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} - \lambda_{p+1})$. Выражение $\pi_{\Lambda''}(h)^{-1}$ полиномиально, а поэтому $\sigma(z,u,c) = \|\pi_{\tilde{\Lambda}''}(1 - c^2 u^* z)^{-1}\|$ ограничено на $M \times M \times [0,1]$. Таким образом,

$$\|K(z,\bar{u})\| \leqslant C \cdot \det{}^{\lambda_p - \lambda_{p+1}}(1 - c^2 zu^*)$$

и теперь мы можем сослаться на теорему 3.1. •

4.6. Граничные представления группы $SO_0(p,q)$. Согласно конструкции пп.2.1–2.3, 2.11, при выполнении условий (4.21) мы имеем два гильбертовых пространства

$$E^0_\Lambda(M) := E^0(\mu) \quad E_\Lambda(M) := E(\mu)$$

и представления ν^0_Λ и ν_Λ группы $SO_0(p,q)$ в этих пространствах.

Пространство $E^0_\Lambda(M)$ есть пространство функций $M \to V_\Lambda$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle_{E^0_\Lambda(M)} = \int\limits_M \int\limits_M \langle f_1(z), K_\Lambda(z,\bar u) f_2(u)\rangle_{V_\Lambda} d\mu(z)\, d\mu(u). \qquad (4.22)$$

Точнее, рассмотрим пространство L^∞ функций $M \to V_\Lambda$. Тогда скалярное произведение (4.22) неотрицательно определено. Далее мы факторизуем L^∞ по ядру этого скалярного произведения и пополняем.

Унитарное представление ν^0_Λ группы $SO_0(p,q)$ в $E^0_\Lambda(M)$ задается формулой

$$\nu^0_\Lambda(g)f(z) = \det{}^{-(q-1)}(a+zc)\pi_{\Lambda'}((a+zc)^t)^{-1} \otimes \pi_{\Lambda''}(((d-z^g c)^t)^{-1}) f(z^g). \qquad (4.23)$$

Пространство $E_\Lambda(M)$ – это подпространство в пространстве интегрируемых V_Λ-значных функций на M, состоящее из граничных значений функций $f \in H_\Lambda(B_{p,q})$. Унитарное представление ν_Λ группы $SO_0(p,q)$ в $E_\Lambda(M)$ задается формулой

$$\nu_\Lambda(g)f(z) = (\pi_{\Lambda'}(a+zc) \otimes \pi_{\Lambda''}(d - z^g c)) f(z^g). \qquad (4.24)$$

По построению, эта формула совпадает с формулой (4.15).

Унитарное представление ν^0_Λ и ν_Λ эквивалентны, сплетающий оператор $E^0_\Lambda(M) \to E_\Lambda(M)$ задается формулой

$$Tf(z) = \int\limits_M K_\Lambda(z,\bar u) f(u) d\mu(u).$$

Обозначим через Fin_Λ пространство всех $SO(q)$-конечных V_Λ-значных функций на M. Так же, как и в п.3.7, пространство Fin_Λ состоит из ограничений функций $f \in \mathrm{Pol}_\Lambda$ на M.

Поэтому в случае $\Lambda \in \Sigma_+$ пространство $E_\Lambda(M)$ содержит Fin_Λ (т.к. $H_\Lambda \supset \mathrm{Pol}_\Lambda$ при $\Lambda \in \Sigma_+$), а каноническая проекция $\mathrm{Fin}_\Lambda \supset L^\infty$ в $E^0(M)$ инъективна. Поэтому оба пространства $E^0_\Lambda(M)$, $E(M)$ могут рассматриваться как пополнения Fin_Λ.

В случае $\Lambda \in \Sigma \setminus \Sigma_+$ пространство $\mathrm{Fin}_\Lambda \cap H_\Lambda$ является подпространством в Fin_Λ, отличным от самого Fin_Λ, а каноническая проекция $\mathrm{Fin}_\Lambda \to E^0_\Lambda(M)$ имеет нетривиальное ядро. Поэтому $E_\Lambda(M)$ оказывается пополнением некоторого подпространства в Fin_Λ (состоящего из граничных значений функций $f \in \mathrm{Pol}_\Lambda \cap H_\Lambda$), а $E^0(M)$ является пополнением некоторого факторпространства пространства Fin_Λ.

4.7. Представления ν_Λ^0 и ν_Λ как индуцированные представления. Пусть z_0 и P – те же, что и в п.3.6, т.е. $z_0 = (1_p 0)$, а $P \subset SO_0(p,q)$ – стабилизатор точки z_0. Действия ν_Λ^0 и ν_Λ группы $SO_0(p,q)$ имеют вид (4.1). В частности, для ν_Λ мультипликатор задается формулой

$$R_\Lambda(g,z) = \pi_{\Lambda'}(a+zc) \otimes \pi_{\Lambda''}(d - z^g c).$$

Рассмотрим представление $\tau_\Lambda(h) = R_\lambda(h, z_0)$ группы P. Оно имеет вид

$$\tau_\Lambda(h) = \pi_{\Lambda'}(\sigma_1(h)) \otimes \pi_{\Lambda''}(\sigma_2(h)), \tag{4.25}$$

где гомоморфизмы

$$\sigma_1 : P \to GL_+(p,\mathbb{R}) \quad \sigma_2 : P \to GL_+(q.\mathbb{R})$$

выражаются через матричные элементы $h \in P$ по формулам (см. (3.12))

$$\begin{aligned} \sigma_1(h) &= a + b_1 \\ \sigma_2(h) &= \begin{pmatrix} d_{11} - b_1 & -b_2 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Отображение σ_1 – это просто естественная проекция группы P на свою фактор-группу $GL_+(p,\mathbb{R})$. Представление σ_2 устроено сложнее. На редуктивной части $GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p)$ группы P отображение σ_2 есть очевидное вложение $GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p) \to GL_+(q,\mathbb{R})$ (отметим, что два p-мерных представления $(a+b_1)$ и $(d_{11} - b_1)$ группы $GL_+(p,\mathbb{R})$ связаны соотношением $((a+b_1)^t)^{-1} = d_{11} - b_1$). Важно подчеркнуть, что q-мерное представление σ_2 группы P нетривиально (т.е. отлично от единицы) на нильпотентной подгруппе N группы P. Поэтому и представление τ_Λ группы P, вообще говоря, не является вполне приводимым.

Итак, мы видим, что при $\Lambda \in \Sigma_+$ представление ν_λ есть представление, индуцированное с представления τ_Λ подгруппы P; представление ν_Λ^0 в этом случае также является индуцированным.

При $\Lambda \in \Sigma \setminus \Sigma_+$ представление ν_Λ есть подпредставление в индуцированном представлении, а ν_Λ^0 есть фактор представление индуцированного представления.

§ 5. Особые унитарные представления групп $SO_0(p,q)$

5.0. Пусть $q > 2p$. Пусть P – параболическая подгруппа в $SO_0(p,q)$, определенная в п.3.6, пусть N – максимальная нильпотентная подгруппа в P; напомним, что $P/N = GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p)$.

Пусть $\varkappa$ – конечномерное неприводимое представление группы $GL_+(p,\mathbb{R})$, а σ – неприводимое представление группы $SO(q-p)$. Рассмотрим представление θ группы P, тривиальное на N, и равное

$$\varkappa \otimes \sigma = \varkappa(a+b_1) \otimes \sigma(d_{22})$$

(см. формулу (3.12)) на $GL_+(p,\mathbb{R}) \otimes SO(q-p)$. Через $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$ мы обозначим представление группы $SO_0(p,q)$, индуцированное (в неунитарном смысле) с представления θ подгруппы P (см. п.4.0).

Мы покажем, что среди представлений $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$ есть много унитаризуемых представлений, в некоторых случаях $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$ имеет унитаризуемые подпредставления или факторпредставления.

Заметим, что в случае, когда $\varkappa$ имеет вид $\varkappa(r) = \det{}^{(q-1)/2+is}(r)$, представления $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$ суть представления вырожденных основных серий и они унитарны по построению. В случае, когда $\varkappa(r) = \det{}^{(q-1)/2+s}(r)$, где $s \in \mathbb{R}$, при достаточно малых $|s|$ представления $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$ могут оказаться унитаризуемыми как малые деформации представлений унитаризуемых представлений вырожденной основной серии; в этом случае $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$ будут представлениями вырожденных дополнительных серий.

Если $\varkappa$ не одномерно, никаких видимых априорных причин для унитаризуемости нет. Однако мы сейчас увидим, что унитарные представления ν_Λ^0 и ν_Λ из п.4.6 разлагаются в конечные прямые суммы представлений вида $\mathrm{Ind}\,(\varkappa,\sigma)$, и тем самым прямые слагаемые должны быть унитарными.

5.1. Фильтрации в V_Λ. Пусть $\Lambda \in \Sigma$, пусть $\pi_\Lambda = \pi_{\Lambda'} \otimes \pi_{\Lambda''}$ – представление группы $GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C})$ в $V_\Lambda = V_{\Lambda'} \otimes V_{\Lambda''}$ (см. пп.4.4–4.5).

Рассмотрим представление τ_Λ группы P, заданное формулами (4.25)–(4.26). Обозначим через δ гомоморфизм $P \to GL(p,\mathbb{R}) \times GL_+(q,\mathbb{R})$, заданный формулой

$$\delta \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & d_{11} & -b_2 \\ c_2 & c_2 & d_{22} \end{pmatrix} = \left(a+b_1; \begin{pmatrix} d_{11}-b_1 & -b_2 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \right) \tag{5.1}$$

(см. (3.12)). Тогда $\tau_\Lambda = \pi_\Lambda \circ \delta$. Образ гомоморфизма δ есть подгруппа $Q \subset GL_+(p,\mathbb{R}) \times GL_+(q,\mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$\left(g; \begin{pmatrix} g^{t-1} & \xi \\ 0 & \eta \end{pmatrix} \right), \tag{5.2}$$

где $g \in GL_+(p,\mathbb{R})$, $\eta \in SO(q-p)$, а ξ вещественна. Если $\dim V_{\Lambda''} \neq 1$, то представление τ_Λ не является вполне приводимым. Рассмотрим в V_Λ некоторую неуплотняемую фильтрацию, состоящую из P-инвариантных подпространств:

$$\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_N = V_\Lambda. \tag{5.3}$$

Тогда в каждом подфакторе W_{j+1}/W_j мы имеем неприводимое представление группы P. Очевидно (см. [58], §8.7) это представление тривиально на N, а на редуктивной части оно имеет вид $\varkappa_j \otimes \sigma_j$, где $\varkappa_j$ и σ_j – неприводимые представления групп $GL_+(p,\mathbb{R})$ и $SO(q-p)$ соответственно.

Обозначим через Γ_Λ множество всех пар $(\varkappa_j, \sigma_j)$, которые могут быть получены таким образом. Нам не известно точное описание Γ_Λ, мы заметим лишь, что $(\varkappa_j, \sigma_j) \in \Gamma_\Lambda$ тогда и только тогда, когда $\varkappa_j \otimes \sigma_j$ входит в ограничение π_Λ на подгруппу $GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p) \subset P$. Последняя задача есть комбинация трех много изучавшихся задач, а именно:

1. Ограничение конечномерного неприводимого представления с $GL(q)$ на $GL(p) \times GL(q-p)$
2. Ограничение неприводимого представления $GL(q-p)$ на $SO(q-p)$
3. Тензорные произведения представлений $GL(p)$.

5.2. Фильтрации в $C^\infty(M, V_\Lambda)$. Обозначим через C^∞_Λ пространство всех бесконечно гладких V_Λ-значных функций на M. Рассмотрим представление $\bar\nu$ группы $SO_0(p,q)$ в C^∞_Λ, заданное формулой

$$\bar\nu_\Lambda(g)f(z) = (\pi_{\Lambda'}(a+zc) \otimes \pi_{\Lambda''}(-d+z^g c))f(z^g).$$

Эта формула совпадает с формулой (4.24) для ν, но при $\Lambda \notin \sum_+$ представление ν является лишь подпредставлением в $\bar\nu_\Lambda$. Ограничение $\bar\nu_\Lambda$ на $SO(q)$ имеет конечнократный спектр, поэтому при работе с $SO_0(p,q)$ – инвариантными подпространствами мы можем не обращать внимания на топологию (см. [40]), в частности, $SO_0(p,q)$ – инвариантные подпространства в C^∞_Λ находятся во взаимно однозначном соответствии с подпространствами в Fin_Λ, инвариантными относительно алгебры Ли $so(p,q)$).

Пусть $W \subset V_\Lambda$ – некоторое P-инвариантное подпространство.

Для любого $u \in M$ рассмотрим $g \in SO_0(p,q)$ такой, что $u = z_0^g$. Далее определим подпространство

$$W^{(u)} = W \cdot g \subset V_\Lambda.$$

Легко видеть, что $W^{(u)}$ не зависит от выбора g. Таким образом, мы получили расслоение на M, слой которого над точкой $u \in M$ есть подпространство $W^{(u)} \subset V_\Lambda$.

Обозначим через $\tilde{W}$ подпространство в C^∞_Λ, состоящее из всех f таких, что

$$f(u) \in W^{(u)} \quad \forall u \in M.$$

В частности, фильтрации (5.3) соответствует $SO_0(p,q)$-инвариантная фильтрация

$$\{0\} = \tilde{W}_0 \subset \tilde{W}_1 \subset \ldots \subset \tilde{W}_N = C^\infty_\Lambda \tag{5.4}$$

в C^∞_Λ. Представление $SO_0(p,q)$ в $\tilde{W}_{j+1}/\tilde{W}_j$, овевидно, есть $\mathrm{Ind}\,(\varkappa_j, \sigma_j)$.

Теорема 5.1. *Пусть $\Lambda \in \Sigma_+$ удовлетворяет условиям* (4.21). *Пусть* $(\varkappa_j, \sigma_j) \in \Gamma_\Lambda$. *Тогда представление* $\mathrm{Ind}\,(\varkappa_j, \sigma_j)$ *группы* $SO_0(p,q)$ *унитаризуемо.*

Доказательство. Действительно, оно является подфактором в унитаризуемом представлении $\bar{\nu}_\Lambda = \nu_\Lambda$. •

Очевидно, в случае $\Lambda \in \Sigma_+$ выполнено

$$\nu_\Lambda = \bigoplus_j \mathrm{Ind}\,(\varkappa_j, \sigma_j).$$

В случае $\Lambda \in \Sigma \setminus \Sigma_+$ возникает дополнительное затруднение. В этом случае $\bar{\nu}_\Lambda$ унитаризуемо не во всем C^∞_Λ, а в подпространстве $C^\infty_\Lambda \cap E_\Lambda(M)$. Фильтрации (5.3) тогда соответствует фильтрация

$$\{0\} \subset (\tilde{W}_0 \cap E_\Lambda(M)) \subset (\tilde{W}_1 \cap E_\Lambda(M)) \subset \ldots \subset (\tilde{W}_N \cap E_\Lambda(M)) = E_\Lambda(M). \tag{5.5}$$

Разумеется, представление $SO_0(p,q)$ в

$$(\tilde{W}_{j+1} \cap E_\Lambda(M))/(\tilde{W}_j \cap E_\Lambda(M)) \tag{5.6}$$

унитаризуемо. Однако это представление для некоторых j может оказаться нульмерным.

Предложение 5.1. *Пусть $\Lambda \in \Sigma$. Тогда старший подфактор фильтрации* (5.5) *нетривиален, т.е.*

$$\tilde{W}_{N-1} \cap E_\Lambda(M) \neq E_\Lambda(M).$$

Доказательство. Пространство H_Λ содержит все постоянные функции, и тем самым $E_\Lambda(M)$ тоже содержит все постоянные функции. Если же $f \in \tilde{W}_{N-1}$, то $f(z_0) \in W_{N-1} \neq V_\Lambda$, т.е. существуют постоянные, не содержащиеся в W_{N-1}. •

Естественно возникает вопрос: какие представления $\varkappa_j \otimes \sigma_j$ могут встретиться в старших членах фильтрации вида (5.3)? Частичный ответ на него дан в следующем пункте.

5.3. Дополнительные замечания о фильтрациях в V_Λ. Рассмотрим в $GL(q,\mathbb{C})$ подгруппу R, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad a \in GL(p,\mathbb{C}), \quad c \in GL(q-p,\mathbb{C}) \tag{5.7}$$

(ср. с (5.1)). Рассмотрим в $V_{\Lambda''}$ неуплотняемую R-инвариантную фильтрацию

$$\{0\} = Y_0 \subset Y_1 \subset \ldots \subset Y_L = V_{\Lambda''}. \tag{5.8}$$

Тогда в Y_{j+1}/Y_j реализуется неприводимое представление группы R, тривиальное на нильпотентной подгруппе, т.е. фактически в Y_{j+1}/Y_j действует $GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q-p,\mathbb{C})$, а представление имеет вид $\psi_j \otimes \varphi_j$, где ψ_j и φ_j – неприводимые голоморфные представления групп $GL(p,\mathbb{C})$ и $GL(q-p,\mathbb{C})$ соответственно.

Пусть

$$Z_j = V_{\Lambda'} \otimes Y_j \subset V_\Lambda.$$

Тогда фильтрация

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_L = V_\Lambda \tag{5.9}$$

очевидно (см. (5.7) и (5.1)) является P-инвариантной. Далее, R и $Q = \delta(P)$ имеют одну и ту же нильпотентную подгруппу, поэтому нильпотентная подгруппа $N \subset P$ действует в Z_{j+1}/Z_j тривиально, т.е. фактически в Z_{j+1}/Z_j действует редуктивная часть $GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p)$ группы P. Поэтому представление P в Z_{j+1}/Z_j вполне приводимо.

Опишем теперь старший подфактор Y_L/Y_{L-1} фильтрации (5.7). Пусть ω – вектор младшего веса в $V_{\Lambda''}$. Пусть U – его $GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q-p,\mathbb{C})$ – циклическая оболочка. Пространство U есть тензорное произведение представления $GL(p,\mathbb{C})$ с сигнатурой

$$B = (-\lambda_{p+q}, \ldots, -\lambda_{q+1})$$

и представления $GL(q,\mathbb{C})$ с сигнатурой

$$\Delta = (-\lambda_q, \ldots, -\lambda_{p+1}).$$

Пусть C – это $GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q-p,\mathbb{C})$ инвариантное дополнение до U, легко видеть, что C является R-инвариантным.

Итак, в качестве Y_{L-1} в (5.8) мы можем выбрать C , а тогда в Y_L/Y_{L-1} реализуется представление $\pi_B \otimes \pi_\Delta$ группы $GL(p,\mathbb{C}) \times GL(q-p,\mathbb{C})$.

Разложим Z_L/Z_{L-1} в сумму

$$Z_L/Z_{L-1} = \oplus(\varkappa_\alpha \otimes \sigma_\alpha)$$

неприводимых представлений группы $GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p)$. Обозначим через Γ^0_Λ множество всех пар $(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha)$, встречающихся в этом разложении. Ясно, что эти пары характеризуются условиями

1) $\varkappa_\alpha$ входит в разложение тензорного произведения $\pi_{\Lambda'} \otimes \pi_B$

2) σ_α входит в ограничение π_Δ на $SO(q-p)$.

Итак, все $(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha) \in \Gamma^0_\Lambda$ могут встретиться в качестве верхнего члена фильтрации (5.3).

5.4. Существование унитарного подпредставления в $\mathrm{Ind}\,(\varkappa, \sigma)$.

Теорема 5.2. *Пусть* $\Lambda \in \Sigma$ *удовлетворяет условиям* (4.21). *Пусть* $(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha) \in \Gamma^0_\Lambda$. *Тогда* $\mathrm{Ind}\,(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha)$ *содержит ненулевое унитарное подпредставление.*

Доказательство. Теорема есть следствие предложения 5.1 и конструкции предыдущего пункта. •

Пусть $(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha) \in \Gamma^0_\Lambda$. Реализуем фильтрацию W_j вида (5.3) так, что $\varkappa_\alpha \otimes \sigma_\alpha$ реализуется в ее старшем члене W_N/W_{N-1}. Обозначим через $I(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha)$ представление $SO_0(p,q)$ в $(E_\Lambda(M) \cap C^\infty_\Lambda)/(E_\Lambda(M) \cap \tilde{W}_{N-1})$. Отметим, что

$$\Lambda \in \sum\nolimits_+ \Longrightarrow I(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha) = \mathrm{Ind}\,(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha).$$

5.5. Неприводимость.

Теорема 5.3. *Пусть* $\Lambda \in \Sigma$ *удовлетворяет условию*

$$\lambda_{p+1} - \lambda_p < (q - 2p + 1)/4. \qquad (5.10)$$

Пусть $(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha) \in \Gamma^0_\Lambda$. *Тогда* $I(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha)$ *неприводимо.*

Доказательство проводится по методу Брюа (см. [9], 13.5). Вообще говоря, задача разыскивания инвариантных обобщенных функций, на которой основан этот метод, довольно утомительна, в нашем случае, однако, действует одно упрощающее соображение.

Итак, $I(\varkappa_\alpha, \sigma_\alpha)$ реализуется в старшем члене $SO_0(p,q)$-инвариантной фильтрации в $E_\Lambda(M)$. Двойственным образом это же представление реализуется в младшем члене $SO_0(p,q)$-инвариантной фильтрации в $E^0_\Lambda(M)$. А именно, мы имеем некоторое расслоение на M, устроенное следующим образом. Для каждой точки $u \in M$ выбрано подпространство $X^{(u)} \subset V_\Lambda$, гладко зависящее от u, группа $SO_0(p,q)$ действует в сечениях расслоения по формуле (4.24), причем операторы $\nu_\Lambda^0(g)$ переводят сечения в сечения. Обозначим пространство сечений нашего расслоения через $\mathcal{F}$. В $\mathcal{F}$ мы имеем инвариантное (быть может вырожденное) скалярное произведение

$$\langle f_1, f_2\rangle = \int\limits_M \int\limits_M \langle f_1(z), K_\Lambda(z,\bar{u}) f_2(u)\rangle_{V_\Lambda} d\mu(z)\, d\mu(u). \tag{5.11}$$

Заметим, что в этой формуле важна не сама функция $K_\Lambda : M \times M \to GL(V_\Lambda)$, а функция

$$K(z,u;\xi,\eta) := \langle \xi, K_\Lambda(z,\bar{u})\eta\rangle_{V_\Lambda}; \quad z,u\in M, \quad \xi\in X^{(z)}, \quad \eta\in X^{(u)}.$$

Условие (4.21) означает, что $\|K(\cdot,\cdot)\| \in L^1(M\times M)$. Наше условие (5.10) сильнее, оно означает, что $\|K(\cdot,\cdot)\|\in L^2(M\times M)$. В частности форма (5.11) непрерывна в L^2-топологии в $\mathcal{F}$.

Допустим, что $I(\varkappa_\alpha,\sigma_\alpha)$ приводимо. Тогда в $I(\varkappa_\alpha,\sigma_\alpha)$ существует $SO_0(p,q)$-инвариантный проектор $\mathcal{P}$. Поэтому в $\mathcal{F}$ существует другое $SO_0(p,q)$-инвариантное скалярное произведение

$$\{f_1, f_2\} := \langle \mathcal{P} f_1, \mathcal{P} f_2\rangle_{E^0(M)}.$$

Очевидно

$$\{f,f\} \leqslant \langle f,f\rangle_{E^0(M)}. \tag{5.12}$$

Из этого неравенства следует, что $\{\cdot,\cdot\}$ непрерывно в L^2-топологии, а поэтому $\{\cdot,\cdot\}$ имеет вид

$$\{f_1,f_2\} = \langle f_1, Bf_2\rangle_{L^2},$$

где B – ограниченный оператор в L^2. Но скалярное произведение (5.11) само имеет вид $\langle f_1,f_2\rangle = \langle f_1, Af_2\rangle_{L^2}$, причем A – оператор Гильберта–Шмидта в L^2. Неравенство (5.12) теперь записывается в виде

$$\langle f, Bf\rangle_{L^2} \leqslant \langle f, Af\rangle_{L^2}.$$

Отсюда вытекает, что $B \leqslant A$, и значит B тоже оператор Гильберта–Шмидта. (Действительно, пусть $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots$ и $t_1\geqslant t_2\geqslant\ldots$ – собственные числа операторов B и A. Тогда минимаксная характеризация собственных чисел (см. [2]) влечет неравенства $s_j\leqslant t_j$.)

Итак, $\{\cdot,\cdot\}$ имеет вид

$$\{f_1,f_2\} = \int\limits_M\int\limits_M \langle f_1(z), S(z,u) f_2(u)\rangle d\mu(z) d\mu(u),$$

где $\|S(\cdot,\cdot)\| \in L^2(M \times M)$. Инвариантность $\{\cdot,\cdot\}$ равносильна тождеству

$$S(z,u) = \det{}^{q-1}(a+cz)R_\Lambda(g,z)\,(z^g,u^g)R_\Lambda(g,\bar{u})^* \tag{5.13}$$

(ср. с (4.18)), которое, как мы сейчас покажем, однозначно определяет S, и, тем самым, инвариантных скалярных произведений, отличных от (5.11), не существует.

Группа $SO_0(p,q)$ имеет на $M \times M$ открытую орбиту O, эта орбита содержит точку

$$(z_0; -z_0) = ((1_p 0); (-1_p 0)) \in M \times M,$$

причем стабилизатор St этой точки изоморфен $GL_+(p,\mathbb{R}) \times SO(q-p)$. В силу (5.13) функция $S(z,u)$ однозначно определяется матрицей $K(z_0,-z_0) \in GL(V_\Lambda)$. Выбирая в (5.13) $g \in St$, мы видим, что форма

$$(\xi,\eta) = \langle \xi, K(0,0)\eta\rangle_{V_\Lambda}; \quad \eta \in X^{(z_0)},\ \xi \in X^{(-z_0)}$$

является St-инвариантной,а в силу неприводимости представления St в $X^{(z_0)}$ (оно эквивалентно $\varkappa_\alpha \otimes \sigma_\alpha$) такая форма единственна. ●

5.6. Класс $\mathcal{B}$. Итак, любое представление группы $SO_0(p,q)$ вида ν_Λ разлагается в конечную прямую сумму унитарных представлений, имеющих вид $\operatorname{Ind}(\varkappa_\alpha,\sigma_\alpha)$, или являющихся подпредставлениями в $\operatorname{Ind}(\varkappa_\alpha,\sigma_\alpha)$. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех унитарных представлений группы $SO_0(p,q)$, которое могут быть получены таким образом. В §§6–7 мы покажем, что представления класса $\mathcal{B}$ обладают целым рядом интересных и необычных свойств.

§ 6. Переход к пределу при $q \to \infty$

6.0. Группы $U(p,\infty)$ и $O(p,\infty)$. Рассмотрим координатное гильбертово пространство l_2; его элементы суть векторы вида $x = (x_1,\ldots,x_p;\,x_{p+1},\ldots)$. Снабдим l_2 индефинитной эрмитовой формой

$$\{x,y\} = -\sum_{j\leqslant p} x_j\bar{y}_j + \sum_{j>p} x_j\bar{y}_j.$$

Через $U(p,\infty)$ мы обозначим группу всех обратимых ограниченных операторов в l_2, сохраняющих форму $\{\cdot,\cdot\}$. Элементы группы $U(p,\infty)$ мы будем записывать в виде блочных матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $(p+\infty)\times(p+\infty)$. Через $O(p,\infty)$ мы обозначим подгруппу в $U(p,\infty)$, состоящую из вещественных матриц.

Мы снабдим эти две группы слабой операторной топологией, тогда они становятся топологическими группами.

Группа $O(p,\infty)$ состоит из двух компонент связности. Компонента связности, содержащая единицу, выделяется условием $\det(a) > 0$; мы обозначим ее через $O_0(p,\infty)$.

Группа $U(p,\infty)$ не односвязна. Она стандартным образом стягивается на свою подгруппу $U(p)\times U(\infty)$ (так же, как $U(p,q)$ стягивается на $U(p)\times U(q)$). Группа $U(\infty)$ односвязна, поэтому фундаментальная группа $U(p,\infty)$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Через $U(p,\infty)^{\sim}$ мы обозначим универсальную накрывающую группу группы $U(p,\infty)$.

6.1. Голоморфные представления группы $GL(\infty,\mathbb{C})$. Через $GL(\infty,\mathbb{C})$ мы обозначим группу всех ограниченных операторов в l_2, для которых обратные операторы также существуют и ограничены.

Рассмотрим сигнатуру вида

$$M = M(\infty) = (\mu_1,\mu_2,\dots), \tag{6.1}$$

где $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots$ – неотрицательные целые числа, причем $\mu_j = 0$ для достаточно больших j. Дословно повторяя конструкцию, изложенную в п.4.2, для каждой такой сигнатуры M мы получаем гильбертово пространство V_M и представление π_M группы $GL(\infty,\mathbb{C})$ в V_M (отметим, что все тензорные произведения в формулах п.4.2 оказываются конечными, потому что $\mu_j = 0$, начиная с некоторого места; по той же причине в формуле (4.8) отсутствует множитель $\det^{\lambda_n}(g)$).

Замечание. Представления π_M непрерывны относительно слабой топологии на $GL(\infty,\mathbb{C})$, но сама $GL(\infty,\mathbb{C})$, снабженная слабой топологией, не является топологической группой.

Пусть дана сигнатура (6.1). Тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ мы вводим сигнатуру $M(n) = (\mu_1,\dots,\mu_n)$. Для любых m,n, таких, что $m < n \leqslant \infty$ очевидным образом определены канонические вложения

$$L^{(M)}_{m,n} : V_{M(m)} \to V_{M(n)}, \tag{6.2}$$

удовлетворяющие условию

$$L^{(M)}_{m,n}\pi_{\Lambda(m)}(g) = \pi_{\Lambda(n)}(g)L^{(M)}_{m,n}; \quad g\in GL(m,\mathbb{C}).$$

Таким образом мы имеем цепочку вложенных пространств

$$V_{M(1)} \to V_{M(2)} \to \dots .$$

Очевидно, объединение этих пространств плотно в $V_{M(\infty)}$.

6.2. Голоморфные представления группы $U(p,\infty)^\sim$. Обозначим через Σ_∞ множество всех сигнатур

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots), \tag{6.3}$$

удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ – целые неотрицательные числа для всех $j \neq p$.

б) $\lambda_{p+j} = 0$ при достаточно больших j.

в) Обозначим через a количество чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, отличных от λ_1, а через b – количество чисел $\lambda_{p+1}, \dots$, отличных от 0. Тогда λ_1 лежит в множестве

$$\{a+b, a+b+1; \dots; p+b-1\} \cup \{\lambda_1 > p+b-1\}.$$

Определим матричный шар $B_{p,\infty}$ как множество комплексных матриц z размера $p \times \infty$, таких, что $\|z\| < 1$. Группа $U(p,\infty)$ действует на $B_{p,\infty}$ по стандартной формуле (3.3).

Пусть Λ – сигнатура вида (6.3). Пусть, как и раньше,

$$\Lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \quad \Lambda'' = (\lambda_{p+1} \dots,)$$

$$V_\Lambda = V_{\Lambda'} \otimes V_{\Lambda''}.$$

Для любого $\Lambda \in \Sigma_\infty$ определим операторнозначное ядро

$$K_\Lambda : B_{p,\infty} \times B_{p,\infty} \to GL(V_\Lambda)$$

по формуле

$$K_\Lambda(z, \bar{u}) = \pi_{\Lambda'}(1 - zu^*) \otimes \pi_2(1 - u^* z)^{-1}. \tag{6.4}$$

Точно так же, как в конечномерном случае, по ядру K_Λ строится гильбертово пространство $H_\Lambda(B_{p,\infty})$, состоящее из V_Λ-значных голоморфных функций на $B_{p,\infty}$. Группа $U(p,\infty)^\sim$ действует в $H_\Lambda(B_{p,\infty})$ по формуле

$$\rho_\Lambda(g) f(z) = [\pi_{\Lambda'}(a + zc) \otimes \pi_{\Lambda''}(d - z^g c)] f(z^g), \tag{6.5}$$

причем представление ρ_Λ унитарно.

Корректность этих построений вытекает из конструкции следующего пункта.

6.3. Предельная конструкция для представлений ρ_Λ. Мы можем рассматривать матричный шар $B_{p,n}$ как подмножество в $B_{p,\infty}$. Действительно матрице $z \in B_{p,n}$ можно поставить в соответствие матрицу $(z0)$ размера $p \times (n + \infty)$. Рассмотрим сигнатуру Λ вида

(6.3), удовлетворяющую условиям а)–в), и для любого натурального n определим сигнатуру

$$\Lambda(n) = (\lambda_1, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+n}).$$

Подчеркнем, что эта сигнатура удовлетворяет условиям п.4.4. Рассмотрим соответствующее представление $\rho_\Lambda(n)$ группы $U(p,n)$ в пространстве $H_{\Lambda(n)}(B_{p,n})$.

Пусть $m < n$. Определим оператор изометрического вложения

$$A_{m,n} : H_{\Lambda(m)}(B_{p,m}) \to H_{\Lambda(n)}(B_{p,n}).$$

Для этого рассмотрим систему функций

$$\varphi^{(l)}_{u,\xi}(z) = K_{\Lambda(l)}(z, \bar{u})\xi \in H_{\Lambda(l)}(B_{p,l}); \quad u \in B_{p,l}, \quad \xi \in V_{\Lambda(l)},$$

и положим

$$A_{m,n}\varphi^{(m)}_{u,\xi} = \varphi^{(n)}_{u,\eta}; \quad \eta = \left(1_{V_{\Lambda'}} \otimes L^{\Lambda''}_{m,n}\right)\xi.$$

Легко видеть, что

$$\langle A_{m,n}\varphi^{(m)}_{z,\eta}, A_{m,n}\varphi^{(m)}_{u,\xi}\rangle_{H_{\Lambda(n)}(B_{p,n})} = \langle \varphi^{(m)}_{z,\eta}, \varphi^{(m)}_{u,\xi}\rangle,$$

поэтому $A_{m,n}$ действительно является изометрическим вложением, кроме того,

$$A_{m,n}\rho_{\Lambda(m)}(g)f = \rho_{\Lambda(n)}(g)A_{m,n}f; \quad g \in U(p,m) \tag{6.6}$$

(это тождество очевидно, если $f = \psi_{u,\xi}$, далее продолжаем по линейности).

Замечание. Обобщенная функция χ на $\bar{B}_{p,m}$ со значениями в $V_{\Lambda(m)}$ может рассматриваться как $V_{\Lambda(n)}$ – обобщенная функция на $\bar{B}_{p,n}$. Легко видеть, что в обозначениях п.1.6

$$A_{m,n}\Xi\chi = \Xi\left(1_{V_{\Lambda'}} \otimes L^{(\Lambda'')}_{m,n}\chi\right). \tag{6.7}$$

Итак, мы имеем цепочку

$$\ldots \to H_{\Lambda(k)}(B_{p,k}) \xrightarrow{A_{k,k+1}} H_{\Lambda(k+1)}(B_{p,k+1}) \to \ldots,$$

вложенных друг в друга гильбертовых пространств. Обозначим их индуктивный предел (т.е. пополнение объединения) через $H_\Lambda(B_{p,\infty})$. По построению в $H_\Lambda(B_{p,\infty})$ действует группа

$$U^0(p,\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} U(p,n).$$

Предложение 6.1. *Представление группы* $U^0(p,\infty)^\sim$ *в* $H_\Lambda(B_{p,\infty})$ *продолжается до слабо непрерывного представления группы* $U(p,\infty)^\sim$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{p,n}\right) \times \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\Lambda(n)}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{p,n} \times V_{\Lambda(n)}) \to H_\Lambda(B_{p,\infty}),$$

заданное формулой

$$\alpha(u,\xi) = \psi_{u,\xi}.$$

Учитывая, что

$$\langle \psi_{z,\eta}, \psi_{u,\xi} \rangle = \langle \eta, K_\Lambda(z,\bar{u})\xi \rangle,$$

мы получаем, что α продолжается до непрерывного отображения

$$B_{p,\infty} \times V_\Lambda \to H_\Lambda(B_{p,\infty})$$

(на $B_{p,\infty}$ рассматривается равномерная топология, а на V_Λ – слабая). Пусть $g \in U(p,\infty)$, пусть $R_\Lambda(g,z)$ – мультипликатор в (6.5) (см. (4.14)). Унитарные операторы $\rho_\Lambda(g)$ мы определим формулой

$$\rho_\Lambda(g)\psi_{u,\xi} = \psi_{u^{g^{-1}},\eta}; \quad \eta = R_\Lambda(g,u)^{*-1}\xi.$$

Легко видеть, что выражения $\langle \rho_\Lambda(g)\psi_{z,\zeta}, \psi_{u,\xi} \rangle$ непрерывно зависят от $g \in U(p,\infty)$.

6.4. Двойственная конструкция. Предельную конструкцию предыдущего пункта можно описать чуть-чуть иначе. А именно, рассмотрим отображение

$$A^*_{m,n} : H_{\Lambda(n)}(B_{p,n}) \to H_{\Lambda(m)}(B_{p,m}),$$

которое каждой функции $f \in H_{\Lambda(n)}(B_{p,n})$ ставит в соответствие ограничение функции $\left(1_{V_{\Lambda'}} \otimes (L^{(\Lambda'')}_{m,n})^*\right) f(z)$ на $B_{p,m} \subset B_{p,n}$.

Таким образом мы получаем цепочку гильбертовых пространств

$$\ldots H_{\Lambda(k)}(B_{p,k}) \xleftarrow{A^*_{k,k+1}} H_{\Lambda(k+1)}(B_{p,k+1}) \leftarrow \ldots .$$

Определим $H_\Lambda(B_{p,\infty})$ как обратный предел этой цепочки. Очевидно

$$A^*_{m,n}\rho_{\Lambda(n)}(g) = \rho_{\Lambda(m)}(g)A^*_{m,n}; \quad g \in U(p,m),$$

поэтому в $H_\Lambda(B_{p,\infty})$ действует группа $U^0(p,\infty)$. Далее продолжаем представление по непрерывности.

6.5. Ограничение ρ_Λ на $O(p,\infty)$.

Теорема 6.1. ([19]). *Ограничение представления ρ_Λ на $O_0(p,\infty)$ неприводимо.*

Доказательство. Ограничим ρ_Λ на $U(\infty)$. Для $g \in U(\infty)$ формула (6.5) переписывается в виде

$$f(z) \mapsto \left(1_{V_{\Lambda'}} \otimes \pi_{\Lambda''}(g)\right) f(zg).$$

Легко видеть, что полученное представление $U(\infty)$ разлагается в прямую сумму представлений π_M из п.6.1 (рассматриваемых как представления $U(\infty) \subset GL(\infty,\mathbb{C})$). Можно показать (см. [21]), что ограничения представлений π_M на $O(\infty)$ неприводимы и попарно неэквивалентны.

Поэтому любое $O_0(p,\infty)$-инвариантное подпространство $Q \subset H_\Lambda(B_{p,\infty})$ будет и $U(\infty)$-инвариантным (т.к. оно $O(\infty)$-инвариантно). В частности оно инвариантно относительно групп $SO_0(p,n) \subset U(p,n)$ и $U(n) \subset U(p,n)$. Но группа $U(p,n)$ порождена своими подгруппами $SO_0(p,n)$ и $U(n)$. Поэтому Q инвариантно относительно $U(p,n)$, а следовательно относительно $U^0(p,\infty)$. •

Теорема 6.2. ([21]). *Любое неприводимое унитарное представление $O_0(p,\infty)$ есть ограничение некоторого представления ρ_Λ группы $U(p,\infty)$. Если $\Lambda \neq \Lambda'$, то ограничения ρ_Λ и $\rho_{\Lambda'}$ на $O_0(p,\infty)$ различны.*

Обозначим через γ_Λ ограничение представления ρ_Λ на $O_0(p,\infty)$.

6.6. Несколько замечаний об индуктивных пределах. Рассмотрим унитарное представление γ_Λ группы $O_0(p,\infty)$ в пространстве $H_\Lambda(B_{p,\infty})$. Рассмотрим в пространстве $H_\Lambda(B_{p,\infty})$ какую-нибудь цепочку подпространств

$$T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \dots$$

такую, что T_n инвариантно относительно $SO_0(p,n)$. Понятно, что таких цепочек очень много (см., например, обсуждение индуктивных пределов групп в [59]). Можно например взять в качестве T_n пространство $H_{\Lambda(n)}(B_{p,n})$. Этот пример малоинтересен, потому что представление $SO_0(p,n)$ в $H_{\Lambda(n)}(B_{p,n})$ сильно приводимо. Чуть ниже в п.6.9 мы предъявим цепочку T_n, такую, что представление $SO_0(p,n)$ в T_n неприводимо. Отметим, что если существование цепочек такого типа для представлений ρ_Λ группы $U(p,\infty)$ совершенно очевидно, так как представление имеет старший вес, то в случае группы $O(p,\infty)$ простых видимых причин для существования таких неприводимых цепочек нет.

Замечание. Пусть у нас есть абстрактная цепочка гильбертовых пространств $T_1 \subset T_2 \subset T_3 \subset \ldots$, причем в T_n задано представление σ_n группы $O(p,n)$ и

$$\sigma_n(g)v = \sigma_{n-1}(g)v \quad \forall v \in T_{n-1}, g \in SO_0(p, n-1).$$

Тогда в индуктивном пределе $\tilde{T}$ пространств T_j действует группа $\bigcup\limits_n SO_0(p,n)$, но это представление, вообще говоря, не является слабо непрерывным. Возникает естественный вопрос: верно ли, что если все представления σ_n неприводимы, то предельное представление слабо непрерывно? Тот же вопрос может быть переформулирован в несколько ином виде: Пусть дана цепочка неприводимых представлений σ_n групп $SO_0(p,n)$ такая, что σ_{n-1} вкладывается в ограничение σ_n на $SO_0(p,n-1)$. Верно ли, что цепочка σ_n совпадает, начиная с некоторого места, с одной из построенных нами цепочек?

6.7. Представление γ_Λ как индуктивный предел представлений $\nu^0_{\Lambda(n)}$. Пусть сигнатура Λ удовлетворяет условиям п.6.2. Тогда при достаточно больших n для $\Lambda(n)$ выполнены условия (4.21), и тем самым определены представления $\nu^0_{\Lambda(n)}$ и пространства $E^0_{\Lambda(n)}(M_{p,n})$; через $M_{p,n}$ мы обозначаем многообразие Штифеля, состоящее из p-реперов в $\mathbb{R}^n$. Пусть $m < n$.

Построим каноническое вложение

$$C_{m,n} : E^0_{\Lambda(m)}(M_{p,m}) \to E^0_{\Lambda(n)}(M_{p,n}).$$

Пусть φ – ограниченная $V_{\Lambda(m)}$-значная функция на $M_{p,m}$. Рассмотрим $V_{\Lambda(n)}$-значную функцию $(1 \otimes L_{m,n}\varphi(z)$ на $M_{p,m}$ (где оператор $L_{m,n}$ тот же, что в п.6.1). Функцию $L_{m,n}\varphi$ можно рассматривать как $V_{\Lambda(n)}$-значную обобщенную функцию на $M_{p,n}$. Соответствующий линейный функционал на C^∞ задается формулой

$$\psi \mapsto \int\limits_{M_{p,m}} \langle 1 \otimes L_{m,n}\varphi(z), \overline{\psi(z)} \rangle_{V_{\Lambda(n)}} d\mu_{p,m}(z).$$

Искомое вложение $C_{m,n}$ построено (важно заметить, что $C_{m,n}\varphi$ действительно содержится в $E^0_{\Lambda(n)}(M_{p,n})$, см. предложение 2.1). Очевидно,

$$C_{m,n}\nu^0_{\Lambda(m)}(g) = \nu^0_{\Lambda(n)}(g)C_{m,n}; \quad g \in SO_0(p,m).$$

Итак, мы имеем цепочку вложений

$$\ldots \to E^0_{\Lambda(k)}(M_{p,k}) \xrightarrow{C_{k,k+1}} E^0_{\Lambda(k+1)}(M_{p,k+1}) \to \ldots .$$

Обозначим через E^* индуктивный предел этой цепочки в категории гильбертовых пространств (т.е. пополнение объединения $\cup E^0_{\Lambda(k)}(M_{p,k})$). По построению E^* является $\cup SO_0(p,k)$-инвариантным подпространством в $H_\lambda(B_{p,\infty})$. Поэтому $E^* \simeq H_\Lambda(B_{p,\infty})$, а представление $O_0(p,\infty)$ в E^* совпадает с γ_Λ.

6.8. Представление γ_Λ как предел неприводимых представлений групп $SO(p,n)$. Сейчас мы предъявим в каждом $E^0_{\Lambda(k)}(M_{p,k})$ некоторое минимальное $SO(p,k)$-инвариантное подпространство $I^0_{\Lambda(k)}$ такое, что оператор $C_{m,n}$ переводит $I^0_{\Lambda(m)}$ в $I^0_{\Lambda(n)}$. Это пространство является пространством обобщенных сечений некоторого $SO(p,k)$-инвариантного подрасслоения $F_{\Lambda(k)}$ в тривиальном расслоении $M_{p,k}\times V_{\Lambda(k)}$ над $M_{p,k}$.

Пусть $R^\circ_\Lambda(g,z)$ – мультипликатор представления $\nu^0_{\Lambda(k)}$ (см. (4.23)). Пусть P - стабилизатор точки $z_0=(1_p\,0)\in M_{p,k}$. Рассмотрим представление

$$\tau(h)=R^\circ_{\Lambda(k)}(h,z_0)$$

группы P, связанное с мультипликатором $R^0_{\Lambda(k)}$. Тогда $SO_0(p,k)$ – инвариантные подрасслоения в $M_{p,k}\times V_{\Lambda(k)}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подпространствами в $V_{\Lambda(k)}$, инвариантными относительно представления τ группы P. Возьмем в $V_{\Lambda(k)}$ подпространство $W_{\Lambda(k)}$, порожденное векторами вида $\tau(h)\delta_{\Lambda(k)}$, где $\delta_{\Lambda(k)}$ – вектор старшего класса веса в $V_{\Lambda(k)}$. Легко видеть, что $W_{\Lambda(k)}$ является минимальным P-инвариантным подпространством в $V_{\Lambda(k)}$.

Пусть $F_{\Lambda(k)}$ – подрасслоение в $M_{p,k}\times V_{\Lambda(k)}$, инвариантное относительно группы $SO_0(p,k)$, соответствующее подпространству $W_{\Lambda(k)}\subset V_{\Lambda(k)}$. Легко прослеживается, что оператор $C_{m,n}$ переводит обобщенные сечения $F_{\Lambda(m)}$ в обобщенные сечения $F_{\Lambda(n)}$. Обозначим через $I^0_{\Lambda(k)}$ подпространство в $E^0_{\Lambda(k)}(M_{p,k})$, состоящее из обобщенных сечений $F_{\Lambda(k)}$. В силу теоремы 5.3 представление $SO_0(p,k)$ в $I^0_{\Lambda(k)}$ неприводимо. Искомая цепочка неприводимых представлений построена.

Замечание. “Прослеживание” конструкции показывает, что при достаточно больших k представление $SO_0(p,k)$ в $I^0_{\Lambda(k)}$ является факторпредставлением представления группы $SO_0(p,k)$, индуцированного с представления P, тривиального на нильрадикале, и имеющего вид $\varkappa\otimes\sigma$ на редуктивной части $GL(p,\mathbb{R})\otimes SO(q-p)$ группы P. При этом представление $\varkappa$ группы $GL(p,\mathbb{R})$ задается

сигнатурой
$$(-(q-1)-\lambda_p, \dots, -(q-1)-\lambda_1),$$
а представление σ группы $SO(k-p)$ задаются сигнатурой
$$(\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_k).$$

6.9. Представление γ_Λ как обратный предел представлений $\nu_{\Lambda(n)}$. Пусть $m < n$, и m достаточно велико. Рассмотрим отображение
$$C^*_{m,n} : E_{\Lambda(n)}(M_{p,n}) \to E_{\Lambda(m)}(M_{p,m}),$$
сопряженное к отображению $C_{m,n}$. Если $f \in E_{\Lambda(n)}(M_{p,n})$, то $C_{m,n}f$ есть ограничение функции $\left(1_{V_{\Lambda'}} \otimes (L^{\Lambda''}_{m,n})^*\right) f(z)$ на $M_{p,m} \subset M_{p,n}$ (ср. с [60], см. также следующий параграф). Теперь мы имеем цепочку проекций
$$\dots \leftarrow E_{\Lambda(k)}(M_{p,k}) \xleftarrow{C^*_{k,k+1}} E_{\Lambda(k+1)}(M_{p,k+1}) \leftarrow \dots$$
и можем рассмотреть представление группы $\cup SO_0(p,k)$ в обратном пределе этой цепочки. Легко видеть, что это представление совпадает с γ_Λ.

§ 7. Применение теорем о следе и задачи некоммутативного гармонического анализа

A. Задачи гармонического анализа для дополнительных серий унитарных представлений группы $SO_0(1,q)$.

7.1. Сферическая основная серия представлений группы $SO_0(1,q)$. Эта серия определяется следующим образом. Пусть $SO_0(1,q)$ действует на сфере S^{q-1} так, как описано в п.2.4. Для любого $s \in \mathbb{R}$ определим унитарное представление $\sigma_s = \sigma_s^{(q)}$ группы $SO_0(1,q)$ в $L^2(S^{q-1})$ по формуле
$$\sigma_s(g)f(x) = (a+xc)^{-(q-1)/2+is} f(x^g).$$

Представления σ_s и σ_{-s} эквивалентны, сплетающий их оператор K_s задается формулой
$$K_s f(x) = \int_{S^{q-1}} \frac{f(y)dy}{\|x-y\|^{q-1+2is}}.$$

Рассмотрим в $SO_0(1,q)$ подгруппу $SO(1,q-1)$, состоящую из матриц, оставляющих на месте последний базисный вектор в $\mathbb{R}^{q+1}$.

Обозначим через ξ ограничение представления $\sigma^{(q)}$ на $SO_0(1,q-1)$. На сфере S^{q-1} (заданной уравнением $x_1^2+\ldots+x_q^2=1$) группа $SO_0(1,q-1)$ имеет три орбиты: экватор Eq, заданный уравнением $x_q=0$, и две полусферы $\mathcal{D}_+$ и $\mathcal{D}_-$, выделяемые неравенствами $x_q>0$ и $x_q<0$ соответственно. Ясно, что

$$L^2(S^{q-1})=L^2(\mathcal{D}_+)\oplus L^2(\mathcal{D}_-).$$

Далее, однородные пространства

$$\mathcal{D}_\pm=SO_0(1,q-1)/SO(q-1)$$

суть $(q-1)$-мерные пространства Лобачевского. Ограничение представления ξ на подпространства $L^2(\mathcal{D}_\pm)$ имеет вид (4.1), а поэтому является представлением, индуцированным с одномерного представления стационарной подгруппы $SO(q-1)$, а у этой подгруппы существует лишь единственное одномерное представление, а именно тривиальное представление. Итак доказано следующее предложение.

Предложение 7.1. *Ограничение представления $\sigma_s^{(q)}$ на подгруппу $SO_0(1,q-1)$ не зависит от s и есть сумма двух копий представлений $SO_0(1,q-1)$ в $L^2(SO_0(1,q-1)/SO(q-1))$.*

Таким образом данная задача сводится к хорошо изученной задаче (см. [11; 6], §X.4; [14]). Напомним, что представление в L^2 на пространстве Лобачевского разлагается в однократный прямой интеграл представлений σ_s по всем $s\geqslant 0$.

Рассмотрим теперь задачу о разложении тензорного произведения представлений σ_s и σ_τ группы $SO_0(1,q)$.

Предложение 7.2. *Представление $\sigma_s\otimes\sigma_\tau$ не зависит от s,τ и эквивалентно представлению $SO_0(1,q)$ в*

$$L^2(SO_0(1,q)/(SO_0(1,1)\times SO(q-1))).$$

Доказательство. Итак, группа $SO_0(1,q)$ действует в $L^2(S^{q-1}\times S^{q-1})$ по формуле

$$T_{s,\tau}(g)f(x,y)=(a+xc)^{-\frac{q-1}{2}+is}(a+yc)^{-\frac{q-1}{2}+i\tau}f(x^g,y^g).$$

Унитарный оператор

$$A_{i\alpha}f(x,y)=\|x-y\|^{i\alpha}f(x,y) \tag{7.1}$$

сплетает представления $T_{s,\tau}$ и $T_{s+\alpha,\tau+\alpha}$. С другой стороны σ_s эквивалентно σ_{-s}, а поэтому $T_{s,\tau}\simeq T_{-s,\tau}$. Из этих двух замечаний следует, что $T_{s,\tau}$ не зависит от s,τ. Далее, $SO_0(1,q)$ имеет в $s^{q-1}\times s^{q-1}$

две орбиты: диагональ $\Delta = s^{q-1} \subset s^{q-1} \times s^{q-1}$ и дополнение C до диагонали. Ясно, что $L^2(S^{q-1} \times S^{q-1}) = L^2(C)$, а при $S = t = 0$ наше представление есть естественное представление $SO_0(1,q)$ в

$$L^2(C) = L^2(SO_0(1,q)/(SO_0(1,1) \times SO(q-1)).$$

Таким образом, и эта задача сведена нами к стандартной, а именно, к разложению L^2 на псевдоримановом симметрическом пространстве ранга 1, см., например, [14]. •

Предложение 7.3. *Тензорное произведение представления σ_s основной сферической серии на представление ν_τ сферической дополнительной серии не зависит от s, τ и эквивалентно тензорному произведению двух представлений сферической основной серии.*

Лемма 7.1. *Пусть $P \subset SO_0(1,q)$ – стабилизатор точки на S^{q-1}. Тогда ограничения σ_s и ν_τ на P неприводимы и эквивалентны.*

Доказательство Леммы. Сделаем стереографическую проекцию $S^{q-1} \to \mathbb{R}^{q-1}$. Тогда P становится группой конформных преобразований $\mathbb{R}^{q-1}$ (т.е. P порождена группой вращений $SO(q)$, группой $\mathbb{R}^{q-1}$ параллельных переносов и группой преобразования подобия $\mathbb{R}^*$). При этом группа P действует в пространстве функций на $\mathbb{R}^{q-1}$ операторами вида

$$f(x) \mapsto f(x^g)\lambda(g)^\alpha, \tag{7.2}$$

где λ – коэффициент подобия преобразования g, а $\alpha = (q-1)/2 + is$ в случае σ_s и $\alpha = (q-1)/2 - \tau$ в случае ν_τ.

Сделаем преобразование Фурье на $\mathbb{R}^{q-1}$. Тогда операторы сдвига переходят в операторы умножения на функции вида $\exp(\sum a_j x_j)$. Поэтому любой оператор Q, коммутирующий с нашим представлением, должен коммутировать с умножениями на $\exp(\sum a_j x_j)$, и тем самым Q есть оператор умножения на функцию. Но эта функция должна быть инвариантной относительно вращений и гомотетий. •

Итак, наши представления неприводимы. Оператор, сплетающий два представления вида (7.2), есть свертка с некоторой функцией вида $|x|^\lambda$ с подходящим λ.

Доказательство Предложения. Пусть $G \supset H$ – две группы, через $\mathrm{IND}_H^G(\rho)$ мы обозначим представление группы G, унитарно индуцированное с представления ρ группы H (см. [9], §13), а через $\mathrm{RES}_H^G(\pi)$ мы обозначим ограничение представления π группы G на H. Напомним следующее очевидное равенство

$$\mathrm{IND}_H^G(\rho) \otimes \pi = \mathrm{IND}_H^G(\rho \otimes \mathrm{RES}_H^G(\pi)), \tag{7.3}$$

где ρ – унитарное представление H, а π – унитарное представление G. Теперь утверждение нашего предложения становится очевидным: $\sigma_s \otimes \sigma_{s'}$ и $\sigma_s \otimes \nu_\tau$ индуцированы с одного и того же представления параболической подгруппы P. •

7.2. Задача ограничения на подгруппу для представлений дополнительной серии. Мы сохраняем обозначения пп.2.4, 2.6 для пространств $E_s(S^{q-1})$, $E_s^0(S^{q-1})$ и представлений ν_s, ν_s^0.

Рассмотрим представление ν_s^0 сферической дополнительной серии группы $SO_0(1-q)$. Пусть k – наибольшее целое число, такое, что

$$s+k < q/2-1.$$

Теорема 7.1. *Ограничение представления ν_s^0 группы $SO_0(1,q)$ на $SO_0(1,q-1)$ есть прямая сумма представления $SO_0(1,q-1)$ вида*

$$\nu_s^0 \oplus \nu_{s+1}^0 \oplus \ldots \oplus \nu_{s+k}^0 \tag{7.4}$$

и ограничения на $SO_0(1,q-1)$ представления сферической основной серии группы $SO_0(1,q)$.

Замечание. При $s > q/2-1$ сумма (7.4) пуста.

Предъявим сначала дискретные составляющие (7.4).

Обозначим через δ_{Eq} дельта-функцию экватора $Eq \subset S^{q-1}$, т.е. обобщенную функцию на сфере S^{q-1}, определяемую равенством

$$\int\limits_{S^{q-1}} \psi(x)\delta_{Eq}(x)dx = \int\limits_{Eq} \psi(y)dy; \qquad \psi \in C^\infty(S^{q-1}).$$

Обозначим через $\mathcal{F}_0$ пространство обобщенных функций на S^{q-1} вида $\varphi(x)\delta_{Eq}$, где $\varphi(x) \in C^\infty$. Пусть $\vec{n}$ – поле единичных нормалей к экватору (направленных для определенности в сторону верхней полусферы $\mathcal{D}_+$). Обозначим через $\mathcal{F}_j$ пространство обобщенных функций на S^{q-1} вида

$$\varphi_0(x)\delta_{Eq} + \varphi_1(x)\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\delta_{Eq} + \ldots + \varphi_j(x)\frac{\partial^j}{\partial\vec{n}^j}\delta_{Eq}; \qquad \varphi_\alpha \in C^\infty. \tag{7.5}$$

Можно также сказать, что $\mathcal{F}_j$ – пространство производных порядка $\leqslant j$ вдоль гладких векторных полей от функций из $\mathcal{F}_0$.

Предложение 7.4. *Пространство $E_s^0(S^{q-1})$ содержит $\mathcal{F}_k$.*

Доказательство. Высказывание вытекает из предложения 2.3. Кроме того, оно является частным случаем теоремы о следе для Соболевских пространств (см. [8], §3.2; [26], §1.3) •

Очевидно, пространства $\mathcal{F}_j$ являются $SO_0(1,q-1)$-инвариантными. Обозначим через $\overline{\mathcal{F}_j}$ замыкание пространства $\mathcal{F}_j$ в $E_s^0(S^{q-1})$ это означает, что коэффициенты φ_j в (7.5) суть функции из $E_{s+j}^0(S^{q-2})$).

Очевидно, представление $SO_0(1,q-1)$ в $\mathcal{F}_0$ есть в точности представление ν_S^0. Рассмотрим теперь представление $SO_0(1,q-1)$ в $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$

$$\nu_s^0(g)\left(\psi(x)\frac{\partial^j}{\partial\vec{n}^j}\delta_{Eq}\right)=(a+xc)^{-(q-1)+s}\psi(x^g)\left(\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\right)^j\delta_{Eq}\right)(x^g).$$

Учитывая, что преобразования $x\mapsto x^g$ конформны и коэффициент растяжения равен $(a+xc)^{-1}$, мы можем привести последнее выражение к форме

$$(a+xc)^{-(q-1)+s}\psi(x^g)(a+xc)^j\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\right)^j\delta_{Eq}(x)+\ldots,$$

где ... обозначает члены, лежащие в $\mathcal{F}_{j-1}$. Итак, мы видим, что представление $SO_0(1,q-1)$ в $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ эквивалентно ν_{s+j}^o.

7.3. Двойственное описание дискретного спектра. Рассмотрим вместо ν_s^0 эквивалентное ему представление ν_s. Пусть k такое же, что и в п.7.2. Несложно показать, что при $j\leqslant k$ для функции $f\in E_s(S^{q-1})$ корректно определены ограничения производных $\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\right)^j f$ на E_q.

Пусть $j\leqslant k$. Обозначим через Q_j пространство всех функций $f\in E_s(S^{q-1})$ таких, что

$$f(y)=\frac{\partial}{\partial\vec{n}}f(y)=\ldots=\left(\frac{\partial}{\partial\vec{n}}\right)^j f(y)=0\quad\forall y\in Eq.$$

Тогда в $E_s(S^{q-1})$ мы имеем фильтрацию

$$E_s(S^{q-1})\supset Q_0\supset Q_1\supset\ldots\supset Q_k.$$

Теперь в факторпространстве Q_j/Q_{j-1} реализуется представление ν_{s+j} группы $SO_0(1,q-1)$.

7.5. Отсечение дискретного спектра. Мы должны закончить доказательство теоремы 7.1. Идея доказательства очень проста. Оператор

$$B_sf(x)=|x_q|^{(q-1)/2-s}F(x)$$

сплетает ограничение ν_s на $SO_0(1,q-1)$ с ограничением $\sigma_0\simeq\nu_{(q-1)/2}$ на $SO_0(1,q-1)$. Ядро этого оператора в точности состоит из обобщенных функций $f \in E_s^0(S^{q-1})$, носитель которых лежит на Eq.

Однако оператор B_s – это оператор умножения на не гладкую функцию в пространстве обобщенных функций. Этот оператор не ограничен, и поэтому только что приведенное рассуждение нуждается в уточнении.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $E^0 s(S^{q-1}) \oplus L^2(S^{q-1})$ подпространство K, состоящее из пар $(f, |x_q|^{(q-1)/2-S} f)$, где $f \in C^\infty(S^{q-1})$. Пусть $\bar{K}$ – замыкание подпространства K. Рассмотрим операторы проектирования $Q : \bar{K} \to E^0 s(S^{q-1})$ и $R : \bar{K} \to L^2(S^{q-1})$.

Теорема 7.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма 7.2. а) *Оператор Q инъективен и имеет плотный образ.*

б) *Оператор R имеет плотный образ, а его ядро состоит из пар $(\psi, 0) \in \bar{K}$ таких, что ψ – обобщенная функция с носителем на Eq.*

Доказательство. Оба утверждения о плотности образа очевидны. Докажем а). Пусть $\varphi_i \in C^\infty(S^{q-1})$, причем $\varphi_i \to 0$ в $E_s^0(S^{q-1})$, (а следовательно $\varphi_i \to 0$ в смысле обобщенных функций), а $|x_q|^{(q-1)/2-s}\varphi_i \to \psi$ в смысле L^2. Возьмем функцию $\theta \in C^\infty(S^{q-1})$, равную нулю в окрестности Eq. Тогда $\theta\varphi_i \to 0$ в смысле обобщенных функций, а $|x_q|^{(q-1)/2-s}\varphi_i \to 0$ в смысле L^2, отсюда $\theta\psi = 0$ для любой θ, а значит $\psi = 0$ в L^2.

Докажем б). Пусть $\varphi_i \to \psi$ в E_s^0, а $|x_q|^{(q-1)/2-s}\varphi \to 0$ в L^2. Пусть θ такая же как и выше. Тогда $\varphi_i\theta \to \psi\theta$ в смысле обобщенных функций, а $|x_q|^{q-1}\varphi_i\theta \to 0$ в смысле L^2. Поэтому $\varphi_i\theta \to 0$ в L^2, а значит $\theta\psi = 0$. Итак, носитель ψ лежит на Eq. •

7.6. Предел представлений ν_s^0 групп $SO_0(1, n)$ при $n \to \infty$. Для представлений ν_s^0 сферической дополнительной серии групп $SO_0(1, n)$ конструкция п.6.7 выглядит особенно наглядно.

Мы имеем цепочку канонических вложений

$$\ldots \to E_s^0(S^{n-1}) \to E_s^0(S^n) \to \ldots, \tag{7.6}$$

а именно функции f на S^{n-1} ставится в соответствие обобщенная функция $f \cdot \delta_{Eq(n)}$ на S^n, где через $Eq(n)$ обозначен экватор сферы S^n. Пусть E_s^* – предел цепочки (7.6) (т.е. пополнение объединения пространств $E_s^0(S^n)$). По построению в E_s^* действует группа $\cup SO_0(1, q)$, это предельное представление мы обозначим через ν_s^*.

Теорема 7.2. *Представление ν_s^* продолжается до представления группы $O_0(1, \infty)$, непрерывного в слабой топологии, где через*

$O_0(1,\infty)$ мы обозначаем подгруппу в $O(1,\infty)$, состоящую из матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таких, что $a > O$.

Доказательство. Достаточно проверить, что наше представление слабо непрерывно на подгруппе $G_0 := \cup SO(n)$. Обозначим G_n подгруппу в G_0, состоящую из матриц, оставляющих на месте первые n базисных векторов. В [21] был получен следующий признак слабой непрерывности унитарных представлений группы G_0.

Предложение 7.5. *Пусть ρ – унитарное представление группы $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} SO(n)$ в пространстве H. Пусть $H^{(n)}$ – множество векторов $h \in H$, инвариантных относительно G_n. Следующие высказывания равносильны:*

а) *ρ непрерывно в слабой топологии на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} SO(n)$*

б) *$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H^{(n)}$ плотно в H.*

(доказательство см. в [21], пп.1.4 и 3.2).

Пусть $H = E_s^*$. Легко видеть, что пространство $H^{(n)}$ инвариантно относительно группы $SO_0(1,n)$. Поэтому $\cup H^{(n)}$ инвариантно относительно группы $\cup SO_0(1,n)$. Легко видеть, что ν_s^* неприводимо. Поэтому $\cup H^{(n)}$ либо состоит из 0, либо всюду плотно в H. Итак нам достаточно предъявить хотя бы один вектор в $\cup H^{(n)}$.

Пусть $\xi_n \in E_s^0(S^{n-1})$ – функция вида $\lambda_n > 0$, а $||\xi_n|| = 1$. Из следующей леммы 7.3 вытекает, что последовательность ξ_n сходится в $H = E_s^*$. Предел σ этой последовательности, очевидно, $\cup SO(n)$-инвариантен, а тем самым $\cup H_n$ непусто. •

Лемма 7.3. *Пусть $k > n$. Тогда*

$$\langle \xi_n, \xi_k \rangle = \left(\frac{c_k}{c_n}\right)^{1/2},$$

где

$$c_m = \frac{\Gamma(m/2)\Gamma(m-1)/2-s)}{\Gamma((m-s)/2)\Gamma((m-1-s)/2)}.$$

Доказательство. Все сводится к вычислению несложного интеграла

$$I_{k,n} = \int\limits_{S^{k-1}} \int\limits_{S^{n-1}\subset S^{k-1}} \frac{dx\,dy}{||x-y||^{2s}} = \sigma_k \sigma_n c_k,$$

где σ_m – площадь сферы S^{m-1}. Теперь

$$\langle \xi_n, \xi_k \rangle = I_{k,n}/(I_{k,k} \cdot I_{n,n})^{1/2}.$$

7.7. Одно общее замечание. Мы хотим формализовать прием, использованный нами при предъявлении дискретного спектра в пп.7.2–7.3.

Пусть группа Ли G действует на многообразии B преобразованиями $x \mapsto x^g$. Пусть $\mathcal{L}$ – векторное расслоение над B, пусть $\pi : \mathcal{L} \to B$ – каноническая проекция (прообразы точек являются линейными пространствами). Пусть группа G действует на $\mathcal{L}$ преобразованиями $l \mapsto l^g$, причем слои переходят в слои, т.е.

$$\pi l^g = (\pi l)^g; \quad l \in \mathcal{L}, \quad g \in G$$

и отображение $l \mapsto l^g$ из слоя над x в слой над x^g линейно.

Пусть $s : B \to \mathcal{L}$ – сечение расслоения (т.е. функция, такая, что $(\pi(s(x)) = x)$. Определим сечение $\rho(g)s$ по формуле

$$(\rho(g)s)x = [s(x)]^g.$$

Таким образом, мы получаем представление группы G в сечениях расслоения $\mathcal{L}$.

Замечание. Сказанное только что – это просто другой язык для описания мультипликаторных представлений (см. п.4.0). Если мы рассматриваем сечения расслоения как разрывные функции на B, то получим представление, заданное формулой вида (4.1), подробнее см. [9], §13.

Пусть M – компактное G-инвариантное подмногообразие в B. Пусть $\mathcal{K}$ – ограничение расслоения $\mathcal{L}$ на многообразие M. Пусть $\mathcal{N}$ – конормальное расслоение на M (т.е. каждой точке $x \in M$ ставится в соответствие фактор касательного пространства к B в x по касательному пространству к M в x). Группа G очевидным образом действует на расслоениях $\mathcal{K}$ и $\mathcal{N}$. Поэтому G действует в любом расслоении, получающемся из $\mathcal{K}$ и $\mathcal{N}$ с помощью тензорных операций.

Пусть $C^\infty(\mathcal{L})$ – пространство всех C^∞-сечений расслоения $\mathcal{L}$. Обозначим через Q_j пространство всех C^∞-сечений расслоения $\mathcal{L}$, имеющих ноль порядка $\geqslant j$ во всех точках многообразия M. Тогда мы получаем в $C^\infty(\mathcal{L})$ фильтрацию

$$C^\infty(\mathcal{L}) = Q_0 \supset Q_1 \supset \dots$$

инвариантную относительно группы G. Очевиден изоморфизм

$$Q_j/Q_{j+1} \simeq \{ \text{ пространство } \quad C^\infty - \text{сечений} \quad \mathcal{K} \otimes S^j \mathcal{N} \},$$

где через $S^j\mathcal{N}$ обозначена j-ая симметрическая степень расслоения $\mathcal{N}$. Легко видеть, что представление G в Q_j/Q_{j+1} совпадает с представлением G в сечениях расслоения $\mathcal{K}\otimes S^j\mathcal{N}$.

Предположим теперь, что пространство M является G – однородным (нас интересует именно это случай). Пусть $x_0 \in M$, пусть $P \subset G$ – стабилизатор x_0. Пусть $\varkappa$ – естественное представление P в слое расслоения $\mathcal{K}$ над x_0 (это слой P-инвариантен), а ν – представление P в слое $\mathcal{N}$ над x_0. Легко видеть, что представление G в Q_j/Q_{j+1} – это просто представление, индуцированное с представления $\varkappa \otimes S^j\nu$ группы P (где через $S^j\nu$ обозначена j-ая симметрическая степень представления ν).

Опишем двойственную конструкцию. Каждое гладкое сечение расслоения $\mathcal{K}$ над M может рассматриваться как обобщенное дельта-образное сечение расслоения $\mathcal{L}$ над B. Пусть $\mathcal{F}_0$ пространство всех обобщенных сечений $\mathcal{L}$ с носителем на M, которые могут быть получены таким способом. Пусть $\mathcal{F}_j$ – пространство частных производных порядка $\leqslant j$ от функций из $\mathcal{F}_0$. Мы имеем G-инвариантную фильтрацию

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots .$$

Очевиден гомоморфизм

$$\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1} \simeq \{\text{пространство} \quad C^\infty - \text{сечений} \quad \mathcal{K}' \otimes S^j\mathcal{N}'\},$$

где через $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{N}'$ мы обозначили расслоения, двойственные к $\mathcal{K}$ и $\mathcal{N}$ соответственно.

Если M однородно, то представление G в $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ индуцировано с представлением группы P, заданного формулой

$$J \otimes \varkappa' \otimes S^j\nu'.$$

Здесь через $\varkappa'$ и ν' обозначены представления P двойственные к $\varkappa$ и ν; через J обозначен якобиан отображения $x \to x^g$ $(g \in P)$ в точке x_0.

Сделанные замечания совершенно очевидны. Они становятся интересными лишь в случае наличия теоремы о следе. В одном частном случае этот прием применялся в статье Якобсена и Верbrowнь [60] (а именно, разбирались задачи типа разложения тензорных произведений представлений $U(p,q)$ со старшим весом, это соответствует ситуации, описанной выше в примере 2 п.1.9).

7.8. Тензорное произведение представлений дополнительной серии. Рассмотрим представление $\nu_s^0 \otimes \nu_\tau^0$ группы $SO(1,q)$ в пространстве $E^0_s \otimes E^0_\tau$. Пространство $E^0_s \otimes E^0_\tau$ есть пространство функций на $S^{q-1} \times S^{q-1}$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle = \iiiint\limits_{(S^{q-1})^4} \frac{f_1(x_1,y_1)\overline{f_2(x_2,y_2)}\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2}{\|x_1-x_2\|^{2S}\cdot\|y_1-y_2\|^{2\tau}}.$$

Группа $SO_0(1,q)$ действует в $E^0_s \otimes E^0_\tau$ по формуле

$$(\nu^0_s\otimes\nu^0_\tau)(g)f(x,y) = (a+xc)^{-s}(a+yc)^{-\tau}f(x^g,y^g).$$

Как мы видели в п.2.6, элементы пространств E^0_s, E^0_τ могут быть интерпретированы как обобщенные функции, а сами эти пространства являются Соболевскими пространствами. Поэтому элементы $E^0_s \otimes E^0_\tau$ могут рассматриваться как обобщенные функции на $S^{q-1}\times S^{q-1}$. (Подчеркнем, что $E^0_s \otimes E^0_\tau$ не является Соболевским пространством.)

Предложение 7.6. *Пусть ψ – обобщенная функция на $S^{q-1}\times S^{q-1}$. Тогда выражение*

$$\gamma(c) = 2^{s_1+s_2}\iiiint\limits_{(S^{q-1})^4}\frac{\psi(x_1,y_1)\overline{\psi(x_2,y_2)}\,dx_1\,dx_2\,dy_1\,dy_2}{(1-c\sum x_1^{(j)}x_2^{(j)})^{2s}(1-c\sum y_1^{(j)}y_2^{(j)})^{2\tau}}$$

монотонно возрастает при $0<c<1$. При этом $\psi\in E^0_s\otimes E^0_\tau$ в том и только том случае, когда существует конечный предел $\lim\limits_{c\to 1-0}\gamma(c)$. Более того,

$$\|\psi\|^2_{E^0_s\otimes E^0_\tau} = \lim_{c\to 1-0}\gamma(c).$$

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство голоморфных функций на $B_q\times B_q$, определяемое положительно определенным ядром

$$K_{s,\tau}(z_1,z_2;\bar u_1,\bar u_2) = (1-\sum z_1^{(j)}\overline{u_1^{(j)}})^{-s}(1-\sum z_2^{(j)}\overline{u_2^{(j)}})^{-\tau}.$$

Рассмотрим подмножество $S^{q-1}\times S^{q-1}$ в границе $B_q\times B_q$. Граничное гильбертово пространство E^0, связанное с $S^{q-1}\times S^{q-1}$ (см.п.2.1–2.2) есть $E^0_s\otimes E^0_\tau$. Теперь утверждение о монотонности $\gamma(c)$ – это частный случай предложения 1.5, а утверждение об условиях для $\psi\in E^0_s\otimes E^0_\tau$ вытекает из предложения 2.1. •

Обозначим через $\mathcal{F}_0$ пространство обобщенных функций на $S^{q-1}\times S^{q-1}$ вида $\varphi\cdot\delta_\Delta$, где δ_Δ – дельта-функция диагонали $\Lambda\subset S^{q-1}\times S^{q-1}$, а $\varphi\in C^\infty$. Пусть $\mathcal{F}_j$ – пространство частных производных порядка $\leqslant j$ от функции из $\mathcal{F}_0$.

Пусть $s+\tau<(q-1)/2$. Пусть k – наибольшее целое число такое, что $s+\tau+k<(q-1)/2$.

Предложение 7.7. *Пространство $E_s^0 \otimes E_\tau^0$ содержит $\mathcal{F}_k$.*

Доказательство это вытекает из предложения 7.6.

Представление группы $SO_0(1,q)$ в $\mathcal{F}_k$ легко описывается с помощью замечаний из п.7.7 (это сумма конечного числа представлений $SO_0(1,q)$ из дополнительных серий (не только сферических)).

Теорема 7.3. *Представление $\nu_s^0 \otimes \nu_\tau^0$ есть прямая сумма двух слагаемых – представления $SO_0(1,q)$ в $\mathcal{F}_k$ (это слагаемое присутствует лишь при $s+\tau < (q-1)/2$) и представления, эквивалентного тензорному произведению представлений основной серии.*

Доказательство. Пусть $s \geqslant \tau$. Рассмотрим оператор

$$A_{\frac{q-1}{2}-s} f(x,y) = \|x-y\|^{(q-1)/2-s} f(x,y)$$

(ср. с 7.1), сплетающий $\nu_s^0 \otimes \nu_\tau^0$ с $\sigma_0 \otimes \nu_{\tau+(q-1)/2-s}$. Его ядро есть замыкание $\mathcal{F}_k$, а образ всюду плотен в $L^2 \otimes E^0_{\tau+(q-1)/2-s}$ (для оправдания этих высказываний нужно повторить рассуждения из п.7.5). Далее применяем предложение 7.3. •

7.9. Литературные замечания. Теорема 7.3 была обнаружена в случае $q=2$ ($SO_0(1,2) \simeq PSL_2(\mathbb{R})$) Пуканским [45], а в случае $q=3$ ($SO_0(1,3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$) Наймарком [15]. Теорема 7.1 была получена Бойером [33]. Простая интерпретация дискретной части спектра в этих работах замечена не была. Утверждения этого раздела были анонсированы в [15].

Б. Особые унитарные представления групп $SO_0(p,q)$

7.10. Ограничение на подгруппу $SO_0(p,q-1)$ и тензорные произведения. Заметим, что доводы, позволившие нам предъявить дискретные спектры в пп.7.2, 7.3, остаются в силе для представлений класса $\mathcal{B}$ (см. п.5.6). Все, что для этого нужно – теоремы о следе. Для пространств $E^0(M)$ она сформулирована в п.3.11, а для пространства $E^0_\Lambda(M) \otimes E^0_{\overline{\Lambda}}(M)$ она обосновывается точно так же, как и для пространства $E_s^0(S^{q-1}) \otimes E_\tau^0(S^{q-1})$, см. предложение 7.6. Процедура, описанная в п.7.7, позволяет явно выписывать ответы.

С другой стороны, мы не знаем, применима ли процедура отсечения дискретного спектра (см. п.7.5) в этом случае.

7.11. Базисы Гельфанда–Цетлина. Пусть ρ – представление класса $\mathcal{B}$. Легко видеть, что ограничение представления ρ на $SO_0(q)$ имеет конечнократный спектр. Этот факт до некоторой степени удивителен, ибо из общих соображений у неприводимых

6 Заказ 765

представлений группы $SO_0(p,q)$ конечнократен спектр ограничения на максимальную компактную подгруппу $SO(p) \times SO(q)$.

Следовательно, для любой промежуточной подгруппы H, такой, что $SO_0(p,q) \supset H \supset SO(q)$, спектр ограничения ρ на H также конечнократен и дискретен.

В действительности, спектр ограничения представления ρ на $SO_0(p-1,q)$ однократен и состоит из представлений того же типа. Поэтому для представления ρ определен базис Гельфанда–Цетлина относительно цепочки подгрупп

$$SO_0(p,q) \supset SO_0(p-1,q) \supset \ldots \supset SO(q) \supset SO(q-1) \supset \ldots .$$

Подробнее об этом см. статью одного из авторов [22].

В. Особые представления групп $Sp(p,q)$ и $U(p,q)$.

7.12. Группы $Sp(p,q)$. Рассмотрим матричный шар $B_{2p,2q}$ и представление ρ_Λ группы $U(2p,2q)$ со старшим весом (см. пп.4.3–4.4). Рассмотрим в границе Шилова шара $B_{2p,2q}$ подмножество $M_{\mathbb{H}}$, состоящее из блочных матриц

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{p1} & \ldots & h_{pq} \end{pmatrix}; \quad h^*h = 1_{2p},$$

где каждый блок h_{kl} имеет размер 2×2 и форму

$$h_{kl} = \begin{pmatrix} a_{kl} & b_{kl} \\ -\overline{b_{kl}} & \overline{a_{kl}} \end{pmatrix};$$

иными словами, h_{kl} является кватернионом в комплексной записи. Многообразие $M_{\mathbb{H}}$ (это не что иное как кватернионное многообразие Штифеля) инвариантно относительно подгруппы $Sp(p,q) \subset U(2p,2q)$, и теперь можно без труда повторить конструкцию §§3–4.

7.13. Группы $U(p,q)$. Рассмотрим представление $\rho_\Lambda \otimes \rho_{\tilde{\Lambda}}$ группы $U(p,q) \otimes U(p,q)$; оно реализуется в векторнозначных голоморфных функциях на $B_{p,q} \times B_{p,q}$. Рассмотрим в границе Шилова $B_{p,q} \times B_{p,q}$ подмножество $M_{\mathbb{C}}$, состоящее из точек вида

$$(z,\bar{z}) \in \bar{B}_{p,q} \times \bar{B}_{p,q}; \quad z^*z = 1_p.$$

Рассмотрим в группе $U(p,q) \times U(p,q)$ подгруппу $G \simeq U(p,q)$, состоящую из пар матриц вида $(g,\bar{g})$. Ясно, что комплексное многообразие Штифеля $M_{\mathbb{C}}$ является G-инвариантным и мы можем снова повторить рассуждения §§3–4.

Замечание. Задача ограничения представления $\rho_\Lambda \otimes \rho_{\tilde\Lambda}$ группы $U_{p,q} \times U_{p,q}$ на подгруппу G равносильна задаче разложения тензорного произведения представления ρ_Λ группы $U(p,q)$ со старшим весом на представление $\bar\rho_{\tilde\Lambda}$ с младшим весом.

7.14. Ограничение на подгруппу. Доводы, связанные с теоремой о следе, позволяют предъявить также конечное число дискретных компонент для следующих задач ограничения представлений класса $\mathcal{B}$ на подгруппу

$$U(2p,2q) \to Sp(p,q) \quad U(p,q) \to O(p,q)$$
$$O(2p,2q) \to U(p,q) \quad Sp(p,q) \to U(p,q).$$

§ 8. Замечания

Существует много спектральных задач типа разложения ограничения представления на подгруппу, разложения тензорного произведения, разложения индуцированного представления, им было посвящено большое число статей. Обсудим взаимоотношения нашей работы с другими работами на подобные темы.

8.1. Гармоническое представление группы $Sp(2n,\mathbb{R})$. (Подробнее см. [3], [39], [18], [43], другие названия – "представление Вейля", "представление Сигала–Шейла–Вейля", "осцилляторное представление"). Нам удобно рассматривать $Sp(2n,\mathbb{R})$ как группу комплексных блочных матриц размера $(n+n)\times(n+n)$, записываемых в виде

$$g = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ \bar\psi & \bar\phi \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

и удовлетворяющих условиям

$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} g^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad g\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} g^* = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

в частности, $Sp(2n,\mathbb{R}) \subset U(n,n)$.

Обозначим через F_n безонное пространство Фока с n степенями свободы, т.е. гильбертово пространство голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)}\exp(-\sum |z_j|^2)dz\,d\bar z.$$

Соответствующее положительно определенное ядро равно

$$K(z,\bar u) = \exp(\sum z_j \bar u_j).$$

Матрице $g \in Sp(2n, \mathbb{R})$ вида (8.1) ставится в соответствие интегральный оператор

$$we_{2n}(g)f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n} A(z, \bar{u}) f(u) \exp(-|u|^2) du d\bar{u}$$

с ядром

$$A(z, \bar{u}) = \det(\phi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{1}{2}(z, \bar{u}) \begin{pmatrix} \bar{\psi}\phi^{-1} & \phi^{t-1} \\ \phi^{-1} & -\phi^{-1}\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^t \\ \bar{u}^t \end{pmatrix} \right\}.$$

Прямое вычисление показывает, что $we_{2n}(g)$ есть унитарное проективное представление группы $Sp(2n, \mathbb{R})$.

Легко видеть, что пространства четных и нечетных функций (которые мы обозначим соответственно F_+ и F_-) инвариантны относительно $Sp(2n, \mathbb{R})$. Мы рассмотрим для определенности представления группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ в F_+.

Напомним сначала, что областью Картана третьего типа C_n называется пространство симметричных комплексных матриц размера $n \times n$ с нормой < 1. Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ действует на C_n биголоморфными преобразованиями

$$w \mapsto w^g := (\phi + w\bar{\psi})^{-1}(\psi + w\bar{\phi}).$$

Поставим в соответствие каждому $w \in C_n$ функцию

$$\varphi_w(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum \bar{w}_{kl} z_k z_l \right\} \in F_n.$$

Рассмотрим оператор из F_+ в пространство голоморфных функций на C_n, заданный формулой

$$(Jf)(w) = \langle f, \varphi_w \rangle_{F_+}.$$

Несложно проверить, что J есть унитарный оператор из F_+ в пространство $H_k(C_n)$ голоморфных функций на C_n, заданное положительно определенным ядром

$$K(w, \xi) = \det{}^{-1/2}(1 - w\bar{\xi}). \tag{8.2}$$

Отметим, что функции из этого пространства удовлетворяют жестким условиям – системе уравнений с частными производными

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w_{kl} \partial w_{mj}} - \frac{\partial^2}{\partial w_{kj} \partial w_{lm}} \right) f = 0.$$

Действие группы $Sp(2n, \mathbb{R})$ в $H_k(C)n)$ задается формулой

$$g : f(\omega) \mapsto (\phi + w\bar{\psi})^{-1/2} f(w^g).$$

Теперь мы оказываемся в ситуации, очень близкой к §3, при этом показатель степени 1/2 в формуле (8.2) очень мал, а поэтому открывается много возможностей для предъявления дискретных спектров в задачах ограничения $Sp(2n, \mathbb{R})$ на различные подгруппы.

8.2. Ограничение на $O(p, q)$. Рассмотрим естественные вложения

$$O(p,q) \to Sp(2n, \mathbb{R}) \times O(p,q) \to Sp(2k(p+q), \mathbb{R}). \qquad (8.3)$$

Поясним второе из этих вложений. Группа $Sp(2n, \mathbb{R})$ действует на $\mathbb{R}^{2k}$, сохраняя кососимметрическую билинейную форму, а группа $O(p,q)$ действует в $\mathbb{R}^{p+q}$, сохраняя симметрическую билинейную форму. Поэтому $Sp(2n, \mathbb{R}) \times O(p,q)$ действует в $\mathbb{R}^{2k} \otimes \mathbb{R}^{p+q}$, сохраняя тензорное произведение этих форм, т.е. кососимметрическую билинейную форму.

Рассмотрим также естественные вложения

$$U(p,q) \to U(k) \times U(p,q) \to Sp(2k(p+q), \mathbb{R})). \qquad (8.4)$$

Очевидно, что ограничение представления $we_{2k(p+q)}$ на $U(p,q)$ есть прямая сумма представлений со старшим весом, и, как следует из результатов работ [39, 20, 35, 67, 68], таким образом могут быть получены все унитарные представления ρ_Λ группы $U(p,q)$ со старшим весом с целыми сигнатурами Λ. Множество всех сигнатур $\Lambda \in \Sigma$ вида (4.19) с целыми λ_j мы обозначим через Σ^{int}.

Далее заметим, что композиция вложения $O(p,q) \to U(p,q)$ с вложением (8.4) есть вложение (8.3). Поэтому задача ограничения представления $we_{2p(k+q)}$ на $O(p,q)$ тесно связана с задачей ограничения представления ρ_Λ на $O(p,q)$ при $\Lambda \in \Sigma^{\text{int}}$.

Пусть π – унитарное представление некоторой группы G. Обозначим через $\operatorname{Spec} \pi$ множество всех неприводимых унитарных представлений группы G, слабо содержащихся в π. Пусть, как и выше, $\operatorname{RES}_H^G(\pi)$ обозначает ограничение представления π группы G на H.

В этих обозначениях

$$\bigcup_{K=0}^{\infty} \operatorname{Spec}\left(\operatorname{RES}_{O(p,q)}^{Sp(2k(p+q),\mathbb{R})}(we_{2k(p+q)})\right) = \bigcup_{\Lambda \in \Sigma^{\text{int}}} \operatorname{Spec}\left(\operatorname{RES}_{O(p,q)}^{U(p,q)}(\rho_\Lambda)\right). \qquad (8.5)$$

Аналогичное равенство имеет место и для дискретных спектров.

Дискретный спектр в левой части (8.5) был изучен в работе Адамса [31].

8.3. Гиперболоиды $O(m,n)/O(m-1,n)$. Посмотрим с другой стороны на задачу ограничения $we_{2(p+q)}$ на $\mathcal{O}(p,q)$. Для этого рассмотрим в симплектической группе цепочку подгрупп

$$Sp(2(p+q),\mathbb{R}) \supset SL(p+q,\mathbb{R}) \supset O(p,q)$$

Ограничение гармонического представления $we_{2(p+q)}$ на $SL(p+q,\mathbb{R})$ – это естественное представление $SL(p+q,\mathbb{R})$ в $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ (это обстоятельство становится очевидным, если рассмотреть вещественную модель гармонического представления, см., например, [43], [39]). Ограничим далее представление группы $SL(p+q,\mathbb{R})$ в $O(p,q)$. Орбиты группы $O(p,q)$ в $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ на $\mathbb{R}^{p+q}$ суть гиперболоиды Hyp_α:

$$x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_{p+q}^2=\alpha,$$

причем

$$\mathrm{Hyp}_\alpha=\begin{cases} O(p,q)/O(p-1,q); & \alpha>0\\ O(p,q)/O(p,q-1); & \alpha<0\end{cases}$$

(конус $\alpha=0$ имеет меру 0 и им можно пренебречь).

Итак, $L^2(\mathbb{R}^{p+q})$ разлагается в прямой интеграл пространств $L^2(\mathrm{Hyp}_\alpha)$ и, в частности,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Spec}\,(\mathrm{RES}_{O(p,q)}^{Sp(2(p+q),\mathbb{R})}(we_{2(p+q)})\\ &\qquad=\mathrm{Spec}\,(L^2(O(p,q)/O(p-1,q))\cup\mathrm{Spec}\,(L^2(\mathcal{O}(p,q)/O(p,q-1)).\end{aligned}$$

О дискретном спектре в L^2 на гиперболоидах см. работы [13], [49], [61]. Приведенное только что рассуждение принадлежит Хау [38].

8.4. Индефинитные многообразия Штифеля. Рассмотрим теперь вложения

$$Sp(2n,\mathbb{R})\to O(k)\times Sp(2n,\mathbb{R})\to Sp(2kn,\mathbb{R})$$

(это вложение есть частный случай вложения (8.2)). Хорошо известно, что

$$\mathrm{RES}_{sp(2n,\mathbb{R})}^{Sp(2kn,\mathbb{R})}(we_{2kn})=we_{2n}^{\otimes k}.$$

Положим $n=p+q$ и ограничим обе части этого тождества на $\mathcal{O}(p,q)$. В левой части мы получим представления, уже обсуждавшиеся в п.8.2, а в правой части мы получим

$$L^2(\mathbb{R}^{p+q})^{\otimes k}-L^2((\mathbb{R}^{p+q})^k),$$

причем действие $O(p,q)$ на $(\mathbb{R}^{p+q})^k$ есть произведение k экземпляров действий на $\mathbb{R}^{p+q}$. Иными словами, $O(p,q)$ действует на наборах из k векторов в $\mathbb{R}^{p+q}$. Легко видеть, что стабилизатор точки общего положения имеет вид $O(p-\alpha, q-\beta)$, где $\alpha+\beta=k$ (если $k \geqslant p+q$, то стабилизатор состоит из единицы). Таким образом, $L^2((\mathbb{R}^{p+q})^k)$ раскладывается в прямой интеграл пространств вида

$$L^2(O(p,q)/O(p-\alpha, q-\beta)); \quad \alpha+\beta=k,$$

и в частности,

$$\operatorname{Spec}\left(\operatorname{RES}_{O(p,q)}^{Sp(2k(p+q),\mathbb{R})}(we_{2k(p+q)})\right) = \bigcup_{\alpha+\beta=k} \operatorname{Spec}\left(L^2(O(p,q)/O(p-\alpha, q-\beta)\right).$$

С другой стороны, мы имеем тождество (8.5).

Задача разложения L^2 на индефинитных многообразиях Штифеля

$$O(p,q)/O(p-\alpha, q-\beta);\ U(p,q)/U(p-\alpha, q-\beta);\ Sp(p,q)/Sp(p-\alpha, q-\beta)$$

довольно много изучалась, но до сих пор до конца не решена; о дискретном спектре см. работы Шлихткруля [48] и Кобаяши [41]. Ронсли, Шмид и Вольф [46] изучали пространства

$$L^2(U(p,q)/U(p-\alpha, q-\beta) \times U(\alpha) \times U(\beta)) \subset L^2(U(p,q)/U(p-\alpha, q-\beta)).$$

8.5. Замечания. 1) Из сказанного в предыдущих пунктах следует, что часть построенных нами особых унитарных представлений были ранее построены Шлихткруллем и Адамсом. Однако наша конструкция содержит непрерывный параметр, в то время как представления из [30, 48, 41] зависят лишь от дискретного набора параметров. Непрерывный параметр появляется за счет того, что мы рассматриваем представления ρ_Λ с нецелыми сигнатурами, а такие представления не могут быть вложены в гармоническое представление большей симплектической группы. Нам кажется, что наша конструкция обладает еще одним достоинством, а именно, она сравнительно проста.

2) Вслед за работой Цукермана [53] в ряде работ изучались тензорные произведения бесконечномерных унитарных представлений полупростых групп на конечномерные представления. Известно, что такие тензорные произведения иногда раскладываются на унитарные представления, хотя простых причин для этого вроде бы не видно. В некоторых частных случаях это явление может быть объяснено с помощью использованного нами приема, а именно представления в сингулярных обобщенных функциях из §7 раскладываются в такие тензорные произведения.

3) Некоторые из построенных нами особых представлений $SO_0(p,q)$ совпадают с представлениями, впервые построенными Молчановым в [62].

4) Некоторые из задач, упомянутых нами в п.7.14, изучались Кобаяши в [63].

5) Тензорное произведение двух представлений дополнительной серии группы SL_2 над p-адическим полем может включать в себя представление дополнительной серии, см. Цушикава [50]. Это явление также объясняется теоремой о следе.

6) В ряде работ (начиная с [64]) изучались задачи гармонического анализа для представлений, унитарных в индефинитном скалярном произведении. В такого рода задачах также встречаются частично дискретные спектры, эти спектры также объясняются теоремами о следе.

Литература

1. А. Б. Александров, *Теория функций в шаре.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **8** (1985), 115–190.
2. Р. Беллман, Э. Беккенбах, *Неравенства.* М, Мир, 1965.
3. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования.* М, Наука, 1965.
4. Ф. А. Березин, *Квантование в комплексных симметрических областях.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **39 No. 2**, (1975), 1362–1402.
5. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления $SL(2,R)$ где R – кольцо функций.* — Успехи мат. наук **28 No. 5**, (1973), 83–128.
6. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп.* М, Наука, 1965.
7. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции.* М, Физматгиз, 1958.
8. Ю. В. Егоров, М. А. Шубин, *Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **30** (1988), М, ВИНИТИ.
9. А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений.* М, Наука, 1972.
10. С. В. Кисляков, *Исключительные множества в гармоническом анализе.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **42** (1988), 199–228, М, ВИНИТИ.
11. М. Г. Крейн, *Эрмитов-положительные ядра на однородных пространствах.* — Украинский мат. журн. **1 No. 4**, (1949), 64–98; No. 1, 10–59.
12. Б. Ф. Молчанов, *Ограничение представления дополнительной серии псевдоортогональной группы на псевдоортогональную группу меньшей размерности.* — ДАН СССР **237 No. 4**, (1977).
13. В. Ф. Молчанов, *Формула Планшереля для гиперболоидов.* — Труды МИАН **147** (1980), 65–85.
14. В. Ф. Молчанов, *Гармонический анализ на однородных пространствах.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **59** (1990), 5–144, М, ВИНИТИ.

15. М. А. Наймарк, *Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления III.* — Труды Моск. мат. общ. **10** (1961), 181–216.
16. Ю. А. Неретин, *О дискретных вхождениях представлений дополнительной серии в тензорные произведения унитарных представлений.* — Функц. анализ и прилож. **20** **No. 1**, (1986), 79–80.
17. Ю. А. Неретин, *Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **22** (1988), 163–224, М., ВИНИТИ.
18. Ю. А. Неретин, *Об одной полугруппе операторов в бозонном пространстве Фока.* — Функц. анализ и прилож. **24** **No. 2**, (1990), 63–73.
19. Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений.* — Функц. анализ и прилож. **12** **No. 3**, (1978), 32–44.
20. Г. И. Ольшанский, *Описание унитарных представлений со старшим весом для групп $U(p,q)^{\sim}$.* — Функц. анализ и прилож. **14** **No. 3**, (1980), 32–44.
21. Г. И. Ольшанский, *Бесконечномерные классические группы конечного R-ранга: описание представлений и асимптотичекая теория.* — Функц. анализ и прилож. **18** **No. 1**, (1984), 28–42.
22. Г. И. Ольшанский, *Неприводимые унитарные представления групп $U(p,q)$, выдерживающие предельный переход при $q \to \infty$.* — Записки научн. семин. ЛОМИ **172** (1989), 114–120.
23. А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения.* М., Наука, 1987.
24. И. И. Пятецкий–Шапиро, *Геометрия классических областей и теория автоморфных функций.* М., Физматгиз, 1961.
25. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^N$.* М., Мир, 1984.
26. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы.* М., Мир, 1985.
27. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия группы Ли и симметрические пространства.* М., Мир, 1964.
28. Хуа Ло Кен, *Гармонический анализ функций нескольких комплексных переменных в классических областях.* — М. Иностранная литература (1959).
29. Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ.* т. 2, М., Наука, 1976.
30. J. D. Adams, *Discrete spectrum of reductive dual pair $(O(p,q), Sp(2m))$.* — Inv. Math. **74** (1983), 449–475.
31. J. D. Adams, D. Barbash, D. Vogan, *The Langlands classification and irreducible characters of real reductive groups.* — Birkhauser (1992).
32. V. Bargmann, *Irreducible unitary representations of Lorentz group.* — Ann. Math. **48** (1947), 568–640.
33. Ch. P. Boyer, *On complementary series of $SO_0(p,1)$.* — J. Math. Phys. **14** **No. 5**, (1973), 609–617.
34. E. Cartan, *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes.* — Abhandl. mat. Semin Univ. Hamburg (1936), 116–162.
35. T. J. Enright, R. Howe, N. Wallach, *A classification of unitary highest weight modules.* — Representation theory of reductive groups (1983), 97–143, Boston, Birkhauser.
36. M. Flensted–Jensen, *Discrete series for semisimple symmetric spaces.* — Ann. Math. **111** (1980), 253–311.
37. Harish-Chandra, *Representations of semisimple Lie groups IV.* — Amer. J. Math. (1955), 743–777.

38. R. Howe, *On some results of Strichartz and of Rallis and Schiffmann.* — J. Funct. Anal. **32** (1979), 297–303.
39. M. Kashiwara, M. Vergne, *On the Segal-Shale-Weil representation and the harmonic polynomials.* — Inv. Math. **44** (1978), 1–47.
40. A. Knapp, *Reperesentation theory of semisimple groups.* — Princeton Univ. Press (1986).
41. T. Kobayashi, *Singular unitary representations and discrete series for indefinite Stiefel manifolds* $U(p,q;\mathbb{F})/U(p-m,q;\mathbb{F})$. — Mem. AMS **95** (1992).
42. Yu. A. Neretin, *Mantles, trains and representations of infinite dimensional groups.* — First Europian Congress of Mathematics **2** (1994), 293–310, Boston, Birkhauser.
43. Yu. A. Neretin, *Integral operators with Gauss kernels.* (to appear), — Berezin memorial collection.
44. G. I. O lshanski, *Unitary representation of infinite dimensional pairs* (G,K) *and the formalism of R. Howe.* — Representations of Lie groups and related topics, Gordon and Breach (1990), 269–464.
45. L. Pukanszky, *On the Kronecker products of irreducible representations of* 2×2 *real unimodular group I.* — Trans. Amer. Math. Soc. **100, No. 1** (1961), 116–152.
46. J. Rawnsley, W. Schmid, J. A. Wolf, *Singular unitary representations and indefinite harmonic theory.* — J. Funct. Anal. **51** (1983), 1–114.
47. H. Rossi, M. Vergne, *Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group.* — Acta Math. **136, No. 1–2** (1976), 1–59.
48. H. Schlichtkrull, *A series of unitary irreducible representations induced from symmetric subroup of a semisimple Lie group.* — Inv. math. **68** (1982), 497–516.
49. S. Strichartz, *Harmonic analysis on hyperboloids.* — J. Funct. Anal. **12** (1973), 341–383.
50. Tsuchikawa, *The Plancherel transform on* $sl_2(k)$ *and its application to tensor products of irreducible representations.* — J. Math. Kyoto Univ. **22, No. 3** (1982), 369–437.
51. N. R. Wallach, *Analytic continuation of discrete series.* — Trans. Amer. Math. Soc. **251** (1979), 19–37.
52. H. Weyl, *Inequalities between two kinds of eigenvalues of linear transformation.* — Proc. Nat. Acad. Sci., USA **35** (1949), 408–411.
53. G. Zuckerman, *Tensor products of infinite dimensional and finite dimensional representations of semisimple Lie group.* — Ann Math. **106** (1977), 295–308.
54. И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, *Унитарные представления группы Лоренца.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **11** (1947), 411–504.
55. J. Faraut, A. Koranyi, *Analysis on symmetric cones.* — Oxford Univ. Press (1994).
56. С. Г. Гиндикин, *Инвариантные обобщенные функции в однородных областях.* — Функц. Анал. и прилож. **9 No. 1** (1975), 56–58.
57. H. P. Jakobsen, *The last possible place of unitarity for certain highest weight modules.* — Math. Ann. **256** (1981), 439–447.
58. А. Барут, Р. Рончка, *Теория представлений групп и ее приложения.* М., Мир, 1980.
59. I. M. Gelfand, M. I. Graev, *Principal representations of the group* $U(\infty)$. — Representations of Lie groups and related topics, eds. A. M. Vershik, D. P. Zhelobenko, Gordon and Breach (1993), 119–154.
60. H. P. Jakobsen, M. Vergne, *Restrictions and expansions of holomorphic representations.* — J. Funct. Anal. **34** (1979), 29–53.
61. J. Faraut, *Distributions spheriques sur les espaces hyperboliques.* — J. Math. Pures Appl. **58** (1979), 369–444.

62. В. Ф. Молчанов, *Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом.* — Мат. сборник **81** (1970), 358–375.
63. T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups and its applications.* — Inv. Math. **117** (1994), 181–205.
64. Р. С. Исмагилов, *О представлениях группы Лоренца, унитарных в индефинитной метрике.* — Труды МИЭМ **2** (1966), 492–504.
65. Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств.* М., Мир, 1971.
66. В. С. Владимиров, А. Г. Сергеев, *Комплексный анализ в трубе будущего.* — Современные проблемы математики. Фундаментальные направления 8 (1985), 191–266, М., ВИНИТИ.
67. T. J. Enright and A. Joseph, *An intrinsic analysis of unititarizable nighest weight modules.* — Math. Ann. **288** (1990), 571–594.
68. A. Joseph, *Annihilators and associated weight modules.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **25** (1992), 1–45.

Neretin Yu. A. and Ol'shanski G. I. Boundary values of holomorphic functions, special unitary representations of the groups $O(p,q)$, and their limits as $q \to \infty$.

Let Ω be a bounded circular domain in $\mathbb{C}^N$, M be a subvariety in the boundary of Ω, and H be a Hilbert space of holomorphic functions in Ω. We show that under certain conditions, stated in terms of the reproducing kernel of the space H, the restriction operator to the subvariety M is well defined for all functions from H. We apply this result to constructing a family of "special" unitary representations of the groups $SO(p,q)$. The special representations occur, as discrete components of the spectrum, in the decomposition of irreducible unitary highest weight representations of the groups $U(p,q)$, restricted to the subgroups $SO(p,q)$. Another property of the special representations is that they persist in the limit as $q \to \infty$.

Московский институт электроники и математики
Институт проблем передачи информации РАН

Поступило 10 мая 1995 г.