NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Verlag: Nauka; Российская академия наук санкт-петербургское отделение
Ort: Sankt-Peterburg
Kollektion: RusDML; Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN502905670
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN502905670
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=502905670

LOG Id: LOG_0017
LOG Titel: Несколько замечаний о гомоклинических группах гиперболических автоморфизмов торов
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN496972103
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN496972103
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=496972103

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

М. И. Гордин

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ГОМОКЛИНИЧЕСКИХ ГРУППАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ТОРОВ

Пусть X – метризуемый компакт и HOM(X) – группа гомеоморфизмов X на себя. Для $T \in \mathrm{HOM}(X)$ гомоклиническое отношение эквивалентности $\underset{T}{\sim}$ на X вводится следующим образом: $x \underset{T}{\sim} y$ тогда и только тогда, когда $d(T^n x, T^n y) \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Здесь d – какая-нибудь метрика, согласованная с топологией X.

Гомоклиническая группа HCL_T определяется соотношением

$$\mathrm{HCL}_T = \{S | S \in \mathrm{HOM}(X), \quad T^n S T^{-n} \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} I\}.$$

В этом определении I – единица группы HOM(X), а сходимость понимается в смысле метрики

$$\rho(T_1, T_2) = \max_{x\in X} d(T_1 x, T_2 x) + \max_{x\in X} d(T_1^{-1} x, T_2^{-1} x).$$

Группа HOM(X) полна в метрике ρ, а групповые операции непрерывны относительно ρ. При желании можно исключить метрику d из наших рассмотрений, определив топологию на HOM(X) в терминах равномерной структуры на X (однозначно определенной структурой компакта). Далее, эта топология определяет левую и правую равномерные структуры на HOM(X), а слабейшая из равномерных структур, мажорирующая их, как раз и задается метрикой ρ. Использование равномерных структур вместо метрик позволяет отказаться от предположения метризуемости X.

Алгебраический тип группы HCL_T очевидным образом является инвариантом гомеоморфизмов компакта на себя относительно топологической сопряженности. В терминах отношения $\underset{T}{\sim}$, группы HCL_T, ее действия на X, действия гомеоморфизма T на HCL_T (сопряжением) и на множестве классов гомоклинической эквивалентности (весьма нерегулярном в интересных случаях) могут быть

Работа частично поддерживалась РФФИ – грант 94–01–00921.

определены и другие инварианты гомеоморфизма T. В некоторых случаях такая гомоклиническая система инвариантов (определенная внутренним образом в топологических терминах), позволяет охарактеризовать некоторый класс гомоморифзмов и, с помощью дополнительных инвариантов, отдельные гомеоморфизмы этого класса. В настоящей работе такой класс составляют гиперболические автоморфизмы торов и топологически сопряженные с ними гомеоморфизмы (а, согласно известным результатам [4, 6], этот класс включает все аносовские диффеоморфизмы торов).

С действием группы HCL_T на X связано разбиение X на орбиты. Легко убедиться в том, что это разбиение мельче чем разбиение на классы гомоклинической эквивалентности, т.е. если $y = Sx$ для некоторого $S \in \mathrm{HCL}_T$, то $x \underset{T}{\sim} y$. Обратное, вообще говоря, неверно, в чем можно убедиться, рассматривая гиперболические автоморфизмы компактных нильмногообразий. Во всяком случае, тривиальность отношения $\underset{T}{\sim}$ (т.е. ситуация, когда каждая точка $x \in X$ гомоклинична только себе самой), влечет тривиальность HCL_T: в этом случае $\mathrm{HCL}_T = \{I\}$. Одним из наиболее ранних источников по части $\underset{T}{\sim}$ и близких вопросов является книга Д. Рюэля [7], где можно также найти ссылку на оригинальную работу Д. Капокаччиа (гомоклиничные точки называются у этих авторов сопряженными – conjugated, а главной целью является выработка не зависящего от выбора символического представления определения гиббсовской меры). В иных контекстах близкие понятия рассматривались в [2, 3, 5].

Пусть теперь $X = \mathbb{T}^d (= \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d)$ – d-мерный тор, T – алгебраический автоморфизм тора $\mathbb{T}^d$ (такой автоморфизм, как известно, задается в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^d$ $d \times d$-матрицей M с целыми элементами, для которой $\det(M) = \pm 1$). Зафиксировав эргодический автоморфизм T тора $\mathbb{T}^d$ (эргодичность равносильна отсутствию в спектре M корней из 1), мы будем интересоваться отношением $\underset{T}{\sim}$ и группой HCL_T. Мы ограничимся в этой заметке случаем гиперболического автоморфизма тора (в терминах матрицы M это означает отсутствие собственных чисел λ с $|\lambda| = 1$). Хотя интересующие нас объекты могут быть нетривиальны и для негиперболических автоморфизмов, именно в гиперболическом случае они могут быть описаны особенно просто.

Заметим сначала, что для гиперболического автоморфизма T отношение эквивалентности $\underset{T}{\sim}$ описывается следующим образом. В силу наличия на торе $\mathbb{T}^d$ инвариантной относительно трансляцией метрики и того, что нейтральный элемент 0 является неподвижной точкой для T, ясно, что $x \underset{T}{\sim} y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in \Gamma$, где

$$\Gamma = \{\gamma | \gamma \in \mathbb{T}^d,\ T^n\gamma \underset{|n|\to\infty}{\to} 0\}.$$

Группа Γ рассматривалась в [5], где было установлено, что Γ – счетная плотная в $\mathbb{T}^d$ T-инвариантная подгруппа, являющаяся свободной абелевой группой ранга d. Каждый элемент $\gamma \in \Gamma$ порождает трансляцию: $\widetilde{\gamma} : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $\widetilde{\gamma}x = \gamma + x$, $x \in \mathbb{T}$, являющуюся гомоклиническим гомеоморфизмом для T. Таким образом Γ изоморфно и T-эквивариантно вкладывается в HCL_T в виде подгруппы гомоклинических трансляций $\widetilde{\Gamma}$.

Предложение 1. $\mathrm{HCL}_T = \widetilde{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{HCL}_T$. Тогда для всех $x \in \mathbb{T}^d$ $Sx \underset{T}{\sim} x$ и, следовательно, $Sx - x \in \Gamma \subset \mathbb{T}^d$. Тем самым $S - I$ непрерывно отображает $\mathbb{T}^d$ в счетное подмножество Γ. В силу связности $\mathbb{T}^d$ $S - I$ постоянно, т.е. при некотором $\gamma \in \Gamma$ $Sx = x + \gamma$ для всех $x \in X$. Предложение доказано. •

Замечание 1. В силу того, что согласно уже упоминавшейся теореме А. Мэннинга любой диффеоморфизм Аносова на торе $\mathbb{T}^d$ сопряжен алгебраическому, из предложения 1 и описания Γ, данного в [5] вытекает, что для любого диффеоморфизма Аносова на торе $\mathbb{T}^d$ гомоклиническая группа – это свободная абелева группа с d образующими, действующая свободно и транзитивно на классах гомоклинической эквивалентности.

Замечание 2. Имеется иное, более геометричное объяснение соотношения $\mathrm{HCL}_T = \widetilde{\Gamma}$, а также совпадения обеих групп с фундаментальной группой тора. Это объяснение, не использующее групповой структуры $\mathbb{T}^d$, состоит в следующем. С каждой парой точек $x, y \in \mathbb{T}^d$, $x \underset{T}{\sim} y$, свяжем петлю, полученную композицией какого-нибудь пути, ведущего от x к y по листу устойчивого слоения (в рассматриваемом случае алгебраического автоморфизма тора упомянутый лист – это просто класс смежности по устойчивой подгруппе точки 0) и какого-нибудь пути, ведущего от y к x по листу неустойчивого слоения (это также класс смежности по подгруппе). Поскольку листы гомеоморфны евклидовым пространствам (это непосредственно видно в нашем случае, но верно и для общего диффеоморфизма Аносова [4]), гомотопический тип такой петли (с началом и концом в точке x) определен однозначно. Обозначим его через $l(x,y)$. Можно показать, рассматривая универсальное накрытие, что определенное таким образом отображение класса гомоклинической эквивалентности точки $x \in X$ в фундаментальную группу $\pi_1(\mathbb{T}^d, x)$ биективно (аналогичное утверждение верно и для гиперболических автоморфизмов компактных нильмногообразий, описанию гомоклинической ситуации на которых автор надеется посвятить отдельную публикацию).

Ввиду сказанного, гомоклинический класс эквивалентности точки x естественным образом параметризуется группой $\pi_1(\mathbb{T}^d, x)$. Для другой точки $y \in \mathbb{T}^d$ соответствующий класс параметризуется посредством $\pi_1(\mathbb{T}^d, y)$. Но $\pi_1(\mathbb{T}, x)$ и $\pi_1(\mathbb{T}^d, y)$ канонически изоморфны (здесь проявляется коммутативность фундаментальной группы тора $\mathbb{T}^d$: для общего линейно связного пространства X $\pi_1(X, x)$ и $\pi_1(X, y)$ тоже изоморфны, но не канонически, а с точностью до внутреннего автоморфизма). Это и позволяет, зафиксировав элемент фундаментальной группы, построить соответствующий ему гомоклинический гомеоморфизм, сопоставляя каждой точке $x \in \mathbb{T}^d$ такую точку $y \in \mathbb{T}^d$, $x \underset{T}{\sim} y$, что $l(x,y)$ совпадает с предписанным элементом фундаментальной группы. Обратно, гомоклинической гомеоморфизм S определяет элемент фундаментальной группы $l(x, Sx)$ (не зависящий от $x \in \mathbb{T}^d$).

Заметим, что в более общем случае компактного нильмногообразия аналогичным образом можно построить гомоклинический гомеоморфизм по элементу центра фундаментальной группы.

Замечание 3. Как известно [7], для диффеоморфизма Аносова T компактного гладкого многообразия X с каждой парой точек $x, y \in X$ такой, что $x \underset{T}{\sim} y$, может быть однозначно связан росток гомоклинического (т.е. переводящего каждую точку окрестности точки x в гомоклинически ей эквивалентную точку окрестности точки y и, в частности, x в y) гомеоморфизма $S_{x,y}$ (в [7] рассмотрен гораздо более широкий класс динамических систем, чем диффеоморфизмы Аносова, – системы на так называемых пространствах Смейла). Такие ростки (именуемые в [7] conjugating homeomorphisms) могут продолжаться, в силу локальной единственности, вдоль путей, причем продолжение в конец пути определяется лишь гомотопическим классом пути. На неодносвязном X подобное продолжение до гомеоморфизма всего X не всегда возможно. Из изложенного выше, однако, следует, что в случае $X = \mathbb{T}^d$ продолжение возможно для всех ростков.

Замечание 4. Отметим, что в рассматриваемом нами случае гиперболического автоморфизма тора элементы гомоклинической группы обладают свойством равностепенной непрерывности (как трансляции, являющиеся изометриями $\mathbb{T}^d$ относительно инвариантной метрики). Неясно, в какой мере этим свойством (являющимся инвариантом топологической сопряженности для гомеоморфизмов компактов) обладают ростки гомоклинических гомеоморфизмов (см. Замечание 3) для общего диффеоморфизма Аносова.

В следующем далее предложении 2 показано, что структура гомоклинической группы и некоторые свойства ее действия характеризуют класс гиперболических автоморфизмов торов. Внутри этого класса гомеоморфизмы топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены ассоциированные с ними автоморфизмы гомоклинических групп. Автору неизвестно, в какой мере условие 3 предложения независимо от остальных.

Предложение 2. *Пусть X и T таковы, что*

1. $\mathrm{HCL}_T \approx \mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$,
2. HCL_T *действует на X топологически транзитивно,*
3. HCL_T *– равностепенно непрерывное множество отображений X в X.*

Тогда гомеоморфизм T топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора $\mathbb{T}^d$. Далее, два гомеоморфизма метризуемых компактов (X,T) и (X',T'), удовлетворяющие условиям 1–3, топологически сопряжены, если сопряжены индуцированные ими автоморфизмы групп HCL_T и $\mathrm{HCL}_{T'}$.

Доказательству предпошлем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть T – автоморфизм компактной абелевой группы G (записываемой аддитивно),*

$$\Gamma_T = \{\gamma | \gamma \in G, \quad T^n\gamma \underset{|n|\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

и Γ_T плотна в G. Тогда для двойственного автоморфизма T^* группы Γ_T^* имеет место равенство $\Gamma_T^* = G^*$, где Γ_{T^*}, G^* – группы характеров соответствующих групп и G^* считается вложенной в Γ_T^* посредством ограничения характера на Γ_T. Далее, G^* плотна в Γ_T^*.

Доказательство леммы сводится к непосредственному применению основных фактов понтрягинской теории двойственности для локально компактных абелевых групп.

Доказательство предложения 2. Пусть Q – замыкание HCL_T в $\mathrm{HOM}(X)$. В силу полноты $\mathrm{HOM}(X)$ и условия 3 Q – компактное подмножество $\mathrm{HOM}(X)$. Кроме того, Q – абелева подгруппа $\mathrm{HOM}(X)$ (поскольку такова HCL_T)).

Пусть $S \to TST^{-1}$ – внутренний автоморфизм $\mathrm{HOM}(X)$, определяемый T. Поскольку $T\,(\mathrm{HCL}_T)T^{-1} = \mathrm{HCL}_T$, то и $TQT^{-1} = Q$. Обозначим через θ ограничение этого автоморфизма на Q. Итак, мы имеем компактную сепарабельную абелеву группу Q, ее автоморфизм θ и группу гомоклинических трансляций $\mathrm{HCL}_T = \mathrm{HCL}_\theta \approx \mathbb{Z}^d$. Переходя к группам характеров и учитывая лемму, мы получим группу HCL_T^*, ее автоморфизм θ^* и счетную плотную θ^*-инвариантную подгруппу $Q^* \subseteq \mathrm{HCL}_T^*$, совпадающую с группой гомоклинических трансляций для автоморфизма θ^* группы HCL_T^* $(\approx \mathbb{T}^d)$. Нетрудно убедиться, что только гиперболические автоморфизмы торов имеют плотные группы гомоклинических трансляций. Поэтому θ^* – гиперболический автоморфизм d-мерного тора, а Q^* – ассоциированная с ним группа гомоклиничеких трансляций. Согласно [5], $Q^* \approx \mathbb{Z}^d$, а, значит, $Q \approx \mathbb{T}^d$. Гиперболичность θ на Q следует из гиперболичности θ^*.

Теперь мы покажем, что (Q,θ) и (X,T) топологически сопряжены. Из условия 2 следует, что Q действует на X транзитивно, из включения $Q \subset \mathrm{HOM}(X)$ вытекает эффективность этого действия (т.е. тривиальность стационарной подгруппы).

Связь между θ и T выражается соотношением

$$\theta^n(S)\cdot T^n x = T^n(Sx), \quad S \in Q, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Выберем точку $x \in X$. Тогда отображение $\varphi_x : Q \to X$, определенное соотношением $\varphi_x(S) = Sx$, $S \in Q$, задает гомеоморфизм между Q и X. Положим $\widetilde{T} = \varphi_x^{-1} \circ T \circ \varphi_x$.

Таким образом, $\widetilde{T}$ – гомеоморфизм Q, сопряженный с T посредством φ_x, и нам достаточно установить сопряженность $\widetilde{T}$ и θ.

Покажем сначала, что

$$\widetilde{T}(S) = \theta(S)\cdot\widetilde{T}(I), \quad S \in Q, \tag{1}$$

где умножение и единица I в правой части относятся к абелевой группе Q. Для этого предварительно заметим, что из определения $\widetilde{T}$ следует, что

$$\widetilde{T}(S) = \varphi_x^{-1}(T(Sx)), \quad S \in Q, \tag{2}$$

и, в частности,

$$\widetilde{T}(I) = \varphi_x^{-1}(Tx). \tag{3}$$

Ввиду обратимости $\varphi_x : Q \to X$ (1) равносильно

$$\varphi_x(\widetilde{T}(S)) = \varphi_x(\theta(S) \cdot \widetilde{T}(I)),$$

или, в силу (2) и (3) и того, что

$$\varphi_x(\theta(S) \cdot \varphi_x^{-1}(Tx)) = \theta(S)\,(Tx),$$

соотношению

$$T(Sx) = \theta(S)\,(Tx), \tag{4}$$

но последнее равенство – очевидное следствие определения θ, уже отмеченное в более общей форме выше, что и доказывает (1).

Обозначим $\widetilde{T}(I)$ через y. Покажем, что существует элемент $z \in Q$ такой, что

$$y = \theta(z) \cdot z^{-1}. \tag{5}$$

При этом можно считать, что y достаточно близок к I (иначе, ввиду того, что $Q \approx \mathbb{T}^d$, можно представить y в виде $y = u^k$, где u – достаточно близкий к I элемент). Тогда из представимости u в виде $u = \theta(v) \cdot v^{-1}$ следует, что имеет место (5) с $z = u^k$.

Если же y – достаточно близкий к I элемент, то он допускает однозначное представление в виде $y = y_s\, y_u$, где y_s и y_u достаточно близкие к I элементы, принадлежащие, соответственно, устойчивому и неустойчивому слоениям точки I. Тогда

$$\begin{aligned} y_s &= \theta(z_s) z_s^{-1}, \\ y_u &= \theta(z_u) z_u^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} z_s &= \prod_{k \geqslant 0} \theta^k(y_s^{-1}), \\ z_u &= \prod_{k \leqslant -1} \theta^k(y_u). \end{aligned}$$

Поэтому мы можем, положив $z = z_u z_s$, получить представление (5). В сочетании с (1) (5) дает равенство

$$\widetilde{T}(S) = \theta(zS) z^{-1}, \quad S \in Q, \tag{6}$$

что и означает тот факт, что умножение на z осуществляет сопряжение $\widetilde{T}$ и θ. Последнее утверждение предложения 1 вытекает из того, что в его условиях оказываются (алгебраически и топологически) сопряженными автоморфизмы θ и θ', к рассмотрению которых только что был сведен вопрос о топологической сопряженности. Предложение 2 доказано.

Литература

1. Д. В. Аносов, *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.* — Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова **90** (1967).
2. А. М. Вершик, *Арифметический изоморфизм гиперболических автоморфизмов торов и софических сдвигов.* — Функц. анал. и его прил. **26, No. 3** (1992), 22–27.
3. М. И. Гордин, *Гомоклиническая версия центральной предельной теоремы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **184** (1990), 80–91. Англ. пер.: Journ. of Math. Sci., 48:4 (1994), 451–458.
4. J. Franks, *Anosov diffeomorphisms..* — Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. **14 AMS** (1970), 61–94. Русск. пер. в сб. Аносов Д. В. (ред.) Гладкие динамические системы. "Мир", М., 1977, 32–86.
5. M. Gordin, *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems.* — Contemporary Mathematics **149** (1993), 149–162.
6. A. Manning, *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori.* — American Journal of Math. **96:3** (1974), 422–429. Русск. пер. в сб. Аносов Д. В. (ред.), Гладкие динамические системы. "Мир", М., 1977, 97–110.
7. D. Ruelle, *Thermodynamic formalism.* Addison–Wesley., Publ. Comp., 1978.

Gordin M. I. Some remarks on homoclinic groups of hyperbolic toral automorphisms.

The homoclinic group (an invariant with respect to topological conjugacy) for hyperbolic toral automorphisms is determined. Certain conditions are given for conjugacy of a homeomorphism of a compact space to any (or to a certain prescribed) hyperbolic toral automorphisms.

Санкт–Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 4 июля 1995 г.