

Werk

Verlag: Nauka; Российская академия наук санкт-петербургское отделение

Ort: Sankt-Peterburg

Kollektion: RusDML; Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN502905670

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN502905670>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=502905670>

LOG Id: LOG_0024

LOG Titel: Асимптотика случайных выпуклых ломаных

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN496972103

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN496972103>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=496972103>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Б. Н. Вилков

АСИМПТОТИКА СЛУЧАЙНЫХ ВЫПУКЛЫХ ЛОМАНЫХ

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется предельная форма плоских случайных выпуклых ломаных, когда звенья независимы и имеют заданное распределение с конечным первым моментом. В §1 изучается зависимость гладкости предельной кривой от свойств исходного распределения. Предельная кривая полностью определяется так называемым взвешенным распределением угла для исходного распределения.

В §2 с помощью перехода к мере Минковского (мере кривизны) предельной кривой устанавливается биективность данного соответствия между конечными мерами на S^1 и выпуклыми кривыми на плоскости.

В §3 показывается простая связь между коэффициентами Фурье взвешенного распределения угла и коэффициентами Фурье соответствующей предельной выпуклой кривой.

Наиболее интересными являются вопросы о предельных распределениях нормированных отклонений случайных ломаных от предельной кривой.

В §4 рассматриваются соответствующие разности опорных функций Минковского, предельный процесс для которых является гауссовским, и его ковариация выписывается через исходное распределение. Для случая равномерного распределения на S^1 ковариация предельного процесса вычисляется явно, и реализация процесса имеет с вероятностью 1 непрерывную производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} - \epsilon$ для сколь угодно малого фиксированного $\epsilon > 0$.

Вопрос о предельной форме случайных выпуклых ломаных был впервые поставлен А. М. Вершиком. Им совместно с Ю. А. Давыдовым были получены формулы для предельной кривой, которые приводятся в §1.

Автор благодарит М. И. Гордина, Ю. А. Давыдова и С. В. Керова за полезные обсуждения. Особую благодарность автор приносит А. М. Вершику как за самую постановку вопроса, так и за многочисленные ценные советы и указания на литературу.

§ 1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ЛОМАНЫЕ И ИХ ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

1.1. Выпуклые перестройки. Формулы Вершика–Давыдова.

Рассмотрим на плоскости \mathbb{R}^2 вероятностное распределение P . Для удобства изложения будем предполагать, что оно сосредоточено на полуплоскости с положительными абсциссами. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots – последовательность независимых векторов с распределением P . Мы будем отождествлять векторы с их концами при откладывании из начала координат. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ через (x_n, y_n) обозначим декартовы координаты случайного вектора ξ_n , через ρ_n – длину ξ_n и через θ_n – угол ξ_n с осью абсцисс (угол всегда будем измерять в направлении, соответствующем ориентации плоскости).

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и набора $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ рассмотрим набор $\{\xi_{(1),n}, \dots, \xi_{(n),n}\}$ – результат упорядочения $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ по возрастанию θ_i (сонаправленные векторы упорядочиваются произвольно). Последовательные суммы $\xi_{(1),n}, \xi_{(1),n} + \xi_{(2),n}, \dots, \xi_{(1),n} + \dots + \xi_{(n),n}$ вместе с точкой $(0, 0)$ являются вершинами выпуклой n -звенной ломаной (см. рис.), которую назовем выпуклой перестройкой набора $\{\xi_i\}_{i=1}^n$.

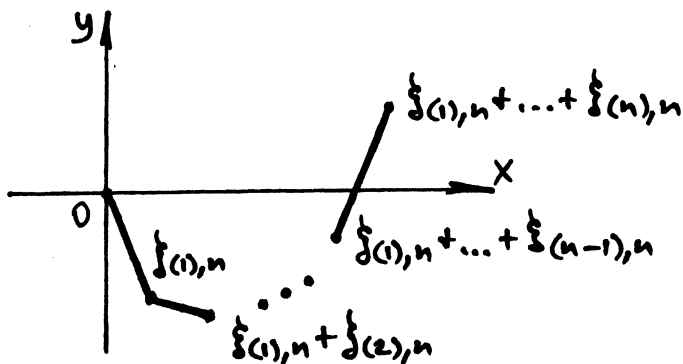


Рис. 1.

Возникает последовательность случайных выпуклых ломаных. Нормируем каждую из них при помощи гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{n}$. Результирующую последовательность случайных выпуклых нормированных ломаных обозначим через $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть распределение P имеет первый момент, т. е. $E\rho_1 = E|\xi_1| < \infty$. Тогда функция $a(t) = E(\rho_1 \mid \theta_1 = t) \in L^1(F)$, где F – распределение θ_1 .

Предложение 1.1 (Формулы Вершика–Давыдова, см. [7]). Если исходное распределение P имеет первый момент, то последовательность случайных ломаных $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно (т.е. для каждого фиксированного значения углового параметра – см. ниже) с вероятностью 1 сходится к выпуклой кривой C_P , задаваемой формулами

$$X(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^t a(s) \cos s F(ds) \quad (1)$$

и

$$Y(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^t a(s) \sin s F(ds), \quad (2)$$

где $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ – угловой параметр.

Доказательство. Обозначим через $(X_n(t), Y_n(t))$ декартовы координаты, вершины ломаной C_n , “слева” от которой звенья имеют наклон (угол с осью абсцисс), меньший t , а “сперва” – больший либо равный t . Тогда, очевидно,

$$X_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i \cos \theta_i \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(\theta_i),$$

$$Y_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i \sin \theta_i \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(\theta_i).$$

Под знаками суммы стоят независимые, одинаково распределенные случайные величины. Их математическое ожидание

$$\begin{aligned} & E \rho_1 \cos \theta_1 \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(\theta_1) = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} E \left(\rho_1 \cos \theta_1 \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(\theta_1) | \theta_1 = s \right) F(ds) = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos s \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(s) E(\rho_1 | \theta_1 = s) F(ds) = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^t a(s) \cos s F(ds) \end{aligned}$$

(здесь использовано, что величина $\cos \theta_1 \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(\theta_1)$ измерима относительно σ -алгебры, порожденной случайной величиной θ_1).

Аналогично,

$$E\rho_1 \sin \theta_1 \mathbb{I}_{[-\frac{\pi}{2}, t)}(\theta_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^t a(s) \sin sF(ds).$$

Поскольку $a \in L^1(F)$, оба математических ожидания конечны. Отсюда по теореме Колмогорова об усиленном законе больших чисел для каждого фиксированного значения параметра t с вероятностью 1

$$X_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(t), \quad Y_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Y(t).$$

Из вида формул (1) и (2) следует, что предельная кривая C_P является выпуклой. ■

Аналогичными рассуждениями доказываются еще две формулы подобного вида:

$$l(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^t a(s)F(ds) \quad (3)$$

и

$$\eta(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^t a(s)e^{is}F(ds), \quad (4)$$

где $l(t)$ – длина участка кривой C_P , заключенного между точками $(X(0), Y(0)) = (0, 0)$ и $(X(t), Y(t))$, а $\eta(t) = X(t) + iY(t)$ – комплексная запись кривой C_P .

1.2. О гладкости предельной кривой.

Формулы (1)–(4) показывают, что предельная кривая C_P , определяемая исходным распределением P , зависит лишь от произведения aF . Введем в рассмотрение меру $\mu_P = aF$ – взвешенное распределение угла для распределения P . (В некоторых случаях удобнее рассматривать меру μ_P на S^1 , а не на отрезке $[0, 2\pi]$.) μ_P конечна, поскольку $a \in L^1(F)$.

Таким образом, если два распределения P_1 и P_2 имеют одно и то же взвешенное распределение угла $\mu_{P_1} = \mu_{P_2}$, то их предельные кривые C_{P_1} и C_{P_2} совпадают.

Предложение 1.2. *Предельная кривая C_P будет C^1 -гладкой (как график функции $y(x)$) или, что эквивалентно, как параметризованная кривая, где в качестве параметра выступает абсцисса точки*

кривой) тогда и только тогда, когда носитель меры μ_P есть полуокружность, т.е. $\text{Supp } \mu_P = S^1_{x \geq 0} \equiv \{(x, y) \in S^1 : x \geq 0\}$.

Следует сразу отметить, что как кривая, параметризованная угловым параметром t , C_P заведомо не будет C^1 -гладкой, стоит лишь мере μ_P иметь атом в какой-либо точке $t_0 \in S^1_{x \geq 0}$. В этом случае $(X(t_0), Y(t_0)) \neq (X(t_0 + 0), Y(t_0 + 0))$, однако при параметризации кривой через абсциссу этот разрыв отсутствует.

Доказательство предложения 1.2. Пусть кривая C_P является C^1 -гладкой (в указанном смысле). Из этого вытекает, что в каждой ее точке существует ровно одна прямая, касательная к ней. Поскольку имеется взаимно-однозначное соответствие между точками кривой и их абсциссами, из C^1 -гладкости следует, что каждому значению абсциссы x соответствует ровно одно значение параметра t — наклон касательной к кривой в точке с абсциссой x . Если бы при этом нашелся угловой интервал $[t_1, t_2] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $t_1 < t_2$: $\mu_P([t_1, t_2]) = 0$, то из формулы (1) немедленно следовало бы, что $X(t_1) = X(t_2)$, что противоречит только что сказанному. Отсюда $\text{Supp } \mu_P = S^1_{x \geq 0}$.

Обратно, пусть $\text{Supp } \mu_P = S^1_{x \geq 0}$, т.е. отсутствуют угловые интервалы нулевой меры. В этом случае, согласно формуле (1), различным значениям параметра t соответствуют различные значения $X(t)$, откуда вытекает существование функции $t(x)$, обратной к функции $X(t)$, заданной на области значений $X(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Функцию $t(x)$ можно очевидным образом продолжить до неубывающей, заданной на всем интервале $[0, X(\frac{\pi}{2})]$. Продолженная функция $t(x)$ принимает все значения из $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, поскольку каждому значению параметра t соответствует некоторое значение $X(t)$, и является неубывающей. Следовательно, она непрерывна на $[0, X(\frac{\pi}{2})]$, что и обеспечивает наличие непрерывной производной у функции $y(x)$, графиком которой является кривая C_P , а также наличие непрерывно меняющегося вектора скорости в случае, когда C_P параметризуется абсциссой своей точки. ■

Предложение 1.3. Пусть выполнены условия предложения 1.2, и при этом μ_P абсолютно непрерывна относительно меры Лебега с непрерывной плотностью $p(s)$. Тогда при $x : p(t(x)) \neq 0$ функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, и выполняется соотношение

$$y''(x) = \frac{1}{\cos^3 t(x) \cdot p(t(x))}, \quad p(t(x)) \neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\mu_P(ds) = p(s)ds$. Из формулы (1)

$$X(t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^t \cos s p(s) ds \Rightarrow X'(t) = \cos t p(t) \Rightarrow t'(x) = \frac{1}{\cos t p(t)},$$

$$p(t) \neq 0.$$

$$y''(x) = (\operatorname{tg} t(x))'_x = \frac{1}{\cos^2 t(x)} \cdot t'(x) = \frac{1}{\cos^3 t(x) \cdot p(t(x))},$$

$$p(t(x)) \neq 0. \quad \blacksquare$$

Настало время отметить, что предположение о том, что исходное распределение P сосредоточено на полуплоскости, было нужно лишь для корректности при употреблении выражений “выпуклая ломаная,” “выпуклая кривая,” а также для того, чтобы получающаяся предельная кривая C_P была графиком некоторой функции $y(x)$. Однако нетрудно убедиться, что предложение 1.1 полностью переносится на случай произвольного распределения $P : E\rho_1 < \infty$ (при соответствующем понимании выпуклости случайных ломаных и предельной кривой). Отсюда немедленно вытекает, что предельная кривая C_P окажется замкнутой в том и только том случае, когда $E\xi_1 = 0$ (при этом аппроксимирующие ломаные, разумеется, не обязаны быть замкнутыми). Предложение 1.2 также очевидным образом переносится на случай произвольного распределения P с первым моментом. Таким образом, в частности, формулы (1)–(4) можно переписать в следующем виде:

$$X(t) = \int_0^t a(s) \cos s F(ds) = \int_0^t \cos s \mu_P(ds), \quad (5)$$

$$Y(t) = \int_0^t a(s) \sin s F(ds) = \int_0^t \sin s \mu_P(ds), \quad (6)$$

$$l(t) = \int_0^t a(s) F(ds) = \int_0^t \mu_P(ds), \quad (7)$$

$$\eta(t) = \int_0^t a(s) e^{is} F(ds) = \int_0^t e^{is} \mu_P(ds), \quad (8)$$

$t \in [0, 2\pi]$.

§ 2. БИЕКТИВНОСТЬ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ КОНЕЧНЫМИ МЕРАМИ НА S^1 И ВЫПУКЛЫМИ КРИВЫМИ НА ПЛОСКОСТИ

2.1 О мере Минковского произвольной замкнутой выпуклой кривой.

Напомним известные определения и результаты из работы Александрова [1], (формулировки изменены автором применительно к случаю \mathbb{R}^2). Пусть Γ – замкнутая выпуклая кривая на плоскости, т.е. граница некоторого выпуклого ограниченного множества $H \subset \mathbb{R}^2$. Для каждого $\omega \subset S^1$ обозначим через $\sigma(\omega)$ множество точек $x \in \Gamma$, через которые можно провести опорную прямую к H с внешней нормалью, принадлежащей множеству ω . Будем говорить, что $\sigma(\omega)$ сферически отображается на ω .

Введем функцию множества $\nu_\Gamma(\omega)$, каждому $\omega \subset S^1$ сопоставляющую меру (иначе говоря – длину) множества $\sigma(\omega)$, если она определена.

Предложение 2.1 (см. [1]). *Для любой замкнутой выпуклой кривой Γ функция множества ν_Γ является конечной мерой, заданной на σ -алгебре борелевских подмножеств S^1 .*

Мы будем называть ν_Γ мерой Минковского (мерой кривизны) кривой Γ . В частности, если Γ – многоугольник, то $\nu_\Gamma(\omega) = 0$, если в ω не содержится ни одна из нормалей к его сторонам. Если же в ω лежат нормали к сторонам с длинами ν_1, \dots, ν_m , то $\nu_\Gamma(\omega) = \nu_1 + \dots + \nu_m$. Если Γ имеет в каждой точке положительную кривизну K , то $\nu_\Gamma(\omega)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S^1 , и ее производная в точке $\bar{n} \in S^1$ равна $\frac{1}{K(\bar{n})}$, где $K(\bar{n})$ – кривизна в той точке кривой Γ , нормаль в которой есть \bar{n} (см. [1]).

Предложение 2.2 см. [1]. *Мера Минковского ν_Γ любой замкнутой выпуклой кривой Γ удовлетворяет условию*

$$\int_{S^1} \bar{n} \nu_\Gamma(d\bar{n}) = 0,$$

т.е. центр масс меры ν_Γ находится в нуле.

Теорема 2.3 (см. [1]). *Пусть ν – конечная мера на S^1 с центром масс в нуле. Тогда существует единственная с точностью до параллельного переноса замкнутая выпуклая кривая Γ , мера Минковского которой совпадает с ν .*

2.2 Биективность соответствия между взвешенными распределениями угла и предельными кривыми.

Как и раньше, пусть P – вероятностное распределение на плоскости с первым моментом, $\mu_P = aF$ – взвешенное распределение угла для P . Трансформируем меру μ_P , соответствующую распределению самих векторов, в меру μ_P^* , соответствующую распределению их “внешних” нормалей, т.е. нормалей, составляющих с самими векторами правые двойки в смысле выбранной ориентации плоскости. Иными словами, мера μ_P^* получается из μ_P поворотом окружности S^1 на угол $\frac{\pi}{2}$ в соответствующем направлении. Очевидно, что три условия $E\xi_1 = 0$, $\int_{S^1} \bar{n}\mu_P(d\bar{n}) = 0$ и $\int_{S^1} \bar{n}\mu_P^*(d\bar{n}) = 0$ эквивалентны.

Из формулы (7) §1 видно, что предельная кривая C_P обладает следующим свойством: мера (иначе говоря, длина) ее дуги равна мере μ_P соответствующего множества значений углового параметра t , и тем самым равна мере μ_P^* образа этой дуги при сферическом отображении. Следовательно, по теореме 2.3, кривая C_P – это и есть та единственная кривая, для которой μ_P^* – мера Минковского.

Таким образом, не только по каждой конечной мере на S^1 (т.е. взвешенному распределению угла) с центром масс в нуле строится (замкнутая) предельная кривая (например, при помощи формул Вершика–Давыдова), но и по произвольной замкнутой выпуклой кривой C строится конечная мера μ на S^1 (с центром масс в нуле), такая что C – предельная кривая для взвешенного углового распределения μ , т.е. для любого распределения P : $\mu_P = \mu$. Для построения такой меры μ достаточно взять образ меры Минковского ν_C кривой C относительно поворота окружности на угол $\frac{\pi}{2}$ в направлении, соответствующем ориентации плоскости. Тем самым верна следующая теорема.

Теорема 2.4. *Указанное выше соответствие является биекцией между множеством конечных мер на S^1 с центром масс в нуле и множеством всех замкнутых выпуклых кривых на плоскости, рассматриваемых с точностью до параллельного переноса.*

Заметим, что можно отказаться от требования замкнутости кривых и, соответственно, нахождения центра масс мер на S^1 в нуле. Незамкнутую кривую будем называть выпуклой, если при обходе ее от одного конца к другому угол между касательным вектором к кривой и осью абсцисс меняется монотонно в интервале $[\alpha_0, \alpha_0 + 2\pi]$ или $[\alpha_0, \alpha_0 - 2\pi]$.

Используя результаты из работы Александрова [1], можно доказать следующую теорему.

Теорем 2.5. Указанное выше соответствие является биекцией между множеством конечных мер на S^1 и множеством всех выпуклых (в смысле только что данного определения) кривых на плоскости, рассматриваемых с точностью до параллельного переноса и места (возможного) разрыва.

§ 3. СВЯЗЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРИВОЙ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ ВЗВЕШЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛА

Пусть μ – конечная мера на S^1 с центром масс в нуле, и C_μ – предельная кривая для меры μ как взвешенного распределения угла. C_μ – замкнутая выпуклая кривая с параметризацией $\eta(t) = X(t) + iY(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, где t – угловой параметр (см. §1).

Введем в рассмотрение коэффициенты Фурье $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ меры μ :

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iks} \mu(ds), \quad k \in \mathbb{Z}$$

и коэффициенты Фурье $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ кривой C_μ в заданной параметризации:

$$\eta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikt}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Предложение 3.1. При сделанных предположениях выполняются соотношения:

$$\varphi_{-1} = 0; \quad f_0 = - \sum_{k \neq 0} f_k; \quad f_k = - \frac{i\varphi_{k-1}}{k}, \quad k \neq 0.$$

Доказательство.

В соответствии с формулой (8) §1

$$\eta(t) = \int_0^t e^{is} \mu(ds) = \int_0^{2\pi} \mathbb{I}_{[0,t)}(s) e^{is} \mu(ds), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Разложим индикаторную функцию в стандартный ряд Фурье:

$$\mathbb{I}_{[0,t)}(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(t) e^{iks}$$

$$C_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbb{I}_{[0,t)}(s) e^{-iks} ds, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

После очевидных вычислений получаем:

$$C_0(t) = \frac{t}{2\pi}; \quad C_k(t) = \frac{i}{2\pi k} (e^{-ikt} - 1), \quad k \neq 0.$$

Отсюда, поскольку ряд Фурье функции $\mathbb{I}_{[0,t)}(s)$ сходится,

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(t) e^{iks} \right) e^{is} \mu(ds) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(t) \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)s} \mu(ds) = \\ &= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k(t) \varphi_{-k-1} = t\varphi_{-1} + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{i}{k} (e^{-ikt} - 1) \varphi_{-k-1}. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты двух разложений $\eta(t)$ по системе $\{e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, получаем требуемое. ■

Замечание. Коэффициент φ_{-1} указывает положение центра массы меры μ . Коэффициент f_0 задает положение кривой C_μ в смысле параллельного переноса. Данное соотношением из предложения 3.1 значение f_0 соответствует положению C_μ , отвечающему формулам (5)–(8).

Как известно (см. [4], стр. 712), для того, чтобы последовательность $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ была последовательностью коэффициентов Фурье некоторой (конечной) меры на S^1 , необходимо и достаточно, чтобы $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ была положительно определена. Отсюда и из предложения 3.1 вытекает необходимое и достаточное условие того, что комплекснозначная функция $\eta(t)$, $t \in [0, 2\pi]$: $\eta(0) = \eta(2\pi)$ является параметризацией с помощью углового параметра некоторой выпуклой кривой: получаемая при помощи соотношений из предложения 3.1 последовательность $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ должна быть положительно определена.

§ 4 НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НОРМИРОВАННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ЛОМАНЫХ ОТ ПРЕДЕЛЬНОЙ КРИВОЙ

4.1. Формулировки УЗБЧ и ЦПТ для случайных множеств.

Как известно, суммой по Минковскому двух множеств $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ называется множество

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

Пусть C – пространство непустых компактных множеств в \mathbb{R}^2 , и пусть d – метрика Хаусдорфа, т. е.

$$d(X, Y) = \min \{ \varepsilon > 0 : X \subset Y + \varepsilon B, Y \subset X + \varepsilon B \}, \quad \forall X, Y \in C,$$

где B – единичный круг в \mathbb{R}^2 .

Норму множества определим как

$$\|X\| = d(X, \{0\}), \quad X \in C.$$

Пусть \mathfrak{B} – борелевская σ -алгебра в метрическом пространстве (C, d) . Случайным множеством назовем измеримую функцию на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ со значениями в (C, \mathfrak{B}) . Нас будет интересовать только ее распределение, т. е. вероятностная мера на (C, \mathfrak{B}) . Математическое ожидание случайного множества X определим как

$$EX = \{ E\eta \mid \eta - \text{случайная величина со значениями в } \mathbb{R}^2, \\ \eta \in X \text{ почти наверное} \}.$$

Ниже приводятся результаты из работы В. Вейля [2], формулировки которых несколько изменены автором для удобства изложения.

Теорема 4.1 (см., например [2]). Пусть X_1, X_2, \dots – независимые, одинаково распределенные случайные множества с $E\|X_1\| < \infty$. Тогда с вероятностью 1

$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(CoX_1)$$

в пространстве (C, d) , где CoX_1 – выпуклая оболочка множества X_1 .

Пусть $K = \{X \in C, X = CoX\}$. Как известно, опорной функцией множества $X \in K$ называется функция $h_X : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h_X(u) = \max_{x \in X} \langle x, u \rangle, \quad u \in S^1.$$

При этом $h_X \in C(S^1), \forall X \in K$.

Нетрудно заметить (см. [2]), что $\forall X, Y \in K$

$$\|X\| = \|h_X\|, \quad d(X, Y) = \|h_X - h_Y\|, \quad h_{X+Y} = h_X + h_Y,$$

т. е. конус K изометрически вкладывается в банахово пространство $C(S^1)$.

Определим ковариацию случайной $C(S^1)$ -величины Y как отображение

$$\Gamma_Y : C'(S^1) \times C'(S^1) \rightarrow \mathbb{R} :$$

$$\Gamma_Y(\mu, \nu) = E(\mu(Y - EY)\nu(Y - EY)), \quad \mu, \nu \in C'(S^1),$$

где EY понимается как элемент $C(S^1)$, такой что

$$\lambda(EY) = E(\lambda(Y)), \quad \forall \lambda \in C'(S^1)$$

(см. [2], [3]).

Теорема 4.2 (см. [2], [3]). Пусть X_1, X_2, \dots — независимые, одинаково распределенные случайные множества с $E\|X_1\|^2 < \infty$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(h_{C \circ X_i} - E(h_{C \circ X_1}) \right) \xrightarrow{D} Z,$$

где \xrightarrow{D} означает сходимость распределений, Z — центрированная гауссовская $C(S^1)$ -величина: $\Gamma_Z = \Gamma_{h_{C \circ X_1}}$, а также

$$\sqrt{nd} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}, E(C \circ X_1) \right) \xrightarrow{D} \|Z\|.$$

4.2. Приложение к случайным зонотопам.

Напомним, что зонотопом называется сумма по Минковскому конечного числа отрезков. Как и ранее, рассмотрим вероятностное распределение P , сосредоточенное на полуплоскости, и последовательность ξ_1, ξ_2, \dots независимых векторов с распределением P . Пусть P имеет первый момент, т.е. $E|\xi_1| < \infty$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ через X_n обозначим отрезок, соединяющий начало координат с точкой ξ_n , и через G_n — зонотоп отрезков X_1, \dots, X_n . Множество G_n является компактным, выпуклым, центрально-симметричным относительно точки $\frac{1}{2}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$, и его граница своими точками $(0, 0)$ и $\xi_1 + \dots + \xi_n$ разбивается на две конгруэнтные ломаные. Помимо зонотопа G_n рассмотрим выпуклое замкнутое множество F_n , граница которого состоит из выпуклой перестройки C_n набора $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ (см. §1) и ломаной C'_n , центрально-симметричной C_n относительно точки $\frac{1}{2}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$ (эта точка является серединой отрезка, соединяющего концы ломаной C_n , поэтому объединение C_n и C'_n действительно является границей некоторого (выпуклого) множества). Заметим, что ломаную C'_n можно получить тем же способом, что и ломаную C_n , с тем единственным отличием, что набор $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ нужно упорядочивать по убыванию угла θ_i (см. §1), а не по возрастанию, как это делалось при построении ломаной C_n .

Предложение 4.3. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множества F_n и G_n совпадают.

Доказательство. 1. Докажем, что $F_n \subset G_n$. Очевидно, что все вершины ломаных C_n и C'_n , составляющих границу выпуклого множества F_n , принадлежат $G_n = X_1 + \dots + X_n$. Следовательно, в силу выпуклости G_n , $F_n \subset G_n$.

2. Докажем, что $G_n \subset F_n$. Предположим противное: пусть найдется точка $a \in G_n : a \notin F_n$. Поскольку F_n — компактное выпуклое множество, очевидным образом строится прямая, отделяющая точку a от F_n , иначе говоря, существует линейный непрерывный функционал f на \mathbb{R}^2 и константа c , такие что $\forall u \in F_n f(u) < c$, и $f(a) > c$.

В силу компактности G_n существует точка $e \in G_n : f(e) = \max_{u \in G_n} f(u)$. Так как $e \in G_n = X_1 + \dots + X_n \Rightarrow e = e_1 \xi_1 + \dots + e_n \xi_n$, $0 \leq e_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Так как $f(e) = e_1 f(\xi_1) + \dots + e_n f(\xi_n)$ — максимальное значение f на G_n , то

$$e_i = \begin{cases} 0, & f(\xi_i) \leq 0 \\ 1, & f(\xi_i) > 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Однако тем самым точка e является одной из последовательных сумм набора $\{\xi_{(1),n}, \xi_{(2),n}, \dots, \xi_{(n),n}\}$, либо $\{\xi_{(n),n}, \xi_{(n-1),n}, \dots, \xi_{(1),n}\}$ (см. §1). Таким образом $e \in C_n \cup C'_n \subset F_n$, и $f(e) < c$, что противоречит тому, что по построению $c < f(a) \leq f(e)$. ■

Предложение 4.4. С вероятностью 1 последовательность $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ сходится в пространстве (C, d) к EX_1 .

Доказательство. $|\xi_1| = \|X_1\| \Rightarrow E\|X_1\| < \infty \Rightarrow$ для последовательности случайных множеств $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в силу теоремы 4.1 выполняется УЗБЧ, откуда и вытекает требуемое, поскольку $Co X_1 = X_1$. ■

Из предложений 4.3 и 4.4, в частности, вытекает, что и граница предельного множества EX_1 (точнее, ее “половина”) совпадает с предельной кривой C_P , описываемой формулами Вершика-Давыдова (см. предложение 1.1). Отсюда также следует, что сходимость в предложении 1.1 будет равномерной, в том смысле, что с вероятностью 1 для $\forall \varepsilon > 0$ начиная с некоторого n случайная выпуклая нормированная ломаная будет целиком лежать в ε -окрестности (в смысле метрики Хаусдорфа) предельной кривой.

Для перехода от распределения P , сосредоточенного на полуплоскости $\{(x, y) : x > 0\}$, к произвольному распределению P на \mathbb{R}^2

с конечным первым моментом, необходимо выполнить описанные выше построения дважды, для каждой полуплоскости в отдельности. Предельная кривая C_P получается совмещением при помощи параллельного переноса концов соответствующих "половин" границ предельных множеств. Как уже упоминалось, C_P окажется замкнутой в том и только том случае, когда $E\xi_1 = 0$.

4.3. Поведение нормированных отклонений случайных ломаных от предельной кривой.

Рассмотрим отклонение опорных функций наших нормированных зонотопов $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ от опорной функции предельного множества EX_1 . Случайные величины со значениями в пространстве 2π -периодических функций $C([0, 2\pi])$

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(h_{X_i} - Eh_{X_1} \right) = \sqrt{n} \left(h_{\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)} - Eh_{X_1} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

естественно трактовать как случайные процессы $Z_n(t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Предложение 4.4. Если $E\|X_1\|^2 < \infty$, то $Z_n \xrightarrow{D} Z$, где Z - гауссовский процесс с нулевым средним и непрерывными реализациями, причем

$$\Gamma_Z = \Gamma_{h_{X_1}}.$$

Предложение 4.4 непосредственно вытекает из теоремы 4.2.

Пусть r_Z - ковариационная функция процесса Z . В силу предложения 4.4

$$r_Z(\alpha, \beta) = \text{Cov}(Z(\alpha), Z(\beta)) = \Gamma_{h_{X_1}}(\pi_\alpha, \pi_\beta),$$

где $\pi_\alpha, \pi_\beta \in C'(S^1)$ - координатные функционалы, выдающие значения функции в точках $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$.

Перейдем к распределению P , сосредоточенному на S^1 . Отрезки X_1, X_2, \dots в этом случае имеют единичную длину, поэтому условия $E\|X_1\| < \infty$ и $E\|X_1\|^2 < \infty$ выполняются автоматически. Опорная функция $H_S(\cdot)$ единичного отрезка, идущего из начала координат под углом s к оси абсцисс, имеет вид

$$H_S(\alpha) = \begin{cases} \cos(s - \alpha), & \cos(s - \alpha) \geq 0 \\ 0, & \cos(s - \alpha) < 0. \end{cases}$$

Предложение 4.5. Если исходное распределение сосредоточено на S^1 , то ковариация предельного процесса Z имеет вид

$$r_Z(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} H_t(\alpha) H_t(\beta) P(dt) - \int_0^{2\pi} H_s(\alpha) P(ds) \int_0^{2\pi} H_s(\beta) H_s(\beta) P(ds).$$

Доказательство. В силу предложения 4.4 имеем:

$$\begin{aligned}
 r_Z(\alpha, \beta) &= \Gamma_{h_{X_1}}(\pi_\alpha, \pi_\beta) = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(H_t(\alpha) - \pi_\alpha E H_t \right) \left(H_t(\beta) - \pi_\beta E H_t \right) P(dt) = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(H_t(\alpha) - \int_0^{2\pi} H_s(\alpha) P(ds) \right) \left(H_t(\beta) - \int_0^{2\pi} H_s(\beta) P(ds) \right) P(dt) = \\
 &= \int_0^{2\pi} H_t(\alpha) H_t(\beta) P(dt) - \int_0^{2\pi} H_s(\alpha) P(ds) \int_0^{2\pi} H_s(\beta) P(ds). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай, когда P – равномерное распределение на S^1 . Следующая теорема является основным результатом данной работы.

Теорема 4.6. Если P – нормированная мера Лебега на S^1 , то для любого фиксированного $a \in (0, \frac{1}{2})$ реализация предельного процесса $Z(t)$ с вероятностью 1 имеет непрерывную производную $Z'(t)$, которая удовлетворяет условию Гельдера с показателем a .

Доказательство. При $0 \leq \beta - \alpha \leq \pi$ имеем:

$$\begin{aligned}
 r_Z(\alpha, \beta) &= \int_{\beta - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} \cos(t - \alpha) \cos(t - \beta) \frac{1}{2\pi} dt - \\
 &- \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} \cos(s - \alpha) \frac{1}{2\pi} ds \int_{\beta - \frac{\pi}{2}}^{\beta + \frac{\pi}{2}} \cos(s - \beta) \frac{1}{2\pi} ds = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\beta - \frac{\pi}{2}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} (\cos(2t - \alpha - \beta) + \cos(\beta - \alpha)) dt - \frac{1}{\pi^2} = \\
 &= \frac{1}{4\pi} (\sin(\beta - \alpha) + (\pi - (\beta - \alpha)) \cos(\beta - \alpha)) - \frac{1}{\pi^2} = \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} + \frac{(\beta - \alpha)^3}{12\pi} + O((\beta - \alpha)^4), \quad \beta - \alpha \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $Z(t)$ стационарен (в широком смысле), и его ковариационная функция имеет вид:

$$r_Z(h) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} - \frac{|h^2|}{8} + \frac{|h^3|}{12\pi} + O(|h|^4), \quad h \rightarrow 0.$$

Следовательно, (см. [5], стр. 179) у процесса $Z(t)$ с вероятностью 1 существует непрерывная выборочная производная $Z'(t)$. Ее ковариационная функция $r_{Z'}$ выражается через r_Z (см. [6], стр. 255) следующим образом:

$$r_{Z'}(h) = -\frac{d^2 r_Z(h)}{dh^2} = \frac{1}{4} - \frac{|h|}{2\pi} + O(|h|^4), \quad h \rightarrow 0.$$

Из вида $r_{Z'}$ вытекает (см. [5], стр. 180), что $\forall a \in (0, \frac{1}{2})$ выборочные функции процесса $Z'(t)$ с вероятностью 1 удовлетворяют условию Гельдера с показателем a . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Александров, К теории смешанных объемов выпуклых тел, I, III, *Мат. сб.*, 2, No. 5, 1937, 947-972, *Мат. сб.*, 3, No. 1, 1938, 27-46.
2. W. Weil, *An application of the CLT for Banach-space-valued random variables to the theory of random sets.* — *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 60, No. 2 (1982), 203-208.
3. A. Araujo, E. Giné, *The CLT for real and Banach random variables.* New York-Chichester-Brisbane-Toronto, Wiley 1980.
4. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, II. М., Мир, 1967.
5. Г. Крамер, М. Лидбеттер, *Стационарные случайные процессы.* М., Мир, 1969.
6. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* М., Наука, 1977.
7. А. М. Вершик, Ю. А. Давыдов, *Выпуклые перестройки случайных ломаных.* в печати.

Vilkov B. N. Asymptotics of random convex polygones.

The article concerns the limit shape of random convex polygonal lines in the plane, as long as their edges are independent and identically distributed, with finite first moment. The smoothness of the limit curve depends on some properties of the distribution. The limit curve is defined by the projection of the distribution onto the unit circle. This correspondence between limit curves and measures on the unit circle is proved to be a bijection.

The emphasis is on limit distributions of deviations of random polygonal lines from a limit curve. The normalized differences of Minkowski support functions converge to a limit process which is gaussian. Its covariance can

be found in terms of initial distribution. In case of uniform distribution on the unit circle, a formula for covariance is found. The main result is that a.s. sample functions of the limit process have continuous first derivative satisfying Hölder condition of order α , for any fixed $0 < \alpha < 1/2$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 июня 1995г.