Андрей Окуньков

РУЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ГЕККЕ $H(\infty)$ И q–АНАЛОГИ ЧАСТИЧНЫХ БИЕКЦИЙ

§ 1. Основные определения

1.1. Определим бесконечномерную алгебру Гекке $H(\infty)$ как комплексную алгебру с единицей, зависящую от параметра $q > 0$ и заданную образующими $\sigma_i, i = 1, 2, \ldots$, и соотношениями

$$(\sigma_i - q)(\sigma_i + 1) = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| > 1, \tag{2}$$

$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}. \tag{3}$$

Введем в алгебре $H(\infty)$ инволюцию $\sigma_i^* = \sigma_i$. Нас будут интересовать только $*$-представления алгебры $H(\infty)$ в гильбертовом пространстве. У алгебры $H(\infty)$ есть ровно два одномерных представления:

$$T^+(\sigma_i) = q, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$
$$T^-(\sigma_i) = -1, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Векторы, преобразующиеся по представлениям T^+ и T^-, будем называть инвариантами и антиинвариантами соответственно. Представления T^+ и T^- переставляются автоморфизмом

$$\sigma_i \mapsto -\sigma_i + (q-1)$$

алгебры $H(\infty)$, поэтому вся последующая теория развивается для инвариантов и антиинвариантов параллельно.

1.2. Обозначим через $H(k)$ и $H_k(\infty)$ подалгебры в $H(\infty)$, порожденные элементами $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}$ и $\sigma_{k+1}, \ldots$ соответственно. Очевидно, эти подалгебы коммутируют. Подалгебру, порожденную элементами $\sigma_i, i \neq k$, будем отождествлять с $H(k) \otimes H_k(\infty)$. Пусть T есть представление алгебры $H(\infty)$ в некотором гильбертовом пространстве V. Положим

$$V_k = \{v \in V, T(\sigma_i)v = qv, i > k\},$$

и аналогично определим подпространство антиинвариантов V_k^-.

Статья написана при поддержке фонда PRO MATHEMATICA французского математического общества .

Определение. Неприводимое $*$-представление алгебры $H(\infty)$ в гильбертовом пространстве V называется ручным, если $V_k \neq 0$ (или $V_k^- \neq 0$) для некоторого k.

Следуя логике работы [1] мы получим классификацию ручных представлений алгебры $H(\infty)$.

Очевидно, подпространство V_k инвариантно относительно подалгебры $H(k)$, и $V_k \subset V_{k+1}$. Положим $V_\infty = \bigcup_k V_k$, тогда подпространство V_∞ непусто и инвариантно относительно алгебры $H(\infty)$. Поскольку представление предполагается неприводимым, то подпространство V_∞ плотно в V.

Пример. Пусть $e_1, e_2, \ldots$ есть ортонормированный базис в гильбертовом пространстве V. Положим

$$T(\sigma_i) = \begin{cases} q^{1/2} e_{i+1}, & j = i, \\ (q-1)e_{i+1} + q^{1/2} e_i, & j = i+1, \\ q e_j, & j \neq i, i+1. \end{cases}$$

Легко видеть, что это $*$-представление алгебры $H(\infty)$ (При $q = 1$ — это просто действие группы перестановок $S(\infty)$ перестановками базисных векторов.) Как несложно вычислить, при $q \geqslant 1$ подпространство V_k натянуто на векторы $e_1, \ldots, e_k$. Покажем, что в этом случае представление T неприводимо. Пусть $W \subset V$ есть инвариантное подпространство, и P есть проектор на него. Очевидно, $Pe_1 \in V_1 = \mathbb{C}e_1$. Поэтому либо $Pe_1 = e_1$ и $e_1 \in W$, либо $Pe_1 = 0$ и $e_1 \in W^\perp$. Но вектор e_1 порождает V как $H(\infty)$-модуль, и либо $W = V$, либо $W = 0$. Таким образом, в случае $0 < q < 1$ это представление неприводимое и ручное.

В случае $0 < q < 1$ появляется вектор

$$\sum_1^\infty q^{i/2} e_i\,,$$

который инвариантен относительно всей алгебры $H(\infty)$. В этом случае представление T приводимо так же, как аналогичное представление конечномерной алгебры Гекке. В ортогональном дополнении инвариантного вектора реализуется неприводимое ручное представление алгебры $H(\infty)$.

1.3. Мы видим, что уже в этом простейшем примере проявляется различие случаев $q > 1$ и $0 < q < 1$. Конечно, это различие не принципиально, так как отображение

$$\sigma_i \mapsto q^{-1}\sigma_i + q^{-1} - 1$$

есть изоморфизм алгебры Гекке, соответствующей параметру q, и алгебры Гекке, соответствующей параметру q^{-1}. Однако это различие будет встречаться нам постоянно. Связано оно со следующим обстоятельством. Напомним, что символ $[k]$, определяемый формулой

$$[k] = \frac{q^k - 1}{q - 1},$$

принято называть q-аналогом числа k. Из определения очевидно, что

$$\frac{1}{[\infty]} = \begin{cases} 0, & q \geqslant 1 \\ 1 - q, & 0 < q \leqslant 1 . \end{cases}$$

Заметим, что при $q = 1$ обе формулы стыкуются.

§ 2. Алгебры $\Gamma_{<q}$ и $\Gamma_{q<}$

2.1. В классификации ручных представлений $S(\infty)$, полученной в работе [1], основную роль играет полугруппа частичных биекций $\Gamma(k)$, содержащая группу перестановок $S(k)$. Полугруппа $\Gamma(k)$ определяется следующим образом. Частичная биекция γ множества из k точек задается парой подмножеств

$$\mathrm{dom}(\gamma), \mathrm{im}(\gamma) \subset \{1, \dots, k\}$$

и собственно биекцией

$$\gamma : \mathrm{dom}(\gamma) \to \mathrm{im}(\gamma) .$$

Композиция таких частичных биекций определяется естественным образом. Группа обратимых элементов полугруппы $\Gamma(k)$ совпадает с группой $S(k)$. Нам будет удобно считать, что $\gamma(i)$ определено всегда и

$$\gamma(i) = \begin{cases} \gamma(i), & i \in \mathrm{dom}(\gamma) \\ \emptyset, & \text{иначе} . \end{cases}$$

Полугруппу $\Gamma(k)$ можно также представлять себе как полугруппу матриц из нулей и единиц таких, что в каждой строке и каждом столбце содержится не более одной единицы.

2.2. Роль полугрупп $\Gamma(k)$ при классификации ручных представлений группы $S(\infty)$ следующая. Предположим, что мы имеем некоторое ручное представление T группы $S(\infty)$ в гильбертовом пространстве V. Пусть k таково, что $V_k \neq 0$. Пусть $v \in V_k$. Представление T однозначно восстанавливается по матричному элементу (как функции на группе $S(\infty)$)

$$(T(g)v, v), \quad g \in S(\infty) .$$

Пусть P_k есть ортогональный проектор на V_k; очевидно, что $(T(g)v, v) = (P_k T(g) P_k v, v)$. Таким образом, представление T восстанавливается по действию операторов $P_k T(g) P_k$ в пространстве V_k.

Обозначим через $S_k(n), k \leqslant n$, пересечение группы $S_k(\infty)$ и группы $S(n)$. Обозначим через $V_{k;n}$ подпространство $S_k(n)$-инвариантных векторов и через $P_{k;n}$ — проектор на это подпространство. Очевидно,

$$V_k = \bigcap_{n \geqslant k} V_{k;n},$$

и, следовательно, оператор P_k есть сильный предел операторов

$$P_{k;n} = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{g \in S_k(n)} T(g).$$

Поскольку $\|P_{k;n}\| \leqslant 1$ и $\|T(g)\| = 1$, мы имеем также

$$P_{k;n} T(g) P_{k;n} \to P_k T(g) P_k$$

в сильной операторной топологии.

2.3. Оператор $P_{k;n} T(g) P_{k;n}, g \in S(n)$ зависит, конечно, не от самого элемента $g \in S(n)$, а лишь от его двустороннего класса смежности по подгруппе $S_k(n)$. Эти двусторонние классы следующим образом параметризуются частичными биекциями множества $\{1, \ldots, k\}$. Перестановке $g \in S(n)$ сопоставляется частичная биекция γ_g такая, что

$$\gamma_g(i) = \begin{cases} g(i), & g(i) \leqslant k, \\ \emptyset, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Отображение $g \mapsto \gamma_g$ корректно определено как отображение множества двойных смежных классов на множество $\Gamma(k)$. При $n \geqslant 2k$ это биекция. При $n < 2k$ некоторые элементы $\Gamma(k)$ не соответствуют никаким двойным смежным классам (например, $\gamma \equiv \emptyset$). В терминах матриц отображение $g \mapsto \gamma_g$ сопоставляет перестановке g левый верхний $k \times k$ угол ее матрицы.

На множестве двойных классов смежности всегда есть естественная структура гипергруппы, которая отвечает свертке двусторонне инвариантных функций. (В представлении T это умножение переходит в умножение операторов $P_{k;n} T(g) P_{k;n}$.) Поэтому на множестве $\Gamma(k)$ возникает зависящая от n структура гипергруппы. Легко проверить (и будет установлено нами в более общей ситуации алгебры Гекке), что при $n \to \infty$ эта структура превращается в полугрупповое умножение в $\Gamma(k)$.

2.4. Таким образом, в пространстве V_k возникает представление полугруппы $\Gamma(k)$, однозначно определяющее представление T. Предполагалось, что представление T неприводимо, или, что эквивалентно, слабое замыкание алгебры, порожденной всеми операторами $T(g)$, есть алгебра всех ограниченных операторов. Поэтому слабое замыкание алгебры, порожденной операторами $P_kT(g)P_k$, совпадает с всеми ограниченными операторами в V_k. Иными словами, представление полугруппы $\Gamma(k)$ в пространстве V_k неприводимо. Оказывается, что все неприводимые представления полугруппы $\Gamma(k)$ просто устроены и легко описываются. Это позволяет описать все ручные представления группы $S(\infty)$.

2.5. Перейдем теперь к построению q-аналогов полугруппы Γ. Все q-аналоги обычно определяются в терминах образующих и соотношений, поэтому прежде всего нам нужно описать полугруппу Γ в этих терминах. Обозначим через s_i стандартные генераторы группы перестановок — траспозиции i и $i+1$. Хорошо известны следующие соотношения (получающиеся из соотношений (1)– (3) при $q=1$):

$$s_i^2 = 1\,, \tag{1'}$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\,, \tag{2'}$$

$$s_i s_j = s_j s_i, \quad |i-j| > 1\,. \tag{3'}$$

Очевидно, полугруппа $\Gamma(k)$ получается из группы $S(k)$ добавлением одной образующей p

$$p(i) = \begin{cases} i, & i < k, \\ \emptyset, & i = k. \end{cases}$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений

$$p^2 = p\,, \tag{4}$$

$$ps_i = s_i p, \quad i < k-1\,, \tag{5}$$

$$s_{k-1}ps_{k-1}p = ps_{k-1}p = ps_{k-1}ps_{k-1}\,. \tag{6}$$

Последнее соотношение становится очевидным, если заметить, что

$$(ps_{k-1}p)(i) = \begin{cases} i, & i \leqslant k-2, \\ \emptyset, & i = k-1, k. \end{cases}$$

Лемма. *Полугруппа* $\Gamma(k)$ *порождена образующими* $s_i, i = 1, \ldots, k-1, p$ *и соотношениями* (1′)–(3′), (4)–(6).

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Gamma}(k)$ — полугруппа порожденная этими образующими и соотношениями, и пусть

$$\psi : \widetilde{\Gamma}(k) \to \Gamma(k)$$

естественный эпиморфизм. Мы хотим доказать, что ψ есть изоморфизм. Рассмотрим в группе $S(k)$ централизатор образующей p. С одной стороны он содержит $S(k-1)$, с другой — он равен $S(k-1)$ уже в полугруппе Γ. Поэтому он совпадает с $S(k-1)$. Следовательно, элементы полугруппы $\widetilde{\Gamma}(k)$

$$p_k = p,\ p_{k-1} = s_{k-1}p_k s_{k-1}, \ldots, p_1 = s_1 p_2 s_1$$

попарно различны и исчерпывают все элементы получаемые из p сопряжением подгруппой $S(k)$. Очевидно, $p_i^2 = p_i$. Далее $p_i p_j = p_j p_i$. Это достаточно проверить для p_{k-1} и p_k; все остальные случаи получаются из этого сопряжением. Имеем:

$$p_{k-1}p_k = s_{k-1}p_k s_{k-1}p_k = p_k s_{k-1} p_k s_{k-1} = p_k p_{k-1}\,.$$

Любой элемент полугруппы $\widetilde{\Gamma}$ может быть, следовательно, записан в виде

$$g p_1^{\varepsilon_1} \ldots p_k^{\varepsilon_k}, \quad g \in S(k),\ \varepsilon_i = 0, 1\,.$$

Эта запись неоднозначна, например

$$s_{k-1}p_{k-1}p_k = s_{k-1}^2 p s_{k-1} p = p s_{k-1} p = p s_{k-1} p s_{k-1} = p_{k-1}p_k\,.$$

Учитывая все равенства, получаемые из этого сопряжениями, получаем неравенство $|\widetilde{\Gamma}(k)| \leqslant |\Gamma(k)|$, то есть ψ — изоморфизм. •

2.6. Положим $d_k = |\Gamma(k)| = \sum_{i=0}^{k} i! \binom{n}{i}^2$. В дальнейшем вместо соотношения

$$s_{k-1}p s_{k-1} p = p s_{k-1} p = p s_{k-1} p s_{k-1}$$

нам будут встречаться соотношения вида

$$\sigma_{k-1}\big[\ldots\big] = q\big[\ldots\big] = \big[\ldots\big]\sigma_{k-1}, \quad \big[\ldots\big] = p\sigma_{k-1}p + Q(q)p\,, \qquad (7)$$

где $Q(q)$ есть некоторая рациональная функция от q. Очевидно, что такая модификация соотношений не увеличивает размерность порожденной алгебры.

Заметим, что если в определении полугруппы Γ отказаться от соотношения $s_i^2 = 1$, то мы получим полугруппу частичных кос, то есть кос с некоторыми отсутствующими нитями.

7 Заказ 765

2.7. Мы определим две алгебры, которые являются естественными q-аналогами полугруппы частичных биекций. Затем мы проверим, что именно эти алгебры возникают при описании ручных представлений алгебры Гекке. Точнее, возникает одна из них в зависимости от того, больше ли число q единицы или меньше.

Предположим, что q есть степень простого числа. Пусть $\mathbb{F}$ есть поле из q элементов. Как известно [3], алгебра Гекке $H(k)$ может быть реализована как алгебра комплексных функции на группе $GL(k, \mathbb{F})$, двусторонне инвариантных относительно подгруппы B верхнетреугольных матриц. Умножение в этой алгебре есть свертка функций. Образующие σ_i при этом соответствуют функциям

$$\frac{1}{|B|}\delta(Bs_iB),$$

где s_i есть траспозиция базисных векторов, а $\delta(Bs_iB)$ — индикаторная функция множества Bs_iB.

Рассмотрим теперь алгебру

$${}^B\mathbb{C}[Mat(k, \mathbb{F})]^B$$

двусторонне B-инвариантных функций на полугруппе матриц. Размерность этой алгебры равна числу орбит группы $B \times B$ при действии левыми и правыми умножениями на $Mat(k, \mathbb{F})$, то есть она равна d_k. Обозначим через x матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим элемент

$$p = \frac{q-1}{|B|}\delta(BxB) \in {}^B\mathbb{C}[Mat(k, \mathbb{F})]^B .$$

Алгебра ${}^B\mathbb{C}[Mat(k, \mathbb{F})]^B$ порождается образующими σ_i алгебры Гекке и элементом p. Легко видеть, что $p^2 = p$ и $\sigma_i p = p\sigma_i$ при $i < k-1$. Для того, чтобы вычислить соотношения между σ_{k-1} и p предположим сначала, что $k = 2$. Тогда, как несложно проверить,

$$p\sigma_{k-1}p = (q-1)p + \delta(0),$$

где $\delta(0)$ есть дельта-функция в нулевой матрице. То есть

$$p\sigma_{k-1}p + (1-q)p = \delta(0). \qquad (8)$$

Обозначим левую часть равенства (8) через $[\dots]$. Тогда

$$\sigma_{k-1}[\dots] = q[\dots] = [\dots]\sigma_{k-1}. \tag{9}$$

Это же соотношение справедливо и при произвольном k, так как мы можем рассуждать по модулю подпространства, натянутого на первые $k-2$ базисные векторы. Так как размерность алгебры ${}^B\mathbb{C}[Mat(k,\mathbb{F})]^B$ равна d_k, то других определяющих соотношений в этой алгебре нет.

2.8. Аналогично, рассмотрим полугруппу $\Gamma L(k,\mathbb{F})$ частичных линейных биекциий, определямую следующим образом. Элемент x этой полугруппы задается парой подпространств

$$\mathrm{dom}(x), \mathrm{im}(x) \subset \mathbb{F}^k$$

и собственно линейной биекцией

$$x : \mathrm{dom}(x) \to \mathrm{im}(x).$$

Композиция таких частичных биекций определяется очевидным образом. Рассмотрим, в частности x такой, что $\mathrm{dom}(x)$ и $\mathrm{im}(x)$ есть подпространство, натянутое на первые $k-1$ базисные векторы, а биекция между ними есть тождественное отображение. Пусть p есть нормированная δ-функция на VxV. Тогда алгебра ${}^B\mathbb{C}[\Gamma L(k,\mathbb{F})]^B$ порождается образующими σ_i алгебры Гекке и элементом p. Аналогично предыдущему легко проверяются следующие соотношения

$$\begin{gathered} p^2 = p, \\ p\sigma_i = \sigma_i p, \quad i < k-1, \\ \sigma_{k-1}p\sigma_{k-1}p = p\sigma_{k-1}p = p\sigma_{k-1}p\sigma_{k-1}. \end{gathered} \tag{10}$$

2.9. Мы можем записать соотношения (9) и (10) единообразно в виде

$$\sigma_{k-1}[\dots] = q[\dots] = [\dots]\sigma_{k-1}, \tag{11}$$

положив

$$[\dots] = p\sigma_{k-1}p + \frac{1}{[\infty]}p,$$

и считая, формально, что в первом случае $0 < q < 1$, а в другом случае $1 < q$. Мы обозначим две построенные нами алгебры через $\Gamma_{q<}$ и $\Gamma_{<q}$.

2.10. Рассмотрим алгебру Гекке $H(n)$ и пусть $P_{k;n} \in H(n)$ есть идемпотент, отвечающий представлению T^+ подалгебры $H_k(n)$. Этот идемпотент несложно указать явно

$$P_{k;n} = \frac{1}{[N-k]!} \sum_{\substack{k<a_1<\dots<a_r<n,\\ k<b_i\leqslant a_i}} (\sigma_{a_1}\sigma_{a_1-1}\dots\sigma_{b_1+1}\sigma_{b_1})\dots(\sigma_{a_r}\sigma_{a_r-1}\dots\sigma_{b_r+1}\sigma_{b_r}).$$

В реализации алгебры Гекке двусторонне инвариантными функциями этот идемпотент есть равномерное распределение на подгруппе, изоморфной $GL(n-k,\mathbb{F})$ и преобразующей последние $n-k$ базисных векторов. Положим

$$\Gamma_q(k;n) = P_{k;n}H(n)P_{k;n}\,.$$

Очевидно, это подалгебра в $H(n)$. В силу того, что размерность этой алгебры зависит лишь от кратности, с которой представление T^+ подалгебры $H_k(n)$ входит в неприводимые представления алгебры $H(n)$, эта размерность не зависит от q и равна числу двойных смежных классов группы $S(n)$ по подгруппе $S_k(n)$. В частности, при $n \geqslant 2k$ размерность алгебры $\Gamma_q(k;n)$ равна d_k.

Нетрудно проверить, что алгебра $\Gamma_q(k;n)$ порождается образующими

$$\bar\sigma_i = P_{k;n}\sigma_i P_{k;n}, \quad i \leqslant k\,.$$

Заметим, что

$$\sigma_i P_{k;n} = P_{k;n}\sigma_i, \quad i < k\,.$$

Поэтому образующие $\bar\sigma_i, i<k$, удовлетворяют тем же самым соотношениям, что и образующие σ_i алгебры Гекке. Очевидно также, что

$$\bar\sigma_i\bar\sigma_k = \bar\sigma_k\bar\sigma_i, \quad i < k-1\,.$$

Для того, чтобы сосчитать соотношения, связывающее $\bar\sigma_{k-1}$ и $\bar\sigma_k$, нам будет удобно воспользоваться базисом Юнга для неприводимых представлений алгебры Гекке, указанным в [2].

2.11. Мы будем работать не в базисе Юнга, отвечающем цепочке подалгебр

$$H(1) \subset H(2) \subset \dots \subset H(n)\,,$$

а в базисе Юнга, отвечающем цепочке подалгебр

$$H(n) \supset H_1(n) \supset H_2(n) \supset \dots\,.$$

Он отличается только тем, что базис неприводимого представления алгебры $H(n)$ отвечающего диаграмме Юнга λ нумеруется не стандартными таблицами Юнга, а антистандартными таблицами, то есть такими, в которых числа строго убывают вдоль строк и столбцов. Действие образующих σ_i алгебры Гекке $H(n)$ в этом базисе описыватся следующим образом. Пусть $t_{\nearrow}$ и $t_{\swarrow}$ суть две антистандартные таблицы, отличающиеся лишь расположением чисел i и $i+1$ (смотри рисунок 1).

$$t_{\nearrow} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & i+1 \\ \hline i & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad\qquad t_{\swarrow} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & i \\ \hline i+1 & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Рис. 1

Пусть r есть модуль разности содержаний клеток, в которых стоят i и $i+1$. (Напомним, что содержанием клетки называется разность номера ее строки и номера ее столбца. На рисунке 1 число r равно 3.) Действие образующей σ_i сохраняет двумерное подпространство, натянутое на базисные векторы $t_{\nearrow}$ и $t_{\swarrow}$, и

$$\sigma_i|_{\langle t_{\nearrow}, t_{\swarrow}\rangle} = \frac{1}{[r]}\begin{pmatrix} -1 & ()^{1/2} \\ ()^{1/2} & q^r \end{pmatrix}, \quad ()^{1/2} = (q[r-1][r+1])^{1/2}. \tag{12}$$

В том случае, когда i и $i+1$ стоят в одной строке таблицы t,

$$\sigma_i t = qt\,, \tag{13}$$

а случае, когда i и $i+1$ стоят в одном столбце,

$$\sigma_i t = -t\,. \tag{14}$$

В этих двух случаях $r = 1$. Заметим сразу, что формулы для действия образующих в базисе Юнга имеют предел при $r \to \infty$. Если $q > 1$, то соответствущая предельная матрица есть

$$\begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ q^{1/2} & q-1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

а если $0 < q < 1$, то

$$\begin{pmatrix} q-1 & q^{1/2} \\ q^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

2.12. По самому определению базиса Юнга $P_{k;n}$ есть проектор на подпространство, состоящее из тех таблиц t, в которых числа $k, k+1, \ldots, n-1, n$ стоят в первой строке. Число $k-1$ при этом может стоять в таблице t либо также в первой строке (как на рисунке 2),

n	$n-1$	$\cdots$	$k+1$	k	$k-1$	

Рис. 2

либо в первой клетке второй строки (как на рисунке 3).

n	$n-1$	$\cdots$	$k+1$	k		
$k-1$						

Рис. 3

Очевидно, что в первом случае

$$\bar{\sigma}_k t = P_{k;n} \sigma_k P_{k;n} t = qt\,.$$

Аналогично, во втором случае

$$\bar{\sigma}_k t = -\frac{1}{[n-k]} t\,.$$

Положим

$$p = \frac{[n-k]}{[n-k+1]} \left(\bar{\sigma}_k + \frac{1}{[n-k]} P_{k,n} \right)\,.$$

Тогда p, очевидно, есть проектор на пространство тех таблиц, у которых числа $k-1, k, k+1, \ldots, n$ стоят в первой строке. Совершенно аналогично, выражение

$$p\bar{\sigma}_{k-1}p + \frac{1}{[n-k+1]}p$$

кратно проектору на пространство тех таблиц, у которых числа $k-2, k-1, k, k+1, \ldots, n$ стоят в первой строке, или, иными словами, проектору, отвечающему представлению T^+ подалгебры $H_{k-2}(n)$. Поэтому мы имеем

$$\sigma_{k-1}[\ldots] = q[\ldots] = [\ldots]\sigma_{k-1}, \quad [\ldots] = p\bar{\sigma}_{k-1}p + \frac{1}{[n-k+1]}p. \tag{17}$$

Таким образом, мы можем отождествить алгебру $\Gamma_q(k;n)$ ц алгеброй, порожденной образующими $\bar{\sigma}_i, i = 1, \ldots, k-1$, удовлетворяющими стандартным соотношениям для образующих алгебры Гекке, и еще одной образующей p такой, что выполнены соотношения $p^2 = p$, $\bar{\sigma}_i p = p\bar{\sigma}_i, i \leqslant k-2$, и соотношение (17).

Остается заметить, что в пределе $n \to \infty$ соотношение (17) превращается в соотношение (11) для алгебр $\Gamma_{q<}$ и $\Gamma_{<q}$. К пределу стремится также линейное соотношение, связывающее образующую p ц образующей $\bar{\sigma}_k$. Неформально мы можем записать

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_q(k;n) = \begin{cases} \Gamma_{<q}(k), & 1 < q, \\ \Gamma_{q<}(k), & 0 < q < 1. \end{cases}$$

Конечно, как конечномерные полупростые алгебры алгебры $\Gamma_{<q}(k)$ и $\Gamma_{q<}(k)$ изоморфны между собой и изоморфны всем алгебрам $\Gamma_q(k;n)$ при $n \geqslant 2k$.

§ 3. Описание ручных представлений

3.1. Пусть в пространстве V^λ, $|\lambda| = k$, реализуется неприводимое представление алгебры $H(k)$, соответствующее диаграмме λ. Пусть алгебра $H_k(\infty)$ также действует в V^λ по представлению T^+. Рассмотрим

$$V(\lambda) = H(\infty) \otimes_{H(k)\otimes H_k(\infty)} V^\lambda .$$

Мы покажем, что $V(\lambda)$ можно снабдить скалярным произведением так, чтобы представление $T(\lambda)$ алгебры $H(\infty)$ в соответствующем гильбертовом пространстве было неприводимым ручным. Затем мы покажем, что такими представлениями исчерпываются все неприводимые ручные представления.

3.2. Пусть S обозначает некоторое подмножество мощности k множества натуральных чисел. Обозначим через g_S единственную перестановку натуральных чисел такую, что

$$g_S(\{1,\ldots,k\}) = S\,,$$

и $g(i) < g(j)$ при $i < j \leqslant k$ и при $k < i < j$. Положим

$$\tau_S = q^{\frac{1}{2}\left(\sum_{i\in S} i\right)}\left(\sigma_{g(1)-1}\cdots\sigma_2\sigma_1\right)\cdots\left(\sigma_{g(k)-1}\cdots\sigma_{k+1}\sigma_k\right).$$

При $q = 1$ это выражение превращается в перестановку g_S. Хепосредственно из определения (1)–(3) алгебры Гекке выводится следующая лемма

Лемма.

$$\sigma_i\tau_S = \begin{cases} (q-1)\tau_S + q^{1/2}\tau_{(i,i+1)S}, & i \notin S, i+1 \in S,\\ q^{1/2}\tau_{(i,i+1)S}, & i \in S, i+1 \notin S,\\ \tau_S\sigma_{g^{-1}(i)}, & \text{inaqe}\,. \end{cases}$$

Следствие. *Элементы τ_S, где S пробегает все подмножества $\mathbb{N}$ мощности k, образуют базис в $H(\infty)$ как свободном правом $H(k)\otimes H_k(\infty)$-модуле. Действие алгебры $H(\infty)$ в этом базисе записывается симметрическими матрицами.*

Доказательство следствия. Так как $\tau_{\{1,\ldots,k\}} = 1$ то

$$\sigma = \sigma\tau_{\{1,\ldots,k\}}$$

для любого елемента $\sigma \in H(\infty)$. Пользуясь затем соотношениями, указанными в лемме, мы можем переписать это выражение в виде суммы выражений $\tau_S\sigma'$ где $\sigma' \in H(k)\otimes H_k(\infty)$. Хезависимость τ_S над $H(k)\otimes H_k(\infty)$ вытекает из аналогичной независимости в любой конечномерной алгебре Гекке, которая, в свою очередь, следует из того, что $\dim H(n) = n!$, $\dim H(k)\otimes H_k(n) = k!\,(n-k)!$, и того, что различных τ_S в алгебре $H(n)$ имеется $\binom{n}{k}$ штук. •

3.3. Пусть теперь $\{t_i\}$ есть базис Юнга в пространстве V^λ. Тогда действие алгебры $H(\infty)$ в базисе $\{\tau_S\otimes t_i\}$ записывается симметричными матрицами. Как следует из леммы и формул (12)–(16) для действия алгебры Гекке в базисе Юнга, этот базис может быть отождествлен со следующим базисом из антистандартных таблиц Юнга с бесконечной первой строкой (смотри рисунок 4)

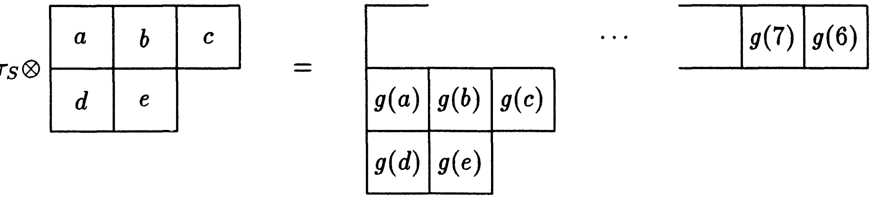

Рис. 4

На рисунке 4 через g обозначена перестановка g_S, число k равно 5, а числа a, b, c, d, e есть числа $1, 2, 3, 4, 5$, переставленные в таком порядке, чтобы получилась антистандартная таблица Юнга. Числа, стоящие в конце первой строки, считаются бесконечно удаленными от от чисел, стоящих в остальных строках.

Заметим, что этот базис можно понимать именно как базис Юнга модуля $V(\lambda)$, построенный по цепочке подгрупп

$$H(\infty) \supset H_1(\infty) \supset H_2(\infty) \supset \dots .$$

Этот базис отвечает следующему правилу ветвления при ограничении представления $T(\lambda)$ на подалгебру $H_1(\infty)$, изоморфную алгебре $H(\infty)$,

$$T(\lambda) \downarrow^{H(\infty)}_{H_1(\infty)} = T(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu \subset \lambda, |\mu| = |\lambda| - 1} T(\mu) .$$

3.4. Точно так же, как в простейшем примере рассмотренном в §1 устанавливается следующая лемма

Лемма. *Пусть $q \geqslant 1$, тогда*

(1) $(V(\lambda))_i = 0, \quad i < k$,
(2) $(V(\lambda))_k = 1 \otimes V^\lambda$,
(3) *представление $T(\lambda)$ неприводимо .*

Теперь мы докажем следующий основной факт

Теорема. *При $q \geqslant 1$ неприводимые представления $T(\lambda)$ попарно неэквивалентны и исчерпывают все неприводимые ручные представления алгебры $H(\infty)$.*

Доказательство. Как следует из леммы, представление алгебры $H(|\lambda|)$ в пространстве $(V(\mu))_{|\lambda|}$ неэквивалентно представлению V^λ при $\lambda \neq \mu$. Поэтому $V(\lambda)$ и $V(\mu)$ неэквивалентны при $\lambda \neq \mu$.

Пусть теперь T есть такое неприводимое ручное представление, что подпространство V_k для него не пусто. Тогда T однозначно восстанавливается по неприводимому представлению алгебры $\Gamma_{<q}(k)$ в пространстве V_k. Сравнивая размерность алгебры $\Gamma_{<q}(k)$ с суммой квадратов размерностей подпространств $(V(\lambda))_k, |\lambda| \leqslant k$, убеждаемся, что других неприводимых ручных представлений нет. $\bullet$

3.5. Случай $0 < q < 1$ сводится к рассмотренному с помощью отображения

$$\sigma_i \mapsto \frac{1}{q}\sigma_i + \frac{1}{q} - 1\,.$$

При этом возникает как раз другая предельная форма базиса Юнга (смотри формулы (12)–(16)), так как

$$\frac{1}{q}\frac{1}{[r]}\begin{pmatrix} -1 & ()^{1/2} \\ ()^{1/2} & q^r \end{pmatrix} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{[r]_{1/q}}\begin{pmatrix} -1 & ()^{1/2}_{1/q} \\ ()^{1/2}_{1/q} & (1/q)^r \end{pmatrix},$$

где

$$()^{1/2}_{1/q} = (1/q[r-1]_{1/q}[r+1]_{1/q})^{1/2},$$

и

$$\frac{1}{q}\begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ q^{1/2} & q-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{q} - 1 = \begin{pmatrix} 1/q-1 & (1/q)^{1/2} \\ (1/q)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что базис Юнга сам чувствует различие между случаями $q > 1$ и $0 < q < 1$.

Аналогично рассматривается случай непустого пространства антиинвариантов. Этим ручным представлениям соответствуют диаграммы Юнга с бесконечным первым столбцом.

В заключение автор хотел бы выразить свою признательность А. А. Кириллову и Г. И. Ольшанскому за постоянное внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. G. Olshansky, *Unitary Representations of the Infinite Symmetric Group: A Semigroup Approach.* Representations of Lie Groups and Lie Algebras, Academiai Kiado, Budapest. 1985.
2. С. В. Керов, *Реализация $*$-представлений алгебр Гекке и ортогональная форма Юнга.* — Зап. научн.семин. ЛОМИ **161** (1987).
3. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Группы и алгебры Ли, М.* 1972.

Okun'kov A. Tame representations of Hecke algebra $H(\infty)$, and q-analogs of partial bijections.

q-analogs of the semigroup of partial bijections are introduced and studied. They are applied to the description of all so-called tame representations of the infinite-dimensional Hecke algebra.

Институт проблем
передачи информации РАН

Поступило 15 марта 1995 г.