

## Werk

**Verlag:** Nauka; Российская академия наук санкт-петербургское отделение

**Ort:** Sankt-Peterburg

**Kollektion:** RusDML; Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN502905670

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN502905670>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=502905670>

**LOG Id:** LOG\_0020

**LOG Titel:** О числе каемочных крюков

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN496972103

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN496972103>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=496972103>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

С. В. Керов

## СУБОРДИНАТОРЫ И ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С КВАЗИИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [7] было введено пространство виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim \mathfrak{S}_n$ , на котором заданы два коммутирующих действия (левое и правое) бесконечной симметрической группы  $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ . Рассматривался замечательный класс вероятностных мер на пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , квазиинвариантных для этих действий.

Имея действие группы, сохраняющее тип меры, можно стандартным образом построить унитарное представление этой группы в пространстве функций, суммируемых с квадратом. Единичная константа задает выделенный (“вакуумный”) вектор в этом пространстве. Целью статьи [7] было изучение сферической функции вакуумного вектора и гармонический анализ для соответствующих унитарных представлений.

Меры  $\mu_\theta$ , изучавшиеся в [7], зависят от положительного параметра  $\theta$  и строятся на основе простого принципа: мера перестановки  $w \in \mathfrak{S}_n$  пропорциональна  $\theta^c$ , где  $c = c(w)$  – число циклов этой перестановки. В работе [3] подобные меры названы мерами Ювенса. Их теория эквивалентна теории распределений Пуассона – Дирихле ( $\mathcal{PD}(\theta)$ -мер) в пространстве рядов с положительными монотонно убывающими слагаемыми и единичной суммой (см. [1], [10]). Другой, технически более удобный способ работы с мерами Ювенса, состоит в использовании GEM-мер в пространстве дискретных вероятностных распределений, возникающих в простейшем алгоритме ломания палки.

В этой заметке рассматриваются более общие меры в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , квазиинвариантные для левого и правого действия бесконечной симметрической группы  $\mathfrak{S}_\infty$ . Они связаны с *субординаторами*, т. е. случайными процессами со стационарными независимыми положительными приращениями. Существенным обра-

---

Работа выполнена при поддержке гранта 94-01-00921 Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ).

зом используется богатая вероятностная теория таких процессов, см. [12], [15], [16]. Основной результат (формула (3.4.1)) состоит в доказательстве квазиинвариантности мер, связанных с субординаторами, и в вычислении соответствующей плотности (коцикла).

В число мер на пространстве виртуальных перестановок, связанных с субординаторами, входят и меры Ювенса; они отвечают гамма - процессу. Другой замечательный класс субординаторов – *устойчивые* субординаторы, в которых распределения приращений задаются устойчивыми законами. Эти процессы возникают в двух совершенно различных контекстах: при изучении экскурсий броуновского движения и бесселевских процессов малой размерности, а также в качестве пределов специальных распределений на симметрических группах, обобщающих распределения Ювенса.

В случае устойчивых субординаторов мы вычисляем значение сферической функции, отвечающей постоянному вектору, на классе транспозиций (формула (4.4.1)). Было бы интересно получить ее значения и на других классах.

Опишем кратко план статьи по параграфам.

Мы начинаем в §0 с нескольких общих замечаний о виртуальных перестановках и их задании при помощи последовательностей  $x \in [0, 1]^\infty$ .

В §1 мы определяем граф ветвления композиций, накрывающий граф ветвления классов сопряженности симметрических групп и показываем, что процесс дробления отрезка, введенный в [3], задает центральные меры для этого графа. Отметим здесь несколько неожиданное появление решетки Фибоначчи в связи со случайными перестановками.

В §2 выясняются общие требования к распределению рекордов последовательности  $x$ , при наложении которых случайная виртуальная перестановка  $\omega(x) \in \mathfrak{S}^\infty$  инвариантна для “внутренних автоморфизмов” из группы  $\mathfrak{S}_\infty$ . Содержание параграфов 1, 2 следует рассматривать как переизложение результатов Питмана [13] о “частично перестановочных разбиениях” натурального ряда (partially exchangeable partitions).

Как отмечал Кингман еще в [9], не только гамма-процесс, но и другие субординаторы порождают интересные структуры разбиений, или, в нашем контексте, виртуальные перестановки. В §3 мы специализируем общий процесс дробления отрезка для получения мер в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , ассоциированных с субординаторами. Мы называем их РРУ-мерами, поскольку центральную роль при их описании играет теорема Пермана – Питмана – Йора из [12]. В пп. 3.3–3.4 доказана квазиинвариантность РРУ-мер.

В §4 рассмотрены ключевые примеры, связанные с гамма - процессом и устойчивыми субординаторами. Следуя [12], вводятся двухпараметрические обобщения GEM-распределений и распределений Пуассона – Дирихле и вычисляется простейшее нетривиальное значение ассоциированной с этими семействами сферической функции на симметрической группе  $\mathfrak{S}_\infty$ .

В §5 приведено принадлежащее Питману обобщение формулы Ювенса и установлена связь распределений Ювенса – Питмана в пространстве виртуальных перестановок с GEM-распределениями из §4. Результаты препринта [15] об асимптотическом поведении цикловой структуры случайной перестановки используются для альтернативного вычисления коциклов квазиинвариантных мер, построенных по устойчивым субординаторам.

Я благодарен А. М. Вершику, М. И. Гордину, Г. И. Ольшанскому и Н. В. Цилевич за многочисленные полезные обсуждения тем настоящей статьи. В частности, Н. Цилевич первой обнаружила квазиинвариантность распределений Ювенса – Питмана, см. п. 5.3 ниже. Я признателен также Д. Питману за любезно предоставленные им препринты его статей, составившие мотивировку данной работы.

## § 0. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Начнем с предварительных замечаний о виртуальных перестановках и их задании точками куба  $[0, 1]^\infty$ .

**0.1 Виртуальные перестановки.** Напомним (см. [7]), что производная подстановка  $\tau = \sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}$  для  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  получается удалением старшего элемента  $n$  из соответствующего цикла подстановки  $\sigma$ . *Виртуальной перестановкой* называется цепочка  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots)$  подстановок  $w_n \in \mathfrak{S}_n$ , согласованных относительно перехода к производной подстановке,  $w'_n = w_{n-1}$ . Пространство виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty = \varprojlim \mathfrak{S}_n$  компактно и вполне несвязно в топологии проективного предела.

Если задана подстановка  $g \in \mathfrak{S}_n$ , то  $g w_N \in \mathfrak{S}_N$  при всех  $N \geq n$ , причем подстановки  $g w_n, g w_{n+1}, \dots$  согласованы. Обозначая через  $g w \in \mathfrak{S}^\infty$  соответствующую виртуальную перестановку, мы получаем левое действие группы финитных подстановок  $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$  в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ . Аналогично определяется правое действие  $w \mapsto w g$ ; оно коммутирует с левыми сдвигами  $w \mapsto g w$ . Преобразования  $w \mapsto g^{-1} w g$ , где  $g \in \mathfrak{S}_\infty$ , условимся называть *внутренними автоморфизмами* или *сопряжениями*. Эта термино-

логия условна, поскольку пространство  $\mathfrak{S}^\infty$  не имеет групповой структуры.

Вопрос о мерах в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , инвариантных при всех сопряжениях из группы  $\mathfrak{S}_\infty$ , аналогичен известному вопросу о перестановочных последовательностях случайных величин (exchangeable sequences), т. е. о мерах в пространстве последовательностей, инвариантных при финитных подстановках. Ответ на второй вопрос дает знаменитая теорема де Финетти (см. [4], гл. VII, §4). Первый вопрос был поставлен (в терминах т. н. partition structures) и решен Кингманом [10]. Олдус [5] показал, что оба вопроса, по существу, эквивалентны.

Как и в статье [7], мы интересуемся здесь более специальной формой подстановочной инвариантности, когда мера  $m$  в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$  не только инвариантна при сопряжениях, но и квазиинвариантна при односторонних действиях группы  $\mathfrak{S}_\infty$ .

**0.2 Системы интервалов и виртуальные подстановки.** Чтобы задать центральную меру на симметрической группе  $\mathfrak{S}_n$ , можно взять произвольное распределение длин циклов, а затем стандартным образом разместить элементы  $1, 2, \dots, n$  по циклам в заданном количестве. При этом элемент 1 попадает в некоторый цикл с вероятностью, пропорциональной его величине. Элемент 2 вставляется по тем же правилам, с учетом изменившейся цикловой структуры, и т. д. Если  $n$  велико, то изменением цикловой структуры после вставки первых чисел можно пренебречь, так что элементы  $1, 2, \dots$  распределяются по циклам равномерно и независимо друг от друга.

Аналогичный прием позволяет строить инвариантные при сопряжениях случайные виртуальные перестановки, исходя из заданного семейства случайных интервалов.

Пусть задано открытое плотное подмножество  $I$  промежутка  $[0, t]$ . Множество  $I$  канонически распадается в объединение  $I = \bigcup (a_k, b_k)$  попарно непересекающихся максимальных открытых интервалов  $I_k = (a_k, b_k)$ . Индексация этих интервалов пока произвольна и не предполагает какого-либо их упорядочения. отождествляя концы промежутков  $I_k$ , превратим их в ориентированные окружности, называемые ниже *циклами*.

Любое конечное подмножество  $y^{(n)} = \{y_1, \dots, y_n\} \subset [0, t]$  задает подстановку  $w_n \in \mathfrak{S}_n$ , цикловая структура которой определяется размещением точек  $y_1, \dots, y_n$  по интервалам множества  $I$ . По определению,  $w_n(i) = j$ , если точки  $y_i, y_j$  принадлежат общему интервалу  $I_k$ , причем  $y_j$  непосредственно следует за  $y_i$  в циклическом порядке на  $I_k$ . Если  $y_i \notin I$ , будем считать индекс  $i$  неподвиж-

ной точкой,  $w_n(i) = i$ .

Пусть множество  $y^{(n-1)} = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$  получено из  $y^{(n)}$  удалением точки  $y_n$ , а  $w_{n-1} \in \mathfrak{S}_{n-1}$  — соответствующая подстановка. Очевидно, что  $w_{n-1} = w'_n$  является производной подстановкой для  $w_n$ . Таким образом, пара  $(I, y)$ , состоящая из открытого подмножества  $I$  и последовательности  $y$  точек интервала  $[0, t]$  задает виртуальную перестановку<sup>1</sup>  $\omega(I, y) = (w_1, \dots, w_n, \dots)$ .

В дальнейшем мы будем выбирать множество  $I$  и последовательность  $y$  случайно. Например, за  $I$  можно взять дополнение множества нулей броуновской траектории на отрезке  $[0, 1]$ , или внутренность дополнения к множеству значений некоторого субординатора.

Последовательность  $y$  всегда будет выбираться стандартно: ее элементы независимы и равномерно распределены на отрезке  $[0, t]$ . Такой выбор позволяет моделировать асимптотику центральных распределений на группах  $\mathfrak{S}_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Аналогичная конструкция использовалась в литературе для получения случайных разбиений множества натуральных чисел (см. например, [5], [13]). По определению, числа  $i, j$  принадлежат общему блоку разбиения, если точки  $y_i, y_j$  попадают в общий интервал  $I_k$  множества  $I$ . Циклический порядок точек в интервалах здесь игнорируется.

**0.3 Процесс дробления отрезка.** В [3] предложена удобная реализация виртуальных перестановок  $w = (w_1, \dots, w_n, \dots)$  посредством последовательностей  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  точек на отрезке  $[0, 1]$ . Рекордные значения  $0 < r_1 < r_2 < \dots$  в последовательности  $x$  (как обычно, значение  $x_n$  называется *рекордом*, если  $x_k < x_n$  при всех  $k < n$ ) разбивают отрезок  $[0, 1]$  на “циклы”, а размещение первых элементов  $x_1, \dots, x_n$  по этим циклам задает согласованную цепочку подстановок  $w_n; n = 1, 2, \dots$ , определяющую виртуальную перестановку  $w = \omega(x)$ . Метрически (т. е. mod 0) это сопоставление взаимно-однозначно. Оно позволяет строить меры в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , инвариантные при сопряжениях, при помощи случайной процедуры дробления отрезка.

**0.4 Нормализация цикловой структуры.** Чтобы связать конструкции пп. 0.2, 0.3 заметим, что распределение случайных виртуальных перестановок  $w = \omega(I, y)$  при заданном множестве  $I$  зависит только от *длины* его интервалов, но не от их расположения в

<sup>1</sup>Мы не рассматриваем случай, в котором последовательность  $y$  может иметь совпадающие элементы, хотя нетрудно определить виртуальную перестановку  $w$  и в этой ситуации.

промежутке  $[0, t]$ . Избегая подобной неопределенности, можно расположить интервалы в каком-либо стандартном порядке. Имеются как минимум два полезных способа это сделать:

- (1) нумерация интервалов в порядке убывания их длин;
- (2) стохастическая сортировка (size biased permutation).

В стохастической сортировке участвуют и множество  $I$ , и последовательность  $y$ . По определению, интервалы  $I_k$  нумеруются здесь в порядке первого попадания в них точек  $y_1, y_2, \dots$ .

Подвергнем каждый интервал  $I_k$  циклическому сдвигу ("повороту") таким образом, чтобы первая попавшая в него точка оказалась его правым концом. Повернутые интервалы, вместе с находящимися на них точками последовательности  $y$ , расположим на отрезке  $[0, t]$  слева направо в их новом порядке. Обозначим через  $x_1, x_2, \dots$  значения элементов  $y_1, y_2, \dots$  последовательности  $y$  после всех этих перемещений. Будем говорить, что последовательность  $x = (x_1, x_2, \dots)$  получается *нормализацией* пары  $(I, y)$ .

Границами интервалов  $I_1, I_2, \dots$  в их новом расположении служат рекордные значения  $r_1 < r_2 < \dots$  последовательности  $x$ . Пользуясь конструкцией п. 0.3, с каждой последовательностью  $x = (x_1, x_2, \dots)$  можно связать виртуальную перестановку  $w = \omega(x)$ , принимая за циклы интервалы между ее рекордами. В том случае, когда  $x$  получена нормализацией пары  $(I, y)$ , виртуальные перестановки  $\omega(x) = \omega(I, y)$  совпадают. Промежутки  $\delta_k = r_k - r_{k-1}$  между последовательными рекордами представляют собой стохастически упорядоченные длины интервалов открытого множества  $I$ . Условное распределение последовательности  $x$  при заданной цепочке ее рекордов стандартно и получается следующей *процедурой одевания*:

- (1) положить  $j := 1, k := 1, x_1 := r_1$ ;
- (2) получать независимые значения  $x_{j+1}, \dots, x_{j+m}$ , равномерно распределенные на промежутке  $[0, t]$  до тех пор, пока  $x_{j+m} < r_k$ ;
- (3) если  $x_{j+m+1} > r_k$ , положить  $j := j + m + 1, k := k + 1, x_j := r_k$  и перейти к пункту (2).

**0.5 Действия группы  $\mathfrak{S}_\infty$  на кубе  $[0, 1]^\infty$ .** Оба действия бесконечной симметрической группы  $\mathfrak{S}_\infty$  в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$  нетрудно перенести на пространство последовательностей  $x \in [0, 1]^\infty$ . При этом действие финитной подстановки  $g \in \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_\infty$  на последовательность  $x$  сводится к переключиванию конечного числа интервалов, вместе с находящимися на них элементами последовательности, причем сами интервалы определя-

ются первыми  $n$  элементами  $x_1, \dots, x_n$ , а способ переключивания зависит от перестановки  $g$ .

Обозначим через  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  цепочку рекордов в последовательности  $(x_1, \dots, x_n)$ . Следуя [3], условимся называть интервал  $(r_k, 1)$  *остатком*, а прочие интервалы, на которые точки  $x_1, \dots, x_n$  делят промежуток  $[0, 1]$  — *обломками* (или *дугами*) уровня  $n$ . Обломки  $J_i$  нумеруются индексами их правых концов  $x_i$ . Отождествляя концы промежутков между рекордами

$$[0, r_1], [r_1, r_2], \dots, [r_{k-1}, r_k],$$

мы получаем систему циклически упорядоченных наборов обломков. По определению перестановки  $w_n$ , ассоциированной с последовательностью  $x_1, \dots, x_n$ , конец обломка  $J_i$  склеивается с началом обломка  $J_j$ , если  $j = w_n(i)$ .

При умножении слева на  $g$  циклическая структура подстановки  $w_n$  изменяется: если  $w_n(i) = j$ , то  $(g w_n)(i) = g(j)$ . Определим новое циклическое упорядочение обломков, при котором конец  $J_i$  склеивается, вместо  $J_j$ , с началом обломка  $J_{g(j)}$ .

Итак, мы получаем новую систему циклов  $I$ , к которой следует еще добавить остаток  $(r_k, 1)$ . Нормализуя систему  $(I, x)$  как указано в п. 0.4, получаем новую последовательность  $g x$  — образ  $x$  при левом сдвиге на  $g$ . Аналогично определяется правое действие  $w \mapsto w g$  группы  $\mathfrak{S}_\infty$  на кубе  $[0, 1]^\infty$ .

Подчеркнем еще раз, что все это с виду громоздкое описание означает просто, что производится переключивание конечного числа обломков уровня  $n$  вместе с находящимися на них точками последовательности  $x$ .

Например, при левом сдвиге  $x$  на транспозицию  $g = (1, 2)$  имеется два варианта:

- (1) если  $x_1 < x_2$ , то интервалы  $(0, x_1]$  и  $(x_1, x_2]$  меняются местами;
- (2) если  $x_2 < x_1$ , то меняются местами интервалы  $(0, x_2]$ ,  $(x_2, x_1]$ .

## § 1. ВЕТВЛЕНИЕ КОМПОЗИЦИЙ

Известно [7], что задача о случайных виртуальных подстановках, инвариантных относительно действия группы  $\mathfrak{S}_\infty$  сопряжениями, сводится к общей задаче о центральных мерах для графа ветвления классов сопряженности симметрических групп, которая затем легко решается общими методами (ср. [2]). Здесь мы рассмотрим реализацию виртуальных перестановок при помощи путей другого, более подробного графа ветвления. Центральные



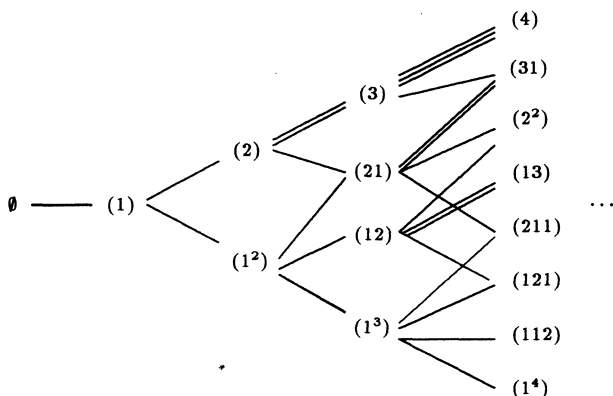


Рис. 1 Ветвление композиций.

мер на этом графе несколько больше, и они в точности задаются наиболее общим вариантом известного алгоритма ломания палки. Среди новых мер содержатся и инвариантные при сопряжениях. Они характеризуются теоремой Питмана, которую мы приводим ниже в §2.

**1.1 Тонкие классы сопряженности в симметрических группах.** Рассмотрим циклы подстановки  $w \in \mathfrak{S}_n$ , т. е. орбиты ее действия на множестве  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Имеется два естественных способа их упорядочить:

- (1) по убыванию длин;
- (2) в порядке появления циклов.

Перестановки с одинаковыми длинами циклов образуют класс сопряженности в симметрической группе  $\mathfrak{S}_n$ . Рассмотрим более тонкое разбиение группы  $\mathfrak{S}_n$  на классы подстановок с одинаковыми размерами циклов *в порядке их появления*. В настоящем разделе изучается, следуя идее Питмана (см. [13]), ветвление этих *тонких классов*.

Мы покажем, что центральные меры для графа ветвления тонких классов порождаются наиболее общим процессом ломания палки.

**1.2 Композиции.** Композицией называют упорядоченное разбиение числа на натуральные слагаемые. Обозначим множество композиций числа  $n$  через  $\mathcal{C}_n$  и пусть  $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$  — множество всех композиций, включая пустую композицию числа  $0$ .

Рассмотрим процесс роста композиций, при котором за один шаг любое из слагаемых возрастает на единицу или в конце суммы образуется дополнительное слагаемое, равное единице. Кинематику роста можно задать более наглядно, нарисовав *граф ветвления композиций* (рис. 1). По определению, его вершинами служат точки множества  $\mathcal{C}$ , а дуги связывают каждую композицию  $\xi \in \mathcal{C}$  со всеми композициями, в которые она может вырасти за единицу времени. Для наших целей удобно считать, что если в процессе роста композиции увеличивается слагаемое величины  $k$ , то соответствующая дуга графа ветвления имеет кратность  $k$ . Дуги, связанные с появлением дополнительного слагаемого, считаются простыми.

Легко проверяются следующие несложные факты.

- (1) Имеется ровно  $2^{n-1}$  композиций числа  $n$ .
- (2) Из любой композиции  $\xi \in \mathcal{C}_n$  выходит ровно  $n + 1$  дуга.
- (3) Число всех ориентированных путей длины  $n$ , выходящих из пустой композиции, равно  $n!$ .

Например, утверждение (1) становится очевидным, если записать композицию  $\xi = (n_1, \dots, n_c)$  в виде последовательности

$$\xi = (\underbrace{0, 1, \dots, 1}_{n_1 \text{ знаков}}, \underbrace{0, 1, \dots, 1}_{n_2 \text{ знаков}}, \dots, \underbrace{0, 1, \dots, 1}_{n_c \text{ знаков}}),$$

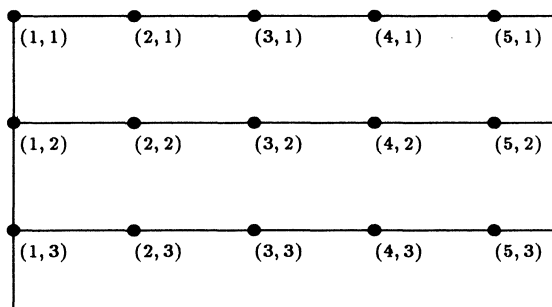
составленной из сегментов вида  $01^{n_j-1}$ , кодирующих отдельные циклы. Композиции  $\xi \in \mathcal{C}_n$  отождествляются при таком кодировании со всевозможными 0, 1-последовательностями длины  $n$ , начинающимися с нуля.

Граф ветвления композиций изображает ветвление тонких классов симметрических групп. Действительно, нетрудно сопоставить перестановкам  $w \in \mathfrak{S}_n$  пути (т. е. последовательности дуг) длины  $n$  графа  $\mathcal{C}$  таким образом, что

- (1) конечная композиция пути задает длины циклов соответствующей подстановки в порядке их возникновения;
- (2) удаление последней дуги пути соответствует взятию производной подстановки на подмножестве  $[n-1] \subset [n]$ .

Для этого достаточно отождествить кратные дуги графа  $\mathcal{C}$  с элементами растущего цикла.

**1.3 Комбинаторная структура графа  $\mathcal{C}$ .** Граф композиций принадлежит к семейству несложных и хорошо изученных графов ветвления — это граф порядковых коидеалов дерева.

Рис. 2 Частично упорядоченное дерево  $\mathcal{P}$ .

Рассмотрим корневое дерево, показанное на рис. 2, как диаграмму Хассе частично упорядоченного множества  $\mathcal{P}$ . Вершина  $(n, k)$ , находящаяся в  $n$ -ой позиции на  $k$ -ой ветви дерева, накрывает вершину  $(n-1, k)$ , если  $n > 1$  или вершину  $(1, k-1)$ , если  $n = 1$ . Единственным минимальным элементом множества  $\mathcal{P}$  служит корневая вершина  $(1, 1)$ .

*Порядковым коидеалом* в частично упорядоченном множестве называется подмножество, которое вместе с каждым своим элементом содержит все меньшие. Иначе говоря, речь идет о конечных корневых поддеревьях. Пусть  $\mathcal{B}$  – естественное ветвление конечных коидеалов дерева  $\mathcal{P}$ , при котором единичный акт роста состоит в присоединении к коидеалу одной новой ветви (Рис. 3). Все дуги при этом считаются простыми, а конечные пути графа  $\mathcal{B}$  нетрудно отождествить с разбиениями множеств  $[n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Свяжем с композицией  $\xi = (m_1, \dots, m_l)$  конечный порядковый коидеал  $\tilde{\xi} \subset \mathcal{P}$ , содержащий  $n_j$  точек на  $j$ -ой ветви дерева  $\mathcal{P}$  при  $j = 1, \dots, l$ . Тем самым мы отождествляем вершины графов ветвления  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ . Ясно, что и дуги этих графов, с точностью до кратностей, совпадают. Заметим, что прежние кратности дуг соответствуют родственной модели, в которой рост коидеалов дерева  $\mathcal{P}$  может происходить еще и за счет замены любой из горизонтальных дуг, принадлежащих коидеалу, на две последовательные дуги.

**1.4 Размерности.** Обозначим через  $\dim_{\mathcal{B}}(\xi, \eta)$  и назовем *размерностью* число различных способов роста коидеала  $\xi$  до большего коидеала  $\eta$ . Для размерностей в решетках коидеалов деревьев имеется следующая изящная “формула крюков” (см. [18]):

$$\dim_{\mathcal{B}}(\xi, \eta) = \frac{n!}{\prod h(v)}, \quad (1.4.1)$$

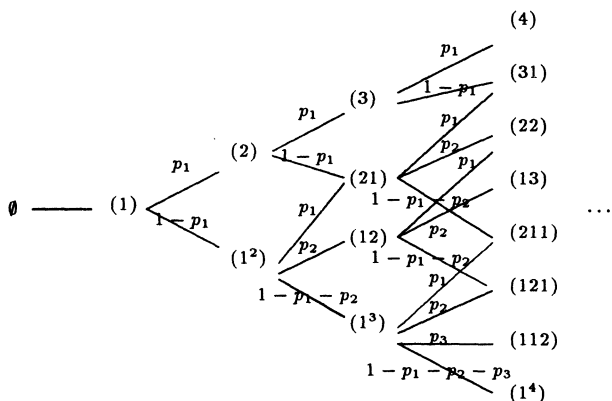


Рис. 3 Ветвление коидеалов дерева  $\mathcal{P}$  и переходные вероятности.

где  $v$  пробегает точки, принадлежащие разности множеств  $\eta \setminus \xi$ ,  $n = |\eta \setminus \xi|$  – величина этой разности, а длина  $h(v)$  крюка точки  $v$  определяется как число вершин в  $\eta \setminus \xi$ , мажорирующих  $v$  (включая саму вершину  $v$ ). В частности, если коидеал  $\eta = (n_1, \dots, n_k)$  содержит  $n_j$  точек на  $j$ -ой горизонтальной ветви дерева  $\mathcal{P}$ , то

$$\dim_{\mathcal{B}}(\emptyset, \eta) = \frac{n!}{s_1 s_2 \dots s_k (n_1 - 1)! (n_2 - 1)! \dots (n_k - 1)!}, \quad (1.4.2)$$

где  $s_j = n_j + n_{j+1} + \dots + n_k$  при  $j = 1, 2, \dots, k$ .

В графе ветвления композиций  $\mathcal{C}$  размерность  $\dim_{\mathcal{C}}(\emptyset, \eta)$  коидеала  $\eta$  увеличивается за счет кратностей дуг. Легко видеть, что она равна

$$\dim_{\mathcal{C}}(\emptyset, \eta) = \frac{n!}{s_1 s_2 \dots s_k}. \quad (1.4.3)$$

Это в точности число перестановок, принадлежащих соответствующему тонкому классу симметрической группы  $\mathfrak{S}_n$ .

Если  $\xi = (m_1, \dots, m_l)$  – некоторый коидеал величины  $m$ , содержащийся в  $\eta$ , то  $m_j \leq n_j$  при  $j = 1, \dots, l$ ;  $l \leq k$  и относительная размерность равна

$$\dim_{\mathcal{C}}(\xi, \eta) = \frac{(n - m)!}{s_{l+1} \dots s_k} \prod_{j=1}^l \frac{1}{n_j} \binom{n_j}{m_j}. \quad (1.4.4)$$

Наличие простой явной формулы для относительной размерности  $\dim(\xi, \eta)$  позволяет без труда найти все центральные меры графа ветвления.

**1.5 Центральные меры графа композиций.** Как отмечалось выше в п. 1.2, пути длины  $n$  в графе композиций естественно отождествляются с перестановками  $w \in \mathfrak{S}_n$ . Удаление последней дуги пути соответствует при этом переходу к производной перестановке на подмножестве  $[n-1] \subset [n]$ . Таким образом, бесконечные пути графа  $\mathcal{C}$  отождествляются с виртуальными перестановками, введенными в [7].

Напомним, что вероятностная мера  $\mu$  на пространстве путей  $T$  графа ветвления  $\mathcal{C}$  называется *центральной*, если вероятность цилиндра, определяемого конечным путем  $t = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , зависит только от его последней вершины  $\xi_n \in \mathcal{C}_n$ . Наибольший интерес представляют *эргодические* центральные меры – крайние точки симплекса всех центральных мер.

Рассмотрим произвольное вероятностное распределение  $p$  в пространстве путей дерева  $\mathcal{P}$ . Оно дискретно и определяется числами  $p_j$ ;  $j = 1, 2, \dots$ , где  $p_j$  – вероятность пути, уходящего на бесконечность по  $j$ -ой горизонтали (см. рис. 2). Определим марковскую меру  $\mu_p$  в пространстве путей графа  $\mathcal{B}$  посредством переходных вероятностей  $p(\xi, \eta) = p_j$ , если коидеал  $\eta$  получается из  $\xi$  добавлением дуги на  $j$ -ой горизонтали. Если же рост происходит за счет вертикальной дуги, положим  $p(\xi, \eta) = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_k$ , где  $k$  – число горизонталей дерева  $\mathcal{P}$ , заданных коидеалом  $\xi$  (рис. 3). Вероятность того, что через  $m$  шагов процесса появится коидеал  $\xi = (m_1, m_2, \dots, m_l) \in \mathcal{B}_m$  равна

$$\dim_{\mathcal{B}}(\emptyset, \xi) \prod_{j=1}^l \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} p_i\right) p_j^{m_j-1}. \quad (1.5.1)$$

**Предложение 1.** Для любой меры  $p$  определенная выше марковская цепь  $\mu_p$  задает центральную эргодическую меру графа композиций  $\mathcal{C}$ . Все такие меры имеют вид  $\mu_p$  с параметром  $p$ , определяемым однозначно.

**Доказательство.** Применяя эргодический метод (см. [8]), составим отношение

$$\frac{\dim(\xi, \eta)}{\dim(\emptyset, \eta)} = \frac{s_1 \dots s_l}{(n)_m} \prod_{j=1}^l \frac{(n_j)_{m_j-1}}{m_j!}, \quad (1.5.2)$$

где  $(n)_m = n! / (n-m)!$  и мы воспользовались вычислениями из п. 3.

Если коидеал  $\eta = \eta_n$  неограниченно растет, то существование пределов подобных отношений при всех  $\xi \in \mathcal{C}$  равносильно суще-

ствованию предельных частот

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_j}{n} = p_j; \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.5.3)$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dim(\xi, \eta_n)}{\dim(\emptyset, \eta_n)} = \prod_{j=1}^l \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} p_i\right) p_j^{m_j-1} \quad (1.5.4)$$

соответствуют марковской мере  $\mu_p$ . Из эргодической теоремы известно, что все эргодические центральные меры возникают как пределы (1.5.4) для подходящей последовательности  $\{\eta_n\}$ .

Эргодичность *всех* мер  $\mu_p$  нетрудно проверить, опираясь на мультипликативный характер графа ветвления  $\mathcal{C}$  и теорему о кольце из [8]. Действительно, пусть  $R$  – кольцо полиномов от переменных  $p_1, p_2, \dots$ . Сопоставим коидеалу  $\xi = (n_1, \dots, n_k)$  многочлен

$$Q_\xi(p) = \prod_{j=1}^l \left(1 - \sum_{i=1}^{j-1} p_i\right) p_j^{m_j-1} \quad (1.5.5)$$

и положим  $s(p) = \sum_1^\infty p_j$ . Тогда

$$s(p) Q_\xi(p) = \sum_{\eta} Q_\eta(p), \quad (1.5.6)$$

где сумма берется по всем коидеалам  $\eta$ , накрывающим  $\xi$  в решетке  $\mathcal{C}$ . В терминах [8] это означает, что граф ветвления  $\mathcal{C}$  мультипликативен. По теореме о кольце ([8], теорема 6) заключаем, что меры  $\mu_p$  эргодичны, поскольку линейное отображение  $Q_\xi \mapsto Q_\xi(p)$  задает гомоморфизм кольца  $R$ .

## 1.6 Замечания.

1. Приведенное доказательство работает и для решеток коидеалов других деревьев.

2. Описания центральных мер для графов ветвления  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ , по существу, совпадают. В терминах работы [2] это объясняется гомологичностью этих графов. Аналогичная ситуация исследовалась там для ветвления классов сопряженности симметрических групп и ветвления разбиений множеств.

3. Дистрибутивная решетка Юнга – Фибоначчи (см. [18]) является порядковым коидеалом в графе ветвления  $\mathcal{C}$ . Тем самым обнаруживается ее связь с симметрическими группами.

## § 2. ПРОЦЕСС ДРОБЛЕНИЯ ОТРЕЗКА

В этом разделе мы применим процесс дробления отрезка, введенный в [3], для получения центральных мер графа ветвления сигнатур из §1. Кроме этого, мы установим связь центральных мер для ветвления тонких классов сопряженности симметрических групп и ветвления обычных классов сопряженности в этих группах. Приведен критерий Питмана [13], характеризующий центральные меры графа ветвления тонких классов, инвариантные для действия группы  $\mathfrak{S}_\infty$  сопряжениями в пространстве путей этого графа.

**2.1 Порождение виртуальных перестановок вещественными последовательностями.** Рассмотрим последовательность чисел  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  из отрезка  $[0, 1]$ . По каждой такой последовательности мы построим виртуальную перестановку  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty$ .

По определению, *рекордом* в последовательности  $x$  назовем любой ее элемент  $x_n$ , для которого  $x_n \geq \max\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . Заметим, что первая точка  $x_1$  — всегда рекордная.

Обозначим через  $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$  подпоследовательность рекордов в последовательности  $x$  и пусть  $p_k = r_k - r_{k-1}$  — интервалы между рекордами (удобно считать, что  $r_0 = 0$ ). Превратим промежутки

$$[r_0, r_1], [r_1, r_2], \dots, [r_{k-1}, r_k], \dots \quad (2.1.1)$$

высекаемые в интервале  $[0, 1]$  рекордными значениями в ориентированные окружности, отождествив их концы. Условимся называть полученные окружности *циклами* последовательности  $x$ .

Первые элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  последовательности  $x$  размещаются по нескольким первым циклам и, тем самым, задают подстановку  $w_n \in \mathfrak{S}_n$ . Рекордное значение всегда попадает в цикл первым и может остаться его единственным элементом.

Пусть  $w_{n-1}$  — аналогичная подстановка, полученная удалением последнего значения  $x_n$ . Очевидно, что  $w_{n-1} = w'_n$  — производная подстановка на подмножестве  $[n-1] \subset [n]$ . Таким образом, любая последовательность  $x = \{x_n\}_1^\infty$  в интервале  $[0, 1]$  определяет, и при том весьма наглядно, виртуальную перестановку  $w = \omega(x) \in \mathfrak{S}^\infty$ .

**2.2 Случайные виртуальные перестановки.** Зафиксируем неубывающую последовательность  $r = (r_1, r_2, \dots, r_k, \dots)$  на отрезке  $[0, 1]$ , и пусть  $p_k = r_k - r_{k-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  — длины соответствующих циклов. Построим цепочку случайных величин  $X_1, X_2, \dots$  по следующему правилу.

**Алгоритм дробления отрезка:**

- (1) Положить  $n := 1$ ,  $k := 1$  и  $r_{\max} := 0$ .
- (2) Выбрать случайную точку  $X$ , равномерно распределенную на отрезке  $[0, 1]$ .
- (3) Если  $X \geq r_{\max}$ , положить  $X_n := r_k$ ; пусть также  $r_{\max} := r_k$  и  $k := k + 1$ .
- (4) Если  $X < r_{\max}$ , положить  $X_n := X$ .
- (5) Положить  $n := n + 1$  и перейти к (2) для получения очередного значения  $X_n$ .

Предполагается, что повторный выбор значений величин  $X$  в (2) производится независимо.

Согласно п. 2.1, последовательность  $X = (X_1, X_2, \dots)$  порождает случайную виртуальную перестановку  $W = (W_1, W_2, \dots)$  или, что то же, путь в графе ветвления композиций. Обозначим через  $\mu_p$  меру в пространстве путей графа  $\mathcal{C}$ , полученную таким образом из исходной последовательности циклов с вектором длин  $p = (p_1, p_2, \dots)$ .

**Предложение 2.** Для любой точки  $p \in \Delta^\infty$  из симплекса

$$\Delta^\infty = \{(p_1, p_2, \dots) \in \mathbb{R}_+^\infty : \sum_{k=1}^{\infty} p_k \leq 1\} \quad (2.2.1)$$

мера  $\mu_p$  центральна, эргодична, и совпадает с мерой, описанной выше в п. 1.5.

**Доказательство.** Предположим, что к моменту получения случайной величины  $X_n$  имелось  $k$  циклов, содержащих хотя бы одно из предшествующих значений  $X_1, \dots, X_{n-1}$ . Согласно алгоритму, максимальный рекорд, зафиксированный к этому времени, равен  $r_{\max} = p_1 + \dots + p_k$ . Таким образом, вероятность попадания величины  $X$  в  $j$ -ый цикл равна  $p_j$ , а вероятность образования нового цикла равна  $1 - \sum_1^k p_j$ . Эти вероятности совпадают с переходными вероятностями из п. 1.5 и предложение доказано.

Заметим, что случай  $r_k = r_{k-1}$  при некотором  $k$ , т. е.  $p_k = 0$ , не исключается. В этом случае  $k$ -ое слагаемое растущей композиции п. н. будет равно единице. Малоинтересен также случай  $\sup r_k = \sum_1^\infty p_k < 1$ , в котором типичная композиция содержит линейно растущую со временем долю единичных слагаемых.

**2.3 Общий процесс дробления отрезка.** Чтобы получить все центральные меры графа композиций, а не только эргодические, придется несколько обобщить процедуру дробления отрезка из



п. 2.2. Вместо индивидуальной последовательности  $r$  в этом случае необходимо начать со случайной неубывающей последовательности  $R = (R_1, R_2, \dots)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Построим по последовательности  $R$  цепочку случайных величин  $X = (X_1, X_2, \dots)$ . Для этого воспользуемся алгоритмом дробления отрезка, разыгрывая независимо очередное значение  $r_k = R_k$  в пункте (3) алгоритма.

Очевидно, что это описание эквивалентно стохастическому смешиванию простейших процессов дробления отрезка из п. 2.2; т. е.

- (1) “разыгрыванию” реализации  $r = (r_1, r_2, \dots)$  случайной последовательности  $R$ ;
- (2) независимому применению алгоритма из п. 2.2.

**Следствие.** Алгоритм дробления отрезка задает наиболее общую центральную меру на графе ветвления композиций.

Эквивалентный результат для графа  $B$  был получен Питманом [13], теорема 15, в несколько иных терминах.

Слагаемые положительного ряда  $P_1 + P_2 + \dots$  с суммой  $\sum P_k \leq 1$  иногда удобно задавать по формуле

$$P_k = (1 - V_1) \dots (1 - V_{k-1}) V_k; \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$V_k = P_k \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} P_j\right)^{-1}$$

– доля слагаемого  $P_k$  по отношению к  $k$ -ому остатку

$$1 - \sum_{j=1}^{k-1} P_j = \prod_{j=1}^{k-1} (1 - V_j)$$

исходного ряда. Ясно, что  $0 \leq V_k \leq 1$  при всех  $k = 1, 2, \dots$

Произвольное вероятностное распределение на кубе  $[0, 1]^\infty$  задает случайную последовательность  $V_1, V_2, \dots$  и, тем самым, слагаемые ряда  $P_1 + P_2 + \dots$  и его частичные суммы  $R_1, R_2, \dots$ . Таким образом, граница графа ветвления  $C$  отождествляется с пространством последовательностей  $[0, 1]^\infty$ .

**2.4 Стохастическая сортировка.** Рассмотрим стандартный симплекс  $\Delta_n$  с  $n$  вершинами, на котором группа  $\mathfrak{S}_n$  действует перестановками барицентрических координат. На орбитах этого действия имеется выделенное вероятностное распределение с весами

$$\mu_p = p_1 \frac{p_2}{(1 - p_1)} \frac{p_3}{(1 - p_1 - p_2)} \dots \frac{p_n}{(1 - p_1 - \dots - p_{n-1})}. \quad (2.4.1)$$

Здесь  $p = (p_1, \dots, p_n)$  пробегает всевозможные перестановки множества чисел  $\{p_1, \dots, p_n\}$ , для которых  $\sum p_k = 1$ . Нетрудно видеть, что

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \mu_{w(p)} = 1. \quad (2.4.2)$$

Вероятности  $\mu_p$  имеют простую геометрическую интерпретацию. Действительно, проведем гиперплоскости через выделенную точку  $p \in \Delta_n$  и всевозможные наборы из  $(n - 2)$  вершин симплекса  $\Delta_n$ . Они задают триангуляцию симплекса на  $n!$  подсимплексов, относительные объемы которых совпадают с вероятностями  $\mu_{w(p)}$ .

Если на симплексе  $\Delta_n$  задана вероятностная мера  $M$ , можно построить новое вероятностное распределение  $\widetilde{M}$ , смешивая с помощью меры  $M$  стандартные распределения на орбитах:

$$\widetilde{M}(A) = \int_{\Delta_n} \mu_p(A) dM(p); \quad A \subset \Delta_n. \quad (2.4.3)$$

Мы будем говорить, что мера  $\widetilde{M}$  получена из  $M$  *стохастической симметризацией*. Чтобы получить случайную точку  $\tilde{p}$  с распределением  $\widetilde{M}$ , нужно выбрать точку  $p$ , распределенную по мере  $M$ , а затем произвести *стохастическую сортировку* (size biased sampling), т. е. переупорядочить ее координаты по правилу:

- (1) первая координата равна  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , с вероятностью  $p_i$ ;
- (2) вторая координата равна  $p_j$ , где  $j \neq i$ , с вероятностью  $p_j / (1 - p_i)$ ;

и т. д.

Процедуры стохастического упорядочения (сортировки) набора  $p = (p_1, p_2, \dots)$  и стохастической симметризации меры  $M$  применимы и для симплекса

$$\Delta_\infty = \{(p_1, p_2, \dots) \in \mathbb{R}_+^\infty : \sum_k p_k = 1\}. \quad (2.4.4)$$

Ясно, что оператор стохастической симметризации является проектором:  $\widetilde{\widetilde{M}} = \widetilde{M}$ .

Питман предложил простую характеристику стохастически симметричных распределений.

**Предложение** (Питман [14], теорема 4). Пусть  $P_1, P_2, \dots$  - последовательность положительных случайных величин, для которой

$\sum P_k = 1$  с вероятностью единица. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) распределение  $M$  величин  $P_1, P_2, \dots$  стохастически симметрично:  $\widetilde{M} = M$ ;
- (2) при всех  $k = 2, 3, \dots$  конечномерные распределения

$$P\{P_1 \in dp_1, \dots, P_k \in dp_k\} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \sum_{i=1}^j p_i\right) \quad (2.4.5)$$

симметричны, т. е. инвариантны при перестановках координат;

- (3) при любом  $k = 2, 3, \dots$  моментные функционалы

$$(n_1, \dots, n_k) \mapsto E \left[ \prod_{j=1}^k P_j^{n_j-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \sum_{i=1}^j p_i\right) \right] \quad (2.4.6)$$

симметричны по своим аргументам.

**Замечание.** Пусть  $\mu_\alpha$  – распределение, возникающее при стохастической сортировке координат точки  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Легко проверить, что момент первой случайной компоненты  $p_1$  равен

$$\int p_1^n d\mu_\alpha(p) = \sum_k \alpha_k^{n+1}, \quad (2.4.7)$$

т. е. такой же, как у “меры Тома”, имеющей нагрузку  $\alpha_k$  в точке  $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ ;  $k = 1, 2, \dots$ . Вопрос о моментах распределений  $\mu_\alpha$  ставился в [19].

**2.5 Случайные виртуальные перестановки, инвариантные при сопряжениях.** Частичные суммы  $r_k = p_1 + \dots + p_k$  последовательности  $p = (p_1, p_2, \dots) \in \Delta_\infty$  были использованы в п. 2.2 для описания эргодических центральных мер графа ветвления композиций  $S$ . Если точка  $p$  случайна, то алгоритм дробления отрезка из п. 2.3 задает наиболее общее распределение в пространстве виртуальных перестановок (которое мы отождествили с пространством путей  $T$  графа  $S$ ), центральное для этого графа. Интересно охарактеризовать те меры на симплексе  $\Delta_\infty$ , для которых распределения виртуальных перестановок инвариантны при сопряжениях  $w \mapsto g^{-1} w g$ ,  $g \in \mathfrak{S}_\infty$ ,  $w \in \mathfrak{S}^\infty$ . Как следует из результатов Питмана, это в точности стохастически симметричные распределения.

**Предложение** (Питман [13], [14]). Пусть  $t$  – мера в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$ , построенная при помощи про-

цесса дробления отрезка из распределения  $M$  на симплексе  $\Delta_\infty$ . Тогда следующие условия равносильны:

- (1) мера  $t$  инвариантна для действия  $w \mapsto g^{-1} w g$  группы  $\mathfrak{S}_\infty$ ;
- (2) мера  $M$  стохастически симметрична, т. е.  $\widetilde{M} = M$ .

**2.6 Модели остаточного распределения.** Пусть задана последовательность  $X_1, X_2, \dots$  независимых случайных величин на отрезке  $[0, 1]$ . Положим  $P_1 = X_1$ ,  $P_2 = (1 - X_1) X_2$  и вообще

$$P_k = (1 - X_1) \dots (1 - X_{k-1}) X_k; \quad (2.6.1)$$

тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} P_k = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - X_k) \leq 1$ . Подобный способ построения случайного положительного ряда  $P_1 + P_2 + \dots$  называют *моделью остаточного распределения* (residual allocation model). Специальный случай такой модели, в котором величины  $X_1, X_2, \dots$  одинаково распределены, называется *процессом ломания палки* (stick breaking process).

Как показал Питман [14], лишь в исключительных случаях модели остаточного распределения приводят к мерам в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , инвариантным при сопряжениях. Наиболее интересен пример, в котором величина  $X_n$  имеет бета-распределение  $B(1 - \alpha, \theta + n\alpha)$ , где  $0 \leq \alpha < 1$  и  $\theta > -\alpha$ . Плотность этого распределения имеет вид

$$\frac{\Gamma(1 + \theta + (n - 1)\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(\theta + n\alpha)} x^{-\alpha} (1 - x)^{\theta + n\alpha - 1}; \quad 0 < x < 1. \quad (2.6.2)$$

В случае  $\alpha = 0$  все величины  $X_n$  имеют общее распределение с плотностью  $\theta(1 - x)^{\theta - 1}$ . Только в этих случаях процесс ломания палки задает инвариантную для сопряжений меру  $t$  на пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ .

### § 3. СУБОРДИНАТОРЫ

Мы установили выше, что если распределение  $\widetilde{M}$  возникает при стохастической симметризации вероятностной меры  $M$  на симплексе  $\Delta_\infty$ , то определяемый мерой  $\widetilde{M}$  процесс дробления отрезка приводит к интересным распределениям  $t$  в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$ . В этом разделе мы рассмотрим одномерные пуассоновские процессы с п. н. суммируемым множеством точек  $\{T_{(1)}, T_{(2)}, \dots\}$ ,  $\sum T_{(k)} = T < \infty$ . Распределение совокупности нормированных точек  $\{P_{(1)}, P_{(2)}, \dots\}$ , где  $P_{(k)} = T_{(k)} / T$ , доставляет меру  $M$  в описанной выше конструкции. Эквивалентное описание задает величины  $T_{(k)}$ , как скачки субординатора.

Опираясь на результаты работы [12] мы покажем, что в этой ситуации мера  $t$  в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$

квазиинвариантна для односторонних действий группы  $\mathfrak{S}_\infty$ , и найдем соответствующую плотность.

**3.1 Обозначения и основные факты.** Пусть  $\Lambda$  – положительная мера на полуоси  $(0, \infty)$ , для которой

$$\Lambda(0, \infty) = \infty; \quad \Lambda(1, \infty) < \infty; \quad \int_0^1 t \Lambda(dt) < \infty. \quad (3.1.1)$$

Обозначим через  $\delta_{(1)} \geq \delta_{(2)} \geq \dots$  точки пуассоновского процесса на  $(0, \infty)$  со средней мерой  $\Lambda$ , упорядоченные по убыванию. В силу ограничений, наложенных на меру  $\Lambda$ , число таких точек п. н. бесконечно, а их сумма

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(k)} \quad (3.1.2)$$

п. н. конечна и является безгранично делимой случайной величиной с мерой Леви  $\Lambda$ . В частности, ее преобразование Лапласа имеет вид

$$E(e^{-pT}) = \exp\left(-\int_0^{\infty} (1 - e^{-pt}) \Lambda(dt)\right); \quad p > 0. \quad (3.1.3)$$

С мерой  $\Lambda$  связан также субординатор, т. е. случайный процесс  $T(s)$ , со стационарными независимыми положительными приращениями. Следуя описанию из [11], §8.4, рассмотрим двумерный пуассоновский процесс в квадранте  $\mathbb{R}_+^2$ , беря за среднюю меру прямое произведение  $\Lambda(dt) \times ds$ . Для типичной реализации  $\{(\delta_{(k)}, s_k)\}$  этого процесса суммы

$$T(s) = \sum_{s_k \leq s} \delta_{(k)}; \quad s > 0, \quad (3.1.4)$$

взятые по точкам реализации в полосе  $0 < s_k \leq s$ , п. н. конечны и задают субординатор. По определению,  $T = T(1)$  – его значение в единице.

Предположим, что мера Леви  $\Lambda$  абсолютно непрерывна с плотностью  $\rho(t) = d\Lambda(t)/dt$  и пусть  $\eta(t) = t\rho(t)$ . Тогда случайная величина  $T(s)$  также имеет плотность; мы обозначим ее через  $f_s(t)$ . Явный вид плотности, как правило, не известен, и ее приходится задавать через преобразование Лапласа:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f_s(t) dt = \exp\left(-s \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-pt}}{t} \eta(t) dt\right); \quad p > 0. \quad (3.1.5)$$

**Лемма.** *Справедлива формула свертки*

$$\int_0^t \eta(t - \tau) f_s(\tau) d\tau = t \cdot f_s(t). \quad (3.1.6)$$

**Доказательство.** Обозначим через  $E(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) \eta(t) dt$  преобразование Лапласа плотности  $\eta(t)$ . Дифференцируя правую часть (3.1.5) по аргументу  $p$  получаем, что преобразования Лапласа левой и правой частей (3.1.6) отличаются от (3.1.5) лишь множителем  $E(p)$  и следовательно, совпадают.

Из (3.1.6) видно, что формула

$$q_s(\tau, t) = \frac{\eta(t - \tau) f_s(\tau)}{t \cdot f_s(t)}; \quad 0 < \tau < t, \quad (3.1.7)$$

задает плотность вероятностного распределения на отрезке  $[0, t]$ . Следующее замечательное наблюдение Пермана – Питмана – Йора содержит интерпретацию этой плотности.

**Теорема [12].** Пусть  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$  – стохастически упорядоченные скачки субординатора  $T(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$  с мерой Леви  $\Lambda$  и

$$T_k = \sum_{j>k} \delta_j; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.8)$$

Тогда случайные величины  $T_0, T_1, T_2, \dots$  образуют стационарную марковскую цепь с переходной плотностью (3.1.7):

$$P\{T_{k+1} \in d\tau \mid T_k = t\} = q_1(t, \tau) d\tau. \quad (3.1.9)$$

**3.2 Случайные виртуальные перестановки, связанные с субординаторами.** Пусть  $T(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$  – субординатор с мерой Леви  $\Lambda$ . С каждой его реализацией связан случайный отрезок  $[0, T]$  длины  $T = T(1)$  и его разбиение на подынтервалы длин  $\delta_{(1)}, \delta_{(2)}, \dots$ . Отметим, что п. н.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{(k)} = T, \quad (3.2.1)$$

т. е. реализации субординатора задают чисто дискретные меры.

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots$ , равномерно распределенных на отрезке  $[0, T]$ . Как и в п. 2.1 отождествим концы интервалов скачков и будем называть их *циклами*. Распределяясь по циклам, точки  $X_1, X_2, \dots$  задают случайную виртуальную подстановку  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty$ .

Ее распределение  $m_\eta$  в пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$  условимся называть *распределением Пермана - Питмана - Йора*, или короче, РРУ-распределением. По построению, РРУ-распределение  $m_\eta$  инвариантно для сопряжений из группы  $\mathfrak{S}_\infty$ . Мы покажем, что мера  $m_\eta$  квазиинвариантна для левого и правого действий группы  $\mathfrak{S}_\infty$ .

Обозначим через  $\delta_1, \delta_2, \dots$  стохастически отсортированные величины скачков субординатора  $T(s)$  и перегруппируем циклы в том же порядке. Мету  $m_\eta$  на пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ , описанную в предыдущем абзаце, можно задать теперь при помощи процесса дробления отрезка из п. 2.3. Формула для переходной плотности следует из теоремы п. 3.1.

Случайный процесс дробления отрезка, связанный с мерой Леви, строит последовательность случайных величин  $T, X_1, X_2, \dots$  по следующим правилам:

- (1)  $T$  - безгранично делимая случайная величина, связанная с мерой Леви  $\Lambda$  по формуле (3.1.3);
- (2) при фиксированном значении  $T = t$  величина  $X_1$  имеет на отрезке  $[0, t]$  распределение

$$\frac{\eta(x_1) f(t - x_1)}{t f(t)} dx_1, \quad 0 \leq x_1 \leq t; \quad (3.2.2)$$

- (3) если значения  $x_1, \dots, x_{n-1}$  случайных величин  $X_1, \dots, X_{n-1}$  уже получены и  $x_{\max} = \max\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ , то величина  $X_n$  распределена на отрезке  $[0, t]$  с плотностью  $\varphi(x, x_{\max})$ , где  $\varphi(x, y) = 1/t$ , если  $0 \leq x \leq y$  и

$$\varphi(x, y) = \frac{\eta(x - y) \cdot f(t - x)}{t \cdot f(t - y)}, \quad (3.2.3)$$

если  $y < x \leq t$ .

Этот алгоритм обобщает процесс дробления отрезка, введенный в [3] и является частным случаем<sup>2</sup> наиболее общего подобного алгоритма из п. 2.3.

**3.3 Совместные распределения.** Пусть  $T, X_1, X_2, \dots$  - случайные величины, возникающие при дроблении отрезка с мерой Леви  $\Lambda$  плотности

$$\frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{\eta(t)}{t}. \quad (3.3.1)$$

<sup>2</sup>В §2 мы работали с единичным отрезком, но все построения очевидным образом применимы и к любому конечному промежутку.

**Предложение.** Совместное распределение величин  $T, X_1, \dots, X_n$  в точке  $(t, x_1, \dots, x_n)$ , где  $0 < x_1, \dots, x_n < t$ , имеет вид

$$\eta(r_1) \eta(r_2 - r_1) \dots \eta(r_k - r_{k-1}) f(t - r_k) dt \frac{dx_1}{t} \dots \frac{dx_n}{t}, \quad (3.3.2)$$

где  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  — рекорды последовательности  $x_1, \dots, x_n$ .

**Доказательство.** При  $n = 1$  формула (3.3.2) совпадает с (3.2.2). Предположим, что формула верна при некотором значении  $n \geq 1$ . Включая в рассмотрение новую случайную величину  $X_{n+1}$ , мы должны умножить плотность исходного распределения (3.3.2) на переходную вероятность

$$\varphi(x_{n+1}, r_k) = \frac{1}{t} \cdot \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x_{n+1} < r_k, \\ \eta(x_{n+1} - r_k) \frac{f(t - x_{n+1})}{f(t - r_k)} & \text{при } r_k < x_{n+1} < t. \end{cases}$$

Легко видеть, что произведение снова имеет вид (3.3.2) и предложение доказано.

**Пример.** При  $n = 2$  плотность случайной точки  $(t, x_1, x_2)$  имеет вид

$$\eta(x_1) f(t - x_1) dt \frac{dx_1}{t} \frac{dx_2}{t}, \quad (3.3.3)$$

если  $0 < x_2 < x_1 < t$ , и равна

$$\eta(x_1) \eta(x_2 - x_1) f(t - x_2) dt \frac{dx_1}{t} \frac{dx_2}{t}, \quad (3.3.4)$$

если  $0 < x_1 < x_2 < t$ .

Применим формулу (3.3.2) для вычисления вероятности того, что первые элементы  $1, 2, \dots, n$  принадлежат общему циклу виртуальной подстановки  $w$  с РРУ-распределением  $m_\eta$ . Имеем:

$$\begin{aligned} P\{X_1 = \max(X_1, \dots, X_n)\} &= \\ &= \int \dots \int \eta(x_1) f(t - x_1) dt \frac{dx_1}{t} \dots \frac{dx_n}{t} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^t \left(\frac{x_1}{t}\right)^{n-1} \eta(x_1) f(t - x_1) dt \frac{dx_1}{t} = \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 p^{n-1} \eta\left(\frac{\tau p}{1-p}\right) f(\tau) \frac{d\tau}{1-p} dp. \end{aligned}$$



В частности, при  $\eta(x) = x^{-\alpha} c\alpha / \Gamma(1 - \alpha)$  получаем

$$\begin{aligned} & \frac{c\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{\infty} \tau^{-\alpha} f_{\alpha,c}(\tau) d\tau \int_0^1 y^{n-\alpha-1} (1-y)^{\alpha-1} dy = \\ & = \frac{c\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{c^{-1} \Gamma(2)}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\Gamma(n - \alpha) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(n)} = (1 - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha}{n-1}\right), \end{aligned}$$

что согласуется с формулой (5.2.3) из §5.

**3.4 Квазиинвариантность РРУ-распределений.** Бесконечная симметрическая группа  $\mathfrak{S}_{\infty}$  действует в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^{\infty}$  левыми и правыми сдвигами. Напомним, к примеру, левое действие  $w \mapsto gw$  (см. [7]).

Пусть  $n$  настолько велико, что подстановка  $g \in \mathfrak{S}_{\infty}$  принадлежит подгруппе  $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{\infty}$ . Действие  $g$  на виртуальную перестановку  $w$  определяется расположением первых  $n$  элементов  $1, 2, \dots, n$  в ее циклах. В частности, циклы, не содержащие младшие элементы, вовсе не меняются. Те же циклы, которые содержат хотя бы один из элементов  $1, 2, \dots, n$ , разбиваются ими на фрагменты, называемые *дугами уровня  $n$* . И левое и правое действия подстановки  $g$  сводятся к разрезанию первоначальных циклов на дуги и последующей склейке этих дуг в другом порядке.

У каждой дуги есть *начало* и *конец*, принадлежащие множеству  $[n]$  (они могут совпадать). Для определенности мы считаем, что дуги полуоткрыты: они содержат свой конец, но, вообще говоря, не содержат начала (кроме случая, когда оно совпадает с концом дуги). Условимся пометить дуги уровня  $n$  их началами  $k \in [n]$ .

Пусть некоторая дуга  $a = (k)$  виртуальной перестановки  $w \in \mathfrak{S}^{\infty}$  имеет конец  $k \in [n]$ . Тогда найдется единственная дуга  $b$  уровня  $n$  с началом  $g(k)$ . По определению, при левом действии подстановки  $g$  конец дуги  $a$  склеивается с началом дуги  $b$ .

Например, при левом сдвиге виртуальной перестановки  $w$  на транспозицию  $g = (1, 2)$  могут встретиться два случая. Если элементы  $1, 2$  принадлежат *общему* циклу  $w$ , то две дуги уровня  $2$ , составляющие этот цикл, превратятся в два отдельных цикла перестановки  $gw$ . Если же элементы  $1, 2$  оказались в *разных* циклах  $w$ , то эти циклы при переходе к перестановке  $gw$  сливаются, причем за единицей следует дуга  $(2)$ , а за двойкой – дуга  $(1)$ .

В терминах пар  $(I, y)$  из п. 0.2, действие группы  $\mathfrak{S}_{\infty}$  описывается точно также. Чтобы описать действие этой группы в пространстве последовательностей  $x \in [0, 1]^{\infty}$ , следует после переклеивания дуг уровня  $n$  применить нормализацию из п. 0.4.

**Теорема.** Рассмотрим РРУ-распределение  $m_\eta$  в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$ , отвечающее мере Леви с плотностью  $d\Lambda(x)/dx = \eta(x)/x$ . Тогда мера  $m_\eta$  квазиинвариантна относительно левых и правых сдвигов на подстановки  $g \in \mathfrak{S}_\infty$ . Коцикл имеет вид

$$\frac{dm(gw)}{dm(w)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\eta(\tilde{\delta}_k)}{\eta(\delta_k)}, \tag{3.4.1}$$

где  $\delta_k = r_k - r_{k-1}$  - длины циклов перестановки  $w$ , а  $\tilde{\delta}_k$  - длины циклов перестановки  $gw$ . При сопряжениях мера  $m_\eta$  инвариантна.

**Замечание.** Здесь существенно, что при сдвиге виртуальной перестановки только конечное число циклов  $w$  претерпевает изменения. Благодаря этому обстоятельству бесконечное произведение в (3.4.1) имеет смысл, хотя числитель и знаменатель по отдельности расходятся.

**Доказательство.** Пусть  $n$  настолько велико, что  $g \in \mathfrak{S}_n$ , и  $N \geq n$ . Левое умножение на  $g$  действует на последовательности  $x^N = (x_1, \dots, x_N) \in [0, 1]^N$  посредством некоторого переключивания дуг уровня  $n$ . При этом полная длина отрезка  $t$ , мера  $dx_1 \dots dx_N$  и максимальный рекорд  $r_k = \max\{x_1, \dots, x_N\}$  сохраняются, а исходный набор  $\delta_1, \dots, \delta_k$  промежутков между рекордами переходит в новый набор  $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_l$  прежней суммарной длины  $\sum \tilde{\delta}_j = r_k = \sum \delta_j$ . Обозначим через  $m^N$  распределение набора  $(t, x_1, \dots, x_N)$  относительно РРУ-меры  $m_\eta$ . Из (3.3.2) видно, что плотность

$$\frac{dm^N(gx^N)}{dm^N(x^N)} = \prod \frac{\eta(\tilde{\delta}_j)}{\eta(\delta_j)},$$

не зависит от  $N$  и совпадает с (3.4.1). Теорема доказана.

**3.5 Сферические функции.** Согласно теореме п. 3.4, РРУ-мера  $m_\eta$  в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$  квазиинвариантна для обоих действий бесконечной симметрической группы  $\mathfrak{S}_\infty$ . В подобной ситуации стандартным образом появляются унитарные представления. Действительно, в пространстве  $H = L^2(\mathfrak{S}^\infty, m_\eta)$  операторы

$$(U_g f)(w) = \sqrt{\frac{dm(gw)}{dm(w)}} f(gw); \quad f \in H, g \in \mathfrak{S}_\infty, w \in \mathfrak{S}^\infty \tag{3.5.1}$$

унитарны и определяют представление группы  $\mathfrak{S}_\infty$ . Единичная константа задает выделенный вектор  $\xi \in H$ . По определению, его

сферическая функция равна

$$\varphi(g) = (U_g \xi, \xi) = \int_{\mathfrak{S}^\infty} \sqrt{\frac{dm(gw)}{dm(w)}} dm(w). \quad (3.5.2)$$

Вычислим значение  $\varphi(g)$  для транспозиции  $g = (1, 2)$ . Мы задаем виртуальную перестановку  $w$  последовательностью  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . Случаи слияния и распада циклов удобно рассмотреть по отдельности.

Если  $x_1 < x_2$ , то единица и двойка принадлежат разным циклам  $w$ . При умножении  $w$  на  $g$  эти циклы сливаются, образуя один цикл суммарной "длины"  $x_2$ . По формуле (3.4.1),

$$\frac{dm(gw)}{dm(w)} = \frac{\eta(x_2)}{\eta(x_1)\eta(x_2 - x_1)}; \quad x_1 < x_2 \quad (3.5.3)$$

и интеграл (3.5.2) с учетом плотности (3.3.4) принимает вид

$$\iiint_{0 < x_1 < x_2 < t} \eta^{1/2}(x_1) \eta^{1/2}(x_2 - x_1) \eta^{1/2}(x_2) f(t - x_2) dt \frac{dx_1}{t} \frac{dx_2}{t}. \quad (3.5.4)$$

В случае  $x_2 < x_1$  единица и двойка лежат в общем цикле виртуальной перестановки  $w$  и при умножении на  $g = (1, 2)$  этот цикл расщепляется на два цикла с длинами  $x_2$  и  $x_1 - x_2$ . Согласно (3.4.1),

$$\frac{dm(gw)}{dm(w)} = \frac{\eta(x_2)\eta(x_1 - x_2)}{\eta(x_1)}; \quad x_1 > x_2. \quad (3.5.5)$$

Учитывая плотность (3.3.3), получаем эквивалентный (3.5.4) интеграл

$$\iiint_{0 < x_2 < x_1 < t} \eta^{1/2}(x_1) \eta^{1/2}(x_1 - x_2) \eta^{1/2}(x_2) f(t - x_1) dt \frac{dx_1}{t} \frac{dx_2}{t}. \quad (3.5.6)$$

Таким образом, для транспозиции  $g = (1, 2)$  и РРУ-распределения  $m_\eta$ , построенного по мере Леви с плотностью  $d\Lambda(x)/dx = \eta(x)/x$ , значение сферической функции  $\varphi(g)$  равно сумме (равных) интегралов (3.5.4) и (3.5.6). Мы вычислим ниже эти интегралы для случая GEM-распределений и их двухпараметрических обобщений.

## § 4. ПРИМЕРЫ

Цель этого раздела – привести более детальные формулы для интересного семейства распределений на пространстве виртуальных перестановок, зависящего от двух вещественных параметров  $\alpha, \theta$ . Это семейство введено в [12] на эквивалентном языке случайных разбиений и включает, в качестве предельного случая, распределения Ювенса из [3].

**4.1 Гамма-процесс.** Распределение скачков этого процесса изучено наиболее подробно. По определению, гамма-процесс  $T(s)$ ;  $s \geq 0$  имеет стационарные независимые приращения, причем разность  $T(s_2) - T(s_1)$  имеет гамма-распределение с плотностью

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \lambda^s t^{s-1} e^{-\lambda t}; \quad t > 0, \quad (4.1.1)$$

где  $s = (s_2 - s_1)\theta$  и  $\lambda > 0$ .

Мера Леви гамма-процесса имеет плотность  $\rho(x) = \theta e^{-\lambda x} / x$ , так что

$$\eta(x) = \theta e^{-\lambda x}; \quad x > 0. \quad (4.1.2)$$

Таким образом, коцикл (3.4.1) принимает вид

$$\frac{dm(gw)}{dm(w)} = \theta^{c(g,w)}, \quad (4.1.3)$$

где  $c(g, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c(gw_n) - c(w_n))$ ,  $c(w_n)$  – число циклов подстановки  $w_n \in \mathfrak{S}_n$  и  $w = (w_1, w_2, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty$ . Формула (4.1.3) была ранее получена в [7]. Ее особая простота состоит в том, что правая часть зависит лишь от числа циклов, но не от их размеров, как в общей формуле (3.4.1).

В [7] для этого случая была полностью вычислена сферическая функция (3.5.2). Там показано, что коэффициенты  $\varphi_\lambda$  ее разложения

$$\varphi(g) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} \varphi_\lambda \cdot \chi^\lambda(g); \quad g \in \mathfrak{S}_n \quad (4.1.4)$$

по характерам симметрической группы имеют вид

$$\varphi_\lambda = \frac{n!}{(\theta)_n} \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{(\sqrt{\theta} + j - i)^2}{h_{ij}}, \quad (4.1.5)$$

где  $(\theta)_n = \theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)$  – символ Похгаммера и  $h_{ij}$  – длина крюка клетки  $(i, j) \in \lambda$  в диаграмме Юнга  $\lambda$ .

Хорошо известно, что стохастически отсортированные величины нормированных скачков

$$\frac{\delta_1}{T(1)}, \frac{\delta_2}{T(1)}, \dots, \frac{\delta_n}{T(1)}, \dots \quad (4.1.6)$$

гамма-процесса  $T(s)$  на промежутке  $s \in [0, 1]$  можно получить при помощи процесса ломания палки, взяв стационарное распределение отщепляемого куска с плотностью

$$\theta(1-x)^{\theta-1}; \quad 0 < x < 1. \quad (4.1.7)$$

Если расположить нормированные скачки в порядке убывания,

$$\frac{\delta_{(1)}}{T(1)}, \frac{\delta_{(2)}}{T(1)}, \dots, \frac{\delta_{(n)}}{T(1)}, \dots, \quad (4.1.8)$$

то их распределение называется *мерой Пуассона - Дирихле* и обозначается через  $\mathcal{PD}(\theta)$ . Различные описания этих знаменитых распределений можно найти, например, в [1], [6], [10], [11].

**4.2 Устойчивые субординаторы.** Пусть мера Леви имеет плотность

$$\frac{d\Lambda(x)}{dx} = \frac{c\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha-1}; \quad x > 0, \quad (4.2.1)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $c > 0$  - параметры. Нетрудно проверить (см. [4], гл. XVII, (4.11)), что преобразование Лапласа соответствующей плотности  $f_{\alpha,c}(t)$  имеет вид

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f_{\alpha,c}(t) dt = e^{-c p^\alpha}; \quad p > 0. \quad (4.2.2)$$

Плотность  $f_{\alpha,c}$  задает общий вид невырожденного устойчивого распределения на положительной полуоси. Для устойчивой плотности  $f_{\alpha,1}$  известно (см. [4], гл. XVII, (6.8)) разложение в ряд

$$f_{\alpha,1}(t) = \frac{1}{\pi t} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{k!} t^{-\alpha k} \sin \pi \alpha k; \quad t > 0. \quad (4.2.3)$$

При изменении масштаба устойчивая плотность преобразуется по формуле

$$f_{\alpha,c}(t) = c^{1/\alpha} f_{\alpha,1}(c^{-1/\alpha} t); \quad t > 0. \quad (4.2.4)$$

В терминах соответствующего случайного процесса — устойчивого субординатора  $T(s)$  — это означает, что случайные величины

$$T(as) \stackrel{d}{=} a^{1/\alpha} T(s); \quad a, s > 0 \quad (4.2.5)$$

имеют одинаковые распределения.

При  $\alpha = 1/2$  для устойчивой плотности имеется элементарное выражение

$$f_{1/2,1}(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t\pi}} e^{-1/4t}; \quad t > 0. \quad (4.2.6)$$

Для отрицательных моментов распределения с плотностью  $f_{\alpha,c}$  можно пользоваться формулой

$$\int_0^{\infty} t^{-\theta} f_{\alpha,c}(t) dt = \frac{\Gamma(\theta/\alpha + 1)}{\Gamma(\theta + 1)} c^{-\theta/\alpha}; \quad \theta > -\alpha. \quad (4.2.7)$$

Известно (см. [12], [16]), что устойчивые субординаторы являются обращениями локальных времен для броуновского движения (при  $\alpha = 1/2$ ) и бесселевских процессов малой размерности  $0 < \delta < 2$  (при  $\alpha = 1 - \delta/2$ ). Мы не затрагиваем в данной статье эту связь. Отметим лишь, что адекватность статистики экскурсий броуновского движения при описании предельного распределения длин циклов случайных подстановок (см. §5 ниже) представляется удивительной и заслуживает более подробного изучения.

По теореме 1.1 из [16] статистика нормированных величин скачков

$$\frac{\delta_1}{T(s_0)}, \frac{\delta_2}{T(s_0)}, \dots, \frac{\delta_n}{T(s_0)}, \dots \quad (4.2.8)$$

для устойчивого субординатора  $T(s)$ ;  $s \in [0, s_0]$  не зависит от выбора  $s_0 > 0$ . Ее можно получить на основе модели остаточного распределения, но, в отличие от процесса ломания палки в п. 4.1, плотность относительной длины обломка на  $k$ -ом шаге алгоритма зависит от  $k$  и равна

$$\frac{\Gamma(1 + (k-1)\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k\alpha)} t^{-\alpha} (1-t)^{k\alpha-1}; \quad 0 < t < 1.$$

**4.3 Двухпараметрическое семейство распределений в пространстве виртуальных перестановок.** В [12] показано, как можно соединить примеры п.п. 4.1, 4.2 в рамках одного двухпараметрического семейства распределений.

Обозначим через  $\mu_r$  вероятностное распределение с плотностью

$$\frac{\Gamma(r\alpha + 1)}{\Gamma(r + 1)} c^r t^{-r\alpha} f_{\alpha,c}(t); \quad t > 0. \quad (4.3.1)$$

где  $r$  – вещественный параметр.

**Предложение** ([12], (2.0)). Пусть  $T_0, T_1, \dots$  — марковская цепь со стационарными переходными распределениями

$$P\{T_k \in d\tau | T_{k-1} = t\} = \frac{\eta(t - \tau) \cdot f_{\alpha, c}(\tau)}{t \cdot f_{\alpha, c}(t)} d\tau. \quad (4.3.2)$$

Если случайная величина  $T_0$  имеет распределение  $\mu_r$ , то

- (1) величина  $T_n$  распределена по закону  $\mu_{r+n}$ ;
- (2) отношения  $U_n = T_n / T_{n-1}$  имеют бета-распределение  $B((r+n)\alpha, 1-\alpha)$  с плотностью

$$\frac{\Gamma(1+r+(n-1)\alpha)}{\Gamma((r+n)\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{(r+n)\alpha-1} (1-t)^{-\alpha}, \quad 0 < t < 1; \quad (4.3.3)$$

- (3) случайные величины  $T_n, U_1, \dots, U_n$  независимы.

Пусть теперь  $r = \theta / \alpha$ . В обозначениях предложения положим  $\delta_n = T_{n-1} - T_n$  и пусть  $P_n = \delta_n / T_0$ ;  $n = 1, 2, \dots$ . Определим меру  $\text{GEM}(\alpha, \theta)$  на симплексе (2.4.4) как совместное распределение случайных величин  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ .

Обозначим через  $P_{(1)}, \dots, P_{(n)}, \dots$  величины  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ , упорядоченные по убыванию. Их совместное распределение названо в [17] двухпараметрическим распределением Пуассона — Дирихле и обозначено там через  $\mathcal{PD}(\alpha, \theta)$ . Обратно, распределение  $\text{GEM}(\alpha, \theta)$  получается из меры  $\mathcal{PD}(\alpha, \theta)$  посредством стохастической сортировки.

В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  распределения  $\text{GEM}(0, \theta)$  и  $\mathcal{PD}(0, \theta)$  совпадают с более классическими распределениями из п. 4.1. При  $\theta = 0$  получаются распределения последовательностей (4.2.8) из п. 4.2 и соответствующие обобщенные распределения Пуассона — Дирихле  $\mathcal{PD}(\alpha, 0)$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Простейший способ задать меру  $\text{GEM}(\alpha, \theta)$  доставляет модель остаточного распределения. Эта мера совпадает с распределением последовательности  $P_1, \dots, P_n, \dots$ , где

$$P_n = (1 - V_1) \dots (1 - V_{n-1}) V_n; \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.3.4)$$

а случайные величины  $V_1, \dots, V_n, \dots$  независимы, причем  $V_n$  имеет бета-плотность с параметрами  $(1 - \alpha, \theta + n\alpha)$ , т. е.

$$\frac{\Gamma(1 + \theta + (n-1)\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\theta + n\alpha)} t^{-\alpha} (1-t)^{\theta + n\alpha - 1}; \quad 0 < t < 1. \quad (4.3.5)$$

Для этих распределений длина  $T$  начального отрезка имеет плотность (4.3.1) с параметром  $r = \theta / \alpha$ , т. е.

$$\frac{P\{T \in dt\}}{dt} = \frac{\Gamma(\theta + 1)}{\Gamma(\theta/\alpha + 1)} c^{\theta/\alpha} t^{-\theta} f_{\alpha, c}(t); \quad t > 0. \quad (4.3.6)$$

Для совместных распределений случайных величин  $T, X_1, \dots, X_n$  вместо (3.3.2) получаем формулу

$$\frac{\Gamma(\theta + 1)}{\Gamma(\theta/\alpha + 1)} c^{\theta/\alpha} t^{-\theta} f_{\alpha,c}(t - r_k) \times \\ \eta(r_1) \eta(r_2 - r_1) \dots \eta(r_k - r_{k-1}) dt \frac{dx_1}{t} \dots \frac{dx_n}{t}. \quad (4.3.7)$$

**4.4 Сферическая функция для обобщенных мер Ювенса.** Вычислим интегралы (3.5.4), (3.5.6) для РРУ-распределений  $m_\eta$  из п. 4.3.

**Предложение.** Пусть  $m_{\alpha,\theta}$  - распределение в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$ , построенное в п. 4.3 по мере  $GEM(\alpha, \theta)$ . Тогда значение  $\varphi(g)$  сферической функции (3.5.2) на транспозиции  $g = (1, 2) \in \mathfrak{S}_2$  равно

$$\frac{2}{(1 + \theta)} \frac{\Gamma(3/2 + \theta/\alpha)}{\Gamma(1 + \theta/\alpha)} \sqrt{\frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)}} \frac{\Gamma^2(1 - \alpha/2) \Gamma(2 - 3\alpha/2)}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(2 - \alpha)}. \quad (4.4.1)$$

**Замечание.** При  $\alpha = 0$  правая часть принимает вид  $\varphi(g) = 2\sqrt{\theta}/(1 + \theta)$ , что согласуется со специальным случаем  $n = 2$  формулы (4.1.5).

**Доказательство.** Достаточно вычислить следующий интеграл, аналогичный (3.5.4) и возникающий с учетом плотности (4.3.7):

$$C \iiint_{0 < x_1 < x_2 < t} \left( \eta(x_1) \eta(x_2 - x_1) \eta(x_2) \right)^{1/2} t^{-\theta} f_{\alpha,c}(t - x_2) dt \frac{dx_1}{t} \frac{dx_2}{t}, \quad (4.4.2)$$

где

$$C = \frac{\Gamma(\theta + 1)}{\Gamma(\theta/\alpha + 1)} c^{\theta/\alpha} \quad (4.4.3)$$

и

$$\eta(x) = \frac{c \alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} x^{-\alpha}. \quad (4.4.4)$$

Сделаем в нем замену переменных

$$t = \frac{\tau}{1 - p_2}, \quad x_2 = \frac{p_2 \tau}{1 - p_2}, \quad t = \frac{p_1 p_2 \tau}{1 - p_2},$$

так что

$$dt \frac{dx_1}{t} \frac{dx_2}{t} = \frac{p_2}{1 - p_2} d\tau dp_1 dp_2.$$



Переменные разделяются и (4.4.2) можно записать как произведение константы

$$\frac{\Gamma(\theta + 1)}{\Gamma(\theta/\alpha + 1)} c^{\theta/\alpha} \left( \frac{c\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \right)^{3/2} \quad (4.4.5)$$

и трех одномерных интегралов:

$$\int_0^{\infty} \tau^{-(\theta+3\alpha/2)} f_{\alpha, \theta}(\tau) d\tau = \frac{\Gamma(\theta/\alpha + 5/2)}{\Gamma(\theta + 3\alpha/2 + 1)} c^{-(\theta/\alpha+3/2)},$$

$$\int_0^1 p_1^{-\alpha/2} (1 - p_1)^{-\alpha/2} dp_1 = \frac{\Gamma^2(1 - \alpha/2)}{\Gamma(2 - \alpha)}, \quad (4.4.6)$$

$$\int_0^1 p_2^{1-3\alpha/2} (1 - p_2)^{\theta+3\alpha/2-1} dp_2 = \frac{\Gamma(2 - 3\alpha/2) \Gamma(\theta + 3\alpha/2)}{\Gamma(2 + \theta)}.$$

Первый из этих интегралов находим из (4.2.7), а следующие два – стандартные бета-интегралы. Собирая вместе множители (4.4.5) – (4.4.6) и упрощая, получаем формулу (4.4.1).

## § 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЮВЕНСА – ПИТМАНА

Согласованные семейства центральных распределений на симметрических группах задают предельные распределения в пространстве дискретных вероятностных мер. В свою очередь, случайные положительные ряды с единичной суммой определяют инвариантные при внутренних автоморфизмах меры в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^{\infty}$ . В этом параграфе приведены явные формулы, уточняющие эти связи для замечательного примера: распределений Ювенса – Питмана на пространстве  $\mathfrak{S}^{\infty}$ , т. е. РРУ-распределений  $m_{\eta}$ , ассоциированных с устойчивыми субординаторами, и обобщенных GEM-распределений или, что эквивалентно, мер Пуассона – Дирихле  $\mathcal{PD}(\alpha, \theta)$ .

**5.1 Формула Питмана.** Определим веса  $W(i, j)$  при  $i, j = 1, 2, \dots$  по формуле

$$W(i, j) = \begin{cases} \theta + (i - 1)\alpha, & \text{если } j = 1 \\ 1 - \alpha/(j - 1), & \text{если } j > 1, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

см. рис. 4. Весом диаграммы Юнга  $\lambda$  будем считать произведение весов ее клеток:

$$W_{\lambda} = \prod_{(i, j) \in \lambda} W(i, j). \quad (5.1.2)$$

$\theta$	$1 - \alpha$	$1 - \frac{\alpha}{2}$	$1 - \frac{\alpha}{3}$
$\theta + \alpha$	$1 - \alpha$	$1 - \frac{\alpha}{2}$	$1 - \frac{\alpha}{3}$
$\theta + 2\alpha$	$1 - \alpha$	$1 - \frac{\alpha}{2}$	$1 - \frac{\alpha}{3}$

Рис. 4 Веса  $W(i, j)$  распределений Ювенса – Питмана.

Пусть

$$d_\lambda = \frac{n!}{1^{r_1} r_1! 2^{r_2} r_2! \dots} \tag{5.1.3}$$

– число подстановок в классе сопряженности группы  $\mathfrak{S}_n$  с  $r_j$  циклами длин  $j = 1, 2, \dots$ . Нетрудно проверить, что статсумма для весов (5.1.2), взятая по множеству  $\mathcal{Y}_n$  диаграмм Юнга с  $n$  клетками равна

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} d_\lambda W_\lambda = (\theta)_n, \tag{5.1.4}$$

где  $(\theta)_n = \theta(\theta + 1) \dots (\theta + n - 1)$  – символ Похгаммера.

Действительно, пусть  $\kappa(\lambda, \Lambda) = j r_j$ , если диаграмма Юнга  $\Lambda$  получается добавлением одной новой клетки<sup>3</sup> к строке длины  $j$  диаграммы  $\lambda = (1^{r_1} 2^{r_2} \dots)$ .

Если  $n = \sum j r_j$  – число клеток в диаграмме  $\lambda$ , то

$$\sum_{\Lambda: \lambda \nearrow \Lambda} \kappa(\lambda, \Lambda) W(\Lambda \setminus \lambda) = (\theta + k\alpha) + \sum_{j \geq 1} j r_j \left(1 - \frac{\alpha}{j}\right) = n + \theta, \tag{5.1.5}$$

так что

$$\begin{aligned} \sum_{\Lambda \in \mathcal{Y}_{n+1}} d_\Lambda W_\Lambda &= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} d_\lambda W_\lambda \sum_{\Lambda: \lambda \nearrow \Lambda} \kappa(\lambda, \Lambda) W(\Lambda \setminus \lambda) = \\ &= (n + \theta) \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} d_\lambda W_\lambda \end{aligned}$$

и формула (5.1.4) доказана по индукции.

**Определение.** Вероятностное распределение на симметрической группе  $\mathfrak{S}_n$ , сопоставляющее перестановке  $\sigma$  с цикловой

<sup>3</sup>Условимся в этом случае писать  $\lambda \nearrow \Lambda$ .

структурой  $(n_1, \dots, n_k)$  статистический вес

$$W_{\alpha, \theta}(\sigma) = \frac{1}{(\theta)_n} \prod_{i=1}^k \left( (\theta + (i-1)\alpha) \prod_{j=1}^{n_i-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{j-1} \right) \right) \quad (5.1.6)$$

назовем *распределением Ювенса - Питмана*.

Нас интересует в основном случай параметров  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $\theta > -\alpha$ , однако допустимы также значения  $\alpha < 0$ ,  $\theta = |\alpha| m$ , где  $m = 1, 2, \dots$ . При  $\alpha = 0$  формула (5.1.6) совпадает с известной формулой Ювенса

$$W_{0, \theta}(\sigma) = \frac{\theta^k}{(\theta)_n}, \quad (5.1.7)$$

где  $k$  - число циклов перестановки  $\sigma$ .

Для нас важны два обстоятельства:

- (1) веса распределения Ювенса - Питмана постоянны на классах сопряженности группы  $\mathfrak{S}_n$ ;
- (2) при различных значениях  $n$  веса (5.1.6) согласованы относительно операции взятия производной подстановки:

$$W(\sigma) = \sum_{\tau'=\sigma} W(\tau). \quad (5.1.8)$$

Благодаря формуле (2), веса (5.1.6) определяют вероятностную меру  $m_{\alpha, \theta}$  в пространстве виртуальных перестановок  $\mathfrak{S}^\infty$ ; ее мы также называем *мерой Ювенса - Питмана*.

Распределение  $m_{\alpha, \theta}$  описывает марковский процесс включения новых элементов в циклы растущей подстановки. Если  $(n_1, \dots, n_k)$  - длины циклов подстановки  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , то с вероятностью  $(1 - \alpha/j)$  новый элемент  $n+1$  добавляется к любому из общего числа  $r_j$  циклов длины  $j$  в любую из  $j$  возможных позиций внутри этого цикла. С вероятностью  $(\theta + k\alpha)$  элемент  $n+1$  создает новый цикл, сводящийся к неподвижной точке  $n+1$ . Переходные вероятности этого процесса указаны на рис. 5.

**5.2 Асимптотика длин циклов.** Следующий факт непосредственно вытекает из результата Питмана ([15], предложение 5).

**Предложение** (ср. [15]). Обозначим через  $\lambda_j^{(n)}(w)$  число элементов в  $j$ -ом цикле подстановки  $w_n$ , где  $w = (w_1, \dots, w_n, \dots) \in \mathfrak{S}^\infty$  - виртуальная перестановка; циклы нумеруются в порядке их появления. Рассмотрим меру Ювенса - Питмана  $m_{\alpha, \theta}$ , где  $0 \leq \alpha < 1$  и  $\theta > -\alpha$ , на пространстве  $\mathfrak{S}^\infty$ . Тогда п. н. по мере  $m_{\alpha, \theta}$  существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} = P_j; \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.2.1)$$

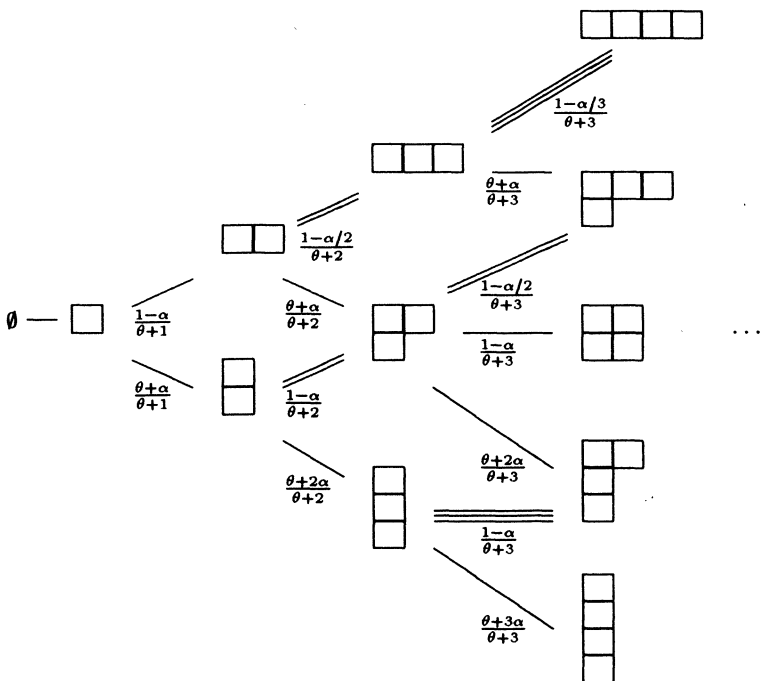


Рис. 5 Переходные вероятности PPU-распределений  $m_{\alpha, \theta}$ .

Случайная последовательность  $P_1, \dots, P_n, \dots$  имеет распределение  $GEM(\alpha, \theta)$ , т. е. задается моделью остаточного присвоения:

$$P_j = (1 - V_1) \dots (1 - V_{j-1}) V_j; \quad j = 1, 2, \dots, \quad (5.2.2)$$

где величины  $V_j$  имеют бета-распределения  $B(1 - \alpha, \theta + j\alpha)$  с плотностью (4.3.5) и независимы.

Этот результат устанавливает связь между семействами распределений (5.1.6) на симметрических группах  $\mathfrak{S}_n$  и PPU-мерами, связанными с устойчивыми субординаторами.

Пусть случайная величина  $T$  имеет плотность (4.3.6), а величины  $X_1, \dots, X_n$  получены путем дробления отрезка из п. 3.2, где функции  $\eta, f$  в (3.2.2), (3.2.3) определяются формулами (4.2.1), (4.2.2). Обозначим через  $W_n \in \mathfrak{S}_n$  случайную подстановку, ассоциированную с вектором  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .

**Следствие.** Подстановка  $W_n$  имеет распределение Ювенса - Питмана (5.1.6).

В частности, вероятность того, что подстановка  $W_n$  имеет только один цикл, т. е. что  $X_1 = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ , равна

$$\frac{(n-1)!}{(1+\theta)_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{j-1}\right). \quad (5.2.3)$$

При  $\theta = 0$  это согласуется с вычислением из п. 3.3.

Еще один замечательный результат Питмана ([15], теорема 13) можно пересказать так.

**Предложение [15].** Пусть  $w = (w_1, \dots, w_n, \dots)$  – виртуальная перестановка и  $K_n(w)$  – число циклов в  $w_n \in \mathfrak{S}_n$ . Тогда п. н. по мере Ювенса – Питмана  $t_{\alpha, \theta}$  существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{K_n^{1/\alpha}} = T, \quad (5.2.4)$$

причем величина  $T$  распределена с плотностью (4.3.6).

**Доказательство** использует теорему Питмана и тот факт, что величина  $S$  имеет распределение Миттаг-Леффлера с плотностью

$$\frac{1}{\pi \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{k!} s^{k-1} \sin \pi \alpha k; \quad s > 0 \quad (5.2.5)$$

тогда и только тогда, когда величина  $T = S^{-1/\alpha}$  устойчива и имеет плотность (4.2.3).

**Следствие.** П. н. по мере  $t_{\alpha, 0}$  в пространстве  $\mathfrak{S}^{\infty}$  существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j^{(n)}}{K_n^{1/\alpha}} = \delta_j; \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.2.6)$$

Распределение случайной последовательности  $\delta_1, \delta_2, \dots$  совпадает с распределением стохастически упорядоченных скачков устойчивого субординатора  $T(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$  с мерой Леви (4.2.1).

**5.3 Асимптотика отношений весов Ювенса – Питмана.** Сравним асимптотическое поведение весов подстановок  $\sigma_n$  и  $g \sigma_n$  для типичных по РРУ-мере  $t_{\alpha, \theta}$  виртуальных перестановок  $w = (\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots)$ . Для простоты изложения будем считать, что  $g = (1, 2)$  – транспозиция. Не умаляя общности можем предположить, что при переходе от  $\sigma_n$  к  $g \sigma_n$  цикл длины  $n_1$  расщепляется на два цикла длин  $n'$  и  $n''$ ; прочие циклы не меняются. Если  $k_n$  – общее число циклов подстановки  $\sigma_n$ , то

$$\frac{W(g \sigma_n)}{W(\sigma_n)} = (\theta + k_n \alpha) \frac{\Gamma(n' - \alpha)}{\Gamma(n') \Gamma(1 - \alpha)} \frac{\Gamma(n'' - \alpha)}{\Gamma(n'') \Gamma(1 - \alpha)} \frac{\Gamma(n_1) \Gamma(1 - \alpha)}{\Gamma(n_1 - \alpha)}$$

Учитывая, что  $\Gamma(n - \alpha) / \Gamma(n) \sim n^{-\alpha}$  при  $n \rightarrow \infty$ , получаем асимптотику

$$\frac{W(g \sigma_n)}{W(\sigma_n)} \sim \frac{(\theta + k_n \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \left( \frac{n' n''}{n_1} \right)^{-\alpha}; \quad n \rightarrow \infty.$$

Используя теперь (5.2.1) и (5.2.4) находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(g \sigma_n)}{W(\sigma_n)} = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \left( T \frac{P' P''}{P_1} \right)^{-\alpha},$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(g \sigma_n)}{W(\sigma_n)} = \frac{\eta(\delta') \eta(\delta'')}{\eta(\delta_1)} \quad (5.3.1)$$

для типичных по мере  $m_{\alpha, \theta}$  виртуальных перестановок  $w = (\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots)$ . Мы использовали обозначения  $\delta' = T P'$ ,  $\delta'' = T P''$  и  $\delta_1 = T P_1$ , а функция  $\eta$  задана формулой

$$\eta(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} x^{-\alpha}; \quad x > 0.$$

Тем самым мы еще раз получили, для специального случая распределений Ювенса – Питмана, формулу коцикла (3.4.1).

Приведенное здесь вычисление, которое по моей просьбе провела Н. В. Цилевич, послужило мотивировкой значительной части настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, А. А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрической группы I, II*. — Теория вероятностей, **22**, **23** (1977, 1978), 72–88, 42–54.
2. С. В. Керов, *Комбинаторные примеры в теории AF-алгебр*. — Записки научных семинаров ПОМИ **172** (1989), 55–67.
3. С. В. Керов, Н. В. Цилевич, *Процесс дробления отрезка порождает виртуальные перестановки с распределением Ювенса*. — Записки научных семинаров ПОМИ **223** (1995), 162–180.
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. т. 2, Москва, Мир, 1967.
5. D. J. Aldous, *Exchangeability and related topics*. — Lecture Notes in Mathematics **1117** (1985), 1–198.
6. W. J. Ewens, *Population Genetics Theory – the Past and the Future*. S. Lessard editor, *Mathematical and statistical developments of evolutionary theory*. Proc. NATO ASI Symp. Dordrecht, Kluwer, 1990, pp. 117–228.
7. S. V. Kerov, G. I. Olshanski, A. M. Vershik, *Harmonic Analysis on the Infinite Symmetric Group*. — Comptes Rend. Acad. Sci. Paris **316** (1993), 773–778.
8. S. V. Kerov, A. M. Vershik, *Characters, factor-representations and  $K_0$ -functor of the infinite symmetric group*. — Proc. Int. Conf. on Operat. Algebras **1** (1980), 23–32.

9. J. F. C. Kingman, *Random Discrete Distributions*. — J. Roy. Statist. Soc. B **37** (1975), 1–22.
10. J. F. C. Kingman, *Random partitions in population genetics*. — Proc. R. Soc. Lond. (A) **361** (1978), 1–20.
11. J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*. Oxford, Clarendon Press, 1993.
12. M. Perman, J. Pitman, M. Yor, *Size-biased sampling of Poisson point processes and excursions*. — Probability and Related Fields **92** (1992), 21–40.
13. J. Pitman, *Partially Exchangeable Random Partitions*. — University of California at Berkeley Technical Report **343** (1992), 1–32.
14. J. Pitman, *Random Discrete Distributions Invariant Under Size-biased Permutation*. — University of California at Berkeley Technical Report **344** (1992), 1–17.
15. J. Pitman, *The Two-parameter Generalization of Ewens' Random Partition Structure*. — University of California at Berkeley Technical Report **345** (1992), 1–23.
16. J. Pitman, M. Yor, *Arcsine laws and interval partitions derived from a stable subordinator*. — Proc. London Math. Soc. (3) **65** (1992), 326–356.
17. J. Pitman, M. Yor, *The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator*. — Department of Statistics U. C. Berkeley Preprint (1995), 1–47.
18. R. P. Stanley, *The Fibonacci lattice*. — Fibonacci Quart. **13** (1975), 215–232.
19. A. M. Vershik, *Mesures de Poisson - Dirichlet et leurs extensions*. — Prépublication du laboratoire de probabilités de l'Université Paris VI **262** (1994), 1–15.

Kerov S. V. Subordinators, and permutations acting with quasi-invariant measure.

We introduce a class of probability measures in the space of virtual permutations, associated with subordinators (i.e., processes with stationary, positive, independent increments). We prove that these measures are quasi-invariant under both left and right actions of the countable symmetric group  $\mathfrak{S}_\infty$ , and a simple formula for the corresponding cocycle is obtained.

In case of a stable subordinator, we find the value of the spherical function of a constant vector on the class of transpositions.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kerov@pdmi.ras.ru

Поступило 12 июня 1995 г.