

Werk

Verlag: Nauka; Российская академия наук санкт-петербургское отделение

Ort: Sankt-Peterburg

Kollektion: RusDML; Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN502905670

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN502905670>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=502905670>

LOG Id: LOG_0019

LOG Titel: Случайное дробление отрезка порождает виртуальные перестановки с распределением Ювенса

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN496972103

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN496972103>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=496972103>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

С. В. Керов, Н. В. Цилевич

СЛУЧАЙНОЕ ДРОБЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПОРОЖДАЕТ ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЮВЕНСА

1. Введение. В статье [1] рассмотрен нетривиальный пример гармонического анализа на группе финитных подстановок натурального ряда \mathfrak{S}_∞ . Среди прочего, в этой статье определено двустороннее действие группы \mathfrak{S}_∞ в компактном пространстве \mathfrak{S}^∞ и указаны вероятностные меры μ_t , зависящие от параметра $t > 0$ и квазиинвариантные для этого действия. По определению, пространство $\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim \mathfrak{S}_n$ есть обратный предел конечных симметрических групп \mathfrak{S}_n ; при этом проекция $D_n : \mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_n$ состоит в переходе к производной подстановке. Согласованные последовательности подстановок

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty \quad (1.1)$$

названы в [1] *виртуальными перестановками*, а распределения μ_t в пространстве \mathfrak{S}^∞ мы будем называть *мерами Ювенса*. Выбор термина указывает на родство с формулой выборок Ювенса (Ewens Sampling Formula), см. [2, 4].

В настоящей заметке мы описываем процесс случайного дробления отрезка, детализирующий известный алгоритм ломания палки (stick breaking process), см. [3]. Основные результаты (теоремы 1–3) позволяют отождествить случайные виртуальные перестановки с реализациями

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots) \in [0, 1]^\infty \quad (1.2)$$

процесса дробления отрезка. Мы надеемся, что простота и наглядность нового описания будут способствовать новому прогрессу в понимании вероятностных свойств виртуальных перестановок и в гармоническом анализе на бесконечной симметрической группе \mathfrak{S}_∞ .

Авторы благодарны А. М. Вершику за полезные обсуждения и в частности за гипотезу, доказанную ниже в п. 8. Ключевой

Работа выполнена при поддержке гранта MQV-000 Международного научного фонда (ISF).

факт, использованный в доказательстве (предложение 1 из п. 8) был сформулирован Г. И. Ольшанским в 1992 г. в беседе с одним из авторов, однако доказательство прежде не публиковалось.

2. Процесс дробления отрезка. Реализациями этого процесса служат последовательности $X = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ точек единичного отрезка $[0, 1]$. Процесс определяется положительным параметром t .

Первая точка X_1 имеет распределение с плотностью $t(1-x_1)^{t-1}$; $0 \leq x_1 \leq 1$. Предполагая, что n точек $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ уже построены, укажем распределение очередной точки X_{n+1} . Оно задается плотностью $\varphi_t(x, x(n))$, где

$$\varphi_t(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq y, \\ t \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{t-1}, & \text{если } y < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь через $x_{(k)}$; $k = 1, 2, \dots, n$ обозначаются точки x_1, x_2, \dots, x_n в порядке их возрастания; в частности, $x_{(n)}$ — максимальная из ранее полученных точек. Нетрудно проверить, что при любом $y \in [0, 1]$ интеграл

$$\int_y^1 \varphi_t(x, y) dx = 1 - y$$

не зависит от t . Как следствие, функция $\varphi_t(\cdot, y)$ является плотностью вероятностного распределения на отрезке $[0, 1]$.

Нам будет удобно отличать последний отрезок $[x_{(n)}, 1]$, называемый *остатком*, от всех расположенных левее отрезков $[0, x_{(1)}], [x_{(1)}, x_{(2)}], \dots, [x_{(n-1)}, x_{(n)}]$, называемых *обломками*.

Приведем “двухступенчатый” вариант описания процесса дробления отрезка, эквивалентный предыдущему. На первом этапе следует выбрать один из отрезков

$$[0, x_{(1)}], [x_{(1)}, x_{(2)}], \dots, [x_{(n-1)}, x_{(n)}], [x_{(n)}, 1] \quad (2.2)$$

с вероятностью, пропорциональной его длине. Теперь возьмем за координату на выбранном отрезке относительное расстояние v до его левого конца. Если выбран обломок, считаем v равномерно распределенным на $[0, 1]$; если выбран остаток, то v имеет плотность $t(1-v)^{t-1}$.

В теореме 1 п. 4 мы опишем более явно совместное распределение точек X_1, \dots, X_n в процессе дробления отрезка с произвольным параметром $t > 0$.

В частном случае, когда $t = 1$, описание существенно упрощается: все точки $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

3. Нормализованная цикловая запись. Подстановку w множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ можно задать вектором

$$x = (w(1), w(2), \dots, w(n)), \quad (3.1)$$

указывающим образы переставляемых предметов. Другой популярный способ задания подстановки – ее цикловая запись, имеющая вид

$$w = (j_1, w(j_1), \dots, w^{L_1-1}(j_1)) \dots (j_c, w(j_c), \dots, w^{L_c-1}(j_c)). \quad (3.2)$$

В скобках перечисляются, в циклическом порядке, элементы орбит (циклов) для действия подстановки w на множестве $[n]$. Обычно в качестве j_1, j_2, \dots, j_c выбираются наименьшие элементы циклов, а сами циклы располагаются в порядке возрастания их минимальных элементов.

Разумеется, подстановка не изменится, если в ее цикловой записи поменять порядок циклов или выполнить циклические сдвиги внутри циклов. Нам будет удобно стандартизировать цикловую запись подстановки не совсем обычным способом:

- (1) младший элемент каждого цикла находится *правее* всех прочих;
- (2) циклы расположены в порядке возрастания своих младших элементов.

Например, вместо перестановки $w = (1\ 2\ 8\ 6)(3)(4\ 7\ 5)$ мы пишем $w = (2\ 8\ 6\ 1)(3)(7\ 5\ 4)$.

Заметим, что скобки, разделяющие циклы, ставить не обязательно. Действительно, пусть

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.3)$$

– последовательность номеров переставляемых предметов в нормализованной цикловой записи

$$w = (w(j_1), \dots, w^{L_1-1}(j_1), j_1) \dots (w(j_c), \dots, w^{L_c-1}(j_c), j_c)$$

подстановки w . Тогда младшие элементы циклов j_1, j_2, \dots, j_c легко восстанавливаются по вектору (3.3): элемент $j_1 = x_{i_1}$ – наименьший в последовательности, элемент $j_2 = x_{i_1+i_2}$ – наименьший среди расположенных правее x_{i_1} и т.д. Тем самым определяется разбиение последовательности x на циклы и соответствующая подстановка $w = \omega(x) \in \mathfrak{S}_n$.

Например, вектору $x = (8, 2, 1, 5, 3, 4, 7, 9, 6)$, интерпретированному как нормализованная цикловая запись, отвечает подстановка $\omega(x) = (821)(53)(4)(796)$ множества $\{1, 2, \dots, 9\}$. Вектор $y = (w(1), w(2), \dots, w(9))$ для этой подстановки имеет вид $y = (8, 1, 5, 4, 3, 7, 9, 2, 6)$. Разумеется, в интерпретации (3.1) с вектором x связывается совсем иная подстановка.

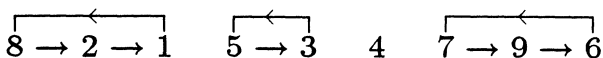


Рис. 1 Циклическая структура последовательности.

В этой заметке мы всегда интерпретируем “подстановочный” вектор (3.3) как нормализованную цикловую запись подстановки $w = \omega(x)$, а не как вектор образов (3.1).

Определение. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, задающий нормализованную цикловую запись подстановки $w = \omega(x) \in \mathfrak{S}_n$, будем называть *цикловым вектором* этой подстановки.

Любая последовательность $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ с попарно различными вещественными координатами задает подстановочный вектор, если индексы ее элементов расположить в порядке возрастания величин самих элементов. Например, с вектором $x = (0.2, 0.8, 0.1, 0.6, 0.9)$ мы связываем подстановочный вектор $(3, 1, 4, 2, 5)$, задающий подстановку $\omega(x) = (31)(42)(5)$. Точно также определяется подстановка $w = \omega(x)$, ассоциированная с любым вектором x без повторяющихся координат. Если $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ – элементы последовательности x в порядке возрастания их величины (ранговые статистики), то подстановка $\omega(x)$ характеризуется условием $x_{w(k)} = x_{(k)}$; $k = 1, \dots, n$, т.е. $w(k)$ – момент появления k -ого по величине элемента последовательности x . Другими словами, $w = \omega(x)$ – это подстановка, обратная к ранговому вектору последовательности x .

Рассмотрим вещественную последовательность $x = (x_1, \dots, x_n)$, как хронику спортивных результатов, полученных на олимпийских играх и пусть $x_{j_1} < x_{j_2} < \dots < x_{j_c}$ – подпоследовательность олимпийских рекордов. Таким образом, $x_{j_1} = x_1$ – результат, показанный на первой олимпиаде, x_{j_2} – первый по времени результат, превышающий x_{j_1} и т.д. Величина $x_{j_c} = x_{(n)}$ является максимальным достижением за всю историю олимпиад.

Определение. Число $c = c(x)$ назовем *числом рекордов* в последовательности $x \in \mathbb{R}^n$.

Очевидно, что $c(x) = c(\omega(x))$, т.е. что число рекордов в последовательности x равно числу циклов в подстановке $\omega(x)$, ассоциированной с этой последовательностью.

4. Совместные распределения. Говоря ниже об n -мерном кубе $[0, 1]^n$, мы пренебрегаем нетипичными по мере Лебега векторами, имеющими хотя бы одну пару совпадающих координат.

Типичный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вполне определяется ассоциированной с ним подстановкой $w = \omega(x)$ (см. определение в п. 3) и неупорядоченным множеством своих координат $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Нам удобно понимать множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ как точку стандартного симплекса

$$\Delta_n = \{y \in \mathbb{R}_+^{n+1} : \sum_{k=0}^n y_k = 1\}. \quad (4.1)$$

При этом барицентрические координаты $y(x) = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ в симплексе Δ_n отождествляются с длинами

$y_0 = x_{(1)}, y_1 = x_{(2)} - x_{(1)}, \dots, y_{n-1} = x_{(n)} - x_{(n-1)}, y_n = 1 - x_{(n)}$ (4.2) последовательных интервалов (2.2), на которые точки $\{x_1, \dots, x_n\}$ делят единичный отрезок.

Обратно, каждая перестановка $w \in \mathfrak{S}_n$ и каждая внутренняя (т.е. не лежащая на гранях) точка симплекса $y \in \Delta_n$ определяют точку куба $x = x(w, y)$, для которой $w = \omega(x)$ и $y = y(x)$. Таким образом, сопоставляя точке $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ пару (w, y) , мы получаем биекцию¹

$$[0, 1]^n \cong \mathfrak{S}_n \times \Delta_n \quad (4.3)$$

между кубом и прямым произведением симметрической группы \mathfrak{S}_n на стандартный симплекс Δ_n .

Пусть $(t)_n = t(t+1) \dots (t+n-1)$ — символ Похгаммера.

Лемма 1. Плотность $(t)_n y_n^{t-1}$ относительно лебеговой меры $dy = dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1}$ задает вероятностное распределение на симплексе Δ_n .

Доказательство. Это следует из известного интеграла Дирихле

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_n} \dots \int y_0^{\alpha_0-1} \dots y_n^{\alpha_n-1} dy_0 dy_1 \dots dy_{n-1} = \\ = \frac{\Gamma(\alpha_0) \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹По модулю диагональных подмножеств $\{x : x_j = x_k\}$ лебеговой меры ноль.

при $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 1, \alpha_n = t$.

Пусть t – положительный параметр.

Снабдим симметрическую группу \mathfrak{S}_n распределением Ювенса с нагрузками пропорциональными $t^{c(w)}$, где $c(w)$ – число циклов подстановки w . Более точно,

$$\mu_t^{(n)}(w) = \frac{t^{c(w)}}{(t)_n}; \quad w \in \mathfrak{S}_n. \quad (4.5)$$

На симплексе Δ_n рассмотрим асимметричное распределение Дирихле с плотностью

$$d\mathcal{D}(1, \dots, 1, t; y) / dy = (t)_n y_n^{t-1}. \quad (4.6)$$

Определение. Обозначим через $M_t^{(n)}$ распределение случайной точки $X = x(W, Y)$, где подстановка $W \in \mathfrak{S}_n$ и точка симплекса $Y \in \Delta_n$ независимы и имеют распределения (4.5), (4.6).

Лемма 2. Мера $M_t^{(n)}$ абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$\frac{dM_t^{(n)}(x)}{dx} = t^{c(x)} (1 - x_{(n)})^{t-1}, \quad (4.7)$$

где $c(x)$ – число рекордов, а $x_{(n)}$ – максимальная координата в последовательности x .

Доказательство. Рассмотрим разбиение куба $[0, 1]^n$ на $n!$ симплексов, соответствующих различным подстановкам; точнее, для произвольной подстановки $w \in \mathfrak{S}_n$ определим симплекс

$$\Delta_n(w) = \{x \in [0, 1]^n : \omega(x) = w\}. \quad (4.8)$$

По определению меры $M_t^{(n)}$ имеем

$$M_t^{(n)}(\Delta_n(w)) = \mu_t^{(n)}(w) = \frac{t^{c(w)}}{(t)_n}, \quad (4.9)$$

а условная плотность

$$\frac{dM_t^{(n)}(x | \Delta_n(w))}{dx} = (t)_n (1 - x_{(n)}). \quad (4.10)$$

Искомая формула (4.7) непосредственно следует из (4.9) и (4.10).

Теорема 1. Мера $M_t^{(n)}$ задает совместное распределение точек X_1, \dots, X_n в процессе дробления отрезка.

Доказательство. При $n = 1$ из формулы (4.7) получаем

$$\frac{dM_t^{(1)}(x)}{dx} = t(1-x)^{t-1},$$

что совпадает с плотностью распределения X_1 в процессе дробления отрезка.

Пусть утверждение теоремы доказано для $n = k$. По определению, плотность распределения вектора $X = (X_1, \dots, X_k, X_{k+1})$ равна

$$p_i^{(k+1)}(x) = p_i^{(k)}(\tilde{x}) \varphi_t(x_{k+1}, \tilde{x}^{(k)}),$$

где $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_k)$. По предположению индукции

$$p_i^{(k)}(\tilde{x}) = t^{c(\tilde{x})} (1 - \tilde{x}^{(k)})^{t-1}.$$

Используя формулу (2.1) для φ_t , получаем

$$p_i^{(k+1)}(x) = \begin{cases} t^{c(\tilde{x})} (1 - \tilde{x}^{(k)})^{t-1}, & \text{если } x_{k+1} < \tilde{x}^{(k)}, \\ t^{c(\tilde{x})+1} (1 - x_{k+1})^{t-1}, & \text{если } x_{k+1} > \tilde{x}^{(k)}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Заметим, что в случае $x_{k+1} < \tilde{x}^{(k)}$ максимальный член последовательности x равен $x_{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)}$, а число ее рекордов равно числу рекордов последовательности \tilde{x} . Если же $x_{k+1} > \tilde{x}^{(k)}$, то $x_{(k+1)} = x_{k+1}$, и x_{k+1} — новый рекорд последовательности x , то есть $c(x) = c(\tilde{x}) + 1$. В обоих случаях (4.12) можно записать в виде

$$p_i^{(k+1)}(x) = t^{c(x)} (1 - x_{(k+1)})^{t-1} = \frac{dM_t^{(k+1)}(x)}{dx},$$

что и требовалось доказать.

5. Виртуальные перестановки. Пусть \mathfrak{S}_n — группа подстановок множества $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ и $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ — группа всех финитных подстановок натурального ряда. Иногда удобно отождествлять \mathfrak{S}_n с подгруппой в \mathfrak{S}_∞ .

Для заданного подмножества $A \subset [n]$ и подстановки $w \in \mathfrak{S}_n$ обозначим через $D_A w$ подстановку множества A , получаемую удалением из циклов подстановки w всех элементов, не принадлежащих A . Подстановка $D_A w$ называется *производной подстановкой* для w на подмножестве A . Если $A = [m]$, будем писать просто $D_m w$. Например, если $w = (6\ 3\ 5\ 1)(8\ 2)(7\ 4)$, то $D_4 w = (3\ 1)(2)(4)$.

Определение. *Виртуальной перестановкой* называется любая последовательность

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n, \quad (5.1)$$

в которой подстановка $w_n = D_n w_{n+1}$ является производной для w_{n+1} при всех $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, *пространство виртуальных перестановок* – это проективный предел $\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim \mathfrak{S}_n$ относительно проекций $D_n : \mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_n$.

Каждая подстановка $w \in \mathfrak{S}_n$ однозначно записывается в виде произведения

$$w = \sigma_{i_1}(1) \sigma_{i_2}(2) \dots \sigma_{i_n}(n), \tag{5.2}$$

где через $\sigma_k(m)$ обозначается транспозиция пары элементов (k, m) при $k < m$ или единичная подстановка при $k = m$. При этом мы считаем, что в произведении подстановок сомножители действуют на переставляемые предметы в порядке слева направо.

Если подстановка $\tilde{w} = D_n w$ является производной для подстановки $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$, то $w = \tilde{w} \sigma_k(n+1)$ для некоторого $k = 1, 2, \dots, n+1$. При $k \leq n$ это означает, что $w(n+1) = k$, т.е. что номер $n+1$ непосредственно предшествует номеру k в соответствующем цикле. При $k = n+1$ неподвижная точка $n+1$ порождает новый цикл подстановки w .

В первом случае цикловый вектор x подстановки w получается вставкой номера $n+1$ в цикловый вектор \tilde{x} подстановки \tilde{w} непосредственно перед номером k . Например, пусть $\tilde{w} = (821) (53) (4) (76)$ – подстановка с цикловым вектором $\tilde{x} = (82153476)$. Тогда подстановка $w = \tilde{w} \sigma_6(9)$ имеет цикловый вектор $x = (821534796)$.

При $k = n+1$ вектор x получается из \tilde{x} добавлением $n+1$ в качестве последней координаты. Таким образом, подстановка $w = \tilde{w} \sigma_9(9)$ будет иметь цикловый вектор $x = (821534769)$.

Из сказанного ясно, что производная подстановка для подстановки (5.2) получается вычеркиванием нескольких последних множителей:

$$D_m (\sigma_{i_1}(1) \dots \sigma_{i_m}(m) \sigma_{i_{m+1}}(m+1) \dots \sigma_{i_n}(n)) = \sigma_{i_1}(1) \dots \sigma_{i_m}(m).$$

Каждая виртуальная перестановка (5.1) однозначно кодируется последовательностью $i = (i_1, i_2, \dots, i_n, \dots)$, где $i_n = 1, 2, \dots, n$, и символически представима бесконечным произведением

$$w = \sigma_{i_1}(1) \sigma_{i_2}(2) \dots \sigma_{i_n}(n) \dots \tag{5.3}$$

Пространство виртуальных перестановок отождествляется при этом с произведением

$$\mathfrak{S}^\infty \cong \prod_{n=1}^{\infty} [n]. \tag{5.4}$$

Рассмотрим вектор $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ и пусть $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$ получается из x вычеркиванием последней координаты. Подстановки $\tilde{w} = \omega(\tilde{x})$ и $w = \omega(x)$, ассоциированные с этими векторами, согласованы: $\tilde{w} = D_n(w)$. Если $x \in [0, 1]^\infty$ – последовательность без повторяющихся значений, то подстановки

$$w_n = \omega(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_n; \quad n = 1, 2, \dots$$

определяют виртуальную перестановку $w = (w_1, \dots, w_n, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty$. Обозначим ее через $w = \omega(x)$.

Определение. Виртуальная перестановка $w = \omega(x)$ называется *ассоциированной* с последовательностью $x \in [0, 1]^\infty$.

6. Распределения Ювенса. Обозначим через $c = c(w)$ число циклов подстановки w . Из однозначности представления (5.2) вытекает хорошо известная формула для производящей функции числа циклов:

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} t^{c(w)} = t(t+1) \dots (t+n-1). \quad (6.1)$$

Произведение в правой части обозначается символом Похгаммера $(t)_n$.

Из (6.1) ясно, что мера Ювенса $\mu_t^{(n)}$, заданная в п. 4 формулой (4.5), действительно является вероятностным распределением.

Легко видеть также, что проекция $D_n : \mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \mathfrak{S}_n$ (переход к производной подстановке) переводит меру $\mu_t^{(n+1)}$ в $\mu_t^{(n)}$. Действительно, ограничение меры $\mu_t^{(n+1)}$ на прообраз любой подстановки w имеет n точек с нагрузками величины $\mu_t^{(n)}(w)/(t+n)$ и одну точку с нагрузкой $\mu_t^{(n)}(w)t/(t+n)$.

Определение. Вероятностную меру μ_t на пространстве \mathfrak{S}^∞ , заданную согласованной системой конечномерных распределений $\mu_t^{(n)}$, назовем *мерой Ювенса в пространстве виртуальных перестановок*.

При кодировании виртуальных перестановок последовательностями

$$(i_1, i_2, \dots, i_n, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} [n] \quad (6.2)$$

(см. п. 5) мера μ_t переходит в проадкт-меру, имеющую на n -ом шаге распределение

$$p_n(k) = \begin{cases} 1/(t+n), & \text{если } k < n+1, \\ t/(t+n), & \text{если } k = n+1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Рассмотрим реализацию $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ процесса дробления отрезка. Подстановки $w_n = \omega(x_n)$ с цикловыми векторами x_n согласованы, $w_n = D_n w_{n+1}$, а последовательность $w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots)$ задает виртуальную перестановку. Обозначим через $\omega : [0, 1]^\infty \rightarrow \mathfrak{S}^\infty$ проекцию, переводящую последовательность $x \in [0, 1]^\infty$ в виртуальную перестановку $w \in \mathfrak{S}^\infty$. Из теоремы 1 вытекает

Следствие. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ — реализация процесса дробления отрезка с параметром t . Тогда виртуальная перестановка $w = \omega(X)$ имеет распределение Ювенса μ_t в пространстве \mathfrak{S}^∞ .

7. Распределения плотностей дуг в циклах больших случайных подстановок. Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим перестановку $w \in \mathfrak{S}_N$ большого числа предметов $N > n$. Обозначим через $w_n = D_n \dots D_{N-1} w$ производную подстановку для w на подмножестве $[n]$. Для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ пусть $k' = w_n^{-1}(k)$ — элемент из $[n]$, переходящий в k под действием подстановки w_n (случай $k' = k$ не исключается).

Определение. Цепочку элементов $w(k'), w^2(k'), \dots, w^L(k') = k$, лежащих в цикле подстановки w между k' и k , назовем $(k-1)$ -ой дугой этой подстановки.

Число элементов k -ой дуги (где $k = 0, 1, \dots, n-1$) обозначим через $L_k = L_k(w)$. Через $L_n(w)$ обозначим общее число элементов в циклах подстановки w , не содержащих элементов из $[n]$. Для упрощения обозначений мы не указываем здесь значения n , хотя функционалы $L_k(w)$ от выбора этого значения зависят.

Определение. Отношение $y_k^{(n)}(w) = L_k(w) / N$ при $k = 0, 1, \dots, n$ назовем плотностью k -ой дуги в подстановке $w \in \mathfrak{S}_N$.

Ясно, что $y_0^{(n)} + \dots + y_n^{(n)} = 1$ и вектор $y^{(n)} = (y_0^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$ задает точку стандартного симплекса (4.1). Нас интересует асимптотика распределения пары $(w_n, y^{(n)}(w)) \in \mathfrak{S}_n \times \Delta_n$, если подстановка $w \in \mathfrak{S}_N$ распределена по мере Ювенса $\mu_t^{(N)}$ и $N \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть подстановка $W \in \mathfrak{S}_N$ случайна и имеет распределение Ювенса $\mu_t^{(N)}$ с параметром $t > 0$. Тогда при $N \rightarrow \infty$

- (1) подстановка $W_n \in \mathfrak{S}_n$ и точка $y^{(n)}(W) \in \Delta_n$ независимы;
- (2) распределение точки $y^{(n)}(W)$ слабо сходится к абсолютно непрерывному распределению на симплексе Δ_n с плотностью $(t)_n y_n^{t-1}$;
- (3) производная подстановка W_n имеет распределение Ювенса $\mu_t^{(n)}$ (не зависящее от N).

Доказательство. (1) Несложные комбинаторные рассуждения показывают, что для произвольной подстановки $\tilde{w} \in \mathfrak{S}_n$ и произвольных натуральных чисел l_0, \dots, l_{n-1} , для которых

$$l = N - \sum_{i=0}^{n-1} l_i \geq 0,$$

условная вероятность

$$\mu_t^N \{ L_0(w) = l_0, \dots, L_{n-1}(w) = l_{n-1} \mid w_n = \tilde{w} \}$$

равна

$$\left(\frac{(N-n)!}{l!} \cdot \sum_{w \in \mathfrak{S}_l} \frac{t^{c(w)+c(\tilde{w})}}{(t)_N} \right) / \mu_t^{(n)}(\tilde{w}) = \frac{(N-n)!}{l!} \frac{(t)_n (t)_l}{(t)_N} \quad (7.1)$$

и не зависит от выбора \tilde{w} .

(2) При фиксированном $l = 0, 1, \dots, N-n$ существует $\binom{N-l-1}{n-1}$ наборов натуральных чисел (l_0, \dots, l_{n-1}) , для которых

$$\sum_{i=0}^{n-1} l_i = N-l.$$

Поэтому из (7.1) следует, что

$$\begin{aligned} \mu_t^{(n)} \left\{ w : L_n(w) = \frac{l}{N} \right\} &= \frac{(t)_n (N-n)! (t)_l (N-l-1)!}{(n-1)! (t)_N l! (N-l-n)!} = \\ &= \frac{(t)_n}{(n-1)!} \cdot \frac{\Gamma(N-n+1)}{\Gamma(N+t)} \cdot \frac{\Gamma(l+t)}{\Gamma(l+1)} \cdot \frac{\Gamma(N-l)}{\Gamma(N-l-n+1)}. \end{aligned}$$

При $l/N = s + O(1/N)$ эта вероятность эквивалентна

$$\begin{aligned} \frac{(t)_n}{(n-1)!} \cdot N^{-n+1-t} \cdot (Ns)^{t-1} \cdot (N(1-s))^{n-1} &= \\ = \frac{1}{N} \cdot \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot (t)_n \cdot s^{t-1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь мы использовали известную асимптотическую формулу

$$\Gamma(n+\alpha) / \Gamma(n+\beta) \sim n^{\alpha-\beta} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, предельная плотность распределения последней координаты Y_n равна

$$\frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} (t)_n s^{t-1}, \quad (7.3)$$

причем множитель $(1-s)^{n-1} / (n-1)!$ есть объем симплекса

$$\Delta_s = \{(y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=0}^{n-1} y_i = 1-s\}$$

относительно меры Лебега $dy_0 \dots dy_{n-2}$. Поскольку выражение (7.1) зависит от l_0, \dots, l_{n-1} только через сумму $\sum_{i=0}^{n-1} l_i$, условное предельное распределение (y_0, \dots, y_{n-1}) на симплексе Δ_s равномерно. Таким образом, предельная плотность распределения вектора $Y^{(n)} = (Y_0^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)})$ равна $(t)_n y_n^{t-1}$, что и требовалось доказать.

(3) Как объяснялось в п.6, проекция $D_k : \mathfrak{S}_{k+1} \rightarrow \mathfrak{S}_k$ переводит меру μ_i^{k+1} в μ_i^k . Поскольку отображение $D_n^{(N)} : \mathfrak{S}_N \rightarrow \mathfrak{S}_n$ является композицией таких проекций, то оно переводит $\mu_i^{(N)}$ в $\mu_i^{(n)}$.

Из теорем 1, 2 непосредственно вытекает

Следствие. *Рассмотрим перестановки $x = (x_1, \dots, x_n)$ чисел $\{1/n, 2/n, \dots, n/n\}$ с вероятностями, пропорциональными $t^{c(x)}$:*

$$\mu_i^{(n)}(x) = \frac{t^{c(x)}}{t(t+1) \dots (t+n-1)}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$ распределения $\mu_i^{(n)}(x)$ слабо сходятся к предельному распределению μ_t , порожденному процессом дробления отрезка с параметром t .

8. Статистика плотностей дуг для виртуальных перестановок. Теорема 2 дает предельное (в слабом смысле) распределение плотностей дуг больших случайных подстановок. Следующее утверждение позволяет усилить этот результат, заменив сходимость по распределению сходимостью почти наверное. Для относительных длин циклов случайных подстановок аналогичный факт был получен одним из авторов в [5].

Предложение 1. *Для почти всех по мере Ювенса μ_t виртуальных перестановок $w = (w_1, \dots, w_n, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty$ существуют пределы*

$$y_k^{(n)}(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} y_k^{(n)}(w_N); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8.1)$$

Доказательство. Фиксируем числа n и k и пусть $\xi_N = y_k^{(n)}(w_N)$. Рассмотрим кодирование виртуальных перестановок последовательностями (6.2), так что координаты (i_1, \dots, i_N, \dots) независимы относительно меры μ_t . Через \mathfrak{A}_N обозначим σ -алгебру, порожденную случайными величинами i_1, \dots, i_N . Поскольку величи-

на ξ_N зависит от значений только первых N координат, она \mathfrak{A}_N -измерима. Рассмотрим множества

$$A_N(l) = \left\{ w \in \mathfrak{S}^\infty : \xi_N = \frac{l}{N} \right\} = \{w \in \mathfrak{S}^\infty : L_k(w_N) = l\}; \quad l = 1, \dots, N.$$

Очевидно, что $A_N(l) \in \mathfrak{A}$ и $\bigcup_{l=1}^N A_N(l) = \mathfrak{S}^\infty$. Заметим, что

$$L_k(w_{N+1}) = \begin{cases} L_k(w_N) + 1, & \text{если } i_{N+1} \text{ принадлежит } k\text{-й дуге } w_N; \\ L_k(w_N) & \text{иначе,} \end{cases}$$

причем при $w \in A_N(l)$ вероятность первого события равна $l/N + t$. Таким образом,

$$\begin{aligned} E\{\xi_{N+1} | \mathfrak{A}_N\} |_{A_N(l)} &= \frac{l+1}{N+1} \frac{l}{N+t} + \frac{l}{N+1} \left(1 - \frac{l}{N+t}\right) = \\ &= \frac{l(N+t+1)}{(N+1)(N+t)} \leq \frac{l}{N} = \xi_N |_{A_N(l)}. \end{aligned}$$

Следовательно, случайные величины ξ_N образуют супермартингал, и по теореме Дуба (см., например, [7]) существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \xi_N = \lim_{N \rightarrow \infty} y_k^{(n)}(w_N)$$

для почти всех, по отношению к мере μ_t , виртуальных перестановок $w \in \mathfrak{S}^\infty$.

Определение. Пределы (8.1) называются *плотностями дуг виртуальной перестановки* $w \in \mathfrak{S}^\infty$. Виртуальные перестановки, для которых эти пределы существуют, назовем *равномерными*. Пусть $\mathfrak{S}_{eq}^\infty \subset \mathfrak{S}^\infty$ – подмножество равномерных виртуальных перестановок.

Согласно доказанному выше предложению, равномерные виртуальные перестановки типичны по мере Ювенса. Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Предложение 2. При любом n рассмотрим подстановку $w_n = D_n w$ и точку симплекса $y^{(n)} = y^{(n)}(w)$ как функцию случайной виртуальной перестановки w , распределенной по мере Ювенса μ_t на пространстве \mathfrak{S}^∞ . Тогда распределение пары $(w_n, y^{(n)})$ соответствует распределению $M_t^{(n)}$ при отождествлении (4.3) из п. 4.

Ознакомившись с результатами этой статьи, А. М. Вершик заметил, что проекция $\omega : [0, 1]^\infty \rightarrow \mathfrak{S}^\infty$ из п. 6 mod 0 взаимно-однозначна. Этот факт вытекает из предложения 1. Действительно, для типичной по мере Ювенса виртуальной перестановки $w \in \mathfrak{S}^\infty$

пределы (8.1) существуют. Пусть $\{x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ – соответствующие точки деления отрезка $[0, 1]$ (см. п. 4). Это означает (см. п. 4), что

1) $\omega(x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) = w_n$;

2) длина отрезка деления с правым концом $x_k^{(n)}$ есть плотность $(k - 1)$ -й дуги $y_{k-1}^{(n)}$ уровня n .

По определению виртуальной перестановки, $w_{n+1} = w_n \sigma_k(n + 1)$ для некоторого $k \in [n + 1]$. Это значит, что элемент $n + 1$ принадлежит $(k - 1)$ -й дуге уровня n перестановки w . Следовательно, все дуги перестановки w уровня $(n + 1)$, кроме $(k - 1)$ -й, совпадают с соответствующими дугами уровня n , а $(k - 1)$ -я дуга уровня n разбивается на $(k - 1)$ -ю и n -ю дуги следующего уровня. Таким образом, $x_k^{(k)} = x_k^{(k+1)} = \dots$ при любом k . Рассмотрим последовательность

$$\alpha(w) = (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots) \in [0, 1]^\infty.$$

При любом n имеем $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(n)}) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) = x(w_n, y^{(n)})$, откуда следует, что $\alpha(w)$ распределена, как последовательность точек в процессе дробления отрезка, и $\omega(\alpha(w)) = w$.

Определение. Последовательность $x \in [0, 1]^\infty$ назовем *равномерной*, если для всех $0 \leq a < b \leq 1$ существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \in [n] : x_k \in [a, b]\}}{n} = b - a.$$

Пусть $[0, 1]_{\geq q}^\infty \subset [0, 1]^\infty$ – подмножество равномерных последовательностей.

Предложение 3. Почти все (по мере μ_t) реализации процесса дробления отрезка равномерны.

Доказательство. Достаточно рассмотреть интервалы вида $[0, b]$. Из описания процесса дробления отрезка в п.2 ясно, что при $X^{(n)} > b$ события

$$\{X_{n+k} < b\}; \quad k = 1, 2, \dots$$

независимы и имеют общую вероятность $\mathbb{P}\{X_{n+k} < b\} = b$. По усиленному закону больших чисел получаем, что почти любая реализация X , для которой $X_n > b$ хотя бы при одном значении n , равномерна. Из теории GEM-распределений хорошо известно, что такие реализации имеют полную μ_t -меру. Приведем для ясности полное доказательство этого факта.

Лемма. Существует такая константа $C \in (0, 1)$, зависящая только от t и b , что при всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\mathbb{P}\{X_1, \dots, X_n < b\} \leq C^n. \quad (8.2)$$

Доказательство. При $0 < y < b$ имеем

$$I_b = \int_0^b \varphi_t(x, y) dx = 1 - (1-b)^t (1-y)^{1-t},$$

откуда следует, что $I_b \leq C = b$ при $t \leq 1$ и $I_b \leq C = 1 - (1-b)^t$ при $t \geq 1$. В обоих случаях $C < 1$, и (8.2) следует из определения процесса дробления отрезка.

Отображение $\alpha : \mathfrak{S}_{eq}^\infty \rightarrow [0, 1]_{eq}^\infty$ и проекция $\omega : [0, 1]_{eq}^\infty \rightarrow \mathfrak{S}_{eq}^\infty$ являются взаимно-обратными биекциями между множествами равномерных виртуальных перестановок \mathfrak{S}_{eq}^∞ и равномерных последовательностей $[0, 1]_{eq}^\infty$.

Итак, доказана

Теорема 3. *Отображение $\alpha : \mathfrak{S}_{eq}^\infty \rightarrow [0, 1]_{eq}^\infty$ осуществляет mod 0 изоморфизм пространства виртуальных перестановок \mathfrak{S}^∞ с мерой Ювенса μ_t и пространства последовательностей $[0, 1]^\infty$ с мерой M_t , задающей распределение точек в процессе дробления отрезка.*

9. Связь с GEM-распределениями и процессом ломания палки. Рассмотрим промежутки

$$y_1 = x_{j_1}, \quad y_2 = x_{j_2} - x_{j_1}, \quad \dots, \quad y_c = x_{j_c} - x_{j_{c-1}},$$

разделяющие рекордные значения в последовательности $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$, и пусть $\nu_t^{(n)}$ – совместное распределение величин $y = (y_1, \dots, y_c, 0, \dots)$ в симплексе

$$\Delta_\infty = \{y \in \mathbb{R}_+^\infty : \sum_{n=1}^\infty y_n \leq 1\}.$$

Хорошо известно (см. например, [3, 6]), что при $n \rightarrow \infty$ распределения $\nu_t^{(n)}$ слабо сходятся к некоторому предельному распределению ν_t . То же распределение ν_t , названное в [3] по именам Griffiths, Engen, McCloskey GEM-распределением, имеют случайные величины

$$Y_n = U_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - U_k); \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь U_1, \dots, U_n, \dots – последовательность независимых случайных величин с общим распределением $t(1-x)^{t-1} dx$ на отрезке $[0, 1]$. Это описание меры ν_t известно как *процесс ломания палки* (stick breaking process) – частный случай моделей остаточного распределения (residual allocation models). В [6] мера ν_t под именем меры Эберлейна изучалась в связи со статистикой циклов больших случайных подстановок.

Сопоставим заданной бесконечной последовательности $X = (X_1, \dots, X_n, \dots)$ последовательность $Y = (Y_1, \dots, Y_n, \dots)$, где $Y_n = X_{j_n} - X_{j_{n-1}}$ – приращения значений в цепочке рекордов $X_{j_0} = 0, X_{j_1}, \dots, X_{j_n}, \dots$. Легко видеть, что если последовательность X распределена по мере μ_t , то Y имеет GEM-распределение ν_t .

Нетрудно описать условное распределение последовательности X при фиксированной подпоследовательности рекордов

$$r_k = x_{j_k}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим прежде всего, что точки $X_{j_{k+1}}, X_{j_{k+2}}, \dots, X_{j_{k+1}}$ имеют независимые распределения на отрезке $[0, 1]$ с общей плотностью $\varphi_t(x, x_{j_k})$. Отсюда ясно, что время ожидания очередного рекорда $j_{k+1} - j_k$ имеет геометрическое распределение

$$\mathbb{P}\{j_{k+1} - j_k = m\} = r_k^{m-1} (1 - r_k); \quad m = 1, 2, \dots \quad (9.1)$$

со средним $E(j_{k+1} - j_k) = 1 / (1 - r_k)$.

По заданной последовательности $0 < R_1 < \dots < R_n < \dots < 1$ построим случайную последовательность $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots) \in [0, 1]^\infty$. Начнем со значений $j_1 = 1$ и $X_{j_1} = R_1$. Если при некотором $k = 1, 2, \dots$ величины j_k и $X_1, X_2, \dots, X_{j_k} = R_k$ уже построены, выберем случайное значение j_{k+1} с распределением (9.1), независимые точки $X_{j_{k+1}}, X_{j_{k+2}}, \dots, X_{j_{k+1}-1}$, равномерно распределенные на отрезке $[0, R_k]$, и положим $X_{j_{k+1}} = R_{k+1}$.

Предложение 5. *Предположим, что разности*

$$Y_k = R_k - R_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

распределены по GEM-мере ν_t . Тогда построенная выше последовательность X имеет распределение μ_t .

10. Обобщенный процесс дробления отрезка. В статье [8] было рассмотрено двухпараметрическое обобщение семейства мер

Ювенса: меры $\mu_{\alpha,t}^{(n)}$ на симметрической группе \mathfrak{S}_n задаются формулой

$$\mu_{\alpha,t}^{(n)}(w) = \frac{1}{(t)_n} \prod_{i=1}^{c(w)} \left((t + (i-1)\alpha) \prod_{j=1}^{l_i-1} \left(1 - \frac{\alpha}{j} \right) \right), \quad (10.1)$$

где $l_1, \dots, l_{c(w)}$ — длины циклов подстановки $w \in \mathfrak{S}_n$. Параметры α и t допускают значения

$$0 \leq \alpha < 1, \quad t > -\alpha \quad (10.2)$$

или

$$\alpha < 0, \quad t = -m\alpha, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10.3)$$

Меры Ювенса соответствуют значению $\alpha = 0$, т. е. $\mu_i^{(n)} = \mu_{0,t}^{(n)}$.

Нетрудно убедиться, что меры $\mu_{\alpha,t}^{(n)}$ согласованы с проекциями D_n и потому определяют меру $\mu_{\alpha,t}$ на пространстве виртуальных перестановок при любых допустимых значениях параметров.

Напомним, что меры Ювенса на пространстве виртуальных перестановок в реализации (6.2) имеют независимые значения (с распределениями, указанными в формуле (6.3)). Для более общих распределений $\mu_{\alpha,t}$ это уже не так. Тем не менее, на эти распределения без труда переносится описание мер Ювенса как марковских цепей, задающих случайный рост подстановок. Действительно, пусть подстановка $w' \in \mathfrak{S}_n$ имеет $c(w')$ циклов, а подстановка $w \in \mathfrak{S}_{n+1}$ получается из нее

- (1) с вероятностью $(t + c\alpha)/(t + n)$ — образованием нового цикла с единственным элементом $(n + 1)$;
- (2) с вероятностью $(n_j - \alpha)/(t + n)$ — вставкой нового элемента $n + 1$ в случайное место старого цикла длины n_j где $j = 1, \dots, c(w')$.

Если подстановка w' имеет распределение (10.1), то распределение w задается аналогичной формулой для $\mu_{\alpha,t}^{(n+1)}$.

Для обобщенных мер Ювенса можно определить соответствующий процесс дробления отрезка и установить результаты, аналогичные теоремам 2 и 3. Приведем окончательные формулировки.

Предложение 6. Пусть подстановка $W \in \mathfrak{S}_N$ случайна и имеет распределение $\mu_{\alpha,t}^{(N)}$, W_n — производная подстановка, $Y^{(n)}(W) \in \Delta_n$ — вектор длин дуг (см. п 7), $X^{(n)} = x(W_n, Y^{(n)}) \in [0, 1]^n$ — соответствующая точка куба. Тогда при $N \rightarrow \infty$ распределение точки

$X^{(n)}(W)$ слабо сходится к абсолютно непрерывному распределению $M_{\alpha,t}^{(n)}$ на кубе $[0, 1]^n$ с плотностью

$$\frac{dM_{\alpha,t}^{(n)}(x)}{dx} = \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{t+j\alpha}{t+j} \right) \times \quad (10.4)$$

$$\times \frac{\Gamma(t+k)}{\Gamma(t+k\alpha)\Gamma^k(1-\alpha)} (1-x_{(n)})^{k\alpha+t-1} \prod_{i=1}^k (x_{j_i} - x_{j_{i-1}})^{-\alpha},$$

где $k = c(x)$ - число рекордов, а $x_{j_0} = 0, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ - подпоследовательность рекордов последовательности x .

Определим обобщенный процесс дробления отрезка следующим образом. Первая точка X_1 имеет распределение с плотностью

$$\frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(t+\alpha)} x_1^{-\alpha}(1-x_1)^{t+\alpha-1}; \quad 0 \leq x_1 \leq 1.$$

Если уже построены n точек процесса $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$, причем последовательность x_1, \dots, x_n имеет $k-1$ рекордов, то плотность распределения очередной точки X_{n+1} задается плотностью $\varphi_{t,\alpha}^k(x, x_{(n)})$, где $\varphi_{t,\alpha}^k(x, y) = 1$, если $0 \leq x \leq y$ и

$$\varphi_{t,\alpha}^k(x, y) = \frac{\Gamma(1+t+(k-1)\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(t+k\alpha)} \left(\frac{x-y}{1-y} \right)^{-\alpha} \left(\frac{1-x}{1-y} \right)^{k\alpha+t-1}, \quad (10.5)$$

если $x < y \leq 1$. (Напомним, что через $x_{(n)}$ обозначается максимальный член последовательности x_1, \dots, x_n .)

При "двухступенчатом" варианте описания этого процесса на первом этапе, как и ранее, выбирается один из отрезков дробления с вероятностью, пропорциональной его длине, после чего за координату на выбранном отрезке принимается относительное расстояние v до его левого конца. Если выбран обломок, то v по-прежнему равномерно распределено на $[0, 1]$. Если же выбран остаток, то плотность распределения v зависит от числа рекордов k уже имеющейся последовательности (в этом смысле обобщенный процесс дробления отрезка, в отличие от обычного, нестационарен) и равна

$$\varphi_{t,\alpha}^k(x, y) = \frac{\Gamma(1+t+(k-1)\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(t+k\alpha)} v^{-\alpha} (1-v)^{k\alpha+t-1}. \quad (10.6)$$

Предложение 7. Пространство виртуальных перестановок \mathfrak{S}^∞ с обобщенной мерой Ювенка $\mu_{\alpha,t}$ mod 0 изоморфно пространству последовательностей $[0, 1]^\infty$ с мерой $M_{\alpha,t}$, задающей распределение точек в обобщенном процессе дробления отрезка.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Kerov, G. I. Olshanski, A. M. Vershik, *Harmonic Analysis on the Infinite Symmetric Group*. — *Comptes Rend. Acad. Sci. Paris* **316** (1993), 773–778.
2. W. J. Ewens, *The sampling theory of selectively neutral alleles*. — *Theor. Pop. Biol.* **3** (1972), 87–112.
3. W. J. Ewens, *Population Genetics Theory – the Past and the Future*. S. Lessard editor, *Mathematical and statistical developments of evolutionary theory*. Proc. NATO ASI Symp.. Dordrecht, Kluwer, 1990, pp. 117–228.
4. J. F. C. Kingman, *Random partitions in population genetics*. — *Proc. R. Soc. Lond. A* **361** (1978), 1–20.
5. Н. В. Цилевич, *Распределение длин циклов бесконечных перестановок*. — *Записки научных семинаров ПОМИ* **223** (1995), 148–161.
6. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрической группы I, II*. — *Теория вероятностей*, **22**, **23** (1977, 1978), 72–88, 42–54.
7. А. Н. Ширяев, *Вероятность*. Москва, Наука, 1980.
8. J. Pitman, *The Two-parameter Generalization of Ewens' Random Partition Structure*. — Preprint (1992), 1–23.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ: После сдачи статьи в печать обнаружилось, что нормализованная цикловая запись была ранее использована в статье Р. Жойсе, S. Tavaré, *Cycles, permutations and the structure of the Yule process with immigration*, опубликованной в *Stochastic Proc. and Appl.*, v. 25 (1987) 309–314. Авторы благодарны Д. Питману за эту ссылку.

Kerov S. V., Tsilevich N. V. Stick breaking process generates virtual permutations with Ewens distribution.

Given a sequence x of points in the unit interval, we associate with it a virtual permutation $w = w(x)$ (that is, a sequence w of permutations $w_n \in \mathfrak{S}_n$ such that $w_{n-1} = w'_n$ is obtained from w_n by erasing the last element n from its cycle, for all $n = 1, 2, \dots$). We introduce a detailed version of the well-known stick breaking process, generating a random sequence x . It is proved that the associated random virtual permutation $w(x)$ has Ewens' distribution. Up to subsets of zero measure, the space $\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim \mathfrak{S}_n$ of virtual permutations is identified with the cube $[0, 1]^\infty$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 апреля 1995 г.

С.-Петербургский государственный
университет