## Werk

**Verlag:** Nauka; Российская академия наук санкт-петербургское отделение
**Ort:** Sankt-Peterburg
**Kollektion:** RusDML; Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN502905670
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN502905670
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=502905670

**LOG Id:** LOG_0013
**LOG Titel:** Транзитивные группы перестановок с ограниченными степенями неприводимых представлений
**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN496972103
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN496972103
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=496972103

## Terms and Conditions



## Contact

С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко

# ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК С ОГРАНИЧЕННЫМИ СТЕПЕНЯМИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

## § 1. Введение

Исходным пунктом настоящей работы стало следующее хорошо известное утверждение, являющееся одним из самых старых результатов теории групп.

**Теорема (Жордан).** *Существует целозначная функция $J(d)$ натурального аргумента $d$ со следующим свойством: если $G$ – конечная группа, имеющая точное линейное представление над $\mathbb{C}$ степени $d$, то найдется нормальная абелева подгруппа $A$ группы $G$ такая, что*

$$[G:A] \le J(d),$$

*где $[G:A]$ – индекс $A$ в $G$.*

**Замечание.** *Ниже функцией Жордана мы будем называть такую функцию $J$, указанного в теореме вида, что для каждого $d$ целое число $J(d)$ является минимальным из всех возможных.*

По поводу доказательства теоремы Жордана см., например, [2]; там же приводится следующая оценка для функции Жордана:

$$J(d) = d^{O(d^2/\log^2 d)}.$$

В [4] теорема Жордана была использована для доказательства того, что если степени всех представлений группы $G$, неприводимых над $\mathbb{C}$, не превосходят $d$, то $[G:A] \le J(2d)$ для некоторой абелевой подгруппы $A$ группы $G$. (Отметим, что этот результат можно рассматривать как своего рода обращение одной теоремы из теории представлений конечных групп, утверждающей, что степень каждого неприводимого представления группы не превосходит индекса в ней любой абелевой подгруппы (см. [2])). Основной результат настоящей работы утверждает, что для транзитивной группы перестановок нет необходимости рассматривать все неприводимые представления, если абелевость $A$ заменить разрешимостью.

**Теорема 1 (основная теорема).** *Пусть $G$ – транзитивная группа перестановок. Тогда найдется нормальная разрешимая подгруппа $A$ группы $G$, для которой*

$$[G : A] \leq J(d)^{\log_2 d},$$

*где $d$ – максимум степеней неприводимых представлений группы $G$, входящих в её перестановочное представление, и $J$ – функция Жордана.*

**Замечание 1.** *Легко видеть, что утверждение теоремы равносильно тому, что $[G : \mathrm{sol}(G)] \leq J(d)^{\log_2 d}$, где $\mathrm{sol}(G)$ – разрешимый радикал группы $G$.*

**Замечание 2.** *Связь между теоремой 1 и упомянутым выше результатом из [4] легко усматривается, поскольку каждое неприводимое представление группы $G$ входит в регулярное представление этой группы, являющееся перестановочным для действия $G$ на себе правыми сдвигами, которое, очевидно, является транзитивным. Отметим, что даже в этом (регулярном) случае теорема 1 не следует из [4], поскольку фигурирующая там абелева подгруппа $A$ не предполагается нормальной.*

Еще одной отправной точкой настоящей работы является интенсивно развивающаяся в последние годы теория сложности вычислений, связанных с группами перестановок (см., например, [5]). Полиномиальную оценку сложности многих алгоритмов для групп перестановок удается получить лишь в предположении ограниченности композиционной ширины группы (которая не превосходит максимума порядков её неабелевых композиционных факторов). Основная теорема показывает, что для групп, удовлетворяющих условию теоремы, композиционная ширина ограничена функцией от $d$ и, более того, верен следующий результат.

**Следствие.** *Пусть $G$ удовлетворяет условию теоремы 1. Тогда произведение порядков неабелевых композиционных факторов группы $G$ не превосходит $J(d)^{\log_2 d}$. Порядок каждого неабелева композиционного фактора (а, следовательно, и композиционная ширина) группы $G$ не превосходит $J(d)$.*

Идея доказательства основной теоремы состоит в том, чтобы в реализуемом естественным образом как группа перестановок факторе $\widetilde{G}$ группы $G$ по некоторой нормальной разрешимой подгруппе найти подгруппу $H = H_1 \times \cdots \times H_s$, где каждая $H_i$ неабелева и нормальна. При этом вместе с $H$ находятся также $H$-инвариантное множество $U$ и $H_i$-инвариантное множество $U_i, i = 1, \ldots, s$, так, что перестановочное представление группы $H$ на $U$ эквивалентно тензорному произведению перестановочных представлений $H_i$ на $U_i$. Отсюда по условию теоремы получаем, что $s \le \log_2 d$. С другой стороны, для каждой группы $\widetilde{G}/H_i'$, где подгруппа $H_i'$ порождена всеми $H_j$ для $j \ne i$, доказывается существование естественного перестановочного представления, в которое входит точное неприводимое представление степени не превосходящей $d$. Комбинируя эти факты с теоремой Жордана, получаем требуемую оценку.

Один из возможных способов обобщения основной теоремы на случай нетранзитивных групп перестановок приводит к группе автоморфизмов клетки, то есть клеточной алгебры, множество клеток которой состоит из одного элемента (см. [6]). Теорема 1 в этой ситуации отвечает случаю шуровой клетки, то есть клетки, совпадающей с централизаторной алгеброй транзитивной группы перестановок. При этом степени неприводимых представлений этой группы, входящих в её перестановочное представление, совпадают с кратностями неприводимых представлений клетки в её стандартном матричном представлении. Известны, однако, случаи нешуровых клеток (см. [1]).

**Гипотеза.** *Группа автоморфизмов любой клетки $W$ содержит нормальную разрешимую подгруппу, индекс которой не превосходит $J(m)^{\log_2 m}$, где $m$ – максимум кратностей неприводимых представлений клеточной алгебры $W$ в её стандартном матричном представлении и $J$ – функция Жордана.*

Пока мы можем доказать эту гипотезу только для клеточной алгебры обладающей точным примитивным идемпотентом (см. [3]).

Для произвольных групп перестановок прямое применение теоремы 1 даёт следующий результат.

**Теорема 2.** *Каждая группа перестановок $G$ содержит нормальную разрешимую подгруппу, индекс которой не превосходит $J(d)^{t \log_2 d}$, где $d$ – максимум степеней неприводимых представлений группы $G$, входящих в её перестановочное представление, $t$ – минимальное число орбит группы $G$, для которых гомоморфизм ограничения на объединение этих орбит является изоморфизмом, и $J$ – функция Жордана.*

Статья организована следующим образом. В §2 приводятся основные определения и факты, связанные с группами перестановок. В §3 доказываются основная теорема и следствие.

**Обозначения.** Как обычно, через $\mathbb{C}$ мы обозначаем поле комплексных чисел. Если $L$ – линейное пространство над $\mathbb{C}$, то через $\mathrm{End}(L)$ обозначается множество всех линейных преобразований пространства $L$.

Если $G$ – группа, то $H \leqslant G$ обозначает, что $H$ является подгруппой группы $G$. Индекс $H$ в $G$ обозначается через $[G : H]$. Если $H_i \leqslant G$ для $i \in I$, то через $< H_i >_{i \in I}$ обозначается подгруппа группы $G$, порождённая всеми $H_i$.

На протяжении всей работы $V$ обозначает конечное множество. Через $\mathrm{Sym}(V)$ обозначается группа всех перестановок множества $V$. Множество всех натуральных чисел от $r$ до $s$ обозначается через $[r, s]$. Количество элементов произвольного конечного множества $A$ обозначается через $|A|$.

## § 2. Группы перестановок

Все неопределяемые ниже понятия из теории групп перестановок и теории представлений групп и ассоциативных алгебр являются общепринятыми и содержатся соответственно в [7] и [2].

Под *группой перестановок* $(G, V)$ на множестве $V$ мы понимаем конечную группу $G$ вместе с гомоморфизмом $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(V)$, определяющим действие $v \mapsto v^g$ группы $G$ на $V$. Группа перестановок называется *точной*, если $\ker\varphi = \{1\}$. Для подгруппы $H \leqslant G$ под $(H, V)$ мы понимаем группу перестановок на $V$, задаваемую сужением $\varphi$ на $H$. Любая группа перестановок $(G, V)$ естественным образом индуцирует точную группу перестановок $(\overline{G}, V)$, где $\overline{G} = G/\ker\varphi$. Две группы перестановок $(G, V)$ и $(G', V')$ называются *изоморфными*, $(G, V) \cong (G', V')$, если $(\overline{G}, V)$ и $(\overline{G'}, V')$ эквивалентны как группы перестановок (т.е. если существуют согласованные между собой изоморфизм $G$ на $G'$ и биекция $V$ на $V'$).

Для семейства групп перестановок $\{(G_i, V_i)\}_{i=1}^{s}$ с определяющими гомоморфизмами $\varphi_i : G_i \to \mathrm{Sym}(V_i)$ положим по определению

$$\prod_{i=1}^{s}(G_i, V_i) = (\prod_{i=1}^{s} G_i, \prod_{i=1}^{s} V_i), \qquad (2.1)$$

где определяющий гомоморфизм группы перестановок, стоящей в правой части равенства, индуцирован гомоморфизмами $\varphi_i$. Группа перестановок $\prod_{i=1}^{s}(G_i, V_i)$ называется *прямым произведением групп перестановок* $(G_i, V_i)$.

Для группы перестановок $(G, V)$ обозначим через $\mathrm{orb}(G, V)$ множество всех орбит действия $G$ на $V$. Назовём $(G, V)$ *транзитивной*, если $|\mathrm{orb}(G, V)| = 1$. Если подмножество $U \subset V$ является $G$-

инвариантным (т.е. объединением орбит), то под $(G, U)$ мы понимаем группу перестановок на $U$ с определяющим гомоморфизмом, задаваемым сужением на $U$ каждой перестановки $\varphi(g) \in \mathrm{Sym}(V)$, $g \in G$, где $\varphi$ – определяющий гомоморфизм для $(G, V)$.

Под *эквивалентностью* на $V$ мы понимаем множество $E \subset V \times V$, являющееся рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением на $V$. Множество всех классов эквивалентности $E$ обозначается через $V/E$. Через $I_V$ обозначается эквивалентность, классами которой являются все одноэлементные подмножества множества $V$. *Замыканием* $\overline{S}$ множества $S \subset V \times V$ назовём наименьшую по включению эквивалентность на $V$, содержащую $S$.

Пусть $(G, V)$ – группа перестановок и $E$ – эквивалентность на $V$. Скажем, что $E$ является *$G$-инвариантной*, если из $(u, v) \in E$ следует, что $(u^g, v^g) \in E$ для всех $g \in G$. В этом случае элементы группы $G$ переставляют классы эквивалентности $E$. Это определяет группу перестановок $(G, V/E)$ с $\overline{G} = G/G_E$, где

$$G_E = \{g \in G \mid U^g = U,\ U \in V/E\}. \tag{2.2}$$

Ясно, что орбиты группы перестановок $(G, V/E)$ содержатся в классах эквивалентности $E$. Легко видеть, что пересечение и замыкание объединения $G$-инвариантных эквивалентностей является $G$-инвариантной эквивалентностью.

Пусть $(G, V)$ – группа перестановок. Обозначим через $\mathbb{C}[G]$ групповую алгебру группы $G$ над $\mathbb{C}$ и через $L_{V,\mathbb{C}}$ – линейное пространство над $\mathbb{C}$, натянутое на элементы множества $V$. Действие $G$ на $V$ $(v \mapsto v^g)$ определяет линейное представление

$$\pi : \mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(L_{V,\mathbb{C}}), \quad x \mapsto x^A. \tag{2.3}$$

Поскольку алгебра $\mathbb{C}[G]$ полупроста, $\pi$ вполне приводимо (см. [2]). Ясно, что ограничение $\pi$ на $G$ совпадает с перестановочным представлением группы $G$, обозначаемым ниже через $\pi(G, V)$.

Обозначим через $d(G, V)$ максимум степеней неприводимых представлений группы $G$, входящих в перестановочное представление $\pi(G, V)$. Легко видеть, что $d(G, V)$ зависит только от класса изоморфизма группы перестановок $(G, V)$.

**Лемма 1.** *Пусть $(G, V)$ – группа перестановок. Тогда*

(1) *если $H \leq G$, то $d(H, V) \leq d(G, V)$;*
(2) *если множество $U \subset V$ является $G$-инвариантным, то $d(G, U) \leq d(G, V)$;*
(3) *если эквивалентность $E$ на $V$ является $G$-инвариантной, то $d(G, V/E) \leq d(G, V)$;*
(4) *если $(G, V) \cong \prod_{i=1}^{s} (G_i, V_i)$, то $d(G, V) = \prod_{i=1}^{s} d(G_i, V_i)$.*

**Доказательство.** Утверждения (1), (2) и (3) очевидны. Если $\rho_i$ – линейное представление группы $G_i$ в пространстве $L_i$, $i \in [1, s]$, то обозначим через $\otimes_{i=1}^s \rho_i$ представление группы $\prod_{i=1}^s G_i$ в пространстве $\otimes_{i=1}^s L_i$, определяемое естественным образом представлениями $\rho_i$. Отметим, что степень представления $\otimes_{i=1}^s \rho_i$ равна произведению степеней $\rho_i$. Если $\rho_i$ – неприводимое представление для всех $i$, то представление $\otimes_{i=1}^s \rho_i$ также неприводимо (см. [2]).

Докажем утверждение (4). Пусть $(\overline{G}, V)$ и $(\overline{G_i}, V_i)$ – точные группы перестановок, отвечающие $(G, V)$ и $(G_i, V_i)$. Из определения прямого произведения групп перестановок (см. (2.1)) следует, что представления $\pi(\overline{G}, V)$ и $\otimes_{i=1}^s \pi(\overline{G_i}, V_i)$ эквивалентны. Таким образом,

$$d(G, V) = d(\overline{G}, V) = \prod_{i=1}^s d(\overline{G_i}, V_i) = \prod_{i=1}^s d(G_i, V_i).$$

Лемма доказана.

## § 3. Доказательство основной теоремы и следствия

Разложим доказательство теоремы 1 в ряд лемм. Отметим, что группа перестановок, фигурирующая в условии этой теоремы, в определениях §2 точна и транзитивна.

**Лемма 2.** *Пусть $(G, V)$ – группа перестановок и $\{E_i\}_{i=1}^s$ – набор эквивалентностей на $V$ такой, что для всех $i$*

(i) *$E_i$ является $G$-инвариантной, причём $V/E_i = \mathrm{orb}(G_{E_i}, V)$;*

(ii) *$E_i \bigcap E_i' = I_V$, где $E_i' = \overline{\bigcup_{j, j \neq i} E_j}$ – замыкание $\bigcup_{j, j \neq i} E_j$.*

*Определим подгруппу $H$ группы $G$, полагая $H = < G_{E_i} >_{i \in [1, s]}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1) *если $(G, V)$ точна, то группа $H$ равна прямому произведению своих подгрупп $G_{E_i}$:*

$$H = \prod_{i=1}^s G_{E_i};$$

(2) *если $(G, V)$ транзитивна, то для любых орбит $U \in \mathrm{orb}(H, V)$, $U_i \in \mathrm{orb}(G_{E_i}, V)$, $i \in [1, s]$,*

$$(H, U) \cong \prod_{i=1}^s (G_{E_i}, U_i).$$

*(В силу транзитивности $(G, V)$ классы изоморфизма групп перестановок $(H, U)$ и $(G_{E_i}, U_i)$ не зависят от выбора орбит $U$ и $U_i$ соответственно.)*

8 Заказ 765

**Замечание 1.** *Легко видеть, что лемма остаётся справедливой, если заменить $G_{E_i}$ на произвольную подгруппу $H_i \leqslant G$ с условием* $\mathrm{orb}(H_i, V) = V/E_i$.

**Замечание 2.** *Если условия леммы выполнены для набора $\{E_i\}_{i=1}^s$, то они, очевидно, выполнены и для любого поднабора $\{E_i\}_{i \in I}$, где $I \subset [1, s]$.*

**Доказательство.** В силу нормальности $G_{E_i}$ в $G$ а, следовательно, и в $H$, для доказательства утверждения (1) достаточно проверить, что для всех $i$

$$G_{E_i} \cap H_i' = \{1\}, \quad \text{где} \quad H_i' = < G_{E_j} >_{j \in [1,s], j \neq i}. \tag{3.1}$$

Группа $G_{E_j}$ для $j \neq i$ стабилизирует каждый класс эквивалентности $E_j$ а, следовательно, и каждый класс большей эквивалентности $E_i' = \overline{\bigcup_{j, j \neq i} E_j}$. Следовательно, группа $H_i'$ также обладает этим свойством. Поскольку $G_{E_i}$ стабилизирует каждый класс эквивалентности $E_i$, то (3.1) следует из условия (ii) леммы и точности группы перестановок $(G, V)$. Отметим здесь также, что

$$\mathrm{orb}(H_i', V) = V/E_i'. \tag{3.2}$$

Включение " $\subset$ " было только что доказано. Обратное включение следует из условия (i) леммы и того факта, что по определению замыкания $E_i'$ является наименьшей эквивалентностью на $V$, каждый класс которой есть объединение классов эквивалентности $E_j$ для каждого $j \neq i$.

Докажем утверждение (2). Для $s = 1$ оно, очевидно, верно. Предположим, что оно верно для $s = 2$, и применим индукцию по $s$. Не умаляя общности, будем считать, что $(G, V) = (H, U)$. Поскольку эквивалентности $E_1$ и $E_1'$ удовлетворяют условиям леммы для $s = 2$ (см. (3.2)), то

$$(H, U) \cong (G_{E_1}, U_1) \times (G_{E_1'}, U_1'),$$

где $U_1' \in \mathrm{orb}(G_{E_1'}, V)$. Из условия $(G, V) = (H, U)$ следует, что $G_{E_1'} = H_1' = < G_{E_i} >_{j \in [2,s]}$ (см. (3.1)). Используя индукционное предположение для группы перестановок $(G, V)$ и набора эквивалентностей $\{E_i\}_{i=2}^s$ (см. замечание 2), получаем требуемое.

Остаётся доказать утверждение (2) для $s = 2$. Можно предполагать, что $(H, U)$ точна. В силу утверждения (1)

$$H = G_{E_1} \times G_{E_2}. \tag{3.3}$$

Поскольку группа перестановок $(H, U)$ транзитивна, то транзитивна также и группа $(G_{E_2}, U/E_1) \cong (G_{E_1} \times G_{E_2}, U/E_1) = (H, U/E_1)$, откуда следует, что каждый класс эквивалентности $E_1$ пересекает каждый класс эквивалентности $E_2$. В силу условия (ii) леммы такое пересечение не может состоять более чем из одного элемента. Поэтому

$$|U_1' \cap U_2'| = 1 \quad \text{для всех} \quad U_1' \in U/E_1, \ U_2' \in U/E_2. \tag{3.4}$$

Таким образом, отображение

$$\varphi : U \to (U/E_2) \times (U/E_1),$$

индуцированное естественными проекциями $\varphi_i : U \to U/E_i, i = 1, 2$, биективно и группы перестановок $(G_{E_1}, U/E_2)$ и $(G_{E_2}, U/E_1)$ точны. Отсюда следует, что

$$(H, U) \cong (G_{E_1}, U/E_2) \times (G_{E_2}, U/E_1),$$

причём эквивалентность между левой и правой частями задаётся биекцией $\varphi$ и разложением (3.3). При этом подгруппам $G_{E_1}$ и $G_{E_2}$ группы $H$ отвечают соответственно подгруппы $G_{E_1} \times \{1\}$ и $\{1\} \times G_{E_2}$ группы $G_{E_1} \times G_{E_2}$ , а подмножествам $U_1$ и $U_2$ множества $U$ – в силу (3.4) соответственно подмножества $(U/E_2) \times \{U_1\}$ и $\{U_2\} \times (U/E_1)$ множества $(U/E_2) \times (U/E_1)$. Следовательно,

$$(G_{E_1}, U_1) \cong (G_{E_1} \times \{1\}, (U/E_2) \times \{U_1\}) \cong (G_{E_1}, U/E_2),$$

$$(G_{E_2}, U_2) \cong (\{1\} \times G_{E_2}, \{U_2\} \times (U/E_1)) \cong (G_{E_2}, U/E_1).$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $(G, V)$ – точная транзитивная группа перестановок для которой выполнено следующее условие: если для некоторой $G$-инвариантной эквивалентности $E$ на $V$ группа $G_E$ абелева, то $E = I_V$. Тогда, если $\{E^{(i)}\}_{i=1}^s$ – произвольный набор $G$-инвариантных эквивалентностей на $V$ таких, что*

(i) $\bigcap_{i=1}^s E^{(i)} = I_V$,

(ii) $\bigcap_{j, j \neq i} E^{(j)} \neq I_V$ *для всех* $i$,

*то*

$$s \leqslant \log_2 d,$$

*где $d = d(G, V)$ – максимум степеней неприводимых представлений группы $G$, входящих в её перестановочное представление.*

**Доказательство.** Положим

$$E_i = \bigcap_{j, j \neq i} E^{(j)}, \quad i \in [1, s].$$

Из $G$-инвариантности эквивалентностей $E^{(j)}$ следует, что эквивалентность $E_i$ также $G$-инвариантна. В силу условия (ii) и условия на группу $G$ группа $G_{E_i}$ неабелева для всех $i$. Покажем, что набор эквивалентностей $\{E_i\}_{i=1}^s$ удовлетворяет условию (ii) леммы 2. Действительно, $E_i \subset E^{(j)}$ для $i \neq j$ по определению $E_i$. Поэтому из условия (i) леммы 3 следует, что

$$E_i \cap (\overline{\bigcup_{j, j\neq i} E_j}) \subset (\bigcap_{j, j\neq i} E^{(j)}) \cap E^{(i)} = I_V.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $E_i$ удовлетворяет также условию (i) леммы 2, поскольку в противном случае мы могли бы заменить её на меньшую эквивалентность с множеством классов $\mathrm{orb}(G_{E_i}, V)$. По лемме 2

$$(H, U) \cong \prod_{i=1}^{s} (G_{E_i}, U_i),$$

где $H$, $U$, $U_i$ определены в условии этой леммы. По лемме 1 отсюда следует, что

$$d(H, U) = \prod_{i=1}^{s} d(G_{E_i}, U_i).$$

Предположим, что $d(G_{E_i}, U_i) = 1$ для некоторого $i \in [1, s]$. Тогда $d(G_{E_i}, V) = 1$, поскольку класс изоморфизма группы перестановок $(G_{E_i}, U_i)$ а, следовательно, и целое число $d(G_{E_i}, U_i)$ не зависят от выбора $U_i \in \mathrm{orb}(G_{E_i}, V)$. Последнее означает, что все неприводимые представления группы $G_{E_i}$, входящие в перестановочное представление $\pi(G_{E_i}, V)$, одномерны. Это, однако, противоречит в силу точности группы перестановок $(G_{E_i}, V)$ тому, что группа $G_{E_i}$ неабелева (см. выше). Таким образом, $d(G_{E_i}, U_i) \geqslant 2$ для всех $i$. Поэтому по лемме 1 и предыдущему равенству

$$d = d(G, V) \geqslant d(H, U) \geqslant 2^s,$$

откуда следует, что $s \leqslant \log_2 d$. Лемма доказана.

Для произвольной группы $G$ обозначим через $\mathrm{sol}(G)$ разрешимый радикал группы $G$, то есть максимальную по включению разрешимую нормальную подгруппу группы $G$. Легко видеть, что если $G = \prod_i G_i$, то $[G : \mathrm{sol}(G)] = \prod_i [G_i : \mathrm{sol}(G_i)]$ и если $H$ – подгруппа или гомоморфный образ группы $G$, то $[H : \mathrm{sol}(H)] \leqslant [G : \mathrm{sol}(G)]$.

**Лемма 4.** *Пусть $(G, V)$ – группа перестановок. Тогда существует набор $\{E^{(i)}\}_{i=1}^{s}$, состоящий из $G$-инвариантных эквивалентностей на $V$ таких, что*

(i) $\bigcap_{i=1}^{s} E^{(i)} = I_V$;

(ii) $[G/G_{E^{(i)}} : \mathrm{sol}(G/G_{E^{(i)}})] \leqslant J(d)$,

*где $d = d(G, V)$ – максимум степеней неприводимых представлений группы $G$, входящих в её перестановочное представление $\pi(G, V)$, и $J$ – функция Жордана.*

**Доказательство.** Пусть

$$1 = \sum_{i=1}^{s} P_i \tag{3.5}$$

– разложение единицы в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$ группы $G$, где $P_i$ – примитивный центральный идемпотент алгебры $\mathbb{C}[G]$. Положим

$$E^{(i)} = \{(u, v) \in V \times V \mid u^{P_i} = v^{P_i}\}. \tag{3.6}$$

Из центральности $P_i$ следует, что эквивалентность $E^{(i)}$ является $G$-инвариантной. Предположим, что $(u, v) \in E^{(i)}$ для всех $i$. Тогда $u^{P_i} = v^{P_i}$ для всех $i$. Следовательно, $u^{\sum P_i} = v^{\sum P_i}$, то есть $u = v$ (см. (3.5)). Таким образом, $\bigcap_{i=1}^{s} E^{(i)} \subset I_V$. Поскольку обратное включение очевидно, условие (i) проверено. Проверим условие (ii). Пусть $P = P_i$ – примитивный идемпотент алгебры $\mathbb{C}[G]$. Из центральности идемпотента $P$ следует, что пространство

$$L_V^P = \{x^P \mid x \in L_{V,\mathbb{C}}\}$$

инвариантно относительно $G$. Покажем, что ядро ограничения перестановочного представления $\pi(G, V)$ группы $G$ на подпространство $L_V^P \subset L_{V,\mathbb{C}}$ совпадает со стабилизатором $G_E$ эквивалентности $E = E^{(i)}$ (см. (2.2), (2.3), (3.6)). Пусть $g \in G$. Тогда $g \in G_E$ означает, что $(v, v^g) \in E$ для всех $v \in V$. Это по определению $E$ равносильно тому, что $v^P = (v^g)^P = (v^P)^g$ для всех $v \in V$. Отсюда следует, что $x^g = x$ для всех $x \in L_V^P$, то есть $g$ принадлежит упомянутому выше ядру. Поскольку идемпотент $P$ примитивен, ограничение представления $\pi(G, V)$ на $L_V^P$ разлагается в прямую сумму эквивалентных между собой неприводимых представлений группы $G$. Обозначим через $M$ пространство одного из них. По условию леммы $\dim M \leqslant d$. Поскольку ядро ограничения $\pi(G, V)$ на $M$ совпадает с ядром ограничения $\pi(G, V)$ на $L_V^P$, из сказанного выше следует, что оно равно $G_E$. Применяя теорему Жордана (см. введение) к возникающему таким образом точному представлению группы $G/G_E$ на пространстве $M$, мы видим, что найдётся нормальная абелева подгруппа $A$ группы $G/G_E$, для которой $[G/G_E : A] \leqslant J(\dim M) \leqslant J(d)$, где $J$ – функция Жордана. Поскольку $A \subset \mathrm{sol}(G/G_E)$, то лемма доказана.

**Доказательство теоремы 1.** Достаточно доказать, что

$$[G : \mathrm{sol}(G)] \leqslant J(d)^{\log_2 d}.$$

Пусть $\{E^{(i)}\}_{i=1}^{s}$ – набор $G$-инвариантных эквивалентностей, существование которого гарантируется леммой 4. Не умаляя общности, можно считать, что выполнены условия леммы 3. (Действительно, уменьшая в случае необходимости число эквивалентностей, можно, не нарушая условия (i), добиться справедливости условия (ii). Кроме того, если $E$ – $G$-инвариантная эквивалентность на $V$ такая, что группа $G_E$ абелева и $E \neq I_V$, то, поскольку $[G/G_E : \mathrm{sol}(G/G_E)] = [G : \mathrm{sol}(G)]$ и $d(G/G_E, V/E) \leqslant d(G, V)$ (см. лемму 1), мы можем заменить $(G, V)$ на $(G/G_E, V/E)$). По лемме 3

$$s \leqslant \log_2 d. \tag{3.7}$$

Докажем, что гомоморфизм

$$\varphi : G \to \prod_{i=1}^{s} G/G_{E^{(i)}}, \tag{3.8}$$

индуцированный естественными проекциями, инъективен. Пусть $\varphi(g) = 1$. Тогда $g$ стабилизирует все классы всех эквивалентностей $E^{(i)}$. Следовательно, поскольку набор $\{E^{(i)}\}_{i=1}^{s}$ удовлетворяет условию (i) леммы 4, $g$ фиксирует все элементы множества $V$. Из точности $(G, V)$ вытекает, что $g = 1$. Таким образом, в силу (3.7), (3.8) и того, что $\{E^{(i)}\}_{i=1}^{s}$ удовлетворяет также условию (ii) леммы 4,

$$[G : \mathrm{sol}(G)] \leqslant \prod_{i=1}^{s} [G/G_{E^{(i)}} : \mathrm{sol}(G/G_{E^{(i)}})] \leqslant J(d)^{\log_2 d}.$$

Теорема доказана.

**Доказательство следствия.** *Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что произведение порядков неабелевых композиционных факторов группы $G$ не превосходит индекса $[G : \mathrm{sol}(G)]$. Второе утверждение вытекает из леммы 4 и того факта, что в силу инъективности гомоморфизма (3.8) каждый композиционный фактор группы $G$ изоморфен композиционному фактору группы $G/G_{E^{(i)}}$ для некоторого $i \in [1, s]$. Следствие доказано.*

## Литература


1. Г. М. Адельсон-Вельский, Б. Ю. Вейсфейлер, А. А. Леман, И. А. Фараджев, *О примере графа с нетранзитивной группой автоморфизмов.* — Доклады АН СССР **185** (1969), 975–976.
2. Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* М. Наука, 1964.
3. S. Evdokimov, I. Ponomarenko, *On Isomorphism Problem for Graphs with Bounded Multiplicities of Spectra.* Research Report No.85111-CS, University of Bonn, 1994.
4. I. M. Isaacs, D. S. Passman, *Groups with representations of bounded degree.* — Canad. J. Math. **16** (1964), 299–304.
5. W. M. Kantor, E. M. Luks, *Computing in quotient groups.* — Proc. 22nd ACM STOC (1990), 524–534.
6. B. Weisfeiler (editor), *On the construction and identification of graphs.* — Lect. Notes. Math. **558** (1976).
7. H. Wielandt, *Finite permutation groups.* Acad. Press, 1964.



Evdokimov S. A., Ponomarenko I. N. Transitive permutation groups with representations of bounded degree.

A well-known Jordan's theorem states that there exists a function $J(d)$ of a positive integer $d$ for which the following holds: if $G$ is a finite group having a faithful linear representation over $\mathbb{C}$ of degree $d$, then $G$ has a normal abelian subgroup $A$ with $[G : A] \leq J(d)$. We show that if $G$ is a transitive permutation group and $d$ is the maximum degree of an irreducible representation of $G$ in its permutation representation, then there exists a normal solvable subgroup $A$ of $G$ such that $[G : A] \leq J(d)^{\log_2 d}$.



С.-Петербургский институт
Информатики и Автоматизации
РАН

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН


Поступило 15 мая 1995г.