Н. А. Сидоров

ЗАКОНЫ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ РОТАЦИОННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

1. В работе [1] с каждым иррациональным числом α из интервала $[0,1)$ связывается некоторая система счисления, а именно: пусть

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$$

– разложение числа α в непрерывную дробь, p_n, q_n – соответственно числитель и знаменатель n-ой подходящей дроби числа α (считаем $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = a_1$). Напомним, что имеют место соотношения:

$$q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad p_{n+1} = a_n q_n + p_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Положим для каждого натурального n

$$\alpha_n = |q_n\alpha - p_n| = (-1)^{n+1}(q_n\alpha - p_n).$$

В работе [1] доказывается, что любое число $x \in [0,1)$ представимо в виде сходящегося ряда

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n, \tag{1}$$

причем коэффициенты x_n подчинены запретам на соседние пары коэффициентов (так называемым *марковским запретам*):

$$0 \leqslant x_n \leqslant a_n, \text{ и если } x_n = a_n, \text{ то } x_{n+1} = 0 \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $\mathfrak{X}_\alpha$ пространство всех последовательностей $x_1, x_2, \ldots$, подчиненных указанным запретам и снабженных топологией покоординатной сходимости. Тогда формула (1) задает отображение компакта $\mathfrak{X}_\alpha$ в интервал $[0,1)$. Важность отображения

* Работа выполнена при частичной поддержке гранта MQV-000 Международного научного фонда (ISF).

(1) заключается в том, что оно устанавливает изоморфизм (топологический и метрический) т.н. адического преобразования компакта $\mathfrak{X}_\alpha$ и преобразования T_α интервала [0,1), которое задается формулой $T_\alpha x = x+\alpha \mod 1$, т.е. поворота окружности на иррациональный угол α (см. [1]). Это дает основание называть разложение (1) точек единичного интервала *ротационным α-разложением*.

Разложение (1) единственно для всех x, кроме точек вида $\{k\alpha\}$, где $k \in \mathbb{Z}$ (здесь и далее $\{t\}$ обозначает дробную часть числа t, а $[t]$ – целую часть t), и обратное отображение из интервала [0,1) в компакт $\mathfrak{X}_\alpha$ задается формулами

$$x_1 = \left[\frac{x}{\alpha}\right], \quad x_n = \left[\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\left\{\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}}\left\{\dots\left\{\frac{x}{\alpha}\right\}\dots\right\}\right\}\right], \quad n \geqslant 2. \tag{2}$$

При этом образом меры Лебега на интервале [0,1) при отображении (2) будет марковская мера μ на компакте $\mathfrak{X}_\alpha$. В работе [1] вычислены начальное распределение и матрицы переходных вероятностей марковской цепи $X_\alpha := (\mathfrak{X}_\alpha, \mu)$, а также одномерные распределения случайных величин x_n. Приведем эти формулы. Матрицы переходных вероятностей имеют вид

$$\mu\big(x_n = i_n \mid x_{n-1} = i_{n-1}\big) = \begin{cases} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, & i_{n-1} < a_{n-1}, \quad i_n < a_n \\ \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n-1}}, & i_{n-1} < a_{n-1}, \quad i_n = a_n \\ 1, & i_{n-1} = a_{n-1}, \quad i_n = 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Одномерные же распределения таковы:

$$\mu\big(x_n = i_n\big) = \begin{cases} \big(q_{n-1} + q_n\big)\alpha_n, & i_n = 0 \\ q_n\alpha_n, & 0 < i_n < a_n \\ q_n\alpha_{n+1}, & i_n = a_n \end{cases} \tag{4}$$

2. Данная работа посвящена установлению достаточных условий (а для центральной предельной теоремы – и необходимого), которым должно удовлетворять число α, чтобы для марковской цепи X_α выполнялись закон больших чисел (ЗБЧ), усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) или центральная предельная теорема (ЦПТ). Эти условия формулируются в терминах элементов разложения α в непрерывную дробь. При этом в конце работы полученные условия сравниваются с аналогичными для последовательностей независимых случайных величин $(x_n)_1^\infty$, где x_n имеет дискретное равномерное распределение τ_n:

$$\tau_n\big(x_n = i_n\big) = 1/a_n, \quad i_n = 0, \dots, a_n - 1, \tag{5}$$

и $a_n \geqslant 2$. Интерес подобное сравнение вызывает по той причине, что разложения Кантора (естественно обобщающие p-ичные разложения) вида

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_1 \ldots a_n}, \tag{1'}$$

имеют своими коэффициентами именно такие последовательности (x_n) независимых случайных величин (см. [5]).

Подобное сравнение показывает (см. ниже), что марковские запреты не слишком ухудшают естественные вероятностные свойства цепи X_α по отношению к описанной выше последовательности независимых случайных величин.

Автор выражает искреннюю признательность А. М. Вершику за постановку вопроса и полезные обсуждения.

3. Вначале докажем технические леммы.

Лемма 1. *Среднее и дисперсия случайных величин x_n, связанных в цепь X_α, вычисляется по формулам*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}x_n &= \varkappa_n\left(\frac{a_n - 1}{2} + \frac{\alpha_{n+1}}{a_n}\right), \\ \mathbf{D}x_n &= \varkappa_n\bigl(\lambda_n - \varepsilon_n \varkappa_n\bigr). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\varkappa_n = a_n q_n \alpha_n, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{(a_n - 1)(2a_n - 1)}{6} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} a_n, \\ \varepsilon_n &= \frac{(a_n - 1)^2}{4} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(a_n - 1) + \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Непосредственная проверка.

Лемма 2. *Пусть последовательность чисел $\varkappa_n$ определяется формулами* (7) *для каждого n. Тогда имеет место оценка*

$$1/3 < \varkappa_n < 1.$$

Доказательство. В монографии [4] доказывается, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Отсюда
$$\frac{a_n q_n}{q_n + q_{n+1}} < \varkappa_n < \frac{a_n q_n}{q_{n+1}}.$$

Очевидно, $\varkappa_n < 1$. Докажем, что $\varkappa_n > 1/3$. Имеются 2 случая:

1) $a_n \geqslant 2$. Здесь $\frac{a_n q_n}{q_n+q_{n+1}} = \frac{q_{n+1}-q_{n-1}}{q_n+q_{n+1}} > \frac{1}{2}$, поскольку $q_{n+1} \geqslant 2q_n + q_{n-1} > q_n + 2q_{n-1}$.

2) $a_n = 1$. Здесь $\frac{a_n q_n}{q_n+q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_n+q_{n+1}} = \frac{q_n}{2q_n+q_{n-1}} > \frac{1}{3}$. ■

Замечание. Фактически мы установили, что распределение (4) x_n сравнимо с равномерным дискретным распределением (5), что и объясняет сходство соответствующих достаточных условий (см. п. 7).

Лемма 3. *Имеют место следующие оценки дисперсии n-го члена марковской цепи X_α:*

1) *Для любого a_n $\mathbf{D}x_n < a_n^2$*

2) a. *Если $a_n \geqslant 2$, то $\mathbf{D}x_n > \frac{a_n^2}{32}$.*

b. *Если $a_n = 1$, то $\frac{1}{9a_{n+1}} < \mathbf{D}x_n < \frac{1}{a_{n+1}}$.*

Доказательство. 1) По леммам 1, 2
$$\mathbf{D}x_n = \varkappa_n(\lambda_n - \varepsilon_n \varkappa_n) < \lambda_n =$$
$$= \frac{(a_n-1)(2a_n-1)}{6} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} a_n < \frac{a_n^2}{3} + \frac{a_n}{2} + \frac{1}{6} \leqslant a_n^2.$$

2) Рассмотрим 2 случая. a. $a_n \geqslant 2$. По лемме 1,
$\mathbf{D}x_n = \varkappa_n(\lambda_n - \varepsilon_n \varkappa_n) > \frac{\lambda_n - \varepsilon_n}{2}$, так как в этом случае $\varkappa_n > 1/2$ (см. доказательство леммы 2). Таким образом,
$$\mathbf{D}x_n > \frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2-1}{12} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right)\right) > \frac{a_n^2-1}{24} \geqslant \frac{a_n^2}{32} \geqslant \frac{1}{8}.$$

b. $a_n = 1$. Тогда по формуле (6) $\mathbf{D}x_n = q_n \alpha_n q_{n+1} \alpha_{n+1}$. Отсюда по лемме 2
$$\mathbf{D}x_n > \frac{1}{3} q_{n+1} \alpha_{n+1} > \frac{1}{9a_{n+1}},$$
$$\mathbf{D}x_n > q_{n+1}\alpha_{n+1} > \frac{1}{a_{n+1}}. \quad ■$$

Вывод. При $a_n \geqslant 2$ $\mathbf{D}x_n$ растет как a_n^2, а при $a_n = 1$ – убывает как a_{n+1}^{-1}.

Следствие. *Если для всех натуральных n $a_n \leqslant c$, то*

$$\min\bigl(1/8, 1/9c\bigr) < \mathbf{D}x_n < c^2.$$

Лемма 4. *Для марковской цепи X_α имеет место следующая оценка ковариации ее соседних членов:*

$$|\operatorname{cov}\bigl(x_n, x_{n+1}\bigr)| < 1$$

для произвольного иррационального α и всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. $\operatorname{cov}(x_n, x_{n+1}) =$

$$= \sum_{i=0}^{a_n} \sum_{j=0}^{a_{n+1}} ij\bigl(\mu\bigl(x_n = i, x_{n+1} = j\bigr) - \mu\bigl(x_n = i\bigr) \cdot \mu\bigl(x_{n+1} = j\bigr)\bigr) =$$

$$= \sum_{i=0}^{a_n} \sum_{j=0}^{a_{n+1}} ij\bigl(\mu\bigl(x_{n+1} = j \mid x_n = i\bigr)\mu(x_n = i) - \mu\bigl(x_n = i\bigr) \cdot \mu\bigl(x_{n+1} = j\bigr)\bigr) =$$

$$= \sum_{i=1}^{a_n - 1} \sum_{j=1}^{a_{n+1}-1} + \sum_{\substack{i=1\\ j=a_{n+1}}}^{a_n - 1} + \sum_{\substack{i=1\\ j=a_n}}^{a_{n+1}-1} - a_n a_{n+1} \cdot \mu\bigl(x_n = a_n\bigr) \cdot \mu\bigl(x_{n+1} = a_{n+1}\bigr).$$

Воспользуемся формулами (3), (4), а также известными соотношениями

$$\alpha_n = a_{n+1}\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}, \qquad q_n\alpha_{n+1} + q_{n+1}\alpha_n = 1,$$

легко получаемыми из формулы для α_n (см. п. 1). Имеем:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\bigl(x_n, x_{n+1}\bigr) &= \frac{1}{4} q_n^2 \alpha_{n+1}^2 a_n \bigl(a_n - 1\bigr) a_{n+1}\bigl(a_{n+1} - 1\bigr) + \\
&+ \frac{1}{2} a_n \bigl(a_n - 1\bigr) a_{n+1} q_n^2 \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} - \\
&- \frac{1}{2} a_n a_{n+1}\bigl(a_{n+1} - 1\bigr) q_n q_{n+1} \alpha_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} q_n q_{n+1} \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} < \\
&< \frac{1}{4} q_n^2 \alpha_{n+1} a_n \bigl(a_n - 1\bigr) a_{n+1}\bigl(\bigl(a_{n+1} - 1\bigr)\alpha_{n+1} + 2\alpha_{n+2}\bigr) < \\
&< \frac{1}{4} q_n^2 a_n^2 \alpha_{n+1} a_{n+1} \cdot 2\alpha_n = \frac{1}{2} a_n q_n \alpha_n \cdot a_n q_n a_{n+1}\alpha_{n+1} < \\
&< \frac{\varkappa_n \varkappa_{n+1}}{2} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из леммы 2. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\bigl(x_n, x_{n+1}\bigr) &> -\frac{1}{2} a_n a_{n+1} q_n q_{n+1} \alpha_{n+1}\bigl(\bigl(a_{n+1} - 1\bigr)\alpha_{n+1} + 2\alpha_{n+2}\bigr) > \\
&> -a_n a_{n+1} q_n q_{n+1} \alpha_{n+1}\alpha_n > -1. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

4. Установим теперь достаточное условие выполнимости ЗБЧ для марковской цепи X_α (напомним, что $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$).

Теорема 1. *Условие*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = o(n^2), \quad n \to \infty \tag{9}$$

является достаточным для выполнимости ЗБЧ для марковской цепи X_α.

Доказательство. По теореме Маркова (см. [2]), условие

$$\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = o(n^2), \quad n \to \infty$$

является достаточным для выполнения ЗБЧ для произвольной последовательности (вообще говоря, зависимых) случайных величин $(x_1, \ldots)$. Для марковской цепи X_α имеем:

$$\mathbf{D}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}x_k + 2\sum_{i<k} \mathrm{cov}(x_i, x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}x_k + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{cov}(x_k, x_{k+1}).$$

По леммам 3, 4 $\mathbf{D}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) < \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + 2n$, откуда следует требуемое. ■

Замечание. Множество всех иррациональных α, для которых верно соотношение (8), имеет лебегову меру 0.

Доказательство. Из теоремы 30 монографии [4] следует, что для почти всех по мере Лебега α из интервала $[0,1)$ неравенство $a_n > n \ln n$ выполняется для бесконечного множества натуральных n. Тогда

$$a_n^2 > n^2 \ln^2 n, \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 > n^2 \ln^2 n,$$

откуда

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 > \ln^2 n$$

для п.в. $\alpha \in [0, 1)$ и бесконечного множества натуральных n, откуда следует требуемое. ■

5. Займемся достаточным условием для УЗБЧ. Сформулируем теорему Серфлинга о достаточном условии выполнимости УЗБЧ для последовательности случайных величин, которой мы будем пользоваться (см. [6, 7]; также см. монографию [8])

Теорема (Serfling R. J., 1970). *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, и пусть существует такая последовательность $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ чисел интервала $[0,1]$, что*

$$\rho(x_k, x_n) \leqslant c_{n-k} \tag{10}$$

для любых натуральных n, k, $k < n$ (здесь ρ обозначает коэффициент корреляции), причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty. \tag{11}$$

Тогда условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{D}x_n}{n^2} \ln^2 n < +\infty \tag{12}$$

является достаточным для выполнимости УЗБЧ для последовательности случайных величин $x_1, x_2, \ldots$.

Следствие. *Если случайные величины $x_1, x_2, \ldots$ образуют цепь Маркова, то условие* (12) *является достаточным для выполнимости УЗБЧ для этой цепи.*

Доказательство. Положив $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = \ldots = 0$, убеждаемся в том, что неравенства (10), (11) выполняются очевидным образом.

Отсюда вытекает требуемая теорема.

Теорема 2. *Условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^2} \ln^2 n < +\infty \tag{13}$$

достаточно для справедливости УЗБЧ для марковской цепи X_α.

Доказательство. Немедленно следует из предыдущего следствия и леммы 3. ■

Замечание 1. Условие (13), очевидно, сильнее условия (8), что следует из леммы Кронекера. Отсюда лебегова мера множества всех α, которые удовлетворяют условию (13), также равна 0.

Замечание 2. Переформулируем УЗБЧ для марковской цепи X_α в терминах интервала $[0,1)$ с лебеговой мерой. Из формул (2) следует, что при $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$, которое удовлетворяет условию (13),

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k(T_k T_{k-1}\ldots T_1 x) - L_n\right) = 0 \tag{14}$$

для п.в. $x \in [0,1)$. Здесь

$$f_k(x) = \left[\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}x\right], \quad T_k x = \left\{\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}x\right\},$$

$L_n = L_n(\alpha)$ – последовательность, не зависящая от x.

Если $\alpha = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2} = [a, a, \ldots]$, $a \in \mathbb{N}$, то, как известно, $\alpha_n = \alpha^n$, и $T_k x \equiv Tx = \left\{\frac{x}{\alpha}\right\}$ – образ одностороннего сдвига на компакте $\mathfrak{X}_\alpha$ при отображении, задаваемом формулой (1). Таким образом, соотношение (14) есть эргодическая теорема для преобразования T, квазиинвариантного относительно меры Лебега.

6. Наконец, установим необходимое и достаточное условие верности ЦПТ для марковской цепи X_α. Воспользуемся для этого известной теоремой Добрушина (см. [3]).

Теорема (Добрушин Р. Л., 1956). *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ – последовательность случайных величин, образующих цепь Маркова с не более чем счетным числом состояний (вообще говоря, неоднородную). Обозначив матрицы переходных вероятностей через $P^{(i)}$, положим*

$$a^{(n)} = \min_{1\leqslant i\leqslant n-1} \alpha(P^{(i)}), \quad \text{и} \quad \alpha(P^{(i)}) = \min_{k,l}\sum_m \min\left(P^{(i)}_{km}, P^{(i)}_{lm}\right)$$

– коэффициент эргодичности стохастической матрицы P_i. Тогда условия

1) $|x_n| \leqslant C_1$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$.

2) $\mathbf{D}x_n \geqslant C_2 > 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. (15)

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{(n)} n^{1/3} = +\infty$

являются достаточными для выполнимости ЦПТ для марковской цепи $x_1, x_2, \ldots$.

Отсюда следует

Теорема 3. *Условие равномерной ограниченности a_n необходимо и достаточно для справедливости ЦПТ для цепи Маркова X_α.*

Доказательство. 1. Необходимость. Условие равномерной ограниченности дисперсий необходимо для выполнимости ЦПТ всегда. Из леммы 3 следует, что если $a_n \geqslant 2$, то $\mathbf{D}x_n > a_n^2/32$, следовательно, неограниченность a_n влекла бы неограниченность $\mathbf{D}x_n$.

2. Достаточность. Проверим условия (15) теоремы Добрушина.
1) Очевидно
2) Вытекает из следствия из леммы 3.
3) Вычислим коэффициент эргодичности матрицы переходных вероятностей $P^{(n)}$ цепи X_α, для чего воспользуемся формулой (3).

$$\alpha(P^{(n)}) = \min_{k,l} \sum_m \min\left(P^{(n)}_{km}, P^{(n)}_{im}\right) = \sum_{m=0}^{a_n} \min\left(P^{(n)}_{1m}, P_{a_{n-1},m}\right) =$$
$$= \min\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}, 1\right) = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}.$$

Отсюда $\alpha^{(n)} = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}$, и поскольку $\frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{\alpha_k}{a_k\alpha_k+\alpha_{k+1}} > \frac{1}{a_k+1} \geqslant \frac{1}{c+1}$, условие 3) также выполняется, откуда следует требуемое. ■

7. В заключение сравним полученные результаты с аналогичными для заведомо более "хорошей" с вероятностной точки зрения последовательности независимых случайных величин, связанных с разложением Кантора (1′).
1. Теорема Маркова дает одинаковые достаточные условия (см. формулу (9) выполнимости ЗБЧ для обеих последовательностей.
2. Условие Колмогорова выполнимости УЗБЧ для последовательности независимых случайных величин

$$\sum_n \frac{\mathbf{D}x_n}{n^2} < +\infty, \tag{16}$$

эквивалентное для исследуемого случая условию

$$\sum_n \frac{a_n^2}{n^2} < +\infty,$$

слабее условия (12), однако, известно (см. [8]), что даже для последовательности некоррелированных случайных величин условие (16) может не быть достаточным, поэтому наличие дополнительного множителя $\ln^2 n$ оправдано.
3. Проблема, связанная с выполнимостью ЦПТ, решается одинаково для последовательностей как независимых случайных величин (это следствие теоремы Ляпунова), так и для исследуемого класса марковских цепей.

Литература

1. А. М. Вершик, Н. А. Сидоров, *Арифметические разложения, ассоциированные с поворотом окружности и непрерывными дробями.* — Алгебра и анализ **5**, вып. 6 (1993), 97–115.

2. Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М., (1988).
3. Р. Л. Добрушин, *Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова.* — Теор. вер. и ее прим. **1**, вып. **1**, **4** (1956).
4. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М., (1978).
5. J. Galambos, Representations of Real Numbers by Infinite Series, Lecture Notes in Mathematics, Springer–Verlag, **502** (1976).
6. R. J. Serfling, *Moment inequalities for the maximum cumulative sum.* — Ann. Math. St. **41** (1970), 1227–1234.
7. R. J. Serfling, *Convergence properties of S_n under moment restrictions.* — Ann. Math. St. **41** (1970), 1235–1248.
8. W. F. Stout, Almost Sure Convergence, NY, Acad. Press, (1974).

Sidorov N. A. Law of large numbers and the central limit theorem for coefficients sequences of rotational expansions.

For rotational expansions introduced in [1] we establish when the law of large numbers, the strong law of large numbers or the central limit theorem hold for Markov sequences of coefficients. The answers are given in terms of the rate of growth of the quotients a_n.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 апреля 1995