Н. В. Цилевич

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИН ЦИКЛОВ БЕСКОНЕЧНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК

1. Введение. В статье [1] А. М. Вершик и А. А. Шмидт предложили новый подход к изучению предельных распределений некоторых функционалов на симметрических группах, а именно, было доказано существование предельного совместного распределения нормированных длин циклов и исследованы его свойства. Почти двадцать лет спустя С. В. Керовым, Г. И. Ольшанским и А. М. Вершиком в [3] было введено пространство виртуальных перестановок, играющее роль предельного объекта для симметрических групп. Основная цель данной работы – показать, что предельное распределение, полученное в [1], может быть реализовано как распределение функционала на пространстве виртуальных перестановок.

Введем необходимые обозначения (следуя [1]) и опишем основной результат.

Пусть S_n – симметрическая группа порядка n, m_n – мера Хаара на S_n. S_n есть группа всех перестановок n предметов; перенумеруем переставляемые предметы числами от 1 до n и упорядочим циклы каждой перестановки $g \in S_n$ по возрастанию минимальных номеров предметов, входящих в цикл. Пусть $l_i(g)$ – длина i-го цикла при этом упорядочении (если число циклов равно k, то полагаем $l_i(g) = 0$ при $i > k$), а $x_i(g) = l_i(g)\,/\,n$ – нормированная длина i-го цикла. Таким образом, можно определить отображение $\varphi_n : S_n \to \Sigma^n$, где

$$\Sigma^n = \{(x_i)_{i=1}^n \,:\, x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \leqslant 1\}$$

– n-мерный единичный симплекс, и

$$\varphi_n(g) = (x_i(g))_{i=1}^n. \tag{1.1}$$

Пусть $\varkappa_n = \varphi_n m_n$ – образ меры m_n при этом отображении. Рас-

Работа выполнена при поддержке гранта MQV-000 Международного научного фонда (ISF) .

смотрим бесконечномерный симплекс

$$\Sigma = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \,:\, x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i \leqslant 1\}.$$

Симплексы Σ^n можно считать подмножествами Σ, дополняя векторы нулевыми координатами. В [1] доказано, что существует слабый предел мер $\varkappa_n$ при $n \to \infty$: $\varkappa = \lim_{n\to\infty} \varkappa_n$, т.е. для любого измеримого множества $\Delta \subset \Sigma^k$

$$m_n\left(\left\{g \in S_n \,:\, \left(\frac{l_1(g)}{n}, \dots, \frac{l_k(g)}{n}\right) \in \Delta\right\}\right) \to \varkappa(\Delta) \quad (n \to \infty).$$

Обратимся к понятию виртуальной перестановки. Рассмотрим естественные проекции $D_n : S_{n+1} \to S_n$

$$D_n(g) = \sigma_k(n+1), \quad k = g(n+1)$$

(где $\sigma_i(j)$ обозначает транспозицию, переставляющую i и j). Пространство виртуальных перестановок $\mathfrak{X}$ есть проективный предел групп S_n относительно этих проекций:

$$\mathfrak{X} = \{g = (g_1, \dots, g_n, \dots) \,:\, g_n \in S_n,\ D_n g_{n+1} = g_n\}.$$

Меры m_n согласованы с проекциями D_n, поэтому определена $\mu = \operatorname{proj}\lim m_n$ – вероятностная мера на $\mathfrak{X}$.

Основной результат. *Для почти всех относительно меры μ виртуальных перестановок $g = (g_1, \dots, g_n, \dots)$ существуют нормированные длины циклов*

$$y_k(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{l_k(g_n)}{n} \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

причем для любого измеримого множества $\Delta \subset \Sigma_k$

$$\mu(\{g \in \mathfrak{X} \,:\, (y_1(g), \dots, y_k(g)) \in \Delta\}) = \varkappa(\Delta),$$

т.е. $\varkappa = \varphi\mu$, где φ – отображение из $\mathfrak{X}$ в Σ, задаваемое формулой

$$\varphi(g) = (y_1(g), \dots, y_n(g), \dots).$$

Этот результат доказан для семейства мер Ювенса m_n^t на Σ^n. Соответствующая мера $\varkappa^t$ на бесконечномерном симплексе есть известное GEM-распределение с параметром t (см., например, [6-8]).

В п.7 даны две характеризации семейства мер m_n^t. В частности, доказана гипотеза, высказанная А. М. Вершиком, о том, что мера Ювенса m_n^t есть мера максимальной энтропии в некотором классе. Точное утверждение состоит в следующем:

Теорема. *Пусть I_n – семейство вероятностных мер на симметрической группе S_n, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов,*

$$I_n^q = \{\alpha \in I_n \ : \ E_\alpha c(g) = q\},$$

где $c(g)$ – число циклов перестановки g. Мерой максимальной энтропии семейства I_n^q является мера Ювенса m_n^t, где

$$\frac{t}{t} + \frac{t}{t+1} + \ldots + \frac{t}{t+n-1} = q.$$

Автор благодарит А. М. Вершика за введение в курс дела, постановку задачи и помощь при работе над статьей.

2. Слабая сходимость распределений длин циклов. В статье [5] Ц. Игнатов рассматривал меры $\varkappa_t$ на симплексе Σ и доказал для них утверждения, аналогичные результатам [1,2]. При этом он не связывал меры $\varkappa_t$ с симметрическими группами. В этом пункте мы покажем, что меры $\varkappa_t$ есть предельные распределения длин циклов случайных перестановок относительно мер Ювенса m_n^t.

Пусть m_n^t –мера Ювенса с параметром $t > 0$ на симметрической группе S_n, задаваемая формулой

$$m_n^t(g) = \frac{t^{c(g)}}{(t)_n}, \tag{2.1}$$

где $c(g)$ – число циклов перестановки $g \in S_n$, а

$$(t)_n = t(t+1)\ldots(t+n-1). \tag{2.2}$$

Меры $\varkappa_t$ задаются конечномерными проекциями $\varkappa_t^m$ с плотностями

$$\frac{d\varkappa_t^m(x)}{dx} = \frac{t^m(1-x_1-\ldots-x_m)^{t-1}}{(1-x_1)(1-x_1-x_2)\ldots(1-x_1-\ldots-x_{m-1})}, \quad x \in \Sigma^m. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\alpha_{t,n}$ образ меры Ювенса m_n^t при отображении (1.1) $\varphi_n : S_n \to \Sigma^n$.

Предложение 1. *GEM-распределение $\varkappa_t$ есть слабый предел мер $\alpha_{t,n}$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Достаточно показать сходимость конечномерных проекций

$$\alpha_{t,n}^m \to \varkappa_t^m \qquad (n \to \infty) \tag{2.4}$$

при любом натуральном m.

Пусть $h_n^t(r) = m_n^t(\{g \in S_n : l_1(g) = r\})$, $r = 1, \dots, n$. Нетрудно видеть, что

$$h_n^t(r) = \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \cdot \sum_{s \in S_{n-r}} \frac{t^{c(s)+1}}{(t)_n} = \frac{t}{n} \frac{n!}{(t)_n} \frac{(t)_{n-r}}{(n-r)!} =$$
$$= \frac{t}{n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+t)} \frac{\Gamma(n-r+t)}{\Gamma(n-r+1)}.$$

Используя известное асимптотическое соотношение

$$\Gamma(n+\alpha) \,/\, \Gamma(n+\beta) \sim n^{\alpha-\beta} \quad \text{при } n \to \infty,$$

получаем, что при $r/n = x + O(1/n)$

$$h_n^t(r) \sim \frac{t}{n}(1-x)^{t-1}.$$

Более аккуратные оценки, которые мы здесь опускаем, показывают, что

$$h_n^t(nx) = \frac{t}{n}(1-x)^{t-1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{2.5}$$

равномерно по $x \in [a,b]$, $0 < a < b < 1$, откуда

$$\alpha_{t,n}^1([a,b]) = \sum_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ nx \in \mathbb{N}}} \frac{t}{n}(1-x)^{t-1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \int_a^b t(1-x)^{t-1} dx = \varkappa_t^1([a,b]).$$

Аналогично, используя формулу

$$m_n^t(\{g \in S_n : x_i(g) = r_i,\ i = 1, \dots, m\}) =$$
$$= h_n^t(r_1) h_{n-r_1}^t(r_2) \dots h_{n-r_1-\dots-r_{m-1}}^t(r_m)$$

и (2.5), можно проверить (2.4) для произвольного m.

Пусть

$$V : \Sigma \to \widetilde{\Sigma} = \{(x_i)_{i=1}^\infty \ : x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^\infty x_i \leqslant 1,\ x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots\}$$

– монотонизация точек Σ : $V((x_k)_{k=1}^\infty) = (x_{(k)})_{k=1}^\infty$, где $x_{(k)}$ – k-й по величине член последовательности (x_k).

Следствие. *Распределение длин циклов случайной перестановки, упорядоченных по убыванию, есть мера Пуассона-Дирихле $\nu_t = V\varkappa_t$.*

Доказанное утверждение позволяет использовать результаты, касающиеся мер $\varkappa_t$ и ν_t, полученные в [5], а также в других работах, например, [6-8], для изучения предельных распределений функционалов на симметрических группах относительно мер Ювенса. Наша же цель – показать, как те же меры $\varkappa_t$ можно получить исходя из понятия виртуальной перестановки, минуя вспомогательные меры $\alpha_{t,n}$ и предельный переход от $\alpha_{t,n}$ к $\varkappa_t$.

3. Виртуальные перестановки. Как было указано в [3], пространство виртуальных перестановок $\mathfrak{X} = \varprojlim S_n$ допускает несколько различных интерпретаций, в частности, может быть отождествлено с декартовым произведением

$$[1] \times [2] \times \ldots \times [n] \times \ldots, \qquad \text{где } [n] = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

В дальнейшем мы будем использовать именно эту конструкцию, поэтому приведем необходимые пояснения.

Лемма. *Всякая перестановка $g \in S_n$ представляется единственным образом в виде произведения*

$$g = \sigma_{i_1}(1)\sigma_{i_2}(2)\ldots\sigma_{i_n}(n), \qquad i_k \in [k]. \tag{3.1}$$

(Считаем,что сомножители действуют в порядке слева направо.)

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для $n = k$. Для перестановки $g \in S_{k+1}$ положим $i_{k+1} = g(k+1) \in [k+1]$. Тогда $g \cdot \sigma_{i_{k+1}}(k+1) = D_k g \in S_k$ и поэтому представляется в виде

$$g \cdot \sigma_{i_{k+1}}(k+1) = \sigma_{i_1}(1)\ldots\sigma_{i_k}(k), \qquad i_k \in [k]. \tag{3.2}$$

Домножая обе части равенства (3.2) на $\sigma_{i_{k+1}}(k+1)$, получаем искомое представление (3.1).

Подставив в обе части равенства (3.1) элемент n, получаем, что $g(n) = i_n$, откуда по индукции легко следует единственность.

В силу леммы 1 симметрическую группу S_n можно отождествить с прямым произведением $[1] \times \ldots \times [n]$, причем проекции D_n принимают вид

$$D_n(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}) = (i_1, \ldots, i_n).$$

Таким образом, пространство виртуальных перестановок отождествляется с прямым произведением

$$\mathfrak{X} \cong [1] \times [2] \times \ldots \times [n] \times \ldots \tag{3.3}$$

Обозначим через p_n проекцию из $\mathfrak{X}$ в S_n. В новых координатах

$$p_n(i_1,\dots,i_n,\dots) = (i_1,\dots,i_n) \leftrightarrow \sigma_{i_1}(1)\dots\sigma_{i_n}(n).$$

Заметим, что при выбранном способе отождествления S_n и $[1]\times\dots\times[n]$ правое действие S_n на $\mathfrak{X}$ финитно, а именно, затрагивает только первые n координат, в то время как левое действие – инфинитно. Можно было выбрать другой способ, соответствующий разложению $g = \sigma_{i'_n}(n)\dots\sigma_{i'_1}(1)$, $i'_k \in [k]$. (В этом случае $i'_n = g^{-1}(n)$.) Тогда финитным было бы левое действие.

Итак, виртуальную перестановку можно понимать двумя эквивалентными способами: либо как последовательность согласованных перестановок

$$(g_1,\dots,g_n,\dots), \quad g_n \in S_n, \quad D_n g_{n+1} = g_n,$$

либо как последовательность натуральных чисел

$$(i_1,\dots,i_n,\dots), \quad i_n \in [n].$$

Далее мы будем использовать оба описания.

Прообраз перестановки $g \in S_n$ при проекции D_n состоит из $n+1$ перестановки, n из которых имеют то же число циклов, что и g, а оставшаяся – на один цикл (состоящий из элемента $n+1$) больше. Таким образом,

$$D_n^{-1} m^t_{n+1}(g) = n \cdot \frac{t^{c(g)}}{(t)_{n+1}} + \frac{t^{c(g)+1}}{(t)_{n+1}} = \frac{t^{c(g)}}{(t)_n} = m^t_n(g),$$

т.е. меры Ювенса m^t_n согласованы с проекциями D_n.

Определение. Мера $\mu^t = \operatorname{proj}\lim m^t_n$ называется мерой Ювенса на пространстве виртуальных перестановок.

Нетрудно убедиться, что при отождествлении S_n и $[1]\times\dots\times[n]$ мера Ювенса m^t_n переходит в продакт-меру $\mu^t_1\times\dots\times\mu^t_n$, где мера μ^t_k на множестве $[k]$ имеет нагрузки

$$\begin{aligned} \mu^t_k(k) &= \frac{t}{t+k-1}; \\ \mu^t_k(i) &= \frac{1}{t+k-1}, \quad \text{если } i \neq k. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, в координатах $(i_1,\dots,i_n,\dots)$ распределение Ювенса μ^t есть продакт-мера $\mu^t_1\times\dots\times\mu^t_n\times\dots$

4. Длины циклов виртуальных перестановок. Обозначим через $C_k(s)$ k-й цикл перестановки $s \in S_n$ в смысле введенного в п.1 упорядочения (если число циклов меньше k, то полагаем $C_k(s) = \emptyset$).

Пусть $g = (g_1, \dots, g_n, \dots)$ – виртуальная перестановка. По определению проекций D_n

$$C_k(g_1) \subset C_k(g_2) \subset \dots \subset C_k(g_n) \subset \dots$$

при любом натуральном k.

Определение 1. k-м циклом виртуальной перестановки $g = (g_1, \dots, g_n, \dots)$ называется множество

$$C_k(g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_k(g_n) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

При отождествлении (3.3) определение 1 принимает вид

Определение 1'. Пусть $g = (i_1, \dots, i_n, \dots)$ – виртуальная перестановка. Разбиение натурального ряда $\mathbb{N} = C_1 \cup C_2 \cup \dots$, строящееся по индукции следующим образом:

1) $1 \in C_1$;
2) если $i_n < n$, то $n \in C_{k(i_n)}$, где $C_{k(i_n)}$ – множество, содержащее элемент i_n; если же $i_n = n$, то $n \in C_k$, где k – наименьший индекс, для которого $1, 2, \dots, n-1 \notin C_k$,

называется разбиением виртуальной перестановки g на циклы. Множество $C_k = C_k(g)$ называется k-м циклом g.

Предложение 2. *Для почти всех относительно меры Ювенса μ^t виртуальных перестановок $g = (g_1, \dots, g_n, \dots) \in \mathfrak{X}$ существуют пределы*

$$y_k(g) = \lim_{N \to \infty} x_k(g_N) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#(C_k \cap [N])}{N}; \qquad k = 1, 2, \dots \tag{4.1}$$

Определение 2. Пределы (4.1) называются нормированными длинами циклов виртуальной перестановки g.

Доказательство предложения 2. Фиксируем число k и пусть $\xi_N = x_k(g_N)$. Координаты $(i_1, \dots, i_N, \dots)$ представления (3.3) независимы относительно меры μ_t. Обозначим σ-алгебру, порожденную $i_1, \dots, i_N$ через $\mathfrak{A}_N$. Случайная величина ξ_N зависит от значений только первых N координат, поэтому она $\mathfrak{A}_N$-измерима. Рассмотрим множества

$$A_N(l) = \left\{ g \in \mathfrak{X} : \xi_N = \frac{l}{N} \right\} = \{ g \in \mathfrak{X} : l_k(g_N) = l \}; \qquad l = 0, \dots, N.$$

Очевидно, что $A_N(l) \in \mathfrak{A}$ и $\bigcup_{l=0}^{N} A_N(l) = \mathfrak{X}$. Заметим, что

$$l_k(g_{N+1}) = \begin{cases} l_k(g_N)+1, & \text{если } i_{N+1} \in C_k, \\ l_k(g_N) & \text{иначе,} \end{cases}$$

причем при $g \in A_N(l)$ вероятность первого события равна $\frac{l}{N+t}$. Таким образом,

$$E\{\xi_{N+1}|\mathfrak{A}_N\}\big|_{A_N(l)} = \frac{l+1}{N+1}\frac{l}{N+t} + \frac{l}{N+1}(1-\frac{l}{N+t}) =$$
$$= \frac{l(N+t+1)}{(N+1)(N+t)} \leqslant \frac{l}{N} = \xi_N\big|_{A_N(l)}.$$

Значит, последовательность ξ_N образует супермартингал, и по теореме Дуба (см., например, [9], стр.496) существует

$$\lim_{N\to\infty} \xi_N = \lim_{N\to\infty} x_k(g_N)$$

для почти всех относительно μ_t виртуальных перестановок $g \in \mathfrak{X}$.

5. Число циклов виртуальной перестановки. Обозначим через $Z_N(g)$ число различных циклов виртуальной перестановки $g = (g_1, \dots, g_n, \dots)$, содержащих элементы, не превосходящие N, т.е.

$$Z_N(g) = \#\{k \in \mathbb{N} : C_k(g) \cap [N] \neq \emptyset\} = c(g_N).$$

Хорошо известно (см., например, [4]), что среднее (относительно меры Хаара) число циклов перестановки $s \in S_n$ асимптотически (при $n \to \infty$) эквивалентно $\ln n$.

Предложение 3. *Для почти всех относительно меры Ювенса* μ^t *виртуальных перестановок* $g = (g_1, \dots, g_n, \dots) \in \mathfrak{X}$

$$\frac{Z_N(g)}{\ln N} \to t \qquad (N \to \infty). \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть $\chi_N(g) = Z_N(g) - Z_{N-1}(g)$, $N \in \mathbb{N}$ (полагаем $Z_0 \equiv 0$). Тогда $Z_N(g) = \sum_{k=1}^{N} \chi_N(g)$.

По определению виртуальной перестановки, $g_N = g_{N-1}\,\sigma_{i_N}(N)$, поэтому

$$\chi_N(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } i_N = N, \\ 0, & \text{если } i_N < N. \end{cases}$$

Таким образом, χ_N – независимые случайные величины, причем

$$\mu^t(\{\chi_N = 1\}) = \frac{t}{t+N-1}, \quad \mu^t(\{\chi_N = 0\}) = \frac{1}{t+N-1}.$$

Отсюда $E_t\chi_N = t\,/\,(t+N-1)$, а $D_t\chi_N = t(N-1)\,/\,(t+N-1)^2 = O(1\,/\,N)$. Значит,

$$E_t Z_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{t}{t+k-1} = t\ln N + o(\ln N).$$

Пусть $b_1 = 1$, $b_k = \ln k$ при $k \geqslant 2$. Тогда $D_t\chi_k\,/\,b_k^2 = O(1\,/\,k\ln^2 k)$, следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} D_t\chi_k\,/\,b_k^2 < \infty$. По теореме Колмогорова (см., например, [9], стр.377)

$$\frac{\sum_{k=1}^{N}\chi_k - E_t(\sum_{k=1}^{N}\chi_k)}{b_N} \to 0 \qquad (N\to\infty)$$

для μ_t-почти всех виртуальных перестановок g, т.е.

$$\frac{Z_N(g) - t\ln N - o(\ln N)}{\ln N} \to 0$$

для почти всех g, откуда следует (5.1).

Замечание. Пусть α_k – произвольные вероятностные меры на множестве $[k]$, $\alpha = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n \times \ldots$ – соответствующая мера на $\mathfrak{X}$. Обозначим через s_N сумму $s_N = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k(k)$. Аналогично предложению 3 можно показать, что $Z_N(g) \sim t\ln N$ при $N\to\infty$ для α-почти всех виртуальных перестановок g тогда и только тогда, когда $s_N \sim t\ln N$.

6. Распределение длин циклов виртуальных перестановок. В силу предложения 2 можно рассмотреть μ^t-почти везде определенное отображение $\varphi : \mathfrak{X} \to \Sigma$, сопоставляющее виртуальной перестановке вектор из нормированных длин циклов: $\varphi(g) = (y_1(g), y_2(g), \ldots)$.

Теорема. *Образ меры Ювенса μ^t при отображении φ есть GEM-распределение $\varkappa_t$.*

Доказательство. Согласно предложению 1, совместные распределения случайных величин

$$(x_1(g_n), \ldots, x_n(g_n)), \qquad g = (g_1, \ldots, g_n, \ldots) \in (\mathfrak{X}, \mu^t)$$

слабо сходятся при $n\to\infty$ к GEM-распределению $\varkappa_t$. Но в силу предложения 2 те же величины $x_k(g_n)$ имеют пределы $y_k(g)$ почти везде. Утверждение теоремы следует из того, что сходимость почти везде влечет слабую сходимость.

Следствие. *Распределение длин циклов виртуальной перестановки, упорядоченных по убыванию, есть мера Пуассона-Дирихле ν_t.*

Теперь известные свойства мер $\varkappa_t$ и ν_t позволяют устанавливать факты, касающиеся виртуальных перестановок. В частности, благодаря [1,2,5] известны совместные распределенния длин любого конечного числа циклов и некоторые соотношения, касающиеся бесконечного числа циклов. Приведем несколько примеров, а именно – переформулируем некоторые результаты, установленные в [1,2], на языке виртуальных перестановок. При этом будем считать, что пространство виртуальных перестановок $\mathfrak{X}$ снабжено мерой $\mu = \mu^1$ (этот случай представляется наиболее важным, так как конечномерные проекции $p_n\mu^1 = m_n$ есть меры Хаара на симметрических группах).

1) Для μ-почти всех виртуальных перестановок $g \in \mathfrak{X}$ длины циклов различны, и сумма длин циклов равна 1, т.е.

$$y_i(g) \neq y_j(g) \text{ при } i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i(g) = 1.$$

2) Мера $\nu^1 = \nu_1^1$, отвечающая распределению длины максимального цикла виртуальной перестановки, абсолютно непрерывна по лебеговой мере, причем ее плотность $p(x)$ есть единственное решение функционального уравнения на $(0,\infty)$

$$xp(x) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} p(a)da \qquad (p \geqslant 0, \int_0^1 p(x)dx = 1, \ p|_{(1,\infty)} = 0).$$

(См.теорему 3.1, [1].) Аналогично теорема 4.2, [1] дает формулу для совместного распределения нескольких длин циклов, упорядоченных по убыванию.

3) Из предельной теоремы 6.1, [1] следует, что

$$\lim_{i\to\infty} \mu\left\{g \in \mathfrak{X} : \frac{\ln y_{i+1}(g) + i}{\sqrt{i}} \leqslant b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-s^2/2}ds$$

и

$$\lim_{i\to\infty} \mu\left\{g \in \mathfrak{X} : \frac{\ln y_{(i+1)}(g) + i}{\sqrt{i}} \leqslant b\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-s^2/2}ds,$$

где $y_{(k)}(g)$ – длина k-го при упорядочении по убыванию цикла виртуальной перестановки g.

Как следствие, имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{y_k(g)} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{y_{(k)}(g)} = \frac{1}{e}$$

для μ-почти всех виртуальных перестановок $g \in \mathfrak{X}$.

4) При любом натуральном k

$$\lim_{j\to\infty} \mu\left(\left\{g \in \mathfrak{X} : a_i \leqslant \frac{y_{(j+i+1)}(g)}{y_{(j+i)}(g)} \leqslant a_i + \Delta_i,\ i = 1, \dots, k\right\}\right) = \prod_{i=1}^{k} \Delta_i,$$

т.е. отношения длин соседних по длине циклов асимптотически независимы и имеют равномерное распределение.

5) Математические ожидания длин циклов

$$Ey_k(g) = \frac{1}{2^k}, \qquad \frac{1}{2^k} \leqslant Ey_{(k)}(g) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

для любого натурального k.

7. Дополнение. Характеризации семейства мер Ювенса.

В заключение приведем два утверждения, характеризующие семейство мер Ювенса на пространстве виртуальных перестановок. Соответствующие гипотезы были высказаны А. М. Вершиком.

Предложение 4. *Пусть $\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_n \times \ldots$ – произвольная вероятностная продакт-мера на пространстве виртуальных перестановок $\mathfrak{X}$, причем при любом натуральном n мера $p_n\alpha = \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ на симметрической группе S_n инвариантна относительно внутренних автоморфизмов. Тогда существует такое $t \in [0, +\infty]$, что $\alpha_n = \mu_n^t$ при любом n.*

Замечание. При $t = 0$ формула (2.1) принимает вид

$$\mu_n^0(g) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}, & \text{если } c(g) = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

т.е. мера μ_n^0 сосредоточена на перестановках, состоящих ровно из одного цикла, и равномерна на них. Мера μ_n^∞ сосредоточена на единичной перестановке.

Доказательство предложения 4. Пусть

$$t = \frac{\alpha_2(2)}{1 - \alpha_2(2)}.$$

Тогда при $n = 1, 2$ $\alpha_n = \mu_n^t$. Рассмотрим случай $t \in (0, \infty)$. Случаи $t = 0$ и $t = \infty$ – аналогично. Пусть доказано, что $\alpha_n = \mu_n^t$ при $n \leqslant N - 1$. В силу инвариантности относительно внутренних автоморфизмов, $p_N\alpha(\sigma_N(k)) = p_N\alpha(\sigma_N(l))$ при любых $k, l \leqslant N - 1$, т.е.

$$\alpha_N(k) \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \alpha_i(i) = \alpha_N(l) \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \alpha_i(i),$$

откуда $\alpha_N(k) = \alpha_N(l)$ при $k, l \leqslant N - 1$. Кроме того, $p_N\alpha(\sigma_N(1)) = p_N\alpha(\sigma_2(1))$, т.е.

$$\alpha_N(1) \cdot \prod_{i=1}^{N-1} \alpha_i(i) = \alpha_1(1) \cdot \alpha_2(1) \cdot \prod_{i=3}^{N} \alpha_i(i),$$

откуда

$$\frac{\alpha_N(N)}{\alpha_N(1)} = \frac{\alpha_2(2)}{\alpha_2(1)} = t.$$

Итак, $\alpha_N(1) = \ldots = \alpha_N(N-1)$, $\alpha_N(N) = t\alpha_N(1)$, значит, $\alpha_n = \mu_n^t$.

Как показано при доказательстве предложения 3, математическое ожидание числа циклов случайной перестановки относительно меры Ювенса m_n^t есть

$$Q_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t}{t + k - 1}.$$

Нетрудно видеть, что при любом n функция $Q_n(t)$ непрерывна и строго возрастает по t на промежутке $[0, +\infty)$. Рассмотрим семейство I_n вероятностных мер на симметрической группе S_n, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов, и его подсемейства

$$I_n^q = \{\alpha \in I_n \; : \; E_\alpha c(g) = q\}.$$

Предложение 5. *Мерой максимальной энтропии семейства I_n^q является мера Ювенса m_n^t с параметром $t = Q_n^{-1}(q)$.*

Доказательство. В силу инвариантности относительно внутренних автоморфизмов, всякая мера $\alpha \in I_n$ постоянна на классах сопряженности. Но каждый класс сопряженности задается длинами циклов входящих в него перестановок, т.е. разбиением числа n

$$\pi = (a_1, \ldots, a_n), \quad a_j \geqslant 0, \; \sum_{j=1}^{n} j a_j = n.$$

Пусть Π_n – множество всех разбиений числа n. Класс I_n находится во взаимно-однозначном соответствии $\alpha \leftrightarrow \widetilde{\alpha}$ с множеством вероятностных мер на Π_n. Обозначим через $A(\pi)$ класс сопряженности в S_n, определяемый разбиением π. Число перестановок в классе $A(\pi)$ равно

$$k(\pi) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{n}(j^{a_j(\pi)}\, a_j(\pi)!)}.$$

Таким образом, для $\pi \in \Pi_n$ $\widetilde{\alpha}(\pi) = k(\pi)\cdot\alpha(g)$, где g – произвольный элемент класса $A(\pi)$.

Энтропия меры $\alpha \in I_n$ равна

$$H(\alpha) = -\sum_{g\in S_n}\alpha(g)\ln\alpha(g) = -\sum_{\pi\in\Pi_n}\widetilde{\alpha}(\pi)\ln\frac{\widetilde{\alpha}(\pi)}{k(\pi)}. \tag{7.1}$$

При $g \in A(\pi)$ число циклов $c(g) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\pi)$, поэтому условие $\alpha \in I_n^q$ запишется в виде

$$\sum_{\pi\in\Pi_n}\widetilde{\alpha}(\pi)(\sum_{j=1}^{n} a_j(\pi)) = q. \tag{7.2}$$

Кроме того, мера $\widetilde{\alpha}$ – вероятностная, т.е.

$$\sum_{\pi\in\Pi_n}\widetilde{\alpha}(\pi) = 1. \tag{7.3}$$

Итак, нужно максимизировать функцию (7.1) при условиях (7.2) и (7.3). Запишем функцию Лагранжа

$$L(\alpha) = \sum_{\pi\in\Pi_n}\left(-\widetilde{\alpha}(\pi)\ln\frac{\widetilde{\alpha}(\pi)}{k(\pi)} + \lambda_1\widetilde{\alpha}(\pi)\sum_{j=1}^{n} a_j(\pi) + \lambda_2\widetilde{\alpha}(\pi)\right).$$

Соответствующая система уравнений имеет вид

$$-\ln\frac{\widetilde{\alpha}(\pi)}{k(\pi)} - 1 - \lambda_1\widetilde{\alpha}(\pi)\sum_{j=1}^{n} a_j(\pi) + \lambda_2 = 0,$$

откуда при $g \in A(\pi)$

$$\alpha(g) = \frac{\widetilde{\alpha}(\pi)}{k(\pi)} = e^{\lambda_2-1}\cdot e^{\lambda_1\sum_{j=1}^{n} a_j(\pi)} = \gamma t^{c(g)} \qquad (\gamma = e^{\lambda_2-1},\ t = e^{\lambda_1}).$$

Таким образом, мера α с точностью до множителя совпадает с m_n^t, откуда в силу нормировки $\alpha = m_n^t$, а значит, $E_\alpha c(g) = E_{m_n^t} c(g) = Q_n(t)$. Но $\alpha \in I_n^q$, поэтому $E_\alpha c(g) = q$, откуда $Q_n(t) = q$.

Литература

1. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп.I.* — Теория вероятн. и ее примен., **22** (1977), 72–88.
2. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп. II.* — Теория вероятн. и ее примен., **23** (1978), 42–54.
3. S. V. Kerov, G. I. Olshanski, A. M. Vershik, *Harmonic Analysis on the Infinite Symmetric Group.* — Comptes Rend. Acad. Sci. Paris **316** (1993), 773–778.
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1.* Москва, Мир, 1964.
5. Ц. Игнатов, *Об одной константе, возникающей в асимптотической теории симметрических групп, и о мерах Пуассона-Дирихле.* — Теория вероятн. и ее примен. **27** (1982), 129–140.
6. W. J. Ewens, *The sampling theory of selectively neutral alleles.* — Theor. Pop. Biol. **3** (1972), 87–112.
7. J. F. C. Kingman, *Random partitions in population genetics.* — Proc. R. Soc. Lond. A **361** (1978), 1–20.
8. G. A. Watterson, *The stationary distribution of the infinitely many neutral alleles diffusion model.* — J. Appl. Probab. **B** (1976), 639–651.
9. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* Москва, Наука, 1980.

Tsilevich N. V. Distribution of cycle lengths of infinite permutations.

The purpose of this paper is to show that the well-studied families of GEM- and Poisson-Dirichlet measures may be obtained as distributions of normalized cycle lengths on the space of virtual permutations (i. e., elements of a projective limit of symmetric groups). Two characterizations of Ewens distributions are given.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 10 октября 1994 г.