Н. А. Сидоров

СИНГУЛЯРНОСТЬ И АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ МЕР, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОВОРОТОМ ОКРУЖНОСТИ

0. Классическая проблема, связанная с бесконечными свертками дискретных мер (или, что то же самое, с рядами из независимых случайных величин) и возникшая в 30-е годы в связи с изучением свойств характеристических функций, формулируется следующим образом:

Проблема 1. *При каких* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *случайная величина*

$$Z_\alpha = Z_\alpha(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) := \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \alpha^n$$

с $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$*, образующими последовательность независимых случайных величин, каждая из которых принимает значения* $-1, 1$ *с равными вероятностями, сингулярна? абсолютно непрерывна на отрезке* $[-\alpha(1-\alpha)^{-1}, \alpha(1-\alpha)^{-1}] = \operatorname{supp} Z_\alpha$*?*

Продвижений здесь немного. Известно, во-первых, что случайная величина Z_α либо сингулярна, либо абсолютно непрерывна (как говорят, Z_α – *чистая*), причем до конца 30-х годов многие были убеждены, что Z_α всегда абсолютно непрерывна. Однако в 1939 г. П. Эрдеш [2] показал, что для тех α, у которых α^{-1} есть число Пизо, случайная величина Z_α сингулярна относительно меры Лебега. С другой стороны, если $\alpha^{-1} = \sqrt[k]{2}$ для некоторого $k \geqslant 2$, то Z_α абсолютно непрерывна (как и для некоторых других специальных алгебраических α). Других "индивидуальных" результатов на данный момент нет, и автор сомневается в том, что исследование Проблемы 1 можно провести для какого-либо трансцендентного α.

В данной работе мы предлагаем рассматривать более естественную задачу. При этом мы исходим из некоторой "системы счисления", введенной А. М. Вершиком и автором в работе [1] и связанной с динамикой поворота окружности.

При частичной поддержке РФФИ, грант 94–01–00921

1. Пусть α – иррациональное число из интервала $(0,1)$, $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$ – его разложение в непрерывную дробь. Пусть далее $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность подходящих дробей для α (считаем, что $q_1 = 1$, $q_2 = a_1$, $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$, $n \geqslant 2$; $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}$, $n \geqslant 2$). Положим $\alpha_n := |q_n\alpha - p_n| = (-1)^{n+1}(q_n\alpha - p_n)$.

В работе [1] доказывается, что каждому $x \in [0,1]$ можно сопоставить последовательность целых неотрицательных чисел $(x_1, x_2, \ldots)$, так что

$$x = h_\alpha(x_1, x_2, \ldots) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n \tag{1}$$

Определим множество $\mathfrak{X}_\alpha$ как совокупность всех последовательностей целых неотрицательных чисел $(x_1, x_2, \ldots)$ с $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ с марковским условием: $x_k = a_k \Longrightarrow x_{k+1} = 0$, $k \geqslant 1$. Снабженное топологией покоординатной сходимости, множество $\mathfrak{X}_\alpha$ становится вполне несвязным компактом, называемым *марковским компактом* (общее определение марковского компакта – см. [1, 3]). В работе [1] доказывается, что

1. Отображение h_α марковского компакта $\mathfrak{X}_\alpha$ в интервал [0,1] взаимно-однозначно всюду, кроме счетного множества точек.

2. Прообразом поворота R_α окружности $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, действующего по формуле $R_\alpha x = x + \alpha \mod 1$, при отображении h_α будет *адический сдвиг* на компакте $\mathfrak{X}_\alpha$ с чередующимся порядком, описываемый в следующем пункте.

2. Определим вначале частичный порядок на компакте $\mathfrak{X}_\alpha$. Последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ *сравнимы*, если существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_k = y_k$, $k > N$. Пусть $x_N \neq y_N$; тогда если $x_N < y_N$, то $x \prec y$ при нечетном N и $x \succ y$ при четном N. Назовем такой частиный порядок *знакочередующимся*. Преобразование T_α по определению сопоставляет каждой последовательности $x \in \mathfrak{X}_\alpha$ последовательность, непосредственно следующую за x в смысле знакочередующегося порядка. Преобразование T_α, определенное, очевидно, всюду, кроме последовательности $(a_1, 0, a_3, 0, a_5, \ldots)$, называется *адическим сдвигом* на марковском компакте $\mathfrak{X}_\alpha$. Итак, при отображении h_α адический сдвиг T_α переходит в поворот окружности R_α. Пусть далее мера μ_α есть марковская мера на компакте $\mathfrak{X}_\alpha$, являющаяся прообразом меры Лебега на интервале [0,1]. В работе [1] доказана

Теорема 0. *Динамические системы* $([0,1], \mathrm{mes}, R_\alpha)$ *и* $(\mathfrak{X}_\alpha, \mu_\alpha, T_\alpha)$

метрически изоморфны, причем изоморфизм устанавливается при помощи отображения h_α.

Таким образом, разложение (1) обретает динамический смысл. Настоящая работа продолжает изучение свойств разложения (1), начатое в [1] и продолженное в [4].

3. Сформулируем Проблему 2. Отметим вначале, что Проблема 1 особенно естественна и хорошо изучена для случая $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (см. [1, 5]). При этом, учитывая соотношение $\alpha^2+\alpha = 1$, мы можем считать, что ε_n принимает значения 0 и 1 (а не ± 1) с равными вероятностями. С другой стороны, для этого α $\alpha_n = \alpha^n$, а $\mathfrak{X}_\alpha$ есть множество 0-1 последовательностей без пар соседних единиц. Разложение (1) есть

$$x = h_\alpha(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \alpha^n, \tag{1'}$$

и фактически Проблема 1 заключается в том, каково будет распределение случайной величины x, если “снять марковские запреты”, то есть разрешить x_n принимать значения 0, 1 без ограничений. Иными словами, каков будет образ продакт-меры $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ на компакте $\prod\limits_1^\infty \{0,1\}$ при отображении h_α? Этот модельный пример дает основание обобщить его на случай произвольного иррационального α следующим образом.

Проблема 2. *Положим* $\widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha := \prod\limits_{k=1}^{\infty} \{0, 1, \dots, a_k\}$. *Пусть* λ_α *есть равномерная продакт-мера на компакте* $\widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$, *то есть* $\lambda_\alpha(x_1 = i_1, \dots, x_k = i_k) = \left(\prod\limits_{j=1}^{k} (a_j+1)\right)^{-1}$ *для любых* $i_1, \dots, i_k$ *с* $0 \leqslant i_s \leqslant a_s$, $1 \leqslant s \leqslant k$.

При каких иррациональных α *мера* $\tau_\alpha := h_\alpha \lambda_\alpha$ *будет сингулярной? абсолютно непрерывной относительно меры Лебега?*

4. Сразу же отметим, что из работы [6] следует, что мера τ_α чистая, то есть она либо сингулярна, либо абсолютно непрерывна. Далее, $\operatorname{supp} \tau_\alpha = [0, 1+\alpha]$, и в дальнейшем под лебеговой мерой мы будем понимать *нормированную* меру Лебега на интервале $[0, 1+\alpha]$.

Займемся вначале случаем тех α, у которых элементы a_n растут достаточно быстро. Оказывается, при некотором условии, формулируемом ниже, марковская мера μ_α и продакт-мера λ_α будут эквивалентными, откуда немедленно следует, что мера $\tau_\alpha = h_\alpha \lambda_\alpha$ эквивалентна мере Лебега.

Лемма 4.1. *Имеет место формула:*

$$\lambda_\alpha(\mathfrak{X}_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n + q_{n+1}}{\prod\limits_1^n (a_k + 1)}.$$

Доказательство. Продакт-мера λ_α марковского компакта $\mathfrak{X}_\alpha$ есть предел отношения количества допустимых цилиндров длины n к общему числу (в компакте $\widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$) цилиндров длины n. В работе [1] доказано, что число допустимых цилиндров длины n есть $q_n + q_{n+1}$. •

Лемма 4.2. *Если α таково, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty, \tag{2}$$

то $\lambda_\alpha(\mathfrak{X}_\alpha) > 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\frac{q_{n+1}}{\prod\limits_1^n (a_k + 1)} = \prod_{k=1}^n \frac{q_{k+1}}{(a_k + 1)q_k} = \prod_{k=1}^n \frac{a_k q_k + q_{k-1}}{(a_k + 1)q_k} > \prod_{k=1}^n \frac{a_k}{a_k + 1}.$$

Отсюда и из предыдущей леммы следует, что

$$\lambda_\alpha(\mathfrak{X}_\alpha) \geqslant \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_k + 1} > 0. \quad \bullet$$

Лемма 4.3. *Если выполнено условие* (2), *то*

$$\lambda_\alpha\big|_{\mathfrak{X}_\alpha} = \mu_\alpha.$$

Доказательство. Нам не требуется даже знать точные формулы для распределения μ_α (они имеются в работе [1]). Достаточно лишь использовать факт ее инвариантности относительно адического сдвига T_α (см. п. 2). Распространим частичный порядок, введенный в п. 2, на полный компакт $\widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$ и обозначим соответствующий адический сдвиг (определяемый так же, как и T_α) через $\widetilde{T}_\alpha$. Очевидно, продакт-мера λ_α инвариантна относительно $\widetilde{T}_\alpha$. По лемме 4.2, $\lambda_\alpha(\mathfrak{X}_\alpha) > 0$, откуда следует, что сдвиг T_α есть сужение сдвига $\widetilde{T}_\alpha$ на компакт $\mathfrak{X}_\alpha$. Теперь утверждение леммы следует из строгой эргодичности преобразования T_α, метрически изоморфного повороту окружности. •

Следствие 4.4. *При выполнении условия* (2) *мера* τ_α *эквивалентна лебеговой мере.*

5. Последний результат имеет комбинаторную интерпретацию. Как отмечалось выше, отображение h_α как отображение марковского компакта $\mathfrak{X}_\alpha$ в интервале $[0, 1]$ взаимно-однозначно всюду, кроме одной траектории адического сдвига T_α. Однако, будучи распространенным на полный компакт $\widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$, отображение h_α теряет это свойство, ибо в силу рекуррентного соотношения $a_n\alpha_n+\alpha_{n+1} = \alpha_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, существует бесконечно много $x \in [0, 1+\alpha]$, имеющих счетное число представлений в виде (1) с $(x_1, x_2, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$. Кажется, что независимо от α множество таких x будет иметь полную лебегову меру, но это не так.

Утверждение 5.1. *Если выполнено условие* (2), *то существует множество* G_α *положительной лебеговой меры, каждая точка которого имеет единственное представление в виде* (1) *с* $(x_1, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$.

Доказательство. Положим $\mathcal{K}_\alpha := \{(x_1, x_2, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha \,|\, 0 < x_k < a_k,\ k \geqslant 1\}$. Неоднозначность представления связана всегда с наличием троек вида (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}), где либо $x_{k-1} < a_{k-1}$, $x_k = a_k$, $x_{k+1} > 0$, либо $x_{k-1} > 0$, $x_k = 0$, $x_{k+1} < a_{k+1}$ $(k \geqslant 2)$. Более подробно это будет исследовано в п. 8, а для целей доказательства достаточно того факта, что если последовательность $(x'_1, x'_2, \dots)$ не содержит $x_k = 0$ и $x_k = a_k$ ни при каком $k \in \mathbb{N}$, то представление числа $x = \sum_1^\infty x'_k\alpha_k$ в виде (1) однозначно, даже если $(x'_1, x'_2, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$. Итак, достаточно взять $G_\alpha := h_\alpha\mathcal{K}_\alpha$. Действительно, $\tau_\alpha(G_\alpha) = \lambda_\alpha(h_\alpha^{-1}h_\alpha\mathcal{K}_\alpha) \geqslant \lambda_\alpha\mathcal{K}_\alpha = \prod_1^\infty \frac{a_k-1}{a_k+1} > 0$ •

Отметим в заключение, что лебегова мера множества тех α, для которых выполнено условие (2), равна 0. Это следует, например, из того, что для таких α $a_n \to +\infty$, а, значит, и $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \to +\infty$, в то время как по теореме Хинчина для п.в. α $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \to \gamma$, $n \to +\infty$, где γ – некоторая константа.

6. Перейдем к случаю тех α, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty. \tag{3}$$

Здесь меры λ_α и μ_α взаимно сингулярны по тривиальным причинам (в силу того, что $\operatorname{supp}\mu_\alpha = \mathfrak{X}_\alpha$, а $\lambda_\alpha(\mathfrak{X}_\alpha) = 0$, что доказывается при помощи рассуждений, аналогичных доказательству леммы 4.2). Тем не менее, взаимная сингулярность мер не влечет еще взаимной сингулярности их образов, особенно если учесть, что отображение $h_\alpha : \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha \to [0, 1+\alpha]$ не инъективно (а именно, для mes-п.в. $y \in [0, 1+\alpha]$ множество $h_\alpha^{-1}\{y\}$ имеет мощность континуума).

Для стационарного случая (то есть для $a_n \equiv a \geqslant 1$) это препятствие можно обойти при помощи техники работы [1], но для случая общего α, удовлетворяющего условию (3), она неприменима. Гипотеза заключается в том, что для таких α мера τ_α сингулярна. Ниже, однако, она будет доказана при дополнительном предположении, что $a_n \geqslant 5$ при всех достаточно больших n.

Мы будем исследовать свойства распределения случайной величины $t_\alpha^{(n)} := \sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k$, где x_k принимает значения $0, 1, \ldots, a_k$ независимо с равными вероятностями. Положим $D_\alpha^{(n)} := \operatorname{supp} t_\alpha^{(n)}$, $d_\alpha^{(n)} := |D_\alpha^{(n)}|$.

Лемма 6.1. *Имеет место следующая асимптотика:*

$$d_\alpha^{(n)} \sim (1+\alpha)(q_n + q_{n+1}), \quad n \to +\infty$$

Доказательство. В силу того, что $\alpha_k = (-1)^{k+1}(q_k\alpha - p_k)$, существуют 2 последовательности натуральных чисел $\{d'_n\}$, $\{d''_n\}$, такие что

$$D_\alpha^{(n)} = \bigcup_{k=-d'_n}^{d''_n} (k\alpha \bmod (1+\alpha)).$$

Очевидно, обе эти последовательности не убывают по n, откуда $D_\alpha := \cup_{n=1}^{\infty} D_\alpha^{(n)} = (\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}) \cap [0, 1+\alpha]$. Отсюда в силу равномерной распределенности D_α, $d_\alpha^{(n)} \sim |D_\alpha^{(n)} \cap [0,1]| \cdot (1+\alpha)$, $n \to \infty$. В интервале же $[0,1]$ любое число $y = \sum_1^n x_k\alpha_k$, $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$ может быть представлено в "допустимом" виде, то есть $y = \sum_1^n x'_k \alpha_k$ с $(x'_1, \ldots, x'_n, 0, 0, \ldots) \in \mathfrak{X}_\alpha$. Отсюда $|D_\alpha^{(n)} \cap [0,1]| = q_n + q_{n+1}$ (см. лемму 4.1), что доказывает лемму.

Замечание. В дальнейшем используется лишь то, что $d_\alpha^{(n)} \asymp q_{n+1}$.

7. Мера τ_α задает некоторое распределение $\tau_\alpha^{(n)}$ на множестве $D_\alpha^{(n)}$, а именно

$$\tau_\alpha^{(n)}(y) = \frac{f_n(y)}{\prod_1^n (a_k+1)}, \quad y \in D_\alpha^{(n)}. \tag{4}$$

Здесь $f_n(y)$ – количество способов представить число $y \in D_\alpha^{(n)}$ в виде $y = \sum_{k=1}^n x_k \alpha_k$, $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$. Пусть далее $\nu_\alpha^{(n)}$ обозначает дискретное равномерное распределение на множестве $D_\alpha^{(n)}$,

$$\nu_\alpha^{(n)}(y) \equiv \frac{1}{d_n}, \quad y \in D_\alpha^{(n)}$$

Лемма 7.1. *Последовательность дискретных распределений* $\nu_\alpha^{(n)}$ *слабо сходится к равномерному распределению на интервале* $[0, 1+\alpha]$.

Доказательство сразу следует из равномерной распределенности множества D_α.

Итак, для доказательства сингулярности меры τ_α достаточно предъявить последовательность множеств $F_\alpha^{(n)} \subset D_\alpha^{(n)}$, таких что

$$\lim_{n\to\infty} \tau_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}) = 1, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \nu_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

Определим вначале некий класс последовательностей из $\widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$ (в определенном смысле “нормальных”).

Утверждение. *(см.* [7]*). Для* λ_α*-п.в. последовательности* $x = (x_1, x_2, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$

$$Z_n(x) := \#\{x_k = 0 | 1 \leqslant k \leqslant n\} \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k+1}, \quad n \to \infty.$$

Положим для каждой последовательности $x = (x_1, x_2, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$

$$T_n'(x) := \#\{(x_{k-1} > 0,\ x_k = 0,\ x_{k+1} < a_{k+1}) \big| 2 \leqslant k \leqslant n-1\}, \tag{7}$$

$$T_n''(x) := \#\{(x_{k-1} < a_{k-1}, x_k = a_k,\ x_{k+1} > 0) \big| 2 \leqslant k \leqslant n-1\}, \tag{8}$$

$$P_n'(x) := \#\{(x_{k-2} < a_{k-2}, x_{k-1} = a_{k-1}, x_k = 1, x_{k+1} = 0, x_{k+2} < a_{k+2}) \big| \\ 3 \leqslant k \leqslant n-2\}, \tag{9}$$

$$P_n''(x) := \#\{(x_{k-2} > 0, x_{k-1} = 0, x_k = a_k - 1, x_{k+1} = a_{k+1}, x_{k+2} > 0) \big| \\ 3 \leqslant k \leqslant n-2\}. \tag{10}$$

Следствие 7.2. *Для λ_α-п.в. $x \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$ при $n \to \infty$*

$$T_n'(x) \sim T_n''(x) \sim \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_{k-1}a_{k+1}}{(a_{k-1}+1)(a_k+1)(a_{k+1}+1)},$$

$$P_n'(x) \sim P_n''(x) \sim \sum_{k=3}^{n-2} \frac{a_{k-2}a_{k+2}}{\prod_{k-2}^{k+2}(a_j+1)}.$$

Положим далее $T_n(x) := T_n'(x) + T_n''(x)$, $P_n(x) := P_n'(x) + P_n''(x)$, $T_n^{(\alpha)} := \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_{k-1}a_{k+1}}{(a_{k-1}+1)(a_k+1)(a_{k+1}+1)}$, $P_n^{(\alpha)} := \sum_{k=3}^{n-2} \frac{a_{k-2}a_{k+2}}{\prod_{k-2}^{k+2}(a_j+1)}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим

$$E_\alpha := \{(x_1, \dots) \in \widetilde{X}_\alpha \big| T_n(x) > (1-\varepsilon)T_n^{(\alpha)}, P_n(x) < (1+\varepsilon)P_n^{(\alpha)}\}.$$

Из следствия 7.2 вытекает, что $\lambda_\alpha(E_\alpha) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Пусть $E_\alpha^{(n)}$ состоит из *конечных* последовательностей $(x_1, \dots, x_n)$ с тем же свойством. Положим $F_\alpha^{(n)} := h_\alpha(E_\alpha^{(n)})$.

Этот и следующий пункты посвящены доказательству того, что множество $F_\alpha^{(n)}$ удовлетворяет условию (6) (условие (5) сразу вытекает из того факта, что образ меры от образа множества полной меры также имеет полную меру). При этом $\varepsilon > 0$ будет выбрано ниже.

По определению меры $\nu_\alpha^{(n)}$, $\nu_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}) = |F_\alpha^{(n)}| \cdot d_n^{-1}$. Далее, в силу того, что

$$\tau_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}) = \frac{\sum\limits_{y \in F_\alpha^{(n)}} f_n(y)}{\prod_1^n (a_k+1)} \geqslant \frac{|F_\alpha^{(n)}|}{\prod_1^n (a_k+1)} \cdot \min_{y \in F_\alpha^{(n)}} f_n(y),$$

где $f_n(y)$ – то же, что и в равенстве (4), имеет место оценка

$$|F_\alpha^{(n)}| \leqslant \frac{\prod_1^n (a_k+1)}{\min\limits_{y \in F_\alpha^{(n)}} f_n(y)} \cdot \tau_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}).$$

Отсюда

$$\nu_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}) \leqslant \frac{\prod_1^n (a_k+1)}{d_n} \cdot \left(\min_{y \in F_\alpha^{(n)}} f_n(y)\right)^{-1} \cdot \tau_\alpha^{(n)}(F_\alpha^{(n)}). \qquad (11)$$

8. Оценим снизу величину $f_n(y)$ при $y \in F_\alpha^{(n)}$. Поскольку y принадлежит $F_\alpha^{(n)} = h_\alpha(E_\alpha^{(n)})$, существует конечная последовательность $(x_1, \dots, x_n)$, такая что $y = \sum_1^n x_k \alpha_k$, и $T_n(x) > (1-\varepsilon)T_n^{(\alpha)}$,

$P_n(x) < (1+\varepsilon)P_n^{(\alpha)}$. Объясним выбор множества E_α. Для любого $y \in D_\alpha^{(n)}$ величина $f_n(y)$ есть мощность множества конечных последовательностей длины n, *эквивалентных* друг другу в следующем смысле: $(x_1, \dots, x_n) \sim (x'_1, \dots, x'_n)$, если вторая последовательность может быть получена из первой при помощи некоторого числа последовательных замен троек вида (x_{k-1}, a_k, x_{k+1}) на $(x_{k-1}+1, 0, x_{k+1}-1)$ или наоборот (здесь $x_{k-1} < a_{k-1}, x_{k+1} > 0$). Действительно, из определения величин α_n следует, что

$$x_{k-1}\alpha_{k-1} + a_k\alpha_k + x_{k+1}\alpha_{k+1} = (x_{k-1}+1)\alpha_{k-1} + (x_{k+1}-1)\alpha_{k+1}.$$

Определение 8.1. *Назовем замещаемой любую тройку вида* (x_{k-1}, a_k, x_{k+1}) *или* $(x'_{k-1}, 0, x'_{k+1})$ *с* $x_{k-1} < a_{k-1}$, $x_{k+1} > 0$ *или, соответственно,* $x'_{k-1} > 0$, $x'_{k+1} < a_{k+1}$ *(ср. формулы* (7), (8)).

Если бы замена каждой замещаемой тройки на эквивалентную не "портила" бы никакой другой замещаемой тройки (то есть не превращала бы ее в незамещаемую), то число $f_n(y)$ оценивалось бы снизу через $2^{T_n(x)}$ с любой последовательностью $x = (x_1, \dots)$, такой что $y = \sum_1^n x_k\alpha_k$. На самом деле ситуация более деликатна (но контролируема). Если, скажем, замещаемая тройка есть (x_{k-1}, a_k, x_{k+1}), то ее замещение может испортить соседнюю замещаемую тройку лишь если $x_{k+1} = 1$, $x_{k+2} = 0$, $x_{k+3} > 0$ или в случае $x_{k-1} = a_{k-1} - 1$, $x_{k-2} = 0$, $x_{k-3} > 0$. Анализ случая замещаемой тройки вида $(x'_{k-1}, 0, x'_{k+1})$ приводит к тем же двум типам пятерок, описанных в формулах (9), (10). Рассматривая теперь *только* те замещаемые тройки, которые не являются составной частью никаких пятерок описанного вида, мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 8.1. *Для произвольной последовательности* $x = (x_1, x_2, \dots) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_\alpha$

$$f_n(x) \geqslant 2^{T_n(x) - P_n(x)},$$

где $f_n(x) := f_n(y)$, $y = \sum_1^n x_k\alpha_k$.

Следствие 8.2. *Если последовательность* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *принадлежит множеству* $E_\alpha^{(n)}$, *то имеет место оценка*

$$f_n(x) > 2^{T_n^{(\alpha)} - P_n^{(\alpha)}} \cdot W^{T_n^{(\alpha)}}, \tag{12}$$

где $W = W(\varepsilon) \in (0,1)$ *и может быть сделано сколь угодно близким к 1.*

Доказательство сразу следует из следствия 7.2 и определения множества $E_\alpha^{(n)}$.

Кроме того,

$$T_n^{(\alpha)} - P_n^{(\alpha)} > 2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{a_{k-1}a_{k+1} - \frac{a_{k-2}a_{k+2}}{(a_{k-2}+1)(a_{k+2}+1)}}{(a_{k-1}+1)(a_k+1)(a_{k+1}+1)} >$$

$$> 2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{a_{k-1}a_{k+1} - 1}{(a_{k-1}+1)(a_k+1)(a_{k+1}+1)}.$$

Из последней оценки и формул (11), (12) следует, что для того, чтобы установить справедливость соотношения (6) для некоторых α, достаточно (с учетом замечания после леммы 6.1) доказать

Утверждение 8.3. *Если число $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ таково, что*

$$a_m \geqslant 5 \quad \textit{при} \quad m \quad \textit{достаточно большом} \tag{13}$$

то существует константа $C \in (0,1)$, такая что

$$\rho_n(\alpha) := \frac{\prod_1^n (a_k+1)}{q_{n+1}} \cdot 4^{-\sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{a_{k-1}a_{k+1}-1}{(a_{k-1}+1)(a_k+1)(a_{k+1}+1)}} \leqslant C^{\sum_1^n \frac{1}{a_k}} \tag{14}$$

Доказательство. Имеем: $\rho_n(\alpha) = \prod_{k=1}^n \psi_k(\alpha)$, где $\psi_1(\alpha) = \frac{a_1+1}{a_1}$, $\psi_n(\alpha) = \frac{a_n+1}{[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]}$, и при $2 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\psi_k(\alpha) = \frac{a_k+1}{[a_k, \dots, a_1]} \cdot 4^{-\frac{a_{k-1}a_{k+1}-1}{(a_{k-1}+1)(a_k+1)(a_{k+1}+1)}}$$

(мы воспользовались тем, что $q_k/q_{k+1} = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]$, см., напр., [8]). С учетом того, что $\psi_1(\alpha) \leqslant 2$, $\psi_n(\alpha) \leqslant 2$, достаточно показать, что можно найти такую абсолютную константу $C \in (0,1)$, что $\psi_k(\alpha) \leqslant C^{1/a_k}$, $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Отметим вначале, что в силу условия (13)

$$\psi_k(\alpha) \leqslant \varphi_k(a_{k-1}, a_k) := \frac{a_k+1}{a_k + \frac{1}{a_{k-1}+l_5}} \cdot 4^{-\frac{5a_{k-1}-1}{6(a_{k-1}+1)(a_k+1)}},$$

где $l_5 = [5, 5, \dots] = \frac{\sqrt{29}-5}{2}$. Остается исследовать функцию φ в области $a_{k-1} \geqslant 5$, $a_k \geqslant 5$. Имеем 2 случая.

1. Если $5 \leqslant a_k \leqslant 9$, то непосредственно проверяется, что при каждом таком a_k (фиксированном) функция $\varphi = \varphi(a_{k-1})$ имеет один максимум, причем

$$\max_{\substack{5 \leqslant a_k \leqslant 9 \\ a_{k-1} \geqslant 5}} \varphi(a_{k-1}, a_k) = \varphi(12, 5) < 0.992.$$

2. Если же $a_k \geqslant 10$, то при любом a_{k-1}, $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} > 0$. Действительно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} = \frac{A^{1/a_k}}{d+1/a_k} \cdot \left(\frac{(d-\ln A)a_k - d\ln A}{a_k(a_k+d)}\right), \tag{15}$$

где $A = 4^{-\frac{5a_{k-1}-1}{6(a_{k-1}+1)}}$, $d = (a_{k-1}+l_5)^{-1} - 1$. Выражения $d - \ln A$, $d\ln A$ представляют собой элементарные функции a_{k-1}, и легко проверяется, что $d - \ln A \geqslant 0.126$, $d\ln A \leqslant 1.16$, откуда с учетом (15) следует, что при $a_k \geqslant 10$ $\frac{\partial\varphi}{\partial a_k} > 0$. Тогда и $\frac{\partial(a_k \ln\varphi)}{\partial a_k} > 0$, следовательно, при $a_k \geqslant 10$

$$a_k \ln\varphi(a_{k-1}, a_k) \leqslant \lim_{a_k \to \infty} a_k \ln\varphi(a_{k-1}, a_k) = \ln A - d \leqslant -0.126.$$

Отсюда $\varphi(a_{k-1}, a_k) \leqslant (\exp(-0.126))^{\frac{1}{a_k}}$, если $a_{k-1} \geqslant 5$, $a_k \geqslant 10$. Выбор $C := \max((0.992)^5, \exp(-0.126))$ завершает доказательство. •

Следствие 8.4. *Если выполнены условия* (3) *и* (13) *на элементы a_n разложения числа α в непрерывную дробь, то мера τ_α сингулярна относительно лебеговой меры на интервале* $[0, 1+\alpha]$.

Вместе со следствием 4.4 данное следствие дает основную теорему настоящей работы.

Теорема 1. *Распределение случайной величины $t_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \alpha_n$ с независимыми и равномерно распределенными $x_n (0 \leqslant x_n \leqslant a_n)$ является*

1. *абсолютно непрерывным, если $\sum_n \frac{1}{a_n} < +\infty$,*
2. *сингулярным, если $\sum_n \frac{1}{a_n} = +\infty$, и $a_n \geqslant 5$ при всех достаточно больших n.*

9. Установим, наконец, связь с энтропией бесконечных сверток дискретных мер, введенной в работе А. Гарсиа [9]. Пусть, как и выше, $D_\alpha^{(n)}$ обозначает множество значений случайной величины $\sum_{k=1}^n x_k \alpha_k$, $0 \leqslant x_k \leqslant a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а $d_\alpha^{(n)} = |D_\alpha^{(n)}|$. Положим

$$H_\alpha := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{H(\tau_\alpha^{(n)})}{\log d_\alpha^{(n)}},$$

где $H(\tau_\alpha^{(n)})$ – энтропия дискретного распределения $\tau_\alpha^{(n)}$. Очевидно, величина H_α не зависит от выбора основания системы логарифмов, и $0 \leqslant H_\alpha \leqslant 1$. Из результатов работы [9] легко выводится, что если $H_\alpha < 1$, то мера τ_α сингулярна. К сожалению, подобный критерий для рассматриваемой задачи оказывается неэффективным. А именно, имеет место

Утверждение 9.1. *Если элементы a_n таковы, что*

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \to +\infty, \quad n \to \infty, \tag{16}$$

то $H_\alpha = 1$.

Доказательство. Отметим вначале, что для любого $y \in D_\alpha^{(n)}$ $f_n(y) \leqslant 2^{\frac{n+2}{3}}$. Действительно, если n делится на 3, то $\max\limits_{y \in D_\alpha^{(n)}} f_n(y)$ достигается на последовательностях $x = (x_1, \dots, x_n)$, таких что (x_1, x_2, x_3), $(x_4, x_5, x_6), \dots,$ (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) – замещаемые тройки, причем этот максимум равен $2^{\frac{n}{3}}$ (здесь, как и выше, $y = \sum_1^n x_k \alpha_k$). Если же $n \equiv 1, 2, \pmod 3$, то $f_n(y) \leqslant 2^{\frac{n+2}{3}}$.

Отсюда

$$H(\tau_\alpha^{(n)}) = -\sum_{y \in D_\alpha^{(n)}} \frac{f_n(y)}{\Pi_n} \log \frac{f_n(y)}{\Pi_n} \geqslant \log \frac{\Pi_n}{2^{n/3}} \tag{17}$$

(здесь $\Pi_n := \Pi_1^n (a_n + 1)$). Если выполнено условие (16), то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \Pi_n}{\log 2^{n/3}} \geqslant \mathrm{const} \cdot \lim_{n \to \infty} \log \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = +\infty,$$

и

$$H_\alpha = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{H(\tau_\alpha^{(n)})}{\log q_{n+1}} \geqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \Pi_n - \log 2^{n/3}}{\log q_{n+1}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log \Pi_n}{\log q_{n+1}} \geqslant 1. \quad \bullet$$

10. Заключительные замечания. 1. В действительности оценка (17) весьма груба, и предыдущее утверждение наверняка может быть усилено. Однако даже условие (16) означает, что, скажем, если $a_n \to +\infty$, то $H_\alpha = 1$, то есть широкий класс α, удовлетворяющих условиям (3) и (13), не "обрабатывается" с помощью энтропийного критерия Гарсиа.

2. Если $a_n \equiv a \in \mathbb{N}$, то оценка (12) пункта 8 представляет собой, по сути, оценку энтропии. Разумеется, в указанном виде она оказывается неэффективной для а, меньших 5, что имеет под собой серьезные основания. Так, в работе [5] авторы находят численное значение энтропии H_α для $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, и оно оказывается равным $0.995731\dots$. Подобная близость энтропии к 1 показывает, насколько деликатна задача оценки $f_n(y)$ снизу для $y \in F_\alpha^{(n)}$ при данном α. Как оказывается, здесь $f_n(y) \sim (1.237)^n \dots$.

3. В случае произвольного иррационального α у автора нет сомнений в том, что условие (13) в Теореме 1 может быть снято. Его наличие есть лишь результат малоэффективности описанного

подхода для тех α, у которых сколь угодно далеко встречаются малые a_n. Оценка (12) может быть улучшена за счет рассмотрения наряду с замещенными тройками и пятерками еще и "замещаемых" семерок, что, как оказывается и обслуживает случай "золотого сечения", обеспечивая оценку $f_n(y)$ снизу, описанную в предыдущем замечании. К сожалению, столь аккуратные оценки $f_n(y)$ при $y \in \widetilde{F}_\alpha^{(n)}$ (где $\widetilde{F}_\alpha^{(n)}$ – естественный аналог множества $F_\alpha^{(n)}$, возникающий при рассмотрении семерок) приводят к функциям от $a_1, \ldots, a_n$, аналогичным $\rho_n(\alpha)$ (см. формулу (14)), но весьма трудно исследуемым. Эта трудность состоит, главным образом, в том, что эти функции немонотонно зависят от $a_1, \ldots, a_n$, поэтому из сингулярности τ_α и $\tau_{\alpha'}$ не следует явно сингулярность $\tau_{\alpha''}$, где $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$, $\alpha' = [a_1', a_2', \ldots]$, $\alpha'' = [a_1'', a_2'', \ldots]$, и $a_n \leqslant a_n'' \leqslant a_n'$ для всех n. Видимо, для того, чтобы снять условие (13), требуются иные соображения.

Автор благодарит А. М. Вершика за постановку задачи и полезные советы.

Литература

1. А. М. Вершик, Н. А. Сидоров, *Арифметические разложения, ассоциированные с поворотом окружности и непрерывеными дробями.* — Алгебра и анализ **5** (1993), 97–115.
2. P. Erdös, *On a family of symmetric convolutions.* — Amer. J. Math. **61** (1939), 974–976.
3. А. М. Вершик, *Теорема о марковской аппроксимации в эргодической теории.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **115** (1982), 72–82.
4. Н. А. Сидоров, *Законы больших чисел и центральная предельная теорема для последовательностей коэффициентов ротационных разложений.* см. этот том.
5. J. C. Alexander, D. Zagier, *The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure.* — J. LMS **44** (1991), 121–134.
6. C. G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law.* — Acta Math. **77** (1945), 3–125.
7. J. Galambos, *Representations of Real Numbers by Infinite Series.* — Lecture Notes in Math. **502**.
8. Дж. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* М, 1961.
9. A. Garsia, *Entropy and singularity of infinite convolutions.* — Pac. J. Math. **13** (1963), 1159–1169.

Sidorov N. A. Singularity and absolute continuity of measures associated with rotation of the circle.

We study the problem of whether the infinite convolution of certain discrete distributions naturally associated with the rotation of the circle

by an irrational angle α, is singular or absolutely continuous for different values of parameter α.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 января 1994