И. А. Пушкарев

РЕШЕТКИ ИДЕАЛОВ МУЛЬТИЗИГЗАГОВ И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ФИБОНАЧЧИЕВЫХ РАЗБИЕНИЙ

Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = 2, \ldots$ – последовательность чисел Фибоначчи. Разбиение натурального числа n на различные числа Фибоначчи назовем фибоначчиевым разбиением n.

В работе показано: частично-упорядоченное (по измельчению) множество всех фибоначчиевых разбиений n есть дистрибутивная решетка специального вида – решетка идеалов мультизигзага.

На основе этого факта получено несколько результатов о виде коэффициентов $a_k(z)$ разложения в ряд Тейлора бесконечного произведения:

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1 + zq^{u_i}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z)q^k$$

при z, равном $-1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm i$. Получена также верхняя оценка для $a_k(1)$. Результаты для $z \pm 1$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ частично были получены ранее в работах [1, 5, 6], а также А. М. Вершиком (неопубликовано), случай $z = \pm i$ рассмотрен, по-видимому, впервые.

1 Введение

В первой части данной работы исследуется структура множества всех фибоначчиевых разбиений некоторого натурального числа.

Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{i+2} = u_{i+1} + u_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$ – последовательность чисел Фибоначчи.

Определение. *Фибоначчиевым разбиением $n \in \mathbb{N}$ называется конечное подмножество λ множества $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, такое, что $\sum\limits_{u_j \in \lambda} u_j = n$. Множество всех конечных подмножеств $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ обозначим Φ, а множество всех фибоначчиевых разбиений n – $\Phi(n)$. Тот факт, что λ "разбивает" именно n, будем записывать одним из двух способов: $\lambda \in \Phi(n)$ или $\lambda \vdash n$.*

Нам будет удобно рассматривать более общую ситуацию (по этому поводу см. [2]), именно: пусть $\mathbb{G}$ – абелева группа со счетным множеством образующих $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и набором определяющих соотношений:

$$\omega_{j+2} = \omega_{j+1} + \omega_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

На $\mathbb{G}$ действует естественно связанная с этой системой образующих бесконечная циклическая группа автоморфизмов $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$i_k(\omega_j) = \omega_{j+k}. \tag{1.2}$$

В силу (1.1):

$$\omega_j = F_{j-1}\omega_0 + F_j\omega_1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

где $(F_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ – "двусторонняя" последовательность чисел Фибоначчи:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

так что

(а) $\forall i \in \mathbb{N} \quad u_i = F_{i+1}$

(б) $\forall i \in \mathbb{N} \quad F_{-i} = (-1)^i F_i$

Соответственно:

$$\mathbb{G} = \mathbb{Z}\cdot\omega_0 \oplus \mathbb{Z}\cdot\omega_1. \tag{1.4}$$

Удобство этого подхода состоит в том, что он позволяет рассматривать с единых позиций сразу несколько интересующих нас случаев:

(i) Изоморфизм $I : \mathbb{G} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, заданный равенствами:

$$I(\omega_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I(\omega_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

переводит последовательность $(\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ в последовательность $\left(\begin{pmatrix} F_{j-1} \\ F_j \end{pmatrix}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$, а последовательность $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ автоморфизмов $\mathbb{G}$ – в последовательность автоморфизмов $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ с матрицами:

$$\begin{pmatrix} F_{k-1}, & F_k \\ F_k, & F_{k+1} \end{pmatrix} = T^k, \quad \text{где} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Если рассмотреть $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ как подмножество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, то (см. [2]) можно заметить, что точки $\begin{pmatrix} F_{j-1} \\ F_j \end{pmatrix}$ – суть целые точки "верхней", если i нечетно, или "правой", если i четно, ветвей пары сопряженных гипербол:

$$x^2 - xy - y^2 = \pm 1, \tag{1.7}$$

изображенных в системе координат с обычным расположением осей.

(ii) Изоморфизмы I_τ и $I_{-\tau^{-1}} : \mathbb{G} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$, где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, заданные равенствами:

$$I_\tau(\omega_0) = I_{-\tau^{-1}} = 1, \quad I_\tau(\omega_1) = \tau, \quad I_{-\tau^{-1}}(\omega_1) = -\tau^{-1}, \tag{1.8}$$

переводят последовательность $(\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ в последовательности $(\tau^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ и $((-\tau)^{-j})_{j\in\mathbb{Z}}$ соответственно, а последовательность автоморфизмов $(i_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ – в последовательности автоморфизмов умножения на τ^k и $(-\tau)^{-k}$.

(iii) Гомоморфизм $L : \mathbb{G} \to \mathbb{Z}$, заданный равенствами:

$$L(\omega_0) = u_1 = 1, \quad L(\omega_1) = u_2 = 2, \tag{1.9}$$

переводит последовательность $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$, где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, в последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$; очевидно

$$\operatorname{Ker} L = \{2m\omega_0 - m\omega_1 \mid m \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.10}$$

В контексте вышеизложенного полезно несколько расширить понятие фибоначчиева разбиения.

Определение. *Пусть $\mathbb{G}$ – построенная выше группы, $\mathbb{G}_1$ – произвольная абелева группа и $\psi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}_1$ – сюрвективный гомоморфизм.*

(а) *Двусторонним фибоначчиевым разбиением $\alpha \in \mathbb{G}_1$ назовем конечное подмножество λ множества $\{\psi(\omega_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$, такое, что $\sum\limits_{m\in\lambda} m = \alpha$. Множество всех конечных подмножеств $\{\psi(\omega_j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обозначим Φ', а множество всех двусторонних фибоначчиевых разбиений $\alpha \in \mathbb{G}_1$ – $\Phi'(\alpha)$.*

(б) *Односторонним фибоначчиевым разбиением α назовем конечное подмножество λ множества $\{\psi(\omega_j)\}_{j\in\mathbb{N}_0}$, такое, что*

$$\sum_{m\in\lambda} = m\alpha.$$

Множество всех конечных подмножеств $\{\psi(\omega)\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ обозначим Φ, а множество всех односторонних фибоначчиевых разбиений α – $\Phi(\alpha)$.

В обоих случаях: $\lambda \in \Phi'(\alpha)$ или $\lambda \in \Phi(\alpha)$ – будем также писать: $\lambda \vdash \alpha$.

Эта работа почти исключительно посвящена односторонним разбиениям, которые мы будем для краткости называть просто фибоначчиевыми разбиениями. Ключевую роль в ее появлении сыграл замечательный факт, обнаруженный Ф. Вайнштейном в ходе вычислительного эксперимента и доказанный разными способами им (см. [1]) и А. М. Вершиком (неопубликовано); возможно, он был обнаружен независимо и кем-то еще. Состоит этот факт в том, что числа $a_1, a_2, \ldots$, определенные равенством:

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1-q^{u_i}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k q^k, \tag{1.11}$$

все суть 0 или ± 1.

В работе [1] исследована некоторая "окрестность" теоремы (1.11), т. е. приведены ее доказательство и доказаны некоторые родственные факты, например:

(а) Пусть $\Psi(n)$ – число ненулевых a_j среди $a_1 \ldots a_n$. Тогда существует предел:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Psi(n)}{n} = 0 \tag{1.12}$$

(б) Пусть числа $b_1 \ldots b_k \ldots$ определены равенством:

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1+q^{u_i}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k q^k, \quad \text{тогда} \quad b_k \leqslant \sqrt{k+1}. \tag{1.13}$$

Основная цель данной работы – показать, что для получения результатов типа теорем (1.11), (1.12) и (1.13) весьма полезен подход, основанный на факте, именуемом в работе "структурной теоремой для решетки фибоначчиевых разбиений": будучи упорядочено по измельчению, $\Phi(\alpha)\,(\alpha \in \mathbb{G})$ становится дистрибутивной решеткой простого вида – решеткой идеалов частично-упорядоченного (далее, для краткости: ч.у.-) множества, именуемого в данной статье мультизигзагом. Из этой теоремы при помощи вполне элементарных комбинаторных рассуждений и известного метода трансфер-матрицы (см., например, [3]) удается вывести довольно большое число результатов перечислительного характера о фибоначчиевых разбиениях, которые, будучи записаны на языке производящих функций, превращаются в теоремы типа (1.11). Этому посвящена вторая часть статьи. При завершении подготовки рукописи к печати автору стало известно о статьях [5] и, в особенности, [6], к которой данная работа довольно близка по духу. В связи с этим необходимо заметить:

(1) Существенная часть следствия (5.20) (см. далее), и, в частности, теорема (1.11) были получены в работе [5].

(2) Частично-упорядоченные по измельчению множества фибоначчиевых разбиений, по-видимому, впервые появились в работе [6], основанной на аналоге теоремы (5.2).

(3) Наиболее существенное отличие данной работы от статей [1, 5] и [6] состоит в систематическом использовании решеточного подхода. "Решеточная" теорема (4.3) дает простой и естественный способ получения детальной информации о ч.у.-множествах фибоначчиевых разбиений.

Автор благодарит А. М. Вершика за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор также признателен Н. Сидорову, ознакомившему его со статьей [6], и Д. Прокофьеву – за весьма полезное обсуждение 6 и 7 частей работы. Работа написана при финансовой поддержке гранта AMS.

2. Разреженные разбиения

Определение. *Назовем фибоначчиево разбиение λ элемента α некоторого $\mathbb{G}_1$ – гомоморфного (при гомоморфизме $\psi : \mathbb{G} \to \mathbb{G}_1$) образа $\mathbb{G}$ разреженным, если $\forall \psi(\omega_i),\ \psi(\omega_j) \in \lambda \quad |i-j| \geqslant 2$.*

Мотивировкой для введения этого понятия может служить классическая теорема Закендорфа (см., например, [4]):

Теорема 2.1. *$\forall n \in \mathbb{N}$ существует единственное $\lambda = \lambda^*(n)$ – разреженное фибоначчиево разбиение n:*

$$n = u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_r} \quad k_i - k_{i+1} \geqslant 2, \quad k_r \geqslant 1.$$

В качестве другого мотивирующего примера приведем результат из статьи [2]:

Теорема 2.2. *Пусть*

$$\mathbb{G}^+ = \{m_0\omega_0 + m_1\omega_1 \in \mathbb{G} | m_i \in \mathbb{Z},\ \tau^{-1}m_0 + m_1 \geqslant 0\}, \qquad \text{где} \quad \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда:

$\forall \alpha \in \mathbb{G}^+$ единственным образом представимо в виде:

$$\alpha = \omega_{k_1} + \ldots + \omega_{k_r}, \quad k_i - k_{i+1} \geqslant 2.$$

Любопытно, что имеет место "гибрид" теорем 2.1 и 2.2.

Теорема 2.3. *Пусть*

$$S = \{m_0\omega_0 + m_1\omega_1 \in \mathbb{G}^+ | \tau(m_0 - \tau) < m_1 < \tau(m_0 + 1)\}$$

$\forall\alpha \in S$ существует единственное $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ – разреженное разбиение α:

$$\alpha = \omega_{k_1} + \ldots + \omega_{k_r} \quad k_i - k_{i+1} \geqslant 2, \quad k_r \geqslant 0.$$

Доказательство. (а) Заметим: ортогональная проекция $I(\omega_j)$ на прямую $\tau^{-1}x + y = 0$ равна:

$$\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}(-\tau)^{-j}, \tag{2.4}$$

поэтому проекция на эту прямую любой суммы вида $I(\omega_{k_1}) + \ldots + I(\omega_k)$, $k_1 > k_2 > \ldots > k_r \geqslant 0$, лежит в отрезке:

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}(\tau^{-1}+\tau^{-3}+\ldots), \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}(1+\tau^{-2}+\tau^{-4}+\ldots)\right] = \\ &\qquad = \left[-\frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}, \frac{\tau^2}{\sqrt{1+\tau^2}}\right], \end{aligned} \tag{2.5}$$

значит сама сумма $\omega_{k_1} + \ldots + \omega_{k_r}$ лежит в S.

(б) Расстояние между точками пересечения прямой:

$$x + 2y = n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

с прямыми $y = \tau(x - \tau)$ и $y = \tau(x+1)$ равно $\sqrt{5}$, т. е. расстоянию между любыми двумя соседними целочисленными точками прямой (2.6). Следовательно, каждая прямая (2.6) имеет внутри $I(S)$ ровно одну целую точку.

(в) Пусть $u_{k_1} + \ldots + u_{k_r} = n \in \mathbb{N}$ – разреженное разбиение. Тогда $\omega_{k_1-1} + \ldots + \omega_{k_r-1}$ лежит в S ввиду (а). С другой стороны: $L((\omega_{k_1-1} + \ldots + \omega_{k_r-1}) - n\omega_0) = 0$, т. е. $\alpha = \omega_{k_1-1} + \ldots + \omega_{k_r-1}$ таково, что $I(\alpha)$ – единственная целая точка прямой $x + 2y = n$, лежащая внутри $I(S)$. Осталось только заметить, что через любую целую точку внутри $I(S)$ можно провести прямую вида (2.6), проходящую через точку $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. •

Из теоремы 2.3 легко вывести теорему 2.2:

Пусть $\mathcal{T}$ – автоморфизм $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ с матрицей $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда при четном k:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-k}S = \Big\{ &m_0\omega_0 + m_1\omega_1 \in \mathbb{G}^+ \mid \tau m_0 - \\ &- \sqrt{5}\frac{\tau^{k+2}}{\tau^2+1} < m_1 < \tau m_0 + \sqrt{5}\frac{\tau^{k+3}}{\tau^2+1} \Big\}; \end{aligned} \tag{2.7}$$

соответственно, при нечетном k:

$$\mathcal{T}^{-k}S = \Big\{ m_0\omega_0 + m_1\omega_1 \in \mathbb{G}^+ \mid \tau m_0 - \\ - \sqrt{5}\frac{\tau^{k+3}}{\tau^2+1} < m_1 < \tau m_0 + \sqrt{5}\frac{\tau^{k+2}}{\tau^2+1} \Big\}. \quad (2.8)$$

В силу (2.7) и (2.8):

$$\mathbb{G}^+ = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{T}^{-k}S, \quad (2.9)$$

Осталось заметить, что для всякого $\alpha \in \mathcal{T}^{-k}S$ теорема 2.2, очевидно, верна. Более того, теорема 2.3 позволяет дать алгоритм построения разреженного двустороннего разбиения $\alpha \in \mathbb{G}^+$:

(1) Сравнивая $\alpha = m_0\omega_0 + m_1\omega_1$ с (2.7) и (2.8), находим наименьшее (или какое-нибудь) $k \in \mathbb{N}_0$, такое, что $\alpha \in \mathcal{T}^{-k}S$.

(2) Применим к $L(\mathcal{T}^k\alpha) = m_0' + 2m_1'$ известный рекурсивный алгоритм построения закендорфского разбиения.

(3) Пусть $m_0' + 2m_1' = u_{k_1} + \ldots + u_{k_r}$, $k_i - k_{i+1} \geqslant 2$, $k_r \geqslant 1$, тогда $\alpha = \omega_{k_1-1-k} + \ldots + \omega_{k_r-1-k}$ – искомое разреженное двустороннее фибоначчиево разбиение α.

Замечание. Теоремы 2.2 и 2.3 тривиальным образом обращаются.

3. Частичный порядок на $\Phi(\alpha)$

Элементы $\Phi(\alpha)$ будем записывать в виде: $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, $\lambda_i = \omega_{k_i}$, $k_1 > k_2 > \ldots > k_n \geqslant 0$. Зададим на $\Phi(\alpha)$ два взаимосвязанных бинарных отношения:

Определение. (I) *Пусть $\lambda, \eta \in \Phi(\alpha)$ – удовлетворяют*

$$\begin{aligned} \lambda &= (\eta \setminus (\omega_k)) \cup (\omega_{k-1}, \omega_{k-2}) \\ \eta &= (\lambda \setminus (\omega_{k-1}, \omega_{k-2})) \cup (\omega_k). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда будем писать: $\lambda \lessdot \eta$, и говорить: η накрывает λ. Кроме того, в этой ситуации будем писать: $\eta/\lambda = k$.

(II) *Пусть $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, $\eta = (\eta_1 \ldots \eta_s) \in \Phi(\alpha)$. λ есть измельчение η ($\lambda \leqslant \eta$) тогда и только тогда, когда существует множество $(\lambda^i)_{i=1}^s$ подмножеств λ, удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad \forall i \in [1 \ldots s] \quad \lambda^i \vdash \eta_i; \\ &\text{(b)} \qquad \lambda^i \cap \lambda^j = \varnothing \quad \textit{при} \quad i \neq j; \quad \bigcup_{i=1}^s \lambda^i = \lambda. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Очевидно, $\leqslant$ – частичный порядок на $\Phi(\alpha)$.

Напомним: пусть $(P, \trianglelefteq)$ – ч.у.-множество, $a, b \in P$. Тогда b накрывает $(a \triangleleft b)$, если:

(а) $a \trianglelefteq b$, $a \neq b$

(б) $\forall c \in P$ $a \trianglelefteq c \trianglelefteq b \Longrightarrow c = a$ или $c = b$. Бинарное отношение $\triangleleft$ называется отношением накрытия частичного порядка $\trianglelefteq$.

Теорема 3.3. *Отношение $<\cdot$ есть отношение накрытия частичного порядка $\leqslant$ на $\Phi(\alpha)$.*

Доказательство. (а) Пусть $\lambda <\cdot \eta$, $\xi \in \Phi(\alpha)$ $\lambda \leqslant \xi \leqslant \eta$. Тогда $\#\lambda \leqslant \#\xi \leqslant \#\eta = \#\lambda + 1$, поэтому $\xi = \lambda$ или $\xi = \eta$.

Нам потребуются три леммы:

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha \in S$, $\lambda^*(\alpha) = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \vdash \alpha$, $\lambda_1 = \omega_k$. Тогда $\forall \eta \in \Phi(\alpha)$ $\quad \eta_1 = \omega_k$ или ω_{k-1}.*

Доказательство. Рассмотрим $L(\eta) = (L(\eta_1), \ldots, L(\eta_s)) \vdash L(\alpha)$, $L(\lambda^*(\alpha)) = (L(\lambda_1), \ldots, L(\lambda_n)) = \lambda^*(L(\alpha))$. Если $\eta \neq \omega_k$, ω_{k-1}, то возможны два случая: $\eta = \omega_l$ и

(а) $l \geqslant k+1 \Longrightarrow L(\alpha) = L(\eta_1) + \ldots \geqslant L(\eta_1) = L(\omega_l) = u_{l+1} > u_{k+2} - 1 = u_{k+1} + u_{k-1} + u_{k-3} + \ldots \geqslant L(\lambda_1) + \ldots + L(\lambda_n) = L(\alpha)$

(б) $l \leqslant k-2 \Longrightarrow L(\alpha) = L(\eta_1) + \ldots + L(\eta_s) \leqslant u_1 + \ldots + u_{l+1} \leqslant u_1 + \ldots + u_{k-1} = u_{k+1} - 2 < u_k = L(\lambda_1) \leqslant L(\lambda_1) + \ldots + L(\lambda_n) = L(\alpha)$.

Обе мыслимые возможности невыполнения условия леммы сведены к противоречию, тем самым лемма доказана. •

Следующая лемма доказывается тривиальной индукцией:

Лемма 3.5. *Пусть $(\omega_k) \neq \lambda \in \Phi(\omega_k)$. Тогда $\exists s \in [1 \ldots [\frac{k-1}{2}]]$:*

$$\lambda = (\omega_{k-1}, \omega_{k-3}, \ldots, \omega_{k-2s+3}, \omega_{k-2s+1}, \omega_{k-2s});$$

иными словами $(\Phi(\omega_k), \leqslant)$ – конечная цепь. •

Пусть $\lambda \leqslant \eta$, $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)$, $\eta = (\eta_1 \ldots \eta_s)$; $(\lambda^i)_{i=1}^s$ – некоторое семейство подмножеств λ, удовлетворяющее условиям (3.2).

Назовем его редуцированным, если $\forall \eta_l \in \lambda \cap \eta \quad \lambda^l = (\eta_l)$. Следующая лемма тривиальна.

Лемма 3.6. *Для любой пары $\lambda \leqslant \eta$ существует редуцированное семейство $(\lambda^i)_{i=1}^s$, удовлетворяющее условиям* (3.2). •

(б) Пусть $\triangleleft$ есть отношение накрытия частичного порядка $\leqslant$. Достаточно (в силу (а)) проверить: $\lambda \triangleleft \eta \Longrightarrow \lambda <\cdot \eta$. Итак, пусть $\lambda \triangleleft \eta$.

(в) Пусть $\lambda \cap \eta = \varnothing$. Покажем: $\exists k \in \mathbb{N}$, такое, что $\eta = (\omega_k)$, $\lambda = (\omega_{k-1}, \omega_{k-2})$. Если это не так, возможны два случая:

сл. 1 $\#\eta \geqslant 2$ ($\Longrightarrow \#\lambda \geqslant 3$). Тогда $\lambda^1 \subsetneqq \lambda$, $\lambda^1 \cap \eta = \varnothing$. Положим: $\xi = (\eta \setminus (\eta_1)) \cup \lambda^1$. Тогда $\lambda \leqslant \xi \leqslant \eta$, $\lambda \neq \xi \neq \eta$ противоречит условию $\lambda \lhd \eta$.

сл. 2 $\#\eta = 1$, $\#\lambda \geqslant 3$. Тогда мы находимся в условиях леммы 3.5, $s \geqslant 2$, и $\lambda \leqslant (\omega_{k-1}, \omega_{k-2}) \leqslant (\omega_k) = \eta$, $\lambda \neq (\omega_{k-1}, \omega_{k-2})$ противоречит условию $\lambda \lhd \eta$.

Следовательно, если $\lambda \cap \eta = \varnothing$, $\lambda \lhd \eta$, то $\lambda \lessdot \eta$.

(г) Пусть $\lambda \lhd \eta$. Это возможно тогда и только тогда, когда $(\lambda \setminus (\lambda \cap \eta)) \lhd (\eta \setminus (\lambda \cap \eta))$, но $(\lambda \setminus (\lambda \cap \eta)) \cap (\eta \setminus (\lambda \cap \eta)) = \varnothing$, т. е. в силу (в) $(\lambda \setminus (\lambda \cap \eta)) \lessdot (\eta \setminus (\lambda \cap \eta))$, откуда $\lambda \lessdot \eta$. Теорема доказана полностью. •

Следствие 3.7. $\forall \alpha \in S$ $\lambda^*(\alpha)$ – *единственный максимальный элемент ч.у.-множества* $(\Phi(\alpha), \leqslant)$.

Доказательство. Очевидно: λ – максимальный элемент в $(\Phi(\lambda, \leqslant)$ тогда и только тогда, когда не существует $\eta \rhd \lambda$, т.е. $\eta \gtrdot \lambda$, т.е. $\lambda = \lambda^*(\alpha)$ •

4. Структурная теорема

4.1. Формулировка.

Пусть $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \varepsilon_k \omega_k$, при этом $\varepsilon_i = 0$ или 1, $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} = 0$ $\forall i \in [1 \dots k-1]$, $\varepsilon_k = 1$, так что мы имеем дело с разреженным разбиением $\lambda^*(\alpha) = (\omega_k, \dots)$. Обозначим $\beta^*(\alpha)$ слово $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_k$ в алфавите $\{0,1\}$ (далее $\{0,1\}$ – слово). Символом $\mathbb{B}^{n+1}$ обозначим множество всех $\{0,1\}$ слов $\beta = \beta_0 \dots \beta_n$.

Определение. $\beta = \beta_0 \dots \beta_n \in \mathbb{B}^{n+1}$ *назовем:*

(1) *Тривиальным, если* $\beta = (0)^{l_1}(10)^{l_2}(1)^{l_3}$ $l_1, l_3 = 0$ *или* 1, $l_2 \in \mathbb{N}_0$.

(2) *Примитивным, если* $\beta_0 = 0$, $\beta_n = 1$, $\beta_j = 1 \Longrightarrow j$ *четно.*

Замечание. Длина $n+1$ примитивного слова из $\mathbb{B}^{n+1}$ есть нечетное число, не меньшее 3.

Нам потребуются два утверждения, доказательство которых тривиально и потому опускается:

Лемма 4.2. (I) $\forall \alpha \in S$ *существует единственный набор* $\{0,1\}$ = *слов* $\beta^0 \beta^1 \dots \beta^k$ *такой, что*

(а) $\beta^*(\alpha) = \beta^0 \beta^1 \dots \beta^k$

(б) β^0 – *тривиально,* $\beta^1 \dots \beta^k$ – *примитивны.*

Далее, рассмотрим множество из четырех $\{0,1\}$ = *слов, играющее в дальнейшем ключевую роль:* $\mathfrak{A} = \{\gamma^0 = 001, \gamma^1 = 00, \gamma^2 = 01, \gamma^3 = 0\}$.

(II) *Всякое примитивное слово* β *допускает единственное представление в виде* $\beta = \delta^1 \dots \delta^s$ *такое, что*

(а) $\delta^i \in \mathfrak{A}\ \forall i \in [1 \dots s]$

(б) $\delta^i = \gamma^0$ *или* $\gamma^2 \Longrightarrow \delta^{i+1} = \gamma^2$ *или* γ^3

(в) $\delta^i = \gamma^1$ *или* $\gamma^3 \Longrightarrow \delta^{i+1} = \gamma^0$ *или* γ^1

(г) $\delta^1 = \gamma^0$ *или* γ^1, $\delta^s = \gamma^0$ *или* γ^2

Такое представление β *назовем каноническим разложением.* •

Определение. *Пусть* β – *примитивное слово,* $\beta = \delta^1 \dots \delta^s$ – *каноническое разложение. Рассмотрим ч.у.-множество* $(Z, \trianglelefteq)(\beta) = (\{\delta^1 \dots \delta^s\}, \trianglelefteq)$, *отношение накрытия* $\triangleleft$ *которого удовлетворяет условиям:*

(а) $\delta^i \triangleright \delta^{i+1}$, *если* $\delta^i = \gamma^0$, *или* $\delta^i = \delta^{i+1} = \gamma^2$, *или* $\delta^{i+1} = \gamma^3$

(б) $\delta^i \triangleleft \delta^{i+1}$ *в остальных случаях*

(в) $\delta^r \triangleright \delta^k \Longrightarrow r = k \pm 1$.

Если $(P\ \trianglelefteq)$ – ч.у.-множество, то множество его порядковых идеалов мы будем обозначать $J(P, \trianglelefteq)$, а (дистрибутивную) решетку его порядковых идеалов, упорядоченных по включению – $(J(P, \trianglelefteq), \subseteq)$ (см. по поводу определений [3]); символ $\dot{\oplus}$ будет обозначать прямую сумму (дизъюнктное объединение) ч.у.-множеств, а $\dot{\Pi}$ – их прямое произведение.

Следующее утверждение есть основной результат данной работы:

Теорема 4.3. *Пусть* $\alpha \in S$, $\beta(\alpha) = \beta^0 \dots \beta^k$ – *разложение из условия леммы* 4.2 (I) *Тогда*

$$(\Phi(\alpha), \trianglelefteq) \simeq \left(J\left(\dot{\bigoplus_{i=1}^{k}}(Z_1, \trianglelefteq)(\beta^i)\right), \subseteq\right) \simeq \dot{\prod_{i=1}^{k}}(J((Z, \trianglelefteq)(\beta^i)), \subseteq).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 4.3, сделаем некоторые замечания.

Определение. *Пусть* $(\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ – *ч.у.-множество,* $\mathcal{M} = (m_1, \dots, m_k)$, *такое, что отношение накрытия* $\triangleleft$ *частичного порядка* $\trianglelefteq$ *удовлетворяет условию:*

$$m_i \triangleright m_j \Longrightarrow j = i \pm 1. \qquad (4.4)$$

Тогда $(\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ *будем называть мультизигзагом.*

Пользуясь леммой 4.2 и определением $(Z, \trianglelefteq)(\beta)$, легко построить для любого мультизигзага $(\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ разреженное слово $\beta^*(\alpha)$ и, соответственно, $\alpha \in S$ такие, что в соответствии с теоремой 4.3. $(\Phi(\alpha), \trianglelefteq)$ есть решетка идеалов именно $(\mathcal{M}, \trianglelefteq)$, т. е. имеет место

Следствие 4.5. *Для всякого конечного ч.у.-множества* $\forall(Q, \trianglelefteq)$ *равносильны условия:*

(I) $(Q, \trianglelefteq)$ – *решетка идеалов некоторого мультизигзага.*

(II) $\exists \alpha \in S : (Q, \trianglelefteq) \simeq (\Phi(\alpha), \leqslant)$. •

4.6 Разложение в прямое произведение.

Пусть $\beta^*(\alpha) = \beta^0\beta^1 \dots \beta_1^k$, $\beta^i \in \mathbb{B}^{t_i}$, так что $\beta^i = \beta_{r_i}\ \beta_{r_i+1} \dots \beta_{r_{i+1}-1}$, где $r_i = \sum\limits_{l=0}^{i-1} t_l$. Положим $\sigma_i = \sum\limits_{j=0}^{t_i-1} \beta_{r_i+j}\omega_j$.

Вообще, пусть $\lambda \in \Phi(\alpha)$; запишем λ в виде $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{m} \zeta_j\omega_j$, где m – таково, что $\lambda^*(\alpha) = (\omega_m, \dots)$, так что, в силу леммы 3.2, ζ_{m-1} или ζ_m (но не обе) равна 1.

Положим $\beta(\lambda) = \zeta_0, \dots \zeta_m \in \mathbb{B}^{m+1}$, в часности $\beta(\lambda^*(\alpha)) = \beta^*(\alpha)$. Далее пусть $\beta(\lambda) = \beta^0(\lambda)\beta^1(\lambda) \dots \beta^k(\lambda)$, где

$$\beta^i(\lambda) = \beta(\lambda)_{r_i} \dots \beta(\lambda)_{r_{i+1}-1}$$

Рассмотрим $\sigma_i(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{t_i-1} \beta(\lambda)_{r_i+j}\omega_j \in S$

и вектор $\sigma(\lambda) = (\sigma_0(\lambda) \dots \sigma_k(\lambda))$, $\sigma(\lambda) \in S^{k+1}$.

В частности, $\sigma(\lambda^*(\alpha)) = (\sigma_0, \dots, \sigma_k) = \sigma$.

Лемма 4.7. $\forall\lambda \in \Phi(\alpha)\ \sigma(\lambda) = \sigma$.

Доказательство. Если это не так, то найдется пара $\lambda \lessdot \eta$ такая, что

(а) $\sigma(\lambda) \neq \sigma(\eta)$

(б) $\forall\xi \geqslant \eta\ \sigma(\xi) = \sigma$.

Пусть $\eta/\lambda = s$. Заметим

(1) Условия (а) и (б) возможны только, если $s = r_i$ или $r_i + 1$ для некоторого i.

(2) Номер i из (1) определен единственным образом, т.к. $t_i \geqslant 3$.

(3) Случай $s = r_i + 1$ невозможен: индукцией легко показать, что если $\lambda = (\dots\lambda_m) \vdash \alpha : \beta^*(\alpha)$ примитивен, то m – четно, т. е. $\beta(\lambda)$ начинается с четного числа нулей, а не с одного, как того требует этот случай.

(4) Случай $s = r_i$ также невозможен: в этом случае

$$\exists\lambda \vdash \sigma_{i-1}(\eta) : \beta(\lambda) = \dots 00,$$

что противоречит лемме 3.4. •

В силу леммы 4.7 всякому $\lambda \in \Phi(\alpha)$ можно сопоставить вектор $(\lambda^0 \dots \lambda^k)$, $\lambda^i \vdash \sigma_i$ так что $\beta^i(\lambda) = \beta(\lambda^i)$, откуда видно, что

$$(\Phi(\lambda), \leqslant) \simeq \prod_{i=0}^{\cdot k} (\Phi(\sigma_i), \leqslant). \tag{4.8}$$

Осталось только заметить, что $(\Phi(\sigma_0), \leqslant)$ – одноточечное ч.у.-множество (в силу тривиальности β^0), так что

$$(\Phi(\alpha, \leqslant) \simeq \prod_{i=1}^{\cdot k} (\Phi(\sigma_i), \leqslant).$$

4.10. Случай примитивного $\beta^*(\alpha)$.

На протяжении всего этого пункта $\alpha \in S$ таков, что $\beta^*(\alpha)$ – примитивно. Следующая лемма доказывается тривиальной индукцией, она очевидно, верна для $\lambda = \lambda^*(\alpha)$, и, если верна для λ, то верна и для $\eta \lessdot \lambda$.

Лемма 4.11. *Пусть $\lambda, \eta \in \Phi(\alpha)$, $\lambda \lessdot \eta$, тогда η/λ четно, больше 0.* •

$\forall \lambda \in \Phi(\alpha)$ рассмотрим слово $\tilde{\beta}(\lambda) = \beta_1(\lambda)\beta_3(\lambda)\dots\beta_{r-1}(\lambda) \in \mathbb{B}^{r/2}$, где $\beta(\lambda) \in \mathbb{B}^{r+1}$, допуская удобную вольность, буквы слова $\tilde{\beta}(\lambda)$ и слов из $\mathbb{B}^{r/2}$ будем нумеровать нечетными числами, начиная с единицы (а не числами $0 \dots \frac{r}{2} - 1$, как ранее).

Лемма 4.12. *Слово $\beta(\lambda)$ однозначно восстанавливается по слову $\tilde{\beta}(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \vdash \alpha^1$, $\nu \vdash \alpha - \alpha^1$ и μ, ν, α^1 таковы, что $\beta(\mu) = 0\beta_1(\lambda)\beta_3(\lambda)0\dots\beta_{r-1}(\lambda)0$, $\beta(\nu) = \beta_0(\lambda)0\dots0\beta_r(\lambda)$. Тогда μ однозначно восстанавливается по $\tilde{\beta}(\lambda)$, α^1 – по μ, а ν – по $\alpha - \alpha^1$ (т. к. ν разреженное). •

Рассмотрим булеву алгебру $(\mathbb{B}^{\frac{r}{2}}, \trianglelefteq)$, где $\beta^1 \trianglelefteq \beta^2 \iff \beta^1_i \geqslant \beta^2_i$ $\forall i \in [1, 3, \dots, r-1]$. В силу Леммы 4.12 отображение

$$\tilde{\beta} : (\Phi(\alpha), \leqslant) \to (\mathbb{B}^{\frac{r}{2}}, \trianglelefteq)$$

инъективно.

Лемма 4.13. *Отображение $\tilde{\beta}$ монотонно.*

Доказательство. Достаточно проверить $\lambda \lessdot \eta \Longrightarrow \tilde{\beta}(\lambda) \trianglelefteq \tilde{\beta}(\eta)$. Если $\eta/\lambda = y$ (y четно по Лемме 4.11), то $\tilde{\beta}_j(\lambda) = \tilde{\beta}_j$ при $j \neq s-1$; $\tilde{\beta}_{s-1}(\lambda) = 1$, $\tilde{\beta}_{s-1}(\eta) = 0 \Longrightarrow \tilde{\beta}(\lambda) \trianglelefteq \tilde{\beta}(\eta)$. •

В силу двух последних лемм, $(\Phi(\alpha), \leqslant)$ изоморфно индуцированному ч.у.-подмножеству $(\operatorname{Im}\tilde{\beta}, \trianglelefteq) \subset (\mathbb{B}^{\frac{r}{2}}, \trianglelefteq)$ (см. по поводу терминологии, например, [3]).

Свяжем $\tilde{\beta}$ с каноническим разложением $\beta^*(\alpha)$. По индукции легко показать: γ^0 и γ^1 всегда начинаются с четной буквы, а γ^2 и γ^3 – с нечетной, откуда вытекает следующее утверждение: каждый фрагмент канонического разложения содержит ровно одну букву с нечетным номером. В этом месте нам удобно допустить еще одну вольность: занумеровать фрагменты канонического разложения нечетными числами, начиная с единицы, так что буква с нечетным номером j лежит внутри j-того фрагмента.

Лемма 4.14. *Пусть $\beta \in \mathbb{B}^{\frac{r}{2}}$. Тогда равносильны условия:*

(1) $\beta \in \operatorname{Im}\tilde{\beta}$.

(2) *Если $\{i_1 \dots i_s\}$ – множество индексов всех букв 1 в β, то $\{\delta^{i_1}, \dots, \delta^{i_s}\}$ – идеал в $(\mathbb{Z}, \trianglelefteq)$ $(\beta^*(\alpha))$.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $\delta^i = \gamma^3$.

Если $\beta \in \operatorname{Im}\tilde{\beta}$, т. е. $\exists\lambda \in \Phi(\alpha) : \beta = \tilde{\beta}(\lambda)$ и при этом $\beta_i = 1$, то $\beta_{i\pm 2} = 1$: действительно, $\delta^{i-2} = \gamma^0$ или γ^2, $\delta^{i+2} = \gamma^0$ или γ^1. Далее, как нетрудно видеть: $\lambda <\cdot \eta$ $\tilde{\beta}_i(\lambda) = 1$, $\tilde{\beta}_i(\eta) = 0 \Longrightarrow \eta/\lambda = i+1$; в силу этого, если хоть один фрагмент δ^{i-2} или δ^{i+2} сохранил первоначальный вид, что $\beta_{i-1}(\eta)\beta_i(\eta)\beta_{i+1}(\eta) \neq 001$, а если оба они первоначальный вид поменяли, то $\beta_{i\pm 2} = 1$. Остальные нетривиальные случаи ($\delta^i = \gamma^1$ или γ^2) рассматриваются аналогично. •

В силу леммы 4.14. $(\operatorname{Im}\tilde{\beta}, \trianglelefteq) \simeq (J((Z, \triangleleft)(\beta^*(\alpha))), \subseteq)$, чем и завершается доказательство теоремы 4.3. •

Замечания (I). В любой конечной решетке, в частности, в любой решетке идеалов конечного мультизигзага существует единственный минимальный элемент, обозначим его для $(\Phi(\alpha), \leqslant)$ как $\lambda_*(\alpha)$. Он, очевидно, имеет вид

$$\begin{gathered}\alpha = \sum_{j=0}^{m} \zeta_j \omega_j, \quad \text{где} \quad \lambda^*(\alpha) = (\omega_m, \dots),\\ (1-\zeta_j)(1-\zeta_{j+1}) = 0 \quad \forall j \in [1 \dots m-1],\end{gathered} \tag{4.15}$$

назовем разбиения вида (4.15) плотными. Получилось

Следствие 4.16. *$\forall\alpha \in S$ существует единственное плотное разбиение $\alpha - \lambda_*(\alpha)$.* •

(II). Для решетки $(\Phi(\alpha), \leqslant)$ имеет место аналог теоремы Жордана–Гельдера:

Следствие 4.17. *Пусть* $\lambda_1\eta \in \Phi(\alpha)$, $\lambda \leqslant \eta$ *и*

$$\lambda = \xi_0 \lessdot \xi_1 \lessdot \ldots \lessdot \xi_k = \eta$$
$$\lambda = \zeta_0 \lessdot \zeta_1 \lessdot \ldots \lessdot \zeta_s = \eta$$

Тогда $k = s$ *и вектор* $(\zeta_s/\zeta_{s-1}, \zeta_{s-1}/\zeta_{s-2}, \ldots \zeta_1/\zeta_0)$ *есть некоторая перестановка вектора* $(\xi_k/\xi_{k-1}, \xi_{k-1}/\xi_{k-2}, \ldots \xi_1/\xi_0)$.

Доказательство. В случае такого α, что $\beta^*(\alpha)$ – примитивно достаточно заметить, что оба вектора, фигурирующее в условии – перестановки множества

$$\{2i+1 \in [1\ldots r-1] | \tilde{\beta}_{2i+1}(\lambda) = 1, \tilde{\beta}_{2i+1}(\eta) = 0\}$$

Общий случай тривиально вытекает из рассмотренного. •

(III). Описанная конструкция без труда переносится на случай соотношения (4.18) $\omega_{j+s} = \omega_{j+s-1} + \ldots + \omega_j$; дальнейшее обобщение "без потерь" наталкивается на серьезные трудности, причем потери очень велики.

5. Рангово-производящая функция $(\Phi(\alpha), \leqslant)$ и моноид $\Omega(z)$

Начнем с простого, но важного замечания:

Лемма 5.1. *Функция* $\rho : \Phi(\alpha) \to \mathbb{N}_0$, $\rho(\lambda) = \#\lambda - \#\lambda^*(\alpha)$ *– есть ранговая функция решетки* $(\Phi(\alpha), \geqslant)$ *– двойственной к* $(\Phi(\alpha), \leqslant)$. •

Пусть $(Z, \trianglelefteq)$ – произвольный зигзаг, $Z = \{z_1 \ldots z_m\}$, $m \geqslant 2$, причем вершины Z занумерованы в "правильном" порядке: $z_i \triangleright z_j \iff j = i \pm 1$. Положим

$$Z' = \{z_1, \ldots, z_{m-1}\},$$

$(Z' \trianglelefteq)$ – индуцированное ч.у.-подмножество $(z, \leqslant)$ (по поводу определения см. [3]). Далее:

$$J_k(Z, \trianglelefteq) = \{I \in J(Z, \trianglelefteq) | \#I = k\}, \; r_k(Z, \trianglelefteq) = \#J_k(Z, \trianglelefteq)$$
$$J'_k(Z, \trianglelefteq) = \{I \in J_k(Z, \trianglelefteq) | z_m \notin I\}, \; s_k(Z, \trianglelefteq) = \#J'_k(Z, \trianglelefteq)$$
$$W_{(Z,\trianglelefteq)}(q) = \sum_{k=0}^{m} r_k(Z, \trianglelefteq) q^k, \; V_{(Z,\trianglelefteq)}(q) = \sum_{k=0}^{m-1} s_k(Z, \trianglelefteq) q^k$$
$$A(Z, \trianglelefteq)(q) = \begin{pmatrix} W_{(z,\trianglelefteq)}(q) \\ V_{(Z,\trianglelefteq)(q)} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}[q] \times \mathbb{Z}[q]$$

Теорема 5.2. *Если* (I) $z_m \rhd z_{m-1}$, *то* $A_{(z,\unlhd)}(q) = \begin{pmatrix} 1+q, & -q \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ $A_{z',\unlhd)}(q)$

(II) *Если* $z_m \lhd z_{m-1}$, *то* $A_{z,\unlhd}(q) = \begin{pmatrix} q, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} A_{(z',\leqslant)}(q)$

Доказательство. Пусть $z_m \rhd z_{m-1}$. Тогда

$$J_k(Z,\unlhd) = J_k(Z',\unlhd) \cup \{I \cup \{z_m\} | \, I \in J_{k-1}(Z',\unlhd) \setminus J'_{k-1}(Z',\unlhd)\},$$

откуда

$$r_k(Z,\unlhd) =\rhd_k (Z',\unlhd) + (r_{k-1}(Z',\unlhd) - s_{k-1}(Z',\unlhd))$$

$$J'_k(Z,\unlhd) = J_k(Z',\unlhd) \Longrightarrow s_k(Z,\unlhd) = r_k(Z',\unlhd).$$

Соответственно,

$$W_{(z,\unlhd)}(q) = W_{(z',\unlhd)}(q) + q(W_{(z',\unlhd)}(q) - V_{(z',\unlhd)}(q))$$
$$V_{(z,\unlhd)}(q) = W_{(z',\unlhd)}(q).$$

Случай $z_m \lhd z_{m-1}$ рассматривается аналогично. •

Вместе с очевидным $A_{(\{z\},\unlhd)}(q) = \binom{1+q}{1}$, теорема 5.2 позволяет вычислить рангово-производящую функцию решетки идеалов любого зигзага; она же служит мотивировкой для введения следующего понятия:

Определение. *Символом* $\Omega(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ *будем обозначать мультипликативный моноид, порожденный матрицами:*

$$\begin{pmatrix} z+1, & -z \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \quad и \quad \begin{pmatrix} z, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Зададимся целью построить (при фиксированном $z \in \mathbb{C}$) множество $U(z)$, состоящее из всевозможных значений коэффициентов $A_{ij}(z)$ разложения в ряд бесконечного произведения:

$$\prod_{i=0}^{+\infty}(1 + zx^{F_{i-1}}y^{F_i}) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} A_{ij}(z)x^iy^j \tag{5.4}$$

Заметим,

$$A_{ij}(z) = \sum_{\lambda\in\Phi(\alpha)} z^{\#\lambda}, \quad где \quad \alpha = i\omega_0 + j\omega_1 \tag{5.5}$$

Пусть $\beta^*(\alpha) = \beta^0\beta^1\ldots\beta^k$ (в терминах леммы 4.2). Тогда, в силу теоремы 4.3, леммы 5.1 и известного свойства ранговопроизводящих функций ч.у.-множеств (см., например, [3]):

$$A_{ij}(z) = z^{\#\lambda^*(\alpha)} \prod_{i=1}^{k} W_{(z,\trianglelefteq)(\beta^i)}(z). \tag{5.6}$$

Из формулы (5.6) вытекает следующий рецепт построения $U(z)$:

(1) Пусть $T(z)$ – проекция на плоскость (комплексную) абсцисс полуорбиты $\Omega(z)\begin{pmatrix} z+1 \\ 1\end{pmatrix}$.

(2) Рассмотрим $T^*(z)$ – мультипликативное замыкание (т. е. множество всевозможных конечных произведений) множества $\{z\}\cup T(z)$.

Тогда (см. (5.6)) $T^*(z)$ содержит все $A_{ij}(z)$. Кроме того, если z-корень из единицы (а в дальнейшем это всегда будет так), то, очевидно, $T^*(z) = U(z)$.

В этом контексте известную важность приобретает вопрос о структуре $\Omega(z)$. Наиболее простая и важная задача этого типа состоит в следующем: когда $\Omega(z)$ есть конечная группа? И, напротив, насколько $\Omega(z)$ может отличаться от конечной группы? Ответы на эти два вопроса (если считать мерой похожести $\Omega(z)$ на конечную группу количество соотношений, приближенно или точно имеющих место в $\Omega(z)$) служат теоремы 5.7 и 5.17.

Теорема 5.7. (I) *Моноид $\Omega(z)$ является группой тогда и только тогда, когда z – корень из единицы, $z \neq 1$.*

(II) *Если $z \neq 1$ – корень из единицы, то группа $\Omega(z)$ конечна тогда и только тогда, когда z – одно из чисел: $\{-1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm i\}$, именно:*

$$\Omega(-1) = \Big\{ \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1\end{pmatrix},$$
$$\pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \Big\};$$

$$\Omega(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \Big\{\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \xi & \xi^5\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon\begin{pmatrix} \xi & \xi^5 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} \xi^4 & 0 \\ -1 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \xi^2 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} \xi^2 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon\begin{pmatrix} \xi^4 & \xi \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} \xi^2 & 0 \\ \xi^2 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} -1 & \xi \\ -1 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}\Big\},$$

где ε пробегает множество $\{1,\xi,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\xi^5\}$, ξ – (произвольный) первообразный корень шестой степени из единицы;

$$\Omega(\pm i)=\left\{\varepsilon\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i&1-i\\i+1&-i\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}-1&i+1\\0&1\end{pmatrix},\right.$$
$$\varepsilon\begin{pmatrix}1-i&-1\\-i&i\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i+1&-i\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i&1\\0&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i&1\\i&1-i\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon\begin{pmatrix}-1-i&i\\-1&i+1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i-1&1\\i&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i&1\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i&1\\i+1&-i\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon\begin{pmatrix}i&0\\i&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}-1&i+1\\i&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1&0\\-i&i\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}i&1-i\\i&-i\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1&0\\1-i&-1\end{pmatrix},$$
$$\varepsilon\begin{pmatrix}0&i\\1&0\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}0&i\\i&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}-i&i\\-1&i+1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}-1&1\\i-1&1\end{pmatrix},$$
$$\left.\varepsilon\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}0&1\\i&1-i\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}-i&i\\0&1\end{pmatrix},\varepsilon\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\},$$

где ε пробегает множество $\{1,i,-1,-i\}$; соответственно: $\#\Omega(-1)=12$, $\#\Omega(-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2})=72$, $\#\Omega(\pm i)=96$.

Доказательство. (а) Обе матрицы $\begin{pmatrix}z+1,&-z\\1,&0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}z,&1\\0,&1\end{pmatrix}$ имеют определитель z, так что $\Omega(z)$ – группа $\Longrightarrow$ z – корень из единицы.

(б) Нетрудно видеть:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}z,&1\\0,&1\end{pmatrix}^k&=\begin{pmatrix}z^k,&p_{k-1}(z)\\0,&1\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}z+1,&-z\\1,&0\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}p_k(z),&-zp_{k-1}(z)\\p_{k-1}(z),&-zp_{k-2}(z)\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{5.8}$$

где $k\geqslant 1$, $p_k(z)=1+z+z^2+\ldots+z^k$, $p_1(z)=0$, так что, действительно, если z – корень m-той степени из единицы, то:

$$\begin{pmatrix}z,&1\\0,&1\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}z+1,&-z\\1,&0\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.\tag{5.9}$$

Следовательно $\Omega(z)$ – группа, если z – корень из единицы.

(в) Заметим: матрица имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда ее собственные числа – корни из единицы и она приводится к диагональному виду. Далее:

$$(x-e^{i\psi})(x-e^{i\varphi})=x^2-(e^{i\psi}+e^{i\varphi})x+e^{i(\psi+\varphi)},$$

следовательно, если корни многочлена ax^2+bx+c – корни из единицы, то $\left|\frac{b}{a}\right| \leqslant 2$, $\left|\frac{c}{a}\right| = 1$, тогда как характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} z+1, & -z \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2+z, & 1 \\ z, & 1 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

равен

$$q^2-(1+z+z^2)q+z^2. \tag{5.11}$$

Нетрудно видеть, что если z_1 и z_2 – два различных первообразный корня степени m из единицы, то $\Omega(z_1) \simeq \Omega(z_2)$.

(г) Пусть z – первообразный корень степени $m \geqslant 7$ из еденицы, равный $e^{i\frac{2\pi}{m}}$. Тогда, как нетрудно видеть $|1+z+z^2| > 2$, т. е. собственные числа матрицы (5.10) не могут оба быть корнями из единицы и, значит, (5.10) имеет бесконечный порядок.

(д) Пусть $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ – первооообразный корень шестой степени из единицы.

Тогда

$$\begin{pmatrix} z, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z+1, & -z \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2+z+1, & -z^2 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z, & z^5 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

и, как нетрудно видеть

$$\begin{pmatrix} 2z, & z^5 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (k+1)z^k, & kz^{k-2} \\ kz^{k-1}, & (k-1)z^{k-3} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

т.е. матрица (5.12) имеет бесконечный порядок .

(е) Пусть $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Тогда

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} z+1, & -z \\ 1, & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} z, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}^2 = \\ = \begin{pmatrix} z^4=z^3+z^2, & z^3+2z^2+1 \\ z^3+z^2, & z^2+z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-z, & z^2+z-z^4 \\ z^3+z^2, & -z^4-z^3 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{5.14}$$

характеристический полином этой матрицы равен:

$$q^2-z^2q+(z^2+z), \tag{5.15}$$

и, т.к. $|z^2+z| > 1$, собственные числа (5.14) не могут оба быть корнями из единицы, следовательно, (5.14) имеет бесконечный порядок.

(ж) В том, что три оставшиеся группы $\Omega(-1), \Omega(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ и $\Omega(\pm i)$ есть как раз группы матриц, выписанные в условии теоремы можно убедиться непосредственно. •

Следствие 5.16. *Следующие три орбиты относительно $\Omega(z)$ конечны:*

(1) $\Omega(-1)\binom{0}{1} = \{\pm\binom{0}{1}, \pm\binom{1}{0}, \pm\binom{1}{1}\}$

(2) $\Omega\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \binom{\xi}{1}\ \{\varepsilon\binom{\xi}{1}, \varepsilon\binom{0}{1}, \varepsilon\binom{1}{0}, \varepsilon\binom{1}{1}\}$, *где* ε *пробегает* $1, \xi, \xi^2, -1, \xi^4, \xi^5$.

(3) $\Omega(\pm i)\binom{i+1}{1} =, \varepsilon\binom{i+1}{1}, \varepsilon\binom{1}{1-i}, \varepsilon\binom{i}{1}, \varepsilon\binom{1}{0}, \varepsilon\binom{0}{1}, \varepsilon\binom{1}{1}\}$, *где* ε *пробегает* $1, i, -1, -i$. •

Примером противоположного сорта может служить моноид $\Omega(1)$.

Теорема 5.17. *Моноид* $\Omega(1)$ – *свободный моноид, состоящий из целочисленных матриц, с образующими* $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Доказательство. Рассмотрим полуорбиту $\Omega(1)\binom{2}{1}$. Достаточно показать, что она является бинарным деревом. Заметим, что если вектор $\binom{k}{l}$ принадлежит этой полуорбите, то $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$.

Пусть для некоторого $\binom{k}{l}$ из $\Omega(1)\binom{2}{1}$ $\exists\binom{k_1}{l_1}$ и $\binom{k_2}{l_2}$ такие, что
$$\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix}$$
Тогда
$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 - l_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} k_2 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 - l_1 \\ k_1 \end{pmatrix},$$
что невозможно, т.к. $k_1 - l_1 < k_1$. •

Возвращаясь к следствию 5.16, обратим внимание на его простой комбинаторный смысл. •

Теорема 5.18. (I) *Пусть* $(\mathcal{M}, \trianglelefteq)$ – *произвольный мультизигзаг; положим*
$$a_i = \#\{I \in J(\mathcal{M}, \trianglelefteq) | \#I \equiv i \pmod 2\}, \quad i = 1, 2.$$
$$b_i = \#\{I \in J(\mathcal{M}, \trianglelefteq) | \#I \equiv i \pmod 3\}, \quad i = 1, 2, 3.$$
Тогда числа a_1 *и* a_2, *(соответственно* b_1, b_2 *и* b_3*) различаются попарно не более, чем на единицу.*

(II) *Пусть* $(Z, \trianglelefteq)$ – *произвольный зигзаг; положим:*
$$c_i = \#\{I \in J(Z, \trianglelefteq) | \#I \equiv i \pmod 4\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда числа c_1, c_2, c_3 *и* c_4 *различаются попарно не более, чем на единицу.* •

Следствие 5.19. *Пусть $z \in \mathbb{C}$, числа $A_{ij}(z)$ определены формулой* (5.4). *Тогда*

(1) $A_{ij}(z) = 0$ *при* $i\omega_0 + j\omega_1 \notin S$.

(2) *Все* $A_{ij}(-1)$ *суть 0 или* ± 1.

(3) *Все* $A_{ij}(\rho^{\pm})$ *суть 0 или* ξ^k, *где* $\rho^{\pm} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\xi = e^{i\frac{\pi}{3}}$, k *пробегает* $0 \dots 5$.

(4) *Все* $A_{ij}(\pm i)$ *суть элементы множества*

$$\mathbb{Z} \cup (i\mathbb{Z}) \cup ((i+1)\mathbb{Z}) \cup ((i-1)\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}. \quad \bullet$$

Следствие 5.20. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$ $v_1^{m,n} = m$, $v_2^{m,n} = n$,

$$v_{i+2}^{m,n} = v_{i+1}^{m,n} + v_i^{m,n} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Пусть числа $a_k^{m,n}(z)$ *определены равенством*

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1 + zx^{v_i^{m,n}}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{m,n}(z)x^k.$$

Тогда

(1) *Все* $a_k^{m,n}(-1)$ *при* $m \neq n$ *и* $m \neq 2n$ *суть 0 или* ± 1.

(2) *Все* $a_k^{m,n}(-1)$ *при* $m = n$ *или* $2n$ *суть 0*, $\pm 1, \pm 2$.

(3) *Все* $a_k^{m,n}(\rho^{\pm})$ *при* $m \neq n$ *и* $m \neq 2n$ *суть 0 или* ξ^k

(4) *Все* $a_k^{m,n}(\rho^{\pm})$ *при* $m = n$ *или* $2n$ *суть 0*, ξ^k $2\sigma^k$, $\xi^k(\xi + 1)$

(5) *Все* $a_k^{m,n}(\pm i)$ *при* $m \neq n$ *и* $m \neq 2n$ *суть элементы множества* $\mathbb{Z} \cup (i\mathbb{Z}) \cup ((i+1)\mathbb{Z}) \cup ((i-1)\mathbb{Z})$. $\bullet$

Доказательство. (совместное для теоремы 5.18 и следствий 5.19, 5.20) Теорема 5.18 и следствие 5.19 очевидно следуют из следствия 5.16, рецепта построения $U(z)$ как $T^*(z)$ и комбинаторного смысла коэффициентов $A_{ij}(z)$ как значений в z рангово производящих функций соответствующих ч.у.-множеств. Отметим только:

(а) $\Omega(\rho^+) = \Omega(\rho^-)$; $\Omega(i) = \Omega(-i)$

(б) Конечность $\Omega(i)$ означает лишь то, что $c_1 - c_3$, отличается от $c_2 - c_4$ не более, чем на единицу, остальное следует из конечности $\Omega(-1)$.

Для доказательства следствия 5.20 достаточно заметить, что прямая

$$mx + ny = l, \quad m, n, l \in \mathbb{N} \tag{5.21}$$

имеет не более двух целых точек внутри $I(S)$ и, если их действительно иногда (при некоторых l) бывает по две, то $m = n$ или $m = 2n$. $\bullet$

Замечание. Коэффициенты, отличные от возможных в случаях (1) и (3) следствия 5.19 действительно могут встречаться в случаях (2) и (4). Например, в случае (2):

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1 - x_i^{v^{1,1}}) = 1 - 2x + \dots$$

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1 - x^{v_i^{2,1}}) = 1 - x - x^2 + 2x^5 + \dots$$

6. Теорема о преобладании нулей

Теорема 6.1. *Пусть $\Psi_z(n)$ – количество ненулевых $a_j(z)$ среди $a_1(z)\dots a_n(z)$, где $a_j(z)$ суть $a_j^{1,2}(z)$ из следствия 5.20.*

Тогда существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\Psi_z(n)}{n} = 0 \quad \text{для} \quad z = -1, \rho^{\pm}, \pm i$$

Мы приведем по два различных доказательства для случая $z = -1$, $\rho^{\pm}$ и одно для случая $\pm i$. Для этого нам потребуется несколько однотипных утверждений. Пусть Ω_N – множество всех разреженных $\{0,1\}$ – слов длины N, у которых последняя буква есть 1, тогда $\#\Omega(N) = u_{N-1}$ в силу хотя бы теоремы 2.1 и известного утверждения: если $n \in [u_N, \dots, u_{N+1} - 1]$, то $\lambda^*(n) = (\lambda_1 \dots)$, где $\lambda_1 = u_N$.

(1) Слово $\beta = \beta^0\beta^1\dots\beta^k$ (разложено из условия леммы 4.2. (I)) назовем 1-типичным, если $\exists j \in [1..k] : \beta^j = 001$ и 2-типичным, если $\exists j \in [1..k] : \beta^j = 00001$ или 00101.

Множество всех 1-типичных (2-типичных) слов из Ω_N обозначим P_N^1 (P_N^2 соответственно).

(2) Слово $\beta = \beta^0\beta^1\dots\beta^k$ назовем (a,b) – плоским, если не более a фрагментов β^j слова β имеют длину $\geqslant b$, $(a,b) \in \mathbb{N}\times(2\mathbb{N}+1)$.

Пусть $Q_N^{a,b}$ – множество всех слов из Ω_N, не являющихся (a,b) – плоскими.

Лемма 6.2. *Существуют пределы*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\#P_N^1}{u_{N-1}} = 1, \quad \lim_{N\to+\infty}\frac{\#P_N^2}{u_{N-1}} = 1, \quad \lim_{N\to+\infty}\frac{\#Q_N^{a,b}}{u_{N-1}} = 1,$$

последний – для любой пары $(a,b) \in \mathbb{N}\times(2\mathbb{N}+1)$.

Доказательство. I. Рассмотрим случай P_N^1 .

Пусть $\beta \in P_N^1$. Тогда возможны следующие различные случаи.

(1) $\beta^k = 001$. Таких β в Ω_N имеется ровно $u_{N-4}+1$, т.к. либо $\beta^0\dots\beta^{k-1} \in \Omega_{N-3}$, либо $k=1$, $\beta^0 = 0^{l_1}(10)^{l_2}0$, где $l_1 = 0$ или 1, $l_2 \in \mathbb{N}_0$.

(2) Длина β_k равна $2t+1$, $t \geqslant 2$. Таких β имеется ровно $2^{t-1}\cdot f_{N-2t-1}$, где $f_m = \#P^1_m$. Соответственно

$$f_N = (u_{N-4}+1) + 2f_{N-5} + 4f_{N-7} + \ldots + 2^k f_{N-2k-3} + \ldots \tag{6.3}$$

С другой стороны

$$2f_{N-2} = 2(u_{N-6}+1) + 4f_{N-7} + \ldots + 2^k f_{N-2jk-3} + \ldots, \tag{6.4}$$

откуда, очевидно, следует:

$$f_N = 2f_{N-2} + 2f_{N-5} + u_{N-7} - 1. \tag{6.5}$$

Из этого, в свою очередь:

$$F^1(x) = \sum_{N=1}^{+\infty} f_N x^N = \left(\sum_{N=1}^{7} f_N x^N - 2x^2 \sum_{N=1}^{5} f_N x^N - 2x^5 \sum_{N=1}^{3} f_N x^N\right) + \frac{x^8+x^9}{1-x-x^2} - \frac{x^8}{1-x} + 2x^2F^1(x) + 2x^5F^1(x), \tag{6.6}$$

и, значит

$$F^1(x) = \frac{P(x)}{(1-x-x^2)(1-x)(1-2x^2-2x^5)}, \tag{6.7}$$

где $P(x)$ – некоторый полином от x.

По основной теореме гл.4 книги [3] это означает, что $\exists \gamma_i \in \mathbb{C}$ (конкретно – величины, обратные к корням знаменателя (6.7)), и $P_i(N)$ – полиномы от N такие, что

$$f_N = \sum_i P_i(N)\gamma_i^N, \tag{6.8}$$

и, следовательно, существует предел

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{f_N}{u_{N-1}} = g \in (0,1], \tag{6.9}$$

т.к., очевидно, $f_N \neq o(u_N)$ и все корни полинома $(1-x)(x^5-2x^3-2)$ по модулю меньше $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Далее, пусть $g_N = \frac{f_N}{u_{N-1}}$, тогда

$$g_N = 2g_{N-2}\frac{u_{N-3}}{u_{N-1}} + 2g_{N-5}\frac{u_{N-6}}{u_{N-1}} + \frac{u_{N-7}+1}{u_{N-1}}, \tag{6.10}$$

откуда
$$g = 2g\tau^{-2} + 2g\tau^{-5} + \tau^{-6}, \tag{6.11}$$
и, окончательно,
$$g = 1. \tag{6.12}$$
Случай P_N^1 рассмотрен.

(II). Рассмотрим случай P_N^2. Положим $f'_N = \#P_N^2$.

Пусть $\beta \in P_N^2$. Тогда возможны следующие случаи:

(1) $\beta^k = 001$. Таких β в P_N^2 имеется ровно f'_{N-3}

(2) $\beta^k = 00001$ или 00101. Таких β в P_N^2 имеется ровно $2(u_{N-6}+1)$ – аналогично (I) (1).

(3) β^k имеет длину $2t+1$, $t \geqslant 3$. Таких β в P_N^2 имеется ровно $2^{t-1} f'_{N-2t-1}$. Соответственно
$$f'_N = f'_{N-3} + 2(u_{N-6}+1) + 4f'_{N-7} + \ldots + 2^k f'_{N-2k-3} + \ldots \tag{6.13}$$
С другой стороны
$$2f'_{N-2} = 2f'_{N-5} + 4(u_{N-8}+1) + 8f'_{N-9} + \ldots, \tag{6.14}$$
откуда следует
$$f'_N = 2f'_{N-2} + f'_{N-3} - 2f'_{N-5} + 4f'_{N-7} + 2(u_{N-9}-1) \tag{6.15}$$

Действуя абсолютно аналогично случаю (I), приходим к тому, что существует предел
$$\lim_{N\to+\infty} \frac{f'_N}{u_{N-1}} = g' \in (0,1], \tag{6.16}$$
удовлетворяющий соотношению
$$g' = 2g'\tau^{-2} + g'\tau^{3} - 2g'\tau^{-5} + 4g'\tau^{-7} + 2\tau^{-8}, \tag{6.17}$$
откуда окончательно,
$$g' = 1. \tag{6.18}$$
Случай P_N^2 рассмотрен.

(III). Рассмотрим случай $Q_N^{a,b}$. Пусть $f_N^{a,b}$ – число слов из Ω_N, в которых имеется ровно a фрагментов β^i длины $\geqslant b$. Аналогично предыдущим пунктам:
$$f_N^{a,b} = f_{N-3}^{a,b} + 2f_{N-5}^{a,b} + \ldots + 2^{\frac{b-5}{2}} f_{N-b+2}^{a,b} + 2^{\frac{b-3}{2}} f_{N-b}^{a-1,b} + \ldots \tag{6.19}$$
$$2f_{N-2}^{a,b} = 2f_{N-5}^{a,b} + \ldots + 2^{\frac{b-3}{2}} f_{(N-2)-(b-2)}^{a,b} + 2^{\frac{b-1}{2}} f_{(N-2)-b}^{a-1,b} + \ldots \tag{6.20}$$
$$f_N^{a,b} = 2f_{N-2}^{a,b} + f_{N-3}^{a,b} + 2^{\frac{b-3}{2}} (f_{N-b}^{a-1,b} - f_{N-b}^{a,b}), \tag{6.21}$$

где, в случае $a = 0$, $f_N^{-1,b} \equiv 0\ \forall N$.

Соответственно,

$$F_{a,b}(x) = \sum_{N=1}^{+\infty} f_N^{a,b} x^N =$$

$$= \left(\sum_{N=1}^{b} f_N^{a,b} x^N - 2x^2 \sum_{N-1}^{b-2} f_N^{a,b} x^N - x^3 \sum_{N=1}^{b-3} f_N^{a,b} x^N \right) + \tag{6.22}$$

$$+2x^2 F_{a,b}(x) + x^3 F_{a,b}(x) + 2^{\frac{b-3}{2}} x^b F_{a-1,b}(x) - 2^{\frac{b-3}{2}} x^b F_{a,b}(x)$$

откуда

$$F_{a,b}(x) = \frac{P(x) + 2^{\frac{b-3}{2}} x^b F_{a-1,b}(x)}{(1 - 2x^2 - x^3 + 2^{\frac{b-3}{2}} x^b)} = \frac{Q(x)}{(1 - 2x^2 - x^3 + 2^{\frac{b-3}{2}} x^b)^{a+1}}, \tag{6.23}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ некоторые полиномы.

Осталось заметить: если модуль некоторого корня z полинома

$$x^b - 2x^{b-2} - x^{b-3} + 2^{\frac{b-3}{2}} \tag{6.24}$$

больше или равен τ, то $f_N^{a,b}$ будет расти быстрее u_{N-1}, что "физически" невозможно. Поэтому

$$f_N^{a,b} = \sum_i P_i(N) \gamma_i^N = o(u_N), \quad \text{т.к.} \quad |\gamma_i| < \sqrt{2} < \tau. \tag{6.25}$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{f_N^{a,b}}{u_{N-1}} = 0, \tag{6.26}$$

откуда непосредственно следует:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\# Q_N^{a,b}}{u_{N-1}} = 1. \quad \bullet \tag{6.27}$$

Для доказательства теоремы 6.1 в случаях $z = -1$ и $\rho^{\pm}$ осталось заметить, если среди β^i встречается 001 (соответственно: 00001 или 00101), то $(\Phi(\alpha), \leqslant)$ – решетка идеалов мультизигзага, равного прямой сумме зигзагов, один из которых есть одноэлементный (соответственно: двухэлементный) зигзаг, в котором $a_1 = a_2$ (соответственно $b_1 = b_2 = b_3$); следовательно (в силу формулы (5.6)) то же справедливо и для всего мультизигзага $\bullet$

Приведем теперь второе доказательство теоремы 6.1. Рассмотрим подробно случай $z = -1$.

Определение. *z-типом зигзага $(z, \trianglelefteq)$ назовем вектор $A_{(z,\trianglelefteq)}(z)$. Положим $\mathcal{D}(k)$ – число $(k+1)$-элементных зигзагов, имеющих один из четырех -1-типов: $\pm\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\pm\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.*

$\mathcal{O}(k)$ – число $(k+1)$-элементных зигзагов, имеющих один из оставшихся двух -1-типов: $\pm\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (см. следствие 5.16).

Тогда, в силу соотношений

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\pm1\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\pm1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\pm1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}-1, & 1\\0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mp1\\0\end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{pmatrix}\mathcal{D}(k)\\\mathcal{O}(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{D}(k-1)\\\mathcal{O}(k-1)\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathcal{D}(0)\\\mathcal{O}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\tag{6.28}$$

в частности,

$$\mathcal{D}(k)=\mathcal{D}(k-1)+2\mathcal{D}(k-2),\quad \mathcal{D}(0)=1,\quad \mathcal{D}(1)=2;\tag{6.29}$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathcal{D}(k)x^k=\frac{x-x^2}{1-x-2x^2}=\frac{1}{3}\frac{x}{1-2x}+\frac{2}{3}\frac{x}{1+x}.\tag{6.30}$$

Соответственно, существует предел:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\mathcal{D}(k)}{2^k}=\frac{2}{3}\tag{6.31}$$

т.е. $\exists b_1\in\mathbb{N}:\mathcal{D}(m)<\frac{3}{4}\ \forall m>b_1$.

Рассмотрим $Q_N^{a,b}$, где $b=2b_1+1$. Среди всех слов из $Q_N^{a,b}$ не более, чем $(\frac{3}{4})^a$-ая часть соотвeтсвует мультизигзагам, у которых $a_1\neq a_2$, и теорема 6.1 для случая $z=-1$ (т.е. теорема 1.12) следует из очевидного:

$$\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^a=0.$$

Аналогично рассмотренному случаю, положим:

$V_1(k)$ – количество $(k+1)$-элементных зигзагов ρ^+-типа (ρ^--типа) $\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, где ε пробегает множество корней шестой степени из единицы.

$V_2(k)$ – ρ^+-типа $\varepsilon \binom{\xi}{1}$

$V_3(k)$ – ρ^+-типа $\varepsilon \binom{0}{1}$

$V_4(k)$ – ρ^+-типа $\varepsilon \binom{1}{0}$;

$W_1(k)$ – i-типа ($-i$-типа) $\varepsilon \binom{1}{1}$, где ε пробегает множество всех корней четвертой степени из единицы.

$W_2(k)$ – i-типа $\varepsilon \binom{i+1}{1}$

$W_3(k)$ – i-типа $\varepsilon \binom{i}{1}$

$W_4(k)$ – i-типа $\varepsilon \binom{i}{i+1}$

$W_5(k)$ – i-типа $\varepsilon \binom{0}{1}$

$W_6(k)$ – i типа $\varepsilon \binom{1}{0}$

Тогда, аналогично разобранному уже случаю $z = -1$, легко показать, что:

$$\begin{pmatrix} V_1(k) \\ \vdots \\ V_4(k) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_1(k-1) \\ \vdots \\ V_4(k-1) \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} W_1(k) \\ \vdots \\ W_6(k) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} W_1(k-1) \\ \vdots \\ W_6(k-1) \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Учитывая очевидное:

$$V_2(0) = W_2(0) = 1,$$
$$V_1(0) = V_3(0) = V_4(0) = W_1(0) = W_3(0) = W_4(0) = W_5(0) = W_6(0) = 0, \tag{6.33}$$

с помощью стандартного метода трансфер-матрицы (см., например, [3], гл.4) можно получить:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} V_3(k)x^k = \frac{2(1-x)^2 x}{(1-x)(1-2x)(1+x+2x^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{1-2x} + \frac{\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}{(1-x)(1+x+2x^2)} \quad (6.34)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} W_5(x)x^k = \frac{2(1-x)^3 x^2}{(1-2x)(1-x)^2(1+x)(-1+x-2x^2)}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{1-2x} + \frac{\frac{7}{6}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{6}}{(1-x)^2(1+x)(-1+x-2x^2)}. \quad (6.35)$$

Из (6.34) и (6.35) следует: $\exists b_1 \in \mathbb{N} : \forall m > b_1$ справедливо

$$V_3(m) > \frac{1}{5}2^m, \quad W_5(m)\frac{1}{7}2^m \quad (6.36)$$

и, следовательно, среди всех слов из $Q_N^{a,b}$, $b = 2b_1+1$, не более, чем $(\frac{4}{5})^a$-ая часть соответствует мультизигзагам, у которых $b_1 \neq b_2$, $b_2 \neq b_3$ или $b_1 \neq b_3$, и, значит, теорема 6.1 имеет место в случае $z = \rho^{\pm}$, аналогично – $(\frac{6}{7})^a$-ая – в случае $z = \pm i$.

Замечание. Первое доказательство теоремы 6.1 по существу совпадает с доказательством из [1].

7. Верхняя оценка числа фибоначчиевых разбиений

Теорема 7.1. (I) *Пусть* $n \in [u_N, \dots u_{N+1} - 1]$. *Тогда*

$$\#\Phi(n) \leqslant \begin{cases} u_{\frac{N+1}{2}}, & N\text{- нечетно;} \\ 2u_{\frac{N-2}{2}}, & N\text{- четно.} \end{cases}$$

(II) *При* $N \geqslant 5$ *это максимальное число разбиений имеют*
(а) *В случае нечетного* N *ровно два числа:*

$$u^2_{\frac{N+1}{2}} - 1 \quad и \quad u^2_{\frac{N+1}{2}} + u_N - 1.$$

(б) *В случае четного* N *ровно четыре числа:*

$$u_{\frac{N}{2}} \cdot u_{\frac{N+2}{2}} + 1, \quad u_{\frac{N}{2}} u_{\frac{N-2}{2}} + u_N - 3,$$
$$u^2_{\frac{N-2}{2}} + u_N - 1, \quad u_{\frac{N-4}{2}} + u_N + u_{N-3} - 1.$$

Определение. *Зигзаг* $(Z, \trianglelefteq)$, $Z = \{z_1 \dots z_k\}$ *назовем* k-*забором, если* $z_1 \triangleright z_2 \triangleleft z_3 \triangleright \dots$ *или* $z_1 \triangleleft z_2 \triangleright z_3 \triangleleft z_4 \triangleright \dots$

Следующая лемма доказывается тривиальной индукцией.

Лемма 7.2. *Пусть* $(Z, \trianglelefteq)$ – k-*забор. Тогда* $\#J(Z, \trianglelefteq) = u_{k+1}$. •

Лемма 7.3. *Среди всех* k-*элементных зигзагов максимальное число идеалов имеют два* k-*забора.*

Доказательство. Сравним число идеалов двух k-элементных зигзагов $(Z, \trianglelefteq)$ и $(Z, \trianglelefteq')$, где частичные порядки $\trianglelefteq$ и $\trianglelefteq'$, не умаляя общности, таковы, что $\exists i \in [1..k]$:

(а) $z_{j-1} \triangleleft' z_j \iff z_{j-1} \triangleleft z_j$ при $j \leqslant i$

(б) $z_j \triangleleft' z_{j+1} \iff z_j \triangleright z_{j+1}$ иначе

(в) $(\{z_i, \dots, z_k\} \trianglelefteq)$ и $(\{z_i, \dots, z_k\}, \trianglelefteq')$ – заборы

(г) $z_{i+1} \triangleright z_i \triangleright z_{i+1}$, $z_{i-1} \triangleleft z_i{}' \triangleright z_{i-1}$

Заметим:

$$J(Z, \trianglelefteq) = \{I \cup J | I \in J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq),$$
$$J \in J(\{z_{i+2}, \dots, z_k\}, \trianglelefteq)\} \cup \{I \cup J \cup \{z_i\} | I \in J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq),$$
$$z_{i-1} \in I, \quad J \in J(\{z_{i+1}, \dots, z_k\}, \trianglelefteq)\}. \tag{7.4}$$

Аналогично

$$J(Z, \trianglelefteq') = \{I \cup J | I \in J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq'),$$
$$J \in J(\{z_{i+1}, \dots, z_k\}, \trianglelefteq')\} \cup \{I \cup J \cup \{z_i\} | I \in J(\{z_1, \dots, z_{i-1}), \trianglelefteq'),$$
$$J \in (\{z_{i+1}, \dots, z_k\}, \trianglelefteq'), z_{i-1} \in I, z_{i+1} \in J\} \tag{7.5}$$

Обозначим

$$B = \#\{I \in J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq) | z_{i-1} \in I\}$$
$$= \#\{I \in J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq') | z_{i-1} \in I\}$$

Очевидно

$$B < \#J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq) = \#J(\{z_1, \dots, z_{i-1}\}, \trianglelefteq') = A.$$

Вспоминая об условии (в) из определения $(Z, \trianglelefteq)$ и $(Z, \trianglelefteq')$, получаем, что:

$$\#J(Z, \trianglelefteq) = A \cdot u_{k-i-1} + B \cdot u_{k-i} \tag{7.6}$$
$$\#J(Z, \trianglelefteq') = A \cdot u_{k-i} + B \cdot u_{k-i-1} \tag{7.7}$$

И, так как $A > B$, $u_{k-i} > u_{k-i-1}$, получаем окончательно

$$\#J(Z, \trianglelefteq) < \#J(Z, \trianglelefteq'). \tag{7.8}$$

Осталось заметить, что утверждение леммы 7.3 очевидным образом вытекает из неравенства (7.8). •

В силу леммы 7.2, занимаясь поиском максимально возможного числа идеалов мультизигзага, можно ограничиться мультизигзагами, являющимися прямой суммой нескольких заборов. Тем самым доказательство теоремы 7.1 (I) свелось к следующему утверждению:

Лемма 7.9. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 5$. Рассмотрим множество*

$$L_N = \left\{ u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \ldots \cdot u_{i_k} \Big| \sum_{j=1}^{k} i_j \leqslant \frac{N+k}{2},\ i_j \geqslant 2 \right\}$$

Тогда

$$M = \max_{m \in L_N} m = \begin{cases} u_{\frac{N+1}{2}}, & \text{если} \quad N \quad \text{- нечетно} \\ 2u_{\frac{N-2}{2}}, & \text{если} \quad N \quad \text{- четно.} \end{cases}$$

Доказательство леммы 7.9 представляет собой серию лемм, главная из которых состоит в следующем:

Лемма 7.10. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество*

$$F_k = \{ u_{k_1} \cdot u_{k_2} \big| k_1 + k_2 = k,\ k_i \geqslant 1 \}.$$

Тогда, если $k_1 \leqslant k_0$, то

(1) *Если k_1 – четно, > 2, то $u_{k_1-2} \cdot u_{k_2-2} > u_{k_1} \cdot u_{k_2}$*

(2) *Если k_1 – нечетно, > 1, то $u_{k_1-2} \cdot u_{k_2+2} < u_{k_1} \cdot u_{k_2}$*

(3) *Если $k_1'+k_2' = k$, k_1 – четно, k_1' – нечетно, то $u_{k_1} \cdot u_{k_2} > u_{k_1'} \cdot u_{k_2'}$*

В частности,

$$M' = \max_{m \in F_k} m = u_2 \cdot u_{k-2} = 2u_{k-2}$$

Доказательство будем вести индукцией по k.

База (при $k = 2, 3, 4$) проверяется тривиальным пебором.

Пусть лемма доказана для всех $l < k$. Проверим ее для k.

(а)

$$\begin{aligned} u_{k_1-2} \cdot u_{k_2+2} &= (u_{k_1} - u_{k_1-1})(u_{k_2} + u_{k_2+1}) = \\ &= u_{k_1}u_{k_2} - u_{k_1-1}u_{k_2} + u_{k_1}u_{k_2+1} - u_{k_1-1}u_{k_2+1} = \\ & u_{k_1}u_{k_2} - u_{k_1-1}u_{k_2} + u_{k_1-2}u_{k_2+1}. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Из (7.11), очевидно, следуют утверждения (1) и (2).

(б) Докажем утверждение (3). Возможны 4 случая: $k = 4r$, $4r+1$, $4r+2$ или $4r+3$. Рассмотрим для примера случай $k = 4r+1$.

Покажем: $u_{2r}u_{2r+1} > u_{2r-1}u_{2r+2}$. Действительно,

$$u_{2r-1}u_{2r+2} = (u_{2r} - u_{2r-2})(u_{2r+1} + u_{2r}) =$$
$$= u_{2r}u_{2r+1} - u_{2r-2}u_{2r+1} + u_{2r}^2 - u_{2r-2}u_{2r} =$$
$$u_{2r}u_{2r+1} - u_{2r-2}u_{2r+1} + u_{2r-1}u_{2r} < u_{2r}u_{2r+1}$$

по индукционному предположению. Остальные случаи рассматриваются аналогично. •

Лемма 7.12. *Пусть $i_1 + i_2 + i_3 = m$, $i_j \geqslant 2$. Тогда*

$$u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot u_{i_3} < u_{m-1}$$

Доказательство. Согласно лемме 7.10:

$$u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot u_{i_3} < 4 \cdot u_{m-4},$$

поэтому лемма свелась к тривиальному неравенству $4u_{m-4} < u_{m-1}$. •

Доказательство леммы 7.9. В силу леммы 7.12, если N и k оба нечетны, то $M = u_{\frac{N+1}{2}}$; если же N и k оба четны, то $M = M' = 2u_{\frac{N-2}{2}}$.

Лемма 7.9 доказана, поэтому для доказательства теоремы 7.1 осталось лишь заметить, что в соответствии с теоремой 4.3 максимальное число фибоначчиевых разбиений имеют числа:

(а) N – нечетно: возможны 2 случая:

Сл.1 $N = 4k - 1$:

$$u_3 + u_7 + \ldots + u_N = u_{\frac{N+1}{2}}^2 - 1$$
$$u_5 + u_9 + \ldots + u_{N-2} + u_N = u_{\frac{N+1}{2}}^2 + u_N - 1$$

Сл.2 $N = 4k + 1$:

$$u_5 + u_9 + \ldots + u_N = u_{\frac{N+1}{2}}^2 - 1$$
$$u_3 + u_7 + \ldots + u_{N-2} + u_N = u_{\frac{N+1}{2}}^2 + u_N - 1$$

(б) N – четно: возможны 2 случая:

Сл.1 $N = 4k + 2$

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_N = u_{\frac{N}{2}} \cdot u_{\frac{N+2}{2}} + 1$$
$$u_3 + u_8 + \ldots + u_{N-2} + u_N = u_{\frac{N-2}{2}} \cdot u_{N2} + u_N - 3$$
$$u_3 + u_7 + \ldots + u_{N-3} + u_N = u_{\frac{N-2}{2}}^2 + u_N - 1$$
$$u_5 + u_9 + \ldots + u_{N-5} + u_{N-3} + u_N = u_{\frac{N-4}{2}}^2 + u_N + u_{N-3} - 1$$

Сл.2 $N = 4k$ – первые два тождества (в известном смысле) поменяются местами, так же как третье с четвертым – все аналогично сл.1.

Тем самым теорема 7.1 доказана полностью •

8. Соотношение между числом положительных и отрицательных ненулевых коэффициентов в случае $z = 1$

Пусть $\alpha \in S$, $\beta^*(\alpha)$ – примитивное слово. $(\Phi(\alpha), \leqslant)$ в силу теоремы 4.3 есть решетка идеалов зигзага $(Z, \trianglelefteq)(\beta^*(\alpha))$; $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$.

Положим $\alpha_1 \in S$ таково, что $(\Phi(\alpha_1), \trianglelefteq) \simeq J(z', \leqslant)$ (см. по поводу обозначений теорему 5.2). Следующая лемма очевидна.

Лемма 8.1. (1) *Если* $z_k \triangleright z_{k-1}$, *то* $\#\lambda^*(\alpha) = \#\lambda^*(\alpha_1) + 1$

(2) *Если* $z_k \triangleleft z_{k-1}$, *то* $\#\lambda^*(\alpha) = \#\lambda^*(\alpha_1)$. •

Эта лемма служит мотивировкой для введения еще одного понятия.

Определение. (I) *Символом* $\Omega'(z)$ *будем обозначать мультипликативный моноид, порожденный матрицами*

$$\begin{pmatrix} 1+z, & -z, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & z \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} z, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

(II) *Для всякого* $\alpha \in S$ *такого, что* $\beta^*(\alpha)$ *– примитивное слово* z*-сортом* α *назовем вектор из* $\mathbb{Z}[z] \times \mathbb{Z}[z] \times \mathbb{Z}[z]$, *первые две компоненты которого образуют* z*-тип зигзага* $(Z, \trianglelefteq)(\beta^*(\alpha))$, *а третья равна* $z^{\#\lambda^*(\alpha)}$. z *– сорт* α *будем обозначать* $B_\alpha(z)$. *Непосредственно из леммы* 8.1 *и теоремы* 5.2 *следует:*

Теорема 8.2. (I) *Если в зигзаге* $(Z, \trianglelefteq)(\beta^*(\alpha))$, *где* $\beta^*(\alpha)$ *– примитивно,* $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ $z_k \triangleright z_{k-1}$, *то*

$$B_\alpha(z) = \begin{pmatrix} 1+z, & -z, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & z \end{pmatrix} B_{\alpha_1}(z)$$

(II) *Если в тех же условиях* $z_k \triangleleft z_{k-1}$, *то*

$$B_\alpha(z) = \begin{pmatrix} z, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} B_{\alpha_1}(z) \qquad \bullet$$

Простейшим примером применения теоремы 8.2 может служить следующий результат:

Теорема 8.3. *Пусть* $\Xi_1(N)$ *– число единиц среди коэффициентов* $a_{u_N}(-1)$, $a_{u_N+1}(-1) \ldots a_{u_{N+1}-2}(-1)$; $\Xi_{-1}(N)$ *– число минус единиц среди тех же коэффициентов. Тогда*

$$\Xi_1(N) = \Xi_{-1}(N) \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Доказательство. Назовем $\alpha \in S$, при $\beta^*(\alpha)$ – примитивном, четным, если $B_\alpha(-1) = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ m \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ и нечетным, если, напротив, $B_\alpha(-1) = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ m \\ \mp 1 \end{pmatrix}$.

Непосредственно из теоремы 8.2 (аналогично рассмотрениям из доказательства теоремы 6.1) следует: число четных $\alpha \in S$ таких, что $\beta^*(\alpha)$ – примитивное слово из Ω_M, $M \in \mathbb{N}$ равно числу нечетных $\alpha \in S$, таких, что $\beta^*(\alpha)$ – примитивное слово из Ω_M. Поэтому $\forall M \in \mathbb{N}$, $M \geqslant 5$ (M – нечетно, при $M = 3$ ни одно α не явлется ни четным, ни нечетным) существует биекция δ_M

$$\begin{aligned} \delta_M : \{\beta^*(\alpha) \quad &- \text{примитивно}, \quad \in \Omega_M | \alpha \quad - \text{четно}\} \to \\ &\to \{\beta^*(\alpha) \quad - \text{примитивно}, \quad \in \Omega_M | \alpha - \quad \text{нечетно}\} \end{aligned}$$

Зафиксируем некоторое решение $X = (x_0 x_1 \ldots x_k)$ уравнения $x_0 + x_1 + \ldots + x_k = N$, где $x_0 \geqslant 0$, $x_1 \ldots x_k$ – нечетные числа $\geqslant 3$. Рассмотрим $\Omega_N^x \subseteq \Omega_N$:

$$\Omega_N^X = \{\beta = \beta^0 \beta^1 \ldots \beta^k \in \Omega_N \quad |\text{длина} \quad \beta^i \quad \text{есть} \quad x_i\}$$

где $\beta = \beta^0 \ldots \beta^k$ – разложение из леммы 4.2 (I).

Возможны два случая:

<u>сл.1</u> $\exists i \in [1 \ldots k] : x_i = 3$. В этом случае $\forall \alpha \in S$ $\beta^*(\alpha) \in \Omega_N^X$ $\prod_{j=1}^{k} W(z, \trianglelefteq)(\beta^j)(-1) = 0$ и соответствующий α коэффициент $A_{ij}(-1)$ из формулы (5.4) заведомо нулевой

<u>сл.2</u> $\forall i \in [1 \ldots k]$ $x_i \geqslant 5$. В этом случае рассмотрим множества:

$$\begin{aligned} &K^+ = \{\alpha \in S | \beta^*(\alpha) \in \Omega_N^x, \quad \beta^*(\alpha) = \beta^0 \beta^1 \ldots \beta^k; \\ &\alpha_1 \quad - \quad \text{определенное условием}: \quad \beta^*(\alpha_1) = \beta^k \quad - \quad \text{четно}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &K^- = \{\alpha \in S | \beta^*(\alpha) \in \Omega_N^*, \quad \beta^*(\alpha) = \beta^0 \beta^1 \ldots \beta^k; \\ &\alpha_1 \quad - \quad \text{определенное условием}: \quad \beta^*(\alpha_1) = \beta^* \quad - \quad \text{нечетно}\} \end{aligned}$$

и биекцию между ними:

$$\delta' : K^+ \to K^-,$$

определенную правилом:

"Пусть $\beta^*(\alpha) = \beta^0 \dots \beta^k$, длина β^k равна M. Тогда $\delta'(\alpha)$ определяется условием: $\beta^*(\alpha'(\alpha)) = \beta^0\beta^1 \dots \beta^{k-1}\delta_M(\beta^k)$."

Легко видеть: если $\alpha \in K^+ \cup K^-$, $\alpha = i\omega, +j\omega_1$, $\delta'(\alpha) = i_1\omega_0 + j_1\omega_1$, то $A_{ij}(-1) = -A_{i_1,j_1}(-1)$, откуда и вытекает утверждение теоремы. •

Следствие 8.4. *Пусть $\Xi'_1(N)$ и $\Xi'_{-1}(N)$ - число единиц и минус единиц соответственно среди коэффициентов $a_{u_N}(-1) \dots a_{u_{N+1}-1}(-1)$. Тогда*

$$\Xi'_1(N) - \Xi'_{-1}(N) = (-1)^{[\frac{N}{2}]+1} = \begin{cases} -1, \; N = 4k & \text{или} \quad 4k+1 \\ 1, \; N = 4k+2 & \text{или} \quad 4k+3. \end{cases}$$

•

Литература

1. F. V. Weinstein, *Fibonacci partitions.* рукопись.
2. A. M. Vershik, *The fibadic expansions of real numbers and adic transformation.* report No. 4 1991/92 Institut Mittag-Leffler.
3. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика.* Москва, Мир.
4. S. Vajda, *Fibonacci and Lucas numbers and the golden section.* — Ellis Horwood Limited (1989).
5. M. Beresin, E. Levine, D. Lubell, *On the coefficients of a generating series.* — Fibonacci Quart. 9 (1971), 467–476 and 511.
6. L. Carlitz, R. Scoville, *Partially ordered sets associated with Fibonacci representations.* — Duke math. journal 40, No. 3 (1973), 511–524.

Pushkarev I. A. The ideal lattices of multizigzags and the enumeration of Fibonacci partitions.

Let $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, be the sequence of Fibonacci numbers. The Fibonacci partition of a natural number n is the partition of n into different Fibonacci numbers. In this paper it is proved, that the sets of Fibonacci partitions of natural numbers, partialy ordered by refinement, are the ideal lattices of multizigzags. On the base of this theorem we obtain some results on the coefficients of Taylor's series of infinit products

$$\prod_{i=1}^{+\infty}(1 + zq^{u_i}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(z)q^k,$$

where $z = \pm 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm i$.

This result generalises that of the papers [1, 5] and [6].

Санкт–Петербургский государственный университет

Поступило 10 мая 1995 г.