Э. А. Гирш*

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ СИМВОЛИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ТОРА

В [1] А. М. Вершик предложил общий подход к построению арифметического изоморфизма гиперболических автоморфизмов тора и символических сдвигов по схеме, начальным этапом которой служило следующее предположение.

Пусть T – автоморфизм тора, так же обозначим соответствующее преобразование $\mathbb{Z}^n$. Пусть вектор $v \in \mathbb{Z}^n$ такой, что его орбита относительно автоморфизма T в $\mathbb{Z}^n$ бесконечна. Обозначим через G полугруппу, натянутую на орбиту элемента v относительно T.

Предположение. *Существует натуральное N, такое что любой элемент g полугруппы G представим в виде*

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(g)\, T^k v\,,$$

где $e_k(g)$ – финитная последовательность чисел $0, 1, \ldots, N$.

Доказательство этого предположения имеется в случае, когда характеристический полином T имеет вид $x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x_1 - 1$, где $a_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant a_2 \geqslant a_1 \geqslant 0$ (см. [2]). Похожий подход был реализован в [3] для автоморфизма, старший корень характеристического полинома которого есть число Пизо, однако вместо обсуждаемого предположения было использовано утверждение, слегка отличающееся от него. А. М. Вершиком была выдвинута гипотеза, что этот результат распространяется на более широкий класс автоморфизмов.* В настоящей заметке доказывается, что его невозможно распространить на автоморфизмы, характеристические полиномы которых имеют неположительные коэффициенты и по

* Работа выполнена при поддержке гранта 94-01-00921 Российского фонда фундаментальных исследований .

* Как сообщил автору А. М. Вершик, R.Kenyon и он доказали, что Предположение будет верно, если заменить условие $e_k(g) \in \{0, 1, \ldots, N\}$ на условие $e_k(g) \in S$, где S – некоторое конечное подмножество поля Галуа характеристического полинома автоморфизма T.

крайней мере два различных по модулю корня, лежащих вне единичной окружности. Таким образом, в случае неположительных коэффициентов остаются нерассмотренными две возможности:

(1) если имеются корни на единичной окружности;

(2) если все корни вне единичной окружности равны по модулю.

Итак, рассмотрим многочлен $p(z) = z^n - a_{n-1}z^{n-1} - \ldots - a_1 z_1 - 1$, где $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1 \geqslant 0$, $\sum a_i^2 > 0$.

Пусть S – множество всех двусторонних финитных последовательностей $(\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots)$ неотрицательных целых чисел. Элементы S будут рассматриваться как формальные суммы вида

$$\sum_{i=s_1}^{s_2} b_i z^i \quad (s_2 \geqslant s_1).$$

Пусть $v \in S$. Наибольший из его коэффициентов будем обозначать $rk\, v$.

Пусть $v, w \in S$. Будем писать $v \backsim_p w$, если $\exists t \in \mathbb{Z} : p \mid (v - w) z^t$.

Назовем p **разлагающим**, если

$$\exists C \in \mathbb{N}\ \forall v \in S\ \forall w \in S\ \ (v \backsim_p w\ \ \&\ \ rk\, w \leqslant C).$$

Заметим, что p имеет ровно один положительный корень $r > 1$.

Теорема. *Если у многочлена p, удовлетворяющего вышеприведенным условиям, существует (комплексный) корень q, лежащий вне единичного круга и отличный по модулю от r, то p – не разлагающий.*

Доказательство. Пусть это не так, то есть p – разлагающий. Тогда

$$\exists C \in \mathbb{N}\ \forall v \in S\ \forall w \in S\ \ (v \backsim_p w\ \ \&\ \ rk\, w \leqslant C).$$

Возьмем $v = A$ (константа). $w \backsim_p A$, следовательно, $w(r) = w(q) = A$. Пусть

$$w = \sum_{i=s_1}^{s_2} b_i z^i, \quad b_{s_2} > 0.$$

Тогда $A = w(r) \geqslant r^{s_2}$, то есть $s_2 \leqslant \log_r A$.

С другой стороны,

$$|A| = |w(q)| < C\, \frac{|q|^{s_2+1}}{|q| - 1},$$

то есть

$$s_2 > \log_{|q|} A + \log_{|q|} \frac{|q|-1}{C} - 1.$$

Величина $\log_{|q|} \frac{|q|-1}{C} - 1$ – это константа, не зависящая от A; обозначим ее D.

Итак,

$$\log_r A \geqslant s_2 > \log_{|q|} A + D. \qquad (*)$$

Однако заметим, что $r > |q|$, так как в противном случае, т.е. если $r < |q|$, имеем

$$0 = \frac{p(q)}{(q)^n} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, q^{-i} - q^{-n} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\, |q|^{-i} - |q|^{-n} = \frac{p(|q|)}{|q|^n} > \frac{p(r)}{|q|^n} = 0$$

(противоречие).

Поэтому при достаточно больших A неравенство $(*)$ не выполнено, что противоречит первоначальному предположению о том, что многочлен p – разлагающий.

Литература

1. А. М. Вершик, *Арифметический изоморфизм гиперболических автоморфизмов тора и софических сдвигов.* — Функциональный анализ и его приложения **26**, Вып. 3 (1992), 22–27.
2. Ch. Frougny and B. Solomyak, *Finite beta-expansions.* Ergodic Theory Dynamical Systems, **12** (1992), 713–723.
3. A. Bertrand-Mathis, *Developpement en base θ; repartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geqslant 0}$; langages codes et θ-shift.* — Bull. Soc. math. France **114** (1986), 271–323.

Hirsch E. A. On symbolic realization of hyperbolic automorphisms of torus.

The general method of constructing an isomorphism between hyperbolic automorphisms of torus and symbolic shifts suggested by A. M. Vershik is considered. It turns out that this method is not applicable to a wide class of automorphisms, namely, those whose characteristic polynomial has at least two roots of different modulus outside the unit disk.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 15 марта 1995 г.