

## Werk

**Verlag:** Nauka; Российская академия наук санкт-петербургское отделение

**Ort:** Sankt-Peterburg

**Kollektion:** RusDML; Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN502905670

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN502905670>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=502905670>

**LOG Id:** LOG\_0023

**LOG Titel:** Об инвариантах Кауффмана для 6-валентных графов

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN496972103

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN496972103>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=496972103>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

А. М. Никитин

## ОБ ИНВАРИАНТАХ КАУФФМАНА ДЛЯ 6-ВАЛЕНТНЫХ ГРАФОВ

### ВВЕДЕНИЕ

Основная цель предлагаемой статьи – построить явный алгоритм для производства инвариантов 6-валентных графов с жесткими вершинами в рамках общего подхода Кауффмана к инвариантам графов [1, 2, 3]. Изотопический класс коллекции узлов и связок, связанной с каждым 6-валентным графом через процедуру замещения, может рассматриваться как инвариант изотопического класса такого графа. Сокращенная процедура замещения, требуемая для 6-валентного графа, должна быть построена таким образом, чтобы подсчитать все возможные состояния только 0- и 1- пересечений для трех струн. Эта процедура замещения делает алгоритм для производства инвариантов более удобным для вычислений для графов с большим числом вершин. Это свойство может рассматриваться как преимущество этого подхода. Можно применить известные инварианты узла и связок [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] к коллекции, чтобы получить полиномиальные инварианты 6-валентных графов с жесткими вершинами. Такие инварианты могли бы найти свое приложение к некоторым проблемам стереохимической топологии.

Работа построена следующим образом.

В §1 дан краткий обзор понятия жестковершинной изотопии для 6-валентных графов [1, 2, 3]. Множество топологических движений (рис. 2) для (диаграмм) 6-валентных графов с жесткими вершинами, данное в §1, может рассматриваться как обобщение классических движений Рейдемайстера (см. рис. 1).

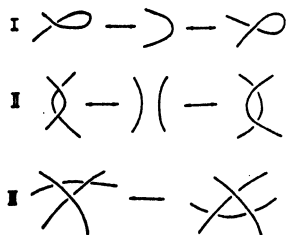


Рис. 1.

В §2 построена сокращенная процедура замещения для 6-валентных графов, которая подсчитывает все возможные состояния 0- и 1-пересечений (в каждой жесткой вершине). Доказан аналог соответствующий теореме из [1].

В §3 построены полиномиальные инварианты 6-валентных графов с жесткими вершинами [1, 2, 3]. Такие инварианты могли бы применяться, чтобы обнаружить киральность таких графов. Представлен соответствующий пример,

В связи с вопросами, обсуждаемыми в статье, следует отметить, что такие разделы математики, как теория категорий, квантовые группы, так же, как и теория представлений, являются мощными инструментами для производства инвариантов графов. Читатель мог бы найти в [13, 14, 15, 16] больше информации по этим вопросам.

О более широком алгоритме для 6-валентных графов см. [17].

### Обозначения и соглашения.

Жестковершинная изотопия для 6-валентных графов обозначается как *RV-изотопия*, 6-валентный граф с жесткими вершинами обозначается как *RV6-граф*.

Графы в представленной статье предполагаются неориентированными.

## § 1. *RV*-ИЗОТОПИЯ ДЛЯ 6-ВАЛЕНТНЫХ ГРАФОВ

Рассмотрим следующую механико-топологическую содуль для 6-валентного графа с жесткими вершинами, погруженного в  $\mathbb{R}^3$ . Как в [2], можно рассматривать такой граф как погружение 6-валентного графа, чьи вершины рассматриваются как маленькие жесткие диски. Каждый диск имеет шесть нитей, прикрепленных к нему, и жесткость диска определяет циклический порядок нитей. Как в [2], *RV*-изотопия (жестковершинная изотопия) погружения этого графа  $\mathbb{R}^3$  "состоит из аффинных движений дисков вместе с топологическими окружающими изотопиями нитей (соответствующими ребрам  $G$ )".

Семейство движений, которые порождают *RV*-изотопию для диаграмм вложений 6-валентных графов, изображено на рис. 2. Вывод этих (обобщенных) движений Рейдемейстера вполне аналогичен тому, как это сделано в [3] для 4-валентных графов, и читатель мог бы найти в [3] больше информации по этой теме

В качестве примера укажем на важную комбинацию этих типов движений (другие аналогичные комбинации можно найти в препринте автора [17])

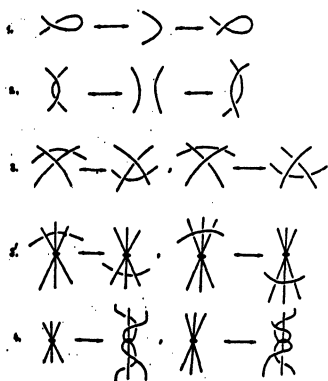
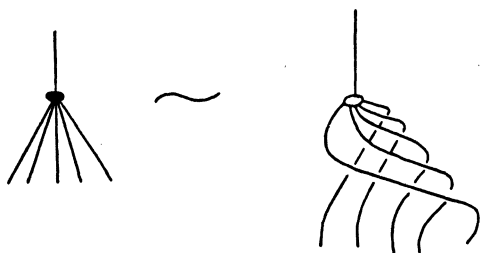


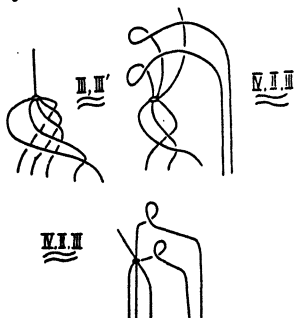
Рис. 2.

5-твист



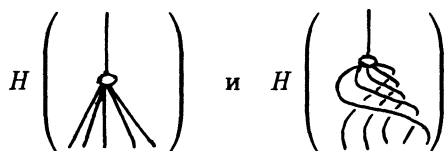
5-твист вращает пять нитей, прикрепленных к жесткой вершине на  $\pi$ , и одна нить – ось вращения – инвариантна.

Можно получить следующие соотношения эквивалентности:



Как и в [2], “соотношение эквивалентности, порожденное движениями  $RV$ -изотопии типа II, III, III' и IV, называется регулярной вершинной изотопией.” Если  $H$  есть инвариант регулярной вер-

шинной изотопии, то, например,



будут отличаться на поведение  $H$  на движениях типа I.

## § 2. ПРОЦЕДУРА ЗАМЕЩЕНИЯ

Сейчас мы в состоянии построить инварианты 6-валентных графов с жесткими вершинами в рамках общего подхода Кауффмана к инвариантам графов.

**Определение 2.1** (см. [1]).

Пусть  $G$  есть неориентированный  $RV_6$ -граф. Определим  $L(G)$  как коллекцию узлов и связок, полученную из  $G$  выбором одного замещения из списка на рис. 3 в каждой вершине  $G$ :

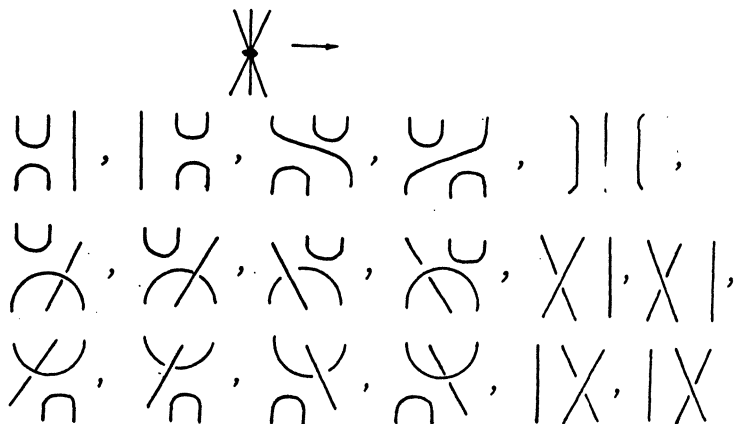


Рис. 3.

Первые пять типов на рис. 3 (первый ряд) называются *сглаживаниями*, остальные двенадцать (остальные ряды) называются *1-кроссингами* (или просто *кроссингами*).

Вышеприведенное определение корректно в том смысле, что процедура замещения инварианта относительно циклического перепорядочения ребер при данной вершине. Чтобы доказать это свойство замещения явно, удобно использовать язык струнных диаграмм.

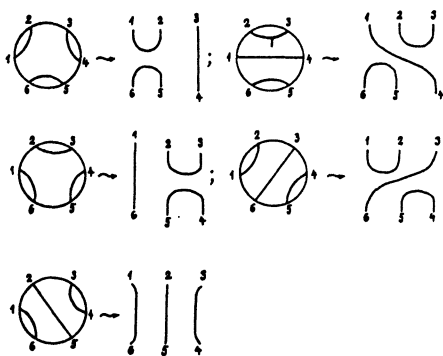


Рис. 4.

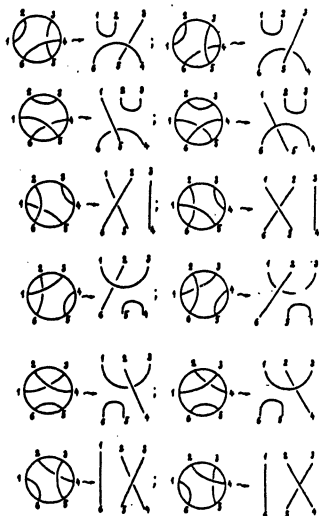


Рис. 4'.

- 1) состояния 0-пересечений (сглаживания) (рис. 4)
- 2) состояния 1-пересечений (1-кроссинги) (рис. 4')

Выше перечислены все возможные состояния 0- и 1-пересечений для трех струн.

**Определение 2.2** (см. [1]).

Пусть  $X$  коллекция узлов и связок. Две такие коллекции называются окружающе изотопными ( $X \sim X'$ ), если каждый элемент первой

коллекции окружающе изотопен некоторому элементу второй коллекции, и наоборот.

Тогда справедлив следующий аналог теоремы 9.3 работы [1]:

**Теорема 1** (см. [1]).

Пусть  $G$  и  $G'$  эквивалентные  $RV_6$ -графы в трехмерном пространстве. Тогда их ассоциированные коллекции связок окружающе изотопны:  $L(G) \sim L(G')$ .

**Доказательство.** Инвариантность относительно движений типа I, II, III и III' тривиальна.

Действие движений типа IV сохраняет элементы  $L(G)$  с точностью до окружающей изотопии.

1) состояния 0-пересечений (сглаживания)

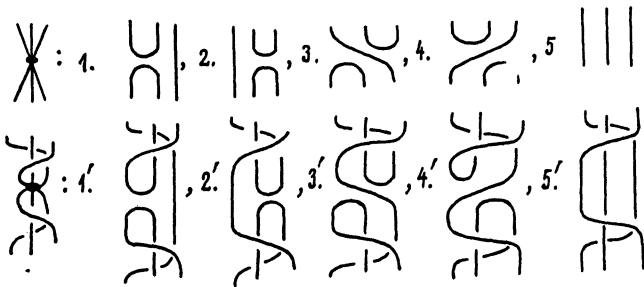


Рис. 5.

$$1' \longleftrightarrow 2, 2' \longleftrightarrow 1, 3' \longleftrightarrow 5, 4' \longleftrightarrow 4, 5' \longleftrightarrow 3$$

(здесь и далее  $\longleftrightarrow$  означает окружающую изотопию для связок)

2) состояния 1-пересечений (1-кроссинги)

$$6' \longleftrightarrow 8, 7' \longleftrightarrow 9, 8' \longleftrightarrow 6, 9' \longleftrightarrow 7,$$

$$10' \longleftrightarrow 16, 11' \longleftrightarrow 17, 12' \longleftrightarrow 14, 13' \longleftrightarrow 15,$$

$$14' \longleftrightarrow 12, 15' \longleftrightarrow 13, 16' \longleftrightarrow 10, 17' \longleftrightarrow 11,$$

что и требовалось доказать. ■

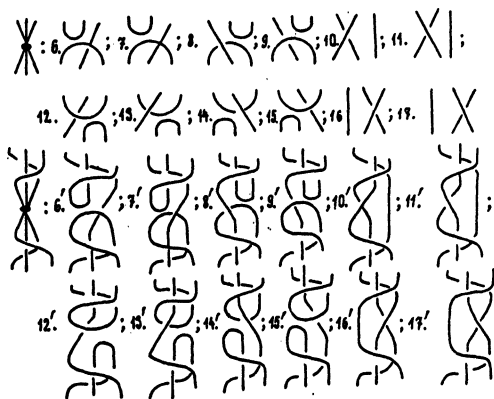
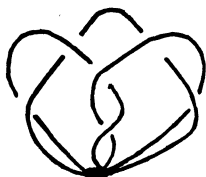


Рис. 5'.

В качестве приложения теоремы 1 можно было бы найти, что граф



не является  $RV$ -изотопным своему зеркальному образу. Этот результат может быть получен с помощью непосредственного сравнения соответствующих коллекций узлов и связок. Этот пример будет рассмотрен в §3 с точки зрения полиномиальных инвариантов 6-валентных графов.

### § 3. ИНВАРИАНТЫ НЕОРИЕНТИРОВАННЫХ 6-ВАЛЕНТНЫХ ГРАФОВ

Как в [2], можно определить инварианты 6-валентных  $RV$ -графов по следующей процедуре. Предположим, что 6-валентный  $RV$ -граф  $G$  неориентирован, и будем предполагать, что  $I(K)$  это неориентированный инвариант регулярной изотопии для узлов и связок, такой, что он ведет себя мультипликативно под действием



движений типа I:

$$I \left( \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \right) = a I \left( \begin{array}{c} \sim \\ \sim \end{array} \right),$$

$$I \left( \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \right) = a^{-1} I \left( \begin{array}{c} \sim \\ \sim \end{array} \right),$$

для некоторого скаляра  $a$ .

Можно определить  $I(G)$  рекурсивно:

$$I \left( \begin{array}{c} \times \\ \bullet \end{array} \right) = x I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \mid \right) + x I \left( \mid \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) +$$

$$+ x I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + x I \left( \mid \mid \mid \right) + x I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) +$$

$$+ y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) +$$

$$+ y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \right) +$$

$$+ y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) +$$

$$+ y I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + y I \left( \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \mid \right) + y I \left( \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \mid \right),$$

где  $x, y$  – коммутирующие алгебраические переменные.

Справедлив следующий аналог теоремы 1.1 работы [2]:

**Теорема 2** (см. [2]).

$I(G)$  определен корректно и является инвариантом  $RV$ -изотопии для  $b$ -валентных графов  $G$  (с точностью до  $\doteq$ , где  $\doteq$  обозначает равенство с точностью до степеней  $a$ ).

**Доказательство.**

Мы должны лишь повторить соответствующее доказательство из [2], слегка его модифицировав.

Инвариантность относительно движений типа I, II, III очевидна. Можно проверить инвариантность относительно движений типа IV:

$$\begin{aligned}
 & I \left( \text{Diagram 1} \right) = xI \left( \text{Diagram 2} \right) + xI \left( \text{Diagram 3} \right) + \\
 & + xI \left( \text{Diagram 4} \right) + xI \left( \text{Diagram 5} \right) + xI \left( \text{Diagram 6} \right) + \\
 & + yI \left( \text{Diagram 7} \right) + yI \left( \text{Diagram 8} \right) + yI \left( \text{Diagram 9} \right) + \\
 & + yI \left( \text{Diagram 10} \right) + yI \left( \text{Diagram 11} \right) + yI \left( \text{Diagram 12} \right) + \\
 & + yI \left( \text{Diagram 13} \right) + yI \left( \text{Diagram 14} \right) + yI \left( \text{Diagram 15} \right) + \\
 & + yI \left( \text{Diagram 16} \right) + yI \left( \text{Diagram 17} \right) + yI \left( \text{Diagram 18} \right) = \\
 & = xaa^{-1}I \left( \text{Diagram 19} \right) + xaa^{-1}I \left( \text{Diagram 20} \right) + \\
 & + xaa^{-1}I \left( \text{Diagram 21} \right) + xI \left( \text{Diagram 22} \right) + xaa^{-1}I \left( \text{Diagram 23} \right) + \\
 & + yaa^{-1}I \left( \text{Diagram 24} \right) + yaa^{-1}I \left( \text{Diagram 25} \right) + \\
 & + yaa^{-1}I \left( \text{Diagram 26} \right) + yaa^{-1}I \left( \text{Diagram 27} \right) + yI \left( \text{Diagram 28} \right) + \\
 & + yI \left( \text{Diagram 29} \right) + yaa^{-1}I \left( \text{Diagram 30} \right) + yaa^{-1}I \left( \text{Diagram 31} \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ yaa^{-1}I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + yaa^{-1}I \left( \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} \right) + yI \left( \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right) + \\
 &+ yI \left( \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \right) = I \left( \begin{array}{c} \times \end{array} \right);
 \end{aligned}$$

и результат противоположного твиста будет таким же.

Корректность определения  $I(G) \perp$  это следствие тех фактов, что:

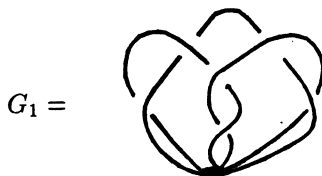
- 1) процедура замещения в каждой 6-валентной жесткой вершине инвариантна относительно циклического переупорядочения ребер при этой вершине;
- 2) переменные  $x, y$  коммутируют друг с другом.

$I(G)$  имеет следующее разложение статсуммы:

$$I(G) = \sum_{\sigma} x^{s(\sigma)} y^{c_1(\sigma)} I(\sigma),$$

где сумма берется по всем *состояниям-связкам*  $\sigma$  для  $G$ , полученным из  $G$  заменой каждой вершины на одно из сглаживаний или на один из 1-кроссингов, и  $s(\sigma)$  (соотв.  $c_1(\sigma)$ ) есть число сглаживаний (соотв. 1-кроссингов), требуемых, чтобы построить состояние-связку  $\sigma$  из  $G$ , что и требовалось доказать. ■

**Пример.**



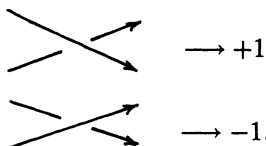
$G_1^* =$  зеркальный образ  $G_1 =$



Можно сосчитать  $I(G_1)$  и  $I(G_1^*)$  для  $I(K)$ , определенного формулой:

$$I(K) = \begin{cases} a^{w(K)}, & \text{если } K \text{ узел} \\ 0, & \text{если } K \text{ связка } (> 1 \text{ компоненты}), \end{cases}$$

где  $w(K)$  есть алгебраическая сумма знаков пересечений диаграммы узла  $K$ , причем



Для неориентированных узлов  $w(K)$  определена корректно (не зависит от выбора ориентации) (см. [1, 2, 8]).

Опуская подробности вычислений (их можно найти в препринте автора [8]), укажем окончательный результат:

$$I(G_1) = a^{-2}[x + y(a^9 + a^7 + 2a + 2a^{-1})]$$

$$I(G_1^*) = a^2[x + y(a^{-7} + a^{-9} + 2a^{-1} + 2a)].$$

Легко видеть, что  $I(G_1) \neq I(G_1^*)$ . Следовательно, графы  $G_1$  и  $G_1^*$  не являются  $RV$ -изотопными. Таким образом, построенный инвариант  $I(G)$  мог бы быть использован, чтобы обнаружить различие между некоторыми 6-валентными графами с жесткими вершинами и их зеркальными образами.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе мы увидели, что явный алгоритм для производства инвариантов 6-валентных графов с жесткими вершинами может быть построен в рамках общего подхода Кауффмана к инвариантам графов. Чтобы сделать этот алгоритм более удобным для вычислений на практике, мы должны использовать сокращенную процедуру замещения, которая подсчитывает только все возможные состояния 0- и 1-пересечений. Описанные инварианты могли бы быть использованы для обнаружения киральности 6-валентных графов с жесткими вершинами. Построен соответствующий пример 6-валентного графа.

### Благодарности.

Автор признателен П. П. Кулишу за стимулирующие дискуссии и Российскому Фонду Фундаментальных Исследований – за частичную финансовую поддержку.

### ЛИТЕРАТУРА

1. L. H. Kauffman, *New Invariants in the Theory of Knots*, Asterisque, 163–164 (1988), 137–219.
2. L. H. Kauffman, P. Vogel, "Link polynomials and a Graphical Calculus," *J. Knot Theory and Its Ramifications*, 1, No. 1, 59–104 (1992).

3. L. H. Kauffman, "Invariants of graphs in three-space," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**, No. 2, 697-710 (1989).
4. V. F. R. Jones, "A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**, 103-112 (1985).
5. P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, "A new polynomial invariant of knots and links," *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**, 239-246 (1985).
6. L. H. Kauffman, "State models and the Jones polynomial," *Topology*, **26**, No. 3, 395-407 (1987).
7. L. H. Kauffman, "An invariant of regular isotopy," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **318**, No. 2, 417-471 (1990).
8. L. H. Kauffman, *On Knots*, Annals of Mathematics Study, 115, Princeton University Press (1987).
9. N. Yu. Reshetikhin, *Quantized Universal Enveloping Algebras, the Yang-Baxter Equation and Unvariants of Links*, I Preprint LOMI E-4-87; II Preprint LOMI E-17-87, (1988).
10. V. G. Turaev, "The Yang-Baxter equation and invariants of links," *Invent. Math.*, **92**, 527-553, (1988).
11. N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, "Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups," *Invent. Math.*, **103**, 547-597 (1989).
12. D. Altschuler, A. Coste *Quasi-Quantum Groups, Knots, Three-Manifolds, and Topological Field Theory*, CERN-TH 6360/92, Preprint (1992).
13. V. G. Turaev, "Quantum invariants of links and 3-valent graphs in 3-manifolds," *Publ. Math. I.H.E.S.*, **77**, 121-171 (1993).
14. D. N. Yetter, "Category theoretic representations of knotted graphs in  $S^3$ ," *Adv. Math.*, **77**, No. 2, 137-155 (1989).
15. P. J. Freyd, D. N. Yetter, "Braided compact closed categories with applications to low dimensional topology," *Adv. Math.*, **77**, No. 2, 156-182 (1989).
16. D. N. Yetter, "Quantum groups and representations of monoidal categories," *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **108**, No. 2, 261-290 (1990).
17. A. M. Nikitin, "On the Kaufman invariants for 6-valent graphs," PDMI, Preprint-6/1995.
18. A. M. Nikitin, "On the Kaufman invariants for 6-valent and 8-valent graphs," PDMI, Preprint-9/1995.

Nikitin A. M. On Kaufmann's invariants for 6-valent graphs.

An explicit way for producing invariants for 6-valent graphs with rigid vertices, inside the Kauffman approach for graph invariants, is constructed. These invariants could be used to detect a chirality of a 6-valent graph with rigid vertices. A corresponding example is considered.