Т. Р. Абдульмянов, В. Р. Фридлендер (Казань)

О РЕЗУЛЬТАНТНОЙ МАТРИЦЕ ПОЛИНОМОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Классическая теорема о результантной матрице полиномов $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ и $g(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$ ($a_0 \vee\ b_0 \neq 0$), согласно которой наличие общего корня у полиномов $f(x)$ и $g(x)$ равносильно обращению в нуль определителя матрицы $\mathbf{R}$, составленной определенным образом из коэффициентов этих полиномов, может быть усилена следующим образом:

Теорема 1. *Для того, чтобы полиномы $f(x)$ и $g(x)$ имели k общих корней, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\mathbf{R}$ был равен $r(\mathbf{R}) = n + m - k$.*

Это предложение (с использованием идеи Л.М. Берковича [1]) переносится на обыкновенные линейные дифференциальные операторы

$P(x, D) = a_0(x)D^n + \ldots + a_n(x)$, $\quad Q(x, D) = b_0(x)D^m + \ldots + b_m(x)$, $(D = \frac{d}{dx}$, $a_0(x) \vee\ b_0(x) \neq 0)$. Определим "производные" от операторов P и Q формулами: $P'(x, D) = DP(x, D) = a_0(x)D^{n+1} + (a_0'(x) + a_1(x))D^n + \ldots + (a_{n-1}'(x) + a_n(x))D + a_n'(x)$, $P^{(s)}(x, D) = D^sP(x, D) = a_0^{(s)}(x)D^{n+s} + \ldots + a_{n+s}^{s}(x)$. Аналогично определяются и операторы $Q^{(t)}(x, D) = D^tQ(x, D) = b_0^{(t)}(x)$ $D^{(m+t)} + \ldots + b_{m+t}^{(t)}(x)$ $(s, t = 0, 1, 2, \ldots)$. Результантной (правой результантной) матрицей (по Берковичу) назовем матрицу, составленную из коэффициентов производных операторов $P^{(s)}(x, D)$ $(s = m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$ и $Q^{(t)}(x, D)$, $(t = n-1, n-2 \ldots, 1, 0)$:

$$\mathbf{R}(x) = \begin{pmatrix} a_0^{(m-1)}(x) & a_1^{(m-1)}(x) & \ldots & \ldots & a_{m+n-1}^{(m-1)}(x) \\ 0 & a_0^{(m-2)}(x) & \ldots & \ldots & a_{m+n-2}^{(m-2)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_0(x) & \ldots & a_n(x) \\ b_0^{(n-1)}(x) & b_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & b_{m+n-1}^{(n-1)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & b_0(x) & \ldots & b_m(x) \end{pmatrix}.$$

Имеет место

Теорема 2. *Линейное пространство общих решений операторов P и Q имеет размерность $k = m + n - r(\mathbf{R}), (r(\mathbf{R})$ – ранг $\mathbf{R}(x))$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Беркович Л. М. *Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Саратов: Изд-во Саратовс. ун-та, 1989. – С. 27-32.

Д. Ф. Абзалилов (Казань)

МИНИМИЗАЦИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПУТЕМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОТСОСА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Распределенный отсос пограничного слоя (ПС) является одним из способов, позволяющих улучшить аэродинамические характеристики обтекаемого тела. Но вследствие того, что на отсос ПС расходуется энергия, задачи оптимизации устройства отсоса для получения максимального положительного эффекта от его использования являются актуальными [1,2]. В связи с этим представляет интерес следующая оптимизационная задача.

Рассматривается обтекание ПС некоторого участка $0 < s < l$ с заданным законом распределения $U(s)$ скорости внешнего течения при числе Re Рейнольдса. Требуется найти распределение $v_0(s) > 0$ скорости отсоса, чтобы коэффициент сопротивления

$$C_d = C_v + C_s$$

принимал минимальное значение. Здесь C_v – коэффициент сопротивления за счет вязкости, C_s – эквивалентный коэффициент сопротивления энергетических затрат, возникающих за счет введения системы отсоса. Для расчета ПС использовался метод Эпплера [3], состоящий в дифференцировании системы двух дифференциальных уравнений —

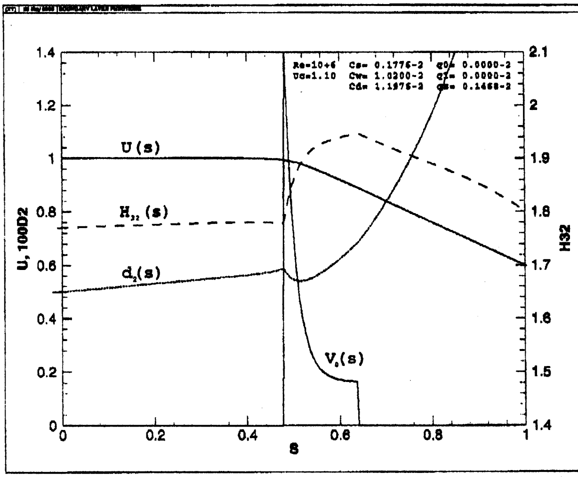


Рис.1

уравнения импульсов и энергии; коэффициент C_v рассчитывался по формуле Сквайра-Янга

$$C_v = \frac{2\delta_2}{b}\left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{(5+H_{12})/2}$$

где $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — толщина вытеснения, потери импульса, потери энергии соответственно, $H_{12} = \delta_1/\delta_2$ — формпараметр. Коэффициент C_v вычислялся по формуле из работы [3]

$$C_s = \frac{1}{b}\int\limits_0^l \left(\frac{U_c(s)}{U_\infty}\right)^2 \frac{v_0(s)}{U_\infty} ds$$

Здесь $U_c(s)$ — некоторая фиктивная скорость, характеризующая потери в ПС ($U_c(s) > U(s)$).

В [4] оптимальное решение искалось численно, с заданием скорости отсоса в виде функции, зависящей от нескольких свободных параметров и сведением задачи к задаче нахождения минимума функции нескольких переменных. В настоящей работе поставленная оптимизационная задача переформулирована в терминах задач оптимального управления. Скорость отсоса

ПС выбрана в качестве управляющей функции. С использованием принципа максимума Понтрягина решение сведено к интегрированию системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными параметрами. Также решена задача проектирования — одновременной оптимизации как скорости отсоса, так и скорости внешнего потока на диффузорном участке с целью получения минимального коэффициента сопротивления. В качестве контрольных функций использовались скорость отсоса и производная скорости внешнего течения.

На рис.1 представлен пример нахождения скорости отсоса $v_0(s)$ (сплошная линия) и характеристик ПС $H_{32} = \delta_3/\delta_2$ (штриховая линия) и δ_2 (пунктирная линия) по заданному распределению скорости $U(s)$ внешнего течения.

Автор благодарит Н.Б.Ильинского и Р. Эпплера за полезные обсуждения.

Работа поддержкана РФФИ (проекты 99-01-00365 и 99-01-04029).

ЛИТЕРАТУРА

1. Rioual J.-L., Nelson P. A., Hackenberg P., Tutty O. R.. *Optimum drag balance for boundary-layer suction*// J. of Aircraft. – V. 33. – 1996. – N 2. – P. 435–498.

2. Balakumar P., Hall P. *Optimum suction distribution for transition control*// Theoret. Comput. Fluid Dynamics. – V. 13. – 1999. – P. 1–19.

3. Eppler R. *Airfoils with boundary layer suction, design and off-design cases* // Aerospace Science and Technology. – V. 3. – 1999. – P. 403–415.

4. Абзалилов Д. Ф., Ильинский Н. Б. Марданов Р. Ф. *Оптимизация распределения скорости отсасывания пограничного слоя на проницаемых крыловых профилях*// Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Каз. матем. об-во. – Казань: УНИПРЕСС, 1998. – С. 154–159.

Н. Р. Абубакиров, Р. Б. Салимов,
П. Л. Шабалин (Казань)

ВНЕШНЯЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРИ КОМБИНИРОВАНИИ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ В ФОРМЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ И ПОЛЯРНОГО УГЛА

Рассмотрены внешние обратные краевые задачи (ОКЗ) по параметрам x, y и θ, y в односвязной области. Пусть L_z — замкнутый жордановый контур в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, состоящий из двух частей L_z^1 и L_z^2, D_z — область, внешняя к кривой L_z, $w(z)$ — функция, аналитическая в области D_z.

Требуется найти форму контура L_z и функцию $w(z)$, если на нем граничные значения этой функции заданы в виде

$$\begin{aligned}
&w = \varphi_1(x) + i\psi_1(x),\ 0 \le x \le a, \text{ на одной части } L_z^1,\\
&w = \varphi_2(x) + i\psi_2(x),\ 0 \le x \le a, \text{ на остальной части } L_z^1, \qquad (1)\\
&w = \varphi(y) + i\psi(y),\ -b \le y \le b, \text{ на } L_z^2,
\end{aligned}$$

причем эти значения в плоскости w определяют замкнутый жордановый контур L_w.

Будем решать эту задачу в постановке Нужина [1], поэтому величину $w_0 = w(\infty)$ в плоскости w фиксируем заранее. После перехода от области D_w к внутренности единичного круга в плоскости ζ решение задачи (1) сводится к нахождению функции $z(\zeta)$ с полюсом в точке $\zeta = 0$, удовлетворяющей краевому условию задачи Гильберта

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(\gamma)} z(e^{i\gamma})] = c(\gamma), \tag{2}$$

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} -\pi/2, \ \gamma \in [0, \gamma_a], \\ -\pi, \ \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B), \\ -3\pi/2, \ \gamma \in [\gamma_B, 2\pi], \end{cases} \quad c(\gamma) = \begin{cases} -y(\gamma), & \gamma \in [0, \gamma_A], \\ -x(\gamma), & \gamma \in (\gamma_A, \gamma_B), \\ y(\gamma), & \gamma \in [\gamma_B, 2\pi], \end{cases}$$

$e^{i\gamma_A}$ и $e^{i\gamma_B}$ – точки единичной окружности, в которые переходят точки стыка дуг L_z^1 и L_z^2.

На основе метода из статьи [2] построена искомая функция

$z(\zeta)$, имеющая вид

$$z(\zeta) = -\frac{i}{2\pi} F_0(\zeta) \int_0^{2\pi} \frac{c(\sigma)}{|F_0(e^{i\sigma})|} \frac{e^{i\sigma}+\zeta}{e^{i\sigma}-\zeta} d\sigma + iB_0 + C\zeta - \frac{\overline{C}}{\zeta}, \quad (3)$$

где $C = A + iB$, A, B, B_0 — произвольные действительные постоянные, а $F_0(\zeta)$ — решение однородной задачи (2).

ОКЗ по параметрам θ, y отличается от предыдущей только тем, что на части L_z^1 контура L_z значения аналитической функции $w(z)$ заданы в виде

$$w = \varphi_*(\theta) + i\psi_*(\theta),$$

где $\theta = \arg z$. Эта задача также приводится к задаче Гильберта (2) со своими коэффициентами $\nu(\gamma)$ и $c(\gamma)$. Здесь возникают два различных случая.

1) Если $\alpha \le \theta \le 2\pi - \beta$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$, то функция $z(\zeta)$ имеет вид

$$z(\zeta) = -iF_0(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{c(\gamma)}{|F_0(e^{i\gamma})|} \frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta} d\gamma + iB_0 \right],$$

$F_0(\zeta)$ обозначает то же, что и выше.

Доказано, что если произвольная вещественная постоянная B_0 удовлетворяет некоторым ограничениям-неравенствам, то искомая область D_z является однолистной.

2) Если $-\beta < \theta < \alpha$, то $z(\zeta)$ выражается формулой (3). Здесь доказан тот факт, что в комплексной плоскости $B_0 + iA$ существует область D_0 такая, что если $(B_0, A) \in D_0$ и B удовлетворяет некоторым ограничениям-неравенствам, то искомая область D_z также является однолистной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г. , Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.

2. Абубакиров Н. Р., Салимов Р. Б. *Новый подход к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в*

многосвязной области/ Казанск. ун-т, 1999. – 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, N 1703-B99.

Ф. Г. Авхадиев (Казань)

ОСОБЕННОСТИ СФЕРИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Для функций $f : S^n \to \mathrm{C}$ и параметров $\alpha \in \mathrm{C}$ и $x \in \mathrm{R}^{n+1} \setminus S^n$ рассмотрим сферические потенциалы

$$p_{n,\alpha}(x, f) = \int_{S_n} \frac{f(y) d\sigma_y}{|x-y|^{n+\alpha}}, \tag{1}$$

где $S^n = \{y \in \mathrm{R}^{n+1} : |y| = 1\}$, $d\sigma_y$ — обычная мера Лебега на сфере S^n, $\omega_n = \int_{S_n} d\sigma_y = 2\pi^{\frac{n+1}{2}}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$. Асимптотическое поведение (1) при $|x| \to 1$ хорошо известно. В частности, если $f \in L^\infty(S^n)$ и $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, то интеграл (1) ограничен. Если $f \in L^\infty(S^n)$ и $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, то (1) имеет особенность порядка $O(|1-|x||^{-\mathrm{Re}\,\alpha})$. Мы находим формулу, явно выделяющую эту особенность.

Идею дает тривиальный случай $n = 0$. Для $S^0 = \{-1, 1\}$ аналог (1)

$$p_{0,\alpha}(x, f) = \frac{f(-1)}{|x+1|^\alpha} + \frac{f(1)}{|x-1|^\alpha} \quad (x \in \mathrm{R} \setminus S^0)$$

удовлетворяет тождеству

$$p_{0,\alpha}(x, f) = |1 - x^2|^{-\alpha} p_{0,-\alpha}(x, f \circ T_0), \tag{2}$$

где $T_0 : S^0 \to S^0$ является инволюцией, т.е. $T_0(\pm 1) = \mp 1$.

Существует аналог формулы (2) для $n \geq 1$.

Теорема. *Пусть $n \geq 1$, $f \in L^1(S^n)$. Для любых $\alpha \in \mathrm{C}$ и $x \in \mathrm{R}^{n+1} \setminus S^n$, $|x| \neq 0$,*

$$\int_{S^n} \frac{f(y) d\sigma_y}{|x-y|^{n+\alpha}} = |1 - |x|^2|^{-\alpha} \int_{S^n} \frac{(f \circ T_{n,x})(y) d\sigma_y}{|x-y|^{n-\alpha}}, \tag{3}$$

где $T_{n,x}$ — инверсия сферы S^n относительно сферы

$$S_x^{n-1} = \{y \in S^n : |y - x| = \sqrt{|1 - |x|^2|}\}.$$

Геометрически $T_{n,x} = P_x^{-1} \circ J_\rho \circ P_x$, где P_x — стереографическая проекция S^n с "северным полюсом" в точке $e_1 = x/|x|$ на плоскость $\mathrm{R}_x^n = \{\eta \in \mathrm{R}^{n+1} : \eta_1 = 0\}$, J_ρ — инверсия R_x^n относительно сферы $|\eta| = \rho = \sqrt{\frac{1+|x|}{|1-|x||}}$. Отметим, что в ортогональном базисе с $e_1 = x/|x|$ инверсия $\xi = T_{n,x}(\eta)$ определяется формулами

$$\xi_1 = \frac{2|x| - (1+|x|^2)\eta_1}{1+|x|^2 - 2|x|\eta_1}, \quad \xi_k = \sqrt{\frac{1-\xi_1^2}{1-\eta_1^2}}\,\eta_k \quad (2 \le k \le n+1). \quad (4)$$

Явные формулы (3) и (4) позволяют легко обосновать свойства сферических потенциалов, аналогичные свойствам интеграла Пуассона.

Следствие 1. *Если* $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $f \in L^\infty(S^n)$, *и* f *непрерывна в точке* $y_0 \in S^n$, *то*

$$\lim_{|x|\neq 1, x\to y_0} |1-|x|^2|^\alpha p_{n,\alpha}(x,f) = 2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+n}{2})} f(y_0). \quad (5)$$

Действительно, пусть $|x| \neq 1$, $q > 1$ и $(n - \operatorname{Re}\alpha)\frac{q}{q-1} < n$. Из (4) следует, что

$$\lim_{x\to y_0} f(T_{n,x}(y)) = f(y_0) \qquad (\forall y \in S^n \setminus \{y_0\}).$$

Следовательно, по теореме Лебега о мажорированной сходимости имеем

$$\lim_{x\to y_0} \int_{S^n} |f(T_{n,x}(y)) - f(y_0)|^q \, d\sigma_y = 0. \quad (6)$$

Пользуясь (3) и неравенством Гельдера, можем написать

$$\||1-|x|^2|^\alpha p_{n,\alpha}(x, f - f(y_0))| \le \mathrm{const} \cdot \|f \circ T_{n,x} - f(y_0)\|_q. \quad (7)$$

Формула (5) следует из (6) и (7).

Следствие 2. *Пусть* $1 < q$, $1/q + 1/t = 1$, $f \in L^q(S^n)$, $\|f\|_q = (\int_{S^n} |f(y)|^q d\sigma_y)^{1/q}$. *Если* $\beta = \operatorname{Re}\alpha + n/q > 0$, *то*

$$\sup_{\|f\|_q = 1} |1-|x|^2|^\beta |p_{n,\alpha}(x,f)| = \left(\int_{S^n} \frac{d\sigma_y}{||x|e_1 - y|^{n-\beta t}} \right)^{1/t}. \quad (8)$$

Для доказательства следствия 2 мы пользуемся неравенством Гельдера и нашей теоремой.

В силу хорошо известных свойств потенциалов Рисса интеграл из (8) имеет разве лишь три критических точки $|x| = 0$, $|x| = 1$ и $|x| = \infty$. Следовательно, нетрудно вычислить максимальные и минимальные значения интеграла из (8) для $0 \le |x| \le 1$ или $1 \le |x| \le \infty$. Например, если $n \ge 2$ и $n - \beta t \in [0, n-1)$, то из (8) мы получаем точную оценку

$$|1 - |x|^2|^\beta |p_{n,\alpha}(x,f)| \le \omega_n^{1/t} \|f\|_q. \tag{9}$$

Равенство в (9) будет в том случае, когда $|x| = 0$ и $f(y) = \text{const}$.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00366) и грантом DFG.

Ю. Р. Агачев (Казань)

К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучается задача оптимизации по порядку точности (см., напр., в [1]) прямых методов решения двух классов слабо сингулярных интегральных уравнений Фредгольма II рода.

Рассмотрим уравнение вида

$$x(t) + \int_a^b \mu(|t-s|) h(t,s) x(s)\, ds = y(t), \; a \le t \le b, \tag{1}$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ — известные непрерывные функции, $\mu(\tau)$ — известная функция, интегрируемая по Лебегу в промежутке $[0, b-a]$, а $x(t)$ — искомая.

Пусть $H_\omega(M)$ означает обобщенный класс функций Гёльдера, определенных на $[a,b]$ и ограниченных там по модулю положительной постоянной $M > 0$. Первый класс E_1 уравнений (1) задается соотношениями $h(\text{по}\, t) \in H_{\omega_1}(M_1)$, $y \in H_{\omega_2}(M_2)$, а второй класс E_2 представляет собой подкласс E_1, когда дополнительно

$h(\text{по } s) \in H_{\omega_3}(M_1)$; здесь ω_i, $i = \overline{1,3}$, — произвольно фиксированные модули непрерывности.

Для классов E_1 и E_2 уравнений (1) исследованы соответствующие классы решений, которые позволили найти порядковую величину оптимальной оценки погрешности [1] в пространстве $C[a,b]$ и построить оптимальные по порядку точности прямые и проекционные методы решения уравнений (1) из указанных классов.

Результаты распространены также на случай многомерных интегральных уравнений Фредгольма II рода в n–мерном кубе $\Omega = [a,b]^n$ $(n \geq 2)$ со слабо сингулярным ядром

$$x(t) + \int\limits_{\Omega} \mu(|t-s|)h(t,s)x(s)\,ds = y(t),\ t \in \Omega,$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ – известные функции своих аргументов $t, s \in \Omega$, $x(t)$ – искомая; здесь $\mu(\tau) \equiv \mu_1(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(\tau_n)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, а $\mu_1, \ldots, \mu_n$ – известные функции, определенные на $[0, b-a]$ и интегрируемые там по Лебегу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

Ю. Р. Агачев, А. И. Леонов (Казань)

ОБ ОДНОМ ОПТИМАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается общая линейная краевая задача

$$R_\nu(x) = 0, \quad \nu = \overline{0, p-1}, \tag{1}$$

для интегро–дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(p)}(t) + \sum_{k=1}^{p} g_k(t)\, x^{(p-k)}(t) +$$

$$+\sum_{j=0}^{m}\int_{-1}^{1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{2}$$

где R_ν, $\nu = \overline{0,p-1}$, – данные линейно независимые функционалы на пространстве $(p-1)$–раз непрерывно дифференцируемых функций, функции $g_k(t)$, $k = \overline{1,p}$, и $h_j(t,s)$, $j = \overline{0,m}$ (по переменной t равномерно относительно s) имеют производные $(m-p)$–го порядка, суммируемые по Лебегу в промежутке $(-1,1)$; p и m – целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $p < m$.

Приближенное решение задачи (1), (2) ищется в виде алгебраического многочлена $x_n(t)$ степени $n+p-1$, а его неизвестные коэффициенты определяются из условий

$$R_\nu(x_n) = 0, \quad \nu = \overline{0,p-1}; \tag{3}$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} (Kx_n)^{(m-p)}(t)\,dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (y)^{(m-p)}(t)\,dt,$$

$$t_i = \cos\frac{i\pi}{n},\ i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Условия (3), (4) эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов многочлена $x_n(t)$.

В работе доказана оптимальность по порядку точности [1] метода (3), (4) среди всех полиномиальных проекционных методов решения класса задач (1), (2), определяемого принадлежностью производных $(m-p)$–го порядка коэффициентов уравнения (2) в пространстве суммируемых по Лебегу функций обобщенному классу Гёльдера H_ω, где ω – заданный модуль непрерывности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

Е. П. Аксентьева (Казань)

К РЕШЕНИЮ СТЕПЕННОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $R = \{z \in \mathbf{C} \mid z = t_1 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2,\ 0 < s_1, s_2 < 1\}$ есть внутренность параллелограмма, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, l_1, l_1' — его боковые стороны, l_2, l_2' — нижнее и верхнее основания. Пусть ∂R — граница области R, ориентированная против часовой стрелки, $L = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, $L \subset R$ — окружность, ориентированная по часовой стрелке. Через D^+ обозначим двусвязную область с границей $\partial D^+ = L \cup \partial R$, а через $D^- = \overline{R}\backslash\overline{D}^+$ — односвязную.

Требуется найти все функции $\Phi(z)$, аналитические в $R\backslash L$, непрерывные в $\overline{D}^\pm$, имеющие конечное число нулей, по граничным условиям:

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta,\ t \in L\backslash\Omega, \tag{1}$$

$$\Phi^+(t + \omega_k) = \Phi^+(t)\exp(\gamma_k),\ t \in l_k,\ k = 1, 2, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, $\gamma_k \in \mathbf{C}$, $G(t)$ — гельдерова функция на L, $G(t) \neq 0, \Omega = \{\tau_j\}_1^r$, точки $\tau_j \in L$ произвольно фиксированы, различны и являются нулями функции $\Phi(z)$. Условие (1) следует понимать так, что существуют ветви $\ln \Phi^\pm(t)$ на $L\backslash\Omega$, при которых выполняется равенство $\exp[\alpha \ln \Phi^+(t)] = G(t)\exp[\beta \ln \Phi^-(t)]$. Аналитического продолжения функций $[\Phi^+(t)]^\alpha$, $[\Phi^-(t)]^\beta$ в полуокрестности точки τ_j не требуется.

Обосновано поведение в окрестности τ_j:

$$\Phi^+(z) = (z - \tau_j)^{\alpha_j/\alpha}\Psi_j^+(z),\ \ \Phi^-(z) = (z - \tau_j)^{\alpha_j/\beta}\Psi_j^-(z),$$

где $\Psi_j^\pm(z)$ ограничены и не обращаются в нуль в полуокрестностях точки τ_j, $\operatorname{Re}(\alpha_j/\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha_j/\beta) > 0$, $\alpha_j = m_j + \alpha k_j + \beta l_j, m_j, k_j, l_j \in \mathbf{Z}$.

Получены критерий разрешимости и решение в явном виде. Дан анализ условий разрешимости в зависимости от числа нулей решения и их расположения.

Ю. А. Альпин, А. С. Климова (Казань)

О ДЕРЕВЬЯХ, ПОРОЖДАЮЩИХ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

Об ультраметрических матрицах различных типов можно прочитать в [1]. Специальные ультраметрические матрицы, введенные в [2], это квадратные неотрицательные симметрические матрицы $A = (a_{ik})$, удовлетворяющие условиям:

$a_{ik} \geq \min(a_{ij}, a_{jk})$ для всех i, j, k,

$a_{ii} = \max\limits_{k \neq i} a_{ik}$ для всех i.

Пусть дано дерево с вершинами $1, 2, \ldots, n$, каждому ребру которого приписано неотрицательное число — вес. Скажем, что взвешенное дерево порождает матрицу $C = (c_{ik})$ порядка n, если элемент $c_{ik} (k \neq i)$ равен наименьшему из весов ребер (i, k)-цепи, элемент c_{ii} равен наибольшему из весов ребер, инцидентных вершине i.

Теорема 1 [2]. *Пусть A — неотрицательная симметрическая матрица. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) A — специальная ультраметрическая матрица,

2) существует взвешенная цепь, порождающая A,

3) существует взвешенное дерево, порождающее A.

Из результатов статьи [3] выводится следующая характеристика порождающих деревьев. Сопоставим специальной ультраметрической матрице A порядка n простой взвешенный граф $G(A)$ с вершинами $1, 2, ..., n$, такой, что (а) вершины i, k смежны $\iff a_{ik} > 0$, (б) вес ребра (i, k) равен a_{ik}.

Теорема 2. *Множество взвешенных деревьев, порождающих матрицу A, совпадает с множеством остовов графа $G(A)$, имеющих максимальный вес.*

Из этой теоремы следует, что порождающие деревья могут быть найдены алгоритмом, аналогичным алгоритму Краскала нахождения остовов минимального веса.

Авторы благодарят проф. М. Фидлера (АН Чешской республики) за возможность ознакомиться с работой [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Nabben R., Varga R. S. *Generalized ultrametric matrices – A class of inverse M-matrices*// Linear Algebra Appl. – 1995. – V. 220. – P. 365–390.

2. Fiedler M. *Special ultrametric matrices and graphs*//SIAM J. Matrix Anal. Appl. (to appear).

3. Alpin J., Mubarakzianow R. *The bases of weighted graphs*// Discrete Math. – 1997. – V. 175. – P. 1–11.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина (Казань)

ПЕРМАНЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ — спектр комплексной матрицы A, причём $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_n|$. Обозначим символом $|A|$ матрицу, полученную заменой элементов A на их модули. Пусть $r_{i_1}, ..., r_{i_n}$ — невозрастающая последовательность строчных сумм матрицы $|A|$. Теорема Шнейдера [1] утверждает, что

$$|\lambda_1 ... \lambda_k| \leq r_{i_1} ... r_{i_k}, \qquad k = 1, ..., n.$$

Эти неравенства можно уточнить используя перманенты [2] подматриц A. Обозначим $A(\alpha)$ подматрицу, полученную из A вычёркиванием строк, номера которых не лежат в $\alpha \subseteq \{1, ..., n\}$.

Теорема 1. $|\lambda_1 ... \lambda_k| \leq \max_\alpha \operatorname{per}(|A(\alpha)|) \leq r_{i_1} ... r_{i_k}$, $k = 1, ..., n$, *где α пробегает k-подмножества множества $\{1, ..., n\}$.*

Применим теорему 1 к сопровождающей матрице многочлена $z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$. В этом случае перманенты вычисляются явно и их использование, сравнительно со строчными суммами, особенно эффективно.

Теорема 2. *Пусть $i_1, ..., i_{n-1}$ — такая перестановка индексов $1, ..., n-1$, что $|a_{i_1}| \geq ... \geq |a_{i_{n-1}}|$. Тогда*

$$|\lambda_1 ... \lambda_k| \leq \max(|a_{i_1}| + ... + |a_{i_k}| + 1, |a_n|), \qquad k = 1, ..., n-1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* – М.: Наука, 1971.
2. Минк Х. *Перманенты.* – М.: Мир, 1982.

В. А. Алякин (Самара)

РАЗЛОЖЕНИЕ В СМЫСЛЕ ХЬЮИТТА-ИОСИДА ИНДУКТИВНОГО ПРЕДЕЛА НАПРАВЛЕННОСТИ МЕР

В работе получено прямое доказательство теоремы о разложении индуктивного предела направленности мер в сумму локально счетно аддитивной меры и меры, не имеющей ненулевых счетно аддитивных минорант. Приводится явный вид мер, составляющих данное разложение.

Пусть R_i, $i \in (I, \leq)$ — неубывающая направленность колец подмножеств множества T, $R = \cup R_i$. Пусть $\mu_i : R_i \to [0; +\infty)$, $i \in I$, — ограниченная конечно аддитивная мера такая, что $\mu_k|_{R_i} = \mu_i$ для любого $k \geq i$. Следуя [1], меру $\mu : R \to [0; +\infty)$, $\mu = \cup \mu_i$, будем называть индуктивным пределом направленности (μ_i). По определению, если $E \in R$ и $E \in R_{i_0}$, то $\mu(E) = \mu_i(E)$ для всех $i \geq i_0$.

Меру μ, определенную на кольце $R = \cup R_i$, будем называть локально счетно аддитивной, если каждое ее сужение $\mu|_{R_i}$, $i \in I$, счетно аддитивно.

Положим

$$c\mu(E) = \lim_{i \in I} c\mu_i(E), \quad s\mu(E) = \mu(E) - c\mu(E), \quad E \in R.$$

Теорема. *Если каждая мера $\mu_i : R_i \to [0; +\infty)$ ограничена, то мера $\mu = \cup \mu_i$ имеет единственное разложение в сумму двух мер μ^1 и μ^2, где мера μ^1 локально счетно аддитивна, а мера μ^2 не имеет ненулевых локально счетно аддитивных минорант. При этом $\mu^1 = c\mu$ и $\mu^2 = s\mu$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Недогибченко Г. В., Савельев Л. Я. *Индуктивные пределы направленностей непрерывных мер.* – В сб.: Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. – Новосибирск, 1982. – С. 168–179.

А. М. Андрианова, Б. Г. Габдулхаев (Казань)

ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Слабо сингулярному интегралу

$$S(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| d\sigma, \quad x \in L_p,\ |s| < \infty, \tag{1}$$

ставятся в соответствие квадратурные формулы вида

$$S(x;s) = \sum_{k=1}^{N} f_k(x)a_k(s) + R_N(s), \quad N \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_N$ — линейно независимые функционалы в L_p ($1 \le p \le \infty$), $a_1(s), a_2(s), \ldots, a_N(s)$ — линейно независимые функции в L_p, а $R_N(s) = R_N\left(x; s, \{f_k, a_k\}_1^N\right)$ — остаточный член.

В работе решена задача оптимизации квадратурных формул (2) в классах плотностей $F = \{f\} = W^r H^\omega$ ($r + 1 \in \mathbb{N}$, ω — модуль непрерывности), $F = H_p^{r+\alpha}$ ($1 \le p \le \infty$, $r + 1 \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \le 1$), $F = W^r H_k[\varphi]$ ($r + 1 \in \mathbb{N}$, φ — функция сравнения порядка $k \in \mathbb{N}$), $F = W_p^r$ ($1 \le p \le \infty$, $r > 0$, $rp > 1$). При этом, следуя гл. 3 книги [1], за оптимальную оценку погрешности в классе плотностей $F = \{f\} \subset L_p$ берется величина

$$V_N(F) = \inf_{f_k, a_k} \sup_{x \in F} \max_s \left|R_N(x; s, \{f_k, a_k\}_1^N\right|. \tag{3}$$

Конкретная квадратурная формула (2) с фиксированными функционалами $f_k = f_k^0$ и функциями $a_k = a_k^0$ ($k = \overline{1, N}$) называется оптимальной, асимптотически оптимальной или оптимальной по порядку, если ее погрешность в этом классе соответственно равна, асимптотически равна и равна по порядку оптимальной оценке (3). В частности, доказано, что

$$V_N\left(W^r H^\omega\right) \asymp \frac{\ln N}{N^{r+1}} \omega\left(\frac{1}{N}\right),$$

и оптимальной по порядку является квадратурная формула с функционалами

$$f_k^0(x) = \int_{s_{k-1}}^{s_k} x(\sigma)\, d\sigma, \quad s_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N}, \tag{4}$$

и с функциями $a_k^0(s)$, определенными в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

2. Андрианова А. М. *Интервальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов*/ Деп. в ВНИИТЭИ агропрома РФ 31.03.1997, No 17136. – 17 с.

П. Е. Андронов (Пенза)

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ УНИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Приведенные ниже результаты получены в процессе изучения ортогональных представлений унитреугольной группы матриц $ST_n(K)$ над конечным полем K. В лемме 1 носит не требуется конечности поля. Теоремы являются следствиями лемм с теми же номерами.

Лемма 1. *Представление группы $ST_n(K)$ точно тогда и только тогда, когда подпредставление ее центра точно.*

Теорема 1. *Пусть K — поле простого порядка. Тогда существует точное неприводимое ортогональное представление группы $ST_n(K)$.*

Далее рассматриваются специальная ортогональная группа и централизатор в ней произвольного элемента нечетного порядка.

Лемма 2. *Централизатор в группе $SO_m(R)$ ортогонального оператора нечетного порядка ($> I$), не имеющего одномерных инвариантных подпространств, изоморфен унитарной группе матриц вдвое меньшего порядка.*

Теорема 2. *Ортогональное представление группы $ST_n(K)$ ($\mathrm{char}\, K > 2$) эквивалентно некоторому унитарному представлению.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* – М.: Мир, 1978.
2. Дьедонне Ж. *Геометрия классических групп.* – М.: Мир, 1974. – 208 с.

Н. Г. Анищенкова, К. М. Расулов (Смоленск)

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром L, уравнение которого имеет вид $t = \varphi(s)+i\psi(s)$, $0 \le s \le l$, где s — натуральный параметр. Через T^- обозначим дополнение $T^+ \cup L$ до полной комплексной плоскости.

Рассматривается следующая задача.

Требуется найти все кусочно бианалитические функции $F(z) = \{F^+(z),\ F^-(z)\}$ класса $A_2(T^\pm) \cap H^{(2)}(L)$, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} = G_{k1}(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}} +$$

$$+G_{k2}(t)\overline{\frac{\partial F^-(t)}{\partial x^{2-k}\partial y^{k-1}}}+g_k(t), \quad k=1,\ 2, \tag{1}$$

где $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ ($k=1,2$; $j=1,2$) — заданные на L функции, удовлетворяющие условию Гельдера вместе со своими производными до порядка $3-k$ включительно, причем $G_{kj}(t)\neq 0$ на L.

Известно (см., например, [1]-[4]), что всякую кусочно бианалитическую функцию с линией скачков L можно представить в виде

$$F(z)=\begin{cases} F^+(z)=\varphi_0^+(z)+\bar{z}\varphi_1^+(z), & z\in T^+ \\ F^-(z)=\varphi_0^-(z)+\bar{z}\varphi_1^-(z), & z\in T^-, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi_0^+(z)$, $\varphi_1^+(z)$ ($\varphi_0^-(z)$, $\varphi_1^-(z)$) — аналитические в $T^+(T^-)$ функции, называемые аналитическими компонентами бианалитической функции $F^+(z)$ ($F^-(z)$).

В данном сообщении, используя представление (2), устанавливаем, что решение рассматриваемой задачи сводится к последовательному решению обычной задачи Римана и краевой задачи Римана с интегральными членами относительно кусочно аналитических функций. Кроме того, исследуется картина разрешимости изучаемой задачи и устанавливается ее нетеровость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Михайлов Л. Г. *Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами.* – Душанбе, 1963. – 192 с.

3. Литвинчук Г. С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* – М.: Наука, 1977. – 448 с.

4. Расулов К. М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения.* – Смоленск: СГПУ, 1998. – 343 с.

Л. А. Апайчева, Л. Е. Шувалова (Нижнекамск)

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается линейное интегральное уравнение вида

$$Kx = x(t) + \int_0^1 \frac{\ln^m |s-t| h(t,s) x(s)\, ds}{s^\alpha (1-s)^\beta |s-t|^\gamma} = y(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad (1)$$

где $h(t,s)$ и $y(t)$ — известные функции, а параметры α, β, γ и m удовлетворяют условиям $0 \le \alpha, \beta, \gamma < 1$, $m+1 \in \mathbb{N}$.

Предлагается теоретическое обоснование [1] методов сплайн–коллокации нулевого порядка, модифицированного варианта данного метода, метода Боголюбова–Крылова решения уравнения (1). Доказана сходимость методов и установлены оценка погрешности в зависимости от структурных свойств исходных данных. В частности, получен следующий результат

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x^*(t)$ *при любой ограниченной правой части;* $y \in C^{(1)}[0,1]$, $h(t,s)$ *непрерывно дифференцируема в квадрате* $[0,1]^2$, *а параметры* $\alpha, \beta, \gamma > 0$ *и* $\alpha + \gamma < 1$, $\beta + \gamma < 1$.

Тогда приближенные решения $x_n^*(t)$ *метода Боголюбова-Крылова существеуют и сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *со скоростью*

$$\sup_t |x^*(t) - x_n^*(t)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

О. Е. Арсеньева (Москва)

ОБОБЩЕННЫЙ ФОРМАЛИЗМ НЬЮМЕНА-ПЕНРОУЗА И АВТОДУАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Формализм Ньюмена-Пенроуза основан на идее изотропной тетрады, или базиса $\{e_0, e_1, e_{\hat{0}}, e_{\hat{1}}\}$, адаптированного разложению комплексификации 4-мерного пространства Лоренца в прямую сумму двумерных вполне изотропных плоскостей. С точки зрения дифференциальной геометрии это равносильно фиксации G-структуры, отвечающей представлению группы Лоренца на пространстве главного расслоения реперов специального вида. Эта конструкция может быть обобщена на 4-мерные псевдоримановы многообразия произвольной сигнатуры.

Теорема 1. *4-мерное псевдориманово многообразие сигнатуры $(4,0)$ или $(2,2)$ автодуально тогда и только тогда, когда в обобщенном репере Ньюмена-Пенроуза*

$$1)\ R_{0\hat{0}0\hat{1}} = \frac{1}{2}r_{0\hat{1}}; \qquad 2)\ R_{0\hat{1}0\hat{1}} = 0; \qquad 3)\ R_{0\hat{1}\hat{0}1} = \frac{1}{2}\alpha\kappa.$$

Теорема 2. *4-мерное псевдориманово многообразие сигнатуры $(4,0)$ или $(2,2)$ антиавтодуально тогда и только тогда, когда в обобщенном репере Ньюмена-Пенроуза*

$$1)\ R_{0\hat{0}01} = \frac{1}{2}r_{01}; \qquad 2)\ R_{0101} = 0; \qquad 3)\ R_{01\hat{0}\hat{1}} = \frac{1}{2}\alpha\kappa.$$

Здесь R, r и κ суть тензор Римана-Кристоффеля, тензор Риччи и скалярная кривизна соответственно, $\alpha = \pm 1$ при $s = (2,2)$ или $s = (4,0)$ соответственно. Заметим, что в случае лоренцевой сигнатуры автодуальность либо антиавтодуальность многообразия равносильны его конформной плоскости.

Если многообразие несет какую-либо дополнительную структуру (например, структуру эрмитовой поверхности), эти теоремы приводят к более глубоким результатам, например:

Теорема 3. *Компактная автодуальная эрмитова поверхность является RK-многообразием тогда и только тогда, когда она является локально конформно-кэлеровым многообразием с комплексно-линейным тензором Риччи.*

Теорема 4. *Метрика компактной антиавтодуальной эрмитовой поверхности локально конформна метрике нулевой скалярной кривизны.*

С. В. Асташкин, Р. Ф. Узбеков (Самара)

О K-ФУНКЦИОНАЛЕ НА ПАРЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Если (X_0, X_1) — банахова пара, $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$, то K —

функционал

$$\mathcal{K}(t,x;X_0,X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i\}.$$

Ясно, что для произвольных $x \in X_0 + X_1$ и $t > 0$ существует разложение $x = y_0 + y_1$, $y_i = y_i(t) \in X_i$ $(i = 0,1)$, такое, что при некотором $C > 0$

$$C^{-1}\left(\|y_0\|_{X_0} + t\|y_1\|_{X_1}\right) \le \mathcal{K}(t,x;X_0,X_1) \le C\left(\|y_0\|_{X_0} + t\|y_1\|_{X_1}\right). \tag{1}$$

Пусть φ — линейный функционал, определенный на некотором подпространстве $M \subset X_0 + X_1$, $N = \{x \in M : \varphi(x) = 0\}$. Тогда пересечения $Y_i = X_i \cap N$ $(i = 0,1)$ образуют нормированную (вообще говоря, не банахову) пару (Y_0, Y_1). Рассмотрим вопрос о связи между $\mathcal{K}$ -функционалами пар (X_0, X_1) и (Y_0, Y_1), предполагая выполненными следующие условия:

1) пересечение $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в X_0 и X_1, $\varphi \in (X_0 \cap X_1)^*$;

2) для произвольных $y \in Y_0 + Y_1$ и $t > 0$ разложение $y = y_0(t) + y_1(t)$ можно выбрать так, что оно "оптимально", т.е. выполнено (1), и, кроме того, при всех $t > 0$ $y_0(t) \in M$.

Теорема. *При выполнении условий* 1) *и* 2)

$$\mathcal{K}(t,y;Y_0,Y_1) \asymp \mathcal{K}(t,y;X_0,X_1) + \frac{|\varphi(y_0(t))|}{\mathcal{K}(t^{-1},\varphi;X_0^*,X_1^*)} \tag{2}$$

(*т.е. имеет место двусторонняя оценка, аналогичная* (1), *константы в которой не зависят от* $y \in Y_0 + Y_1$ *и* $t > 0$).

Рассмотрим частный случай: $X_0 = L_1(s)$, $X_1 = L_1(1/s)$, где $\|x\|_{L_1(w)} = \int_0^\infty |x(s)|w(s)ds$ ($w(s)$ — измеримая неотрицательная функция на $(0,\infty)$).

Пусть $\varphi(x) = \int_0^\infty x(s)g(s)ds$, причем $|g(s)| \le C\max(s,s^{-1})$. Через M обозначим множество всех $x \in L_1(s) + L_1(1/s)$, таких, что функция $x(s)g(s)$ интегрируема на любом отрезке $[a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$ и существует конечный предел $\varphi(x) = \lim_{a\to 0, b\to\infty} \int_a^b x(s)g(s)ds$. Тогда выполняются условия сформулированной теоремы, и соотношение (2) принимает вид:

$$\mathcal{K}(t,x;L_1(s)\cap N_g, L_1(1/s)\cap N_g) \asymp \int_0^\infty |x(s)|\min(s,ts^{-1})ds +$$

$$+ \{\sup_{s>0}[|g(s)| \min(s^{-1}, st^{-1})]\}^{-1} \left|\int_0^{\sqrt{t}} x(s)g(s)ds\right|,$$

$$N_g = \{x \in M : \varphi(x) = 0\}.$$

В случае $g(s) = 1$ последняя формула была другим способом доказана в работе N. Krugljak, L. Maligranda, L.-E. Persson, The failure of Hardy's inequality and interpolation of intersections, Lulea Univ. of Tech., Dep. of Math., Research Rep. 3 (1998).

Р. М. Асхатов (Казань)

О ПОТЕНЦИАЛАХ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Пусть E_p^+ — полупространство $x_p > 0$ евклидова пространства E_p точек (x', x_p), $x' = (x_1, \cdots, x_{p-1})$, а D^+ — конечная область в E_p^+, ограниченная частью $\Gamma^{(0)}$ гиперплоскости $x_p = 0$ и гиперповерхностью Γ^+.

Речь идет об уравнении

$$T_k(u) = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + x_p^k \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} + k x_p^{k-1} \frac{\partial u}{\partial x_p} = 0. \tag{1}$$

Строятся потенциалы двойного и простого слоев видов:

$$W(M) = \int_{\Gamma^+} \sigma(P)\ A_P[w_1]\ d\Gamma_P, \tag{2}$$

$$V(M) = \int_{\Gamma^+} \mu(P)\ w_1 d\Gamma_P, \tag{3}$$

где

$$w_1 = A_1(r_1^2)^{\frac{2-p-\frac{k}{2-k}}{2}} F\left(\frac{k}{2(2-k)}, \frac{p+\frac{k}{2-k}-2}{2}, \frac{k}{2-k}; 1-\tau\right)$$

— фундаментальное решение уравнения (1), F — гипергеометрическая функция,

$$r^2 = \sum_{i=1}^{p-1} (\xi_i - \xi_{i0})^2 + \frac{4}{(2-k)^2}\left(x_p^{\frac{2-k}{2}} - x_{p0}^{\frac{2-k}{2}}\right)^2,$$

$$r_1^2 = \sum_{i=1}^{p-1} (\xi_i - \xi_{i0})^2 + \frac{4}{(2-k)^2}\left(x_p^{\frac{2-k}{2}} + x_{p0}^{\frac{2-k}{2}}\right)^2,$$

$$\tau = \frac{r^2}{r_1^2},$$

$$A[w_1] = \sum_{i=1}^{p-1} cos(x_i,\nu)\frac{\partial w_1}{\partial x_i} + x_p^k cos(x_p,\nu)\frac{\partial w_1}{\partial x_p},$$

ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G^+ в точке $P(x', x_p)$.

Доказаны:

Теорема 1. *Пусть Γ — гиперповерхность Ляпунова и $\sigma(P)$ — непрерывная функция на Γ^+. Тогда потенциал двойного слоя (2) в любой фиксированной точке P_0 поверхности Γ^+, является разрывной функцией, для которой справедливы соотношения*

$$W_i(P_0) = -\frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)},$$

$$W_e(P_0) = \frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)}, \tag{4}$$

где $W_i(P_0)$ и $W_e(P_0)$ есть соответствующие предельные значения потенциалов при стремлении к точке P_0 изнутри и извне Γ^+, а $\overline{W(P_0)}$ — прямое значение потенциала двойного слоя.

Теорема 2. *Если Γ — гиперповерхность Ляпунова, а плотность μ непрерывна на Γ^+, то на поверхности Γ^+ потенциал простого слоя (3) имеет конормальную производную $A[V]$ в точках границы Γ^+. При этом*

$$A[V(P_0)]_i = \frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{A[V(P_0)]}, \quad A[V(P_0)]_e = -\frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{A[V(P_0)]}, \tag{5}$$

где $A[V(P_0)]_i$ и $A[V(P_0)]_e$ соответствующие предельные значения указанной производной при стремлении точки M к точке P_0 изнутри и извне Γ^+, а $\overline{A[V(P_0)]}$ — прямое значение конормальной производной.

Р. М. Асхатов, Ф. Г. Мухлисов (Казань)

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E_2^+ — полуплоскость $y > 0$ евклидовой плоскости E_2 точек (x, y), D^+ — конечная область в E_2^+, ограниченная жордановой кривой Γ^+ с концами в точках $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и отрезком $\Gamma^{(0)} = [a, b]$ оси Ox, $\widetilde{D^+} = D^+ \bigcup \Gamma^+$, $D_e^+ = E_2^+ \setminus \widetilde{D^+}$.

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ky \frac{\partial u}{\partial y} - cu = 0 \qquad (0 < k < 1, c > 0). \quad (1)$$

При решении краевых задач для уравнения (1) существенным является построение его фундаментальных решений. Одно из них с особенностью в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$w(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} y_0^{\frac{k-1}{2}} y^{\frac{1-k}{2}} K_0(\lambda r), \quad (2)$$

где $\lambda^2 = c + \frac{(1-k)^2}{4}$, $K_0(t)$ — функция Макдональда, $r^2 = (x - x_0)^2 + \ln^2 \frac{y}{y_0}$. Известно, что $K_0(t)$ при $t \to \infty$ экспоненциально убывает. Поэтому фундаментальное решение (2) удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{r \to \infty} w = 0, \quad \lim_{y \to 0} w = 0, \quad \lim_{y \to 0} \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Для уравнения (1) доказаны существование и единственность решения следующих задач:

Задача D_i. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D^+, *непрерывное в* $\overline{D^+}$ *и удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+, \qquad u|_{\Gamma^{(0)}} = 0.$$

Задача D_e. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D_e^+, *непрерывное в* $\overline{D_e^+}$, *равное нулю на бесконечности и удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+, \qquad u|_{\Gamma_e^{(0)}} = 0.$$

Задача N_i. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D^+, *непрерывно дифференцируемое в* $\overline{D^+}$ *и удовлетворяющее граничным условиям*

$$A[u]\Big|_{\Gamma^+} = f(P), \quad P \in \Gamma^+, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\Gamma^{(0)}} = 0.$$

Задача N_e. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D_e^+, *непрерывно дифференцируемое в* $\overline{D_e^+}$, *равное нулю на бесконечности и удовлетворяющее граничным условиям*

$$A[u]\Big|_{\Gamma^+} = f(P), \quad P \in \Gamma^+, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\Gamma_e^{(0)}} = 0.$$

Е. Ф. Аюпова (Казань)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

Рассматривается двумерное слабо сингулярное интегральное уравнение (с.и.у.) первого рода с логарифмическим ядром вида

$$Ax \equiv \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| \ln\left|\sin\frac{t-\tau}{2}\right| x(\sigma,\tau)\,d\sigma d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s-\sigma,t-\tau)x(\sigma,\tau)\,d\sigma d\tau = y(s,t), \tag{1}$$

здесь $h(s,t), y \equiv y(s,t)$ — известные непрерывные 2π-периодические функции по каждой из переменных, $x(\sigma,\tau)$ — искомая функция, а сингулярный интеграл понимается как несобственный. Исследования ведутся в пространстве решений $X = L_2 \equiv L_2[0, 2\pi]^2$ суммируемых с квадратом 2π-периодических функций от двух переменных и пространстве правых частей $Y = W_2^{12} \equiv W_2^{12}[0, 2\pi]^2$ 2π–периодических функций от двух переменных, которые вместе со своими первыми и вторыми смешанными производными являются квадратично суммируемыми 2π-периодическими функциями от двух переменных, что позволяет рассматривать исходную задачу как корректную.

Для оператора $A : X \to Y$ построен обратный и оценена его норма:

$$A^{-1}y(\sigma, \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_{kj}(y)}{c_{kj}(h) + \lambda_k \lambda_j} e^{i(k\sigma + j\tau)},$$

$\|A^{-1}\|_{Y \to X} \leq \gamma < \infty$, здесь

$$\lambda_r = \left\{ \ln 2, r = 0; \frac{1}{2|r|}, r = \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}, c_{kj}(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma, \tau) e^{-i(k\sigma + j\tau)}\, d\sigma d\tau$$

$$(k, j = 0, \pm 1, \ldots), \quad \mu_r = \{1, r = 0; ir, r = \pm 1, \pm 2, \ldots\},$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{4} \max_{k,j=0,\pm 1,\pm 2,\ldots} \left\{ \left| \mu_k \mu_j \left[c_{kj}(h) + \lambda_k \lambda_j \right] \right|^{-2} \right\}.$$

Исследован общий проекционный метод решения с.и.у. (1): приближенное решение ищется в виде

$$x_{nm}(\sigma, \tau) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj} e^{i(k\sigma + j\tau)}, \tag{2}$$

неизвестные коэффициенты определяются из уравнения

$$A_{nm} x_{nm} \equiv P_{nm} A x_{nm} = P_{nm} y, \tag{3}$$

где $P_{nm}^2 = P_{nm}$ оператор проектирования на множество элементов вида (2).

Исследована сходимость метода и получены среднеквадратические и равномерные оценки погрешности приближенного решения.

В. М. Бадков (Екатеринбург)

ДВУСТОРОННИЕ ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЯДЕР СЕГЁ

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — система многочленов, ортонормированная на окружности $|z| = 1$ с весом $\varphi(\tau)$. Рассмотрим соответствующие ядра Сегё

$$K_n(\varphi; z, \zeta) := \varphi_0(z)\overline{\varphi_0(\zeta)} + \ldots + \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}. \tag{1}$$

При исследовании сходимости рядов Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным на $[0, 2\pi]$ с весом φ, иногда нужно знать поведение величин (1) при $z = e^{i\theta}$, $\zeta = (1 - cn^{-1})e^{i\tau}$. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть вес φ имеет вид*

$$\varphi(\tau) = h(t)\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu(|\sin\frac{\tau-\theta_\nu}{2}|) \quad (\tau \in \mathbb{R},\ -\pi < \theta_1 < \ldots \theta_m \le \pi),$$

где

$$w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu}[g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1];$$

$m, l_\nu \in \mathbb{N}$; $\alpha(\mu,\nu) \in \mathbb{R}$; $g_{\mu,\nu}(u)$ — вогнутые модули непрерывности ($\mu = 1, ..., l_\nu$; $\nu = 1, ..., m$);

$$\int_0^\theta w_\nu(\tau)d\tau = O(\theta w_\nu(\theta)) \quad (\theta \to +0; \nu = 1, ..., m);$$

функция h удовлетворяет условиям

$$h(\tau) \ge 0; \quad h, 1/h \in L^\infty,$$

а также одному из условий

$$\omega(h;\delta)_2 = O(\delta^{1/2}) \quad (\delta \to +0)$$

или

$$\omega(h;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi]$$

(под $\omega(h;\delta)_r$ понимается модуль непрерывности в L^r функции h). Тогда при фиксированном $c > 0$ равномерно по $\theta, \tau \in \mathbb{R}$ и $n \geq n_1(c)$

$$|K_n(\varphi; e^{i\theta}, (1-cn^{-1})e^{i\tau})|(|\sin[(\tau-\theta_\nu)/2]|+n^{-1}) \asymp |\varphi_n(e^{i\theta})\varphi_n(e^{i\tau})|.$$

При доказательстве используются полученные автором ранее в условиях теоремы двусторонние поточечные оценки модулей многочленов $\varphi_n(e^{i\tau})$ и их производных.

Л. У. Бахтиева, Л. Д. Эскин (Казань)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Ориентационные фазовые переходы в системе анизотропных осесимметричных частиц описываются глобальным решением нелинейного интегрального уравнения для плотности распределения ориентаций осей частиц [1].

Важнейшим свойством этого интегрального уравнения является инвариантность его ядра при одновременном повороте осей частиц. Это свойство позволило детально исследовать с помощью методов теории бифуркации [2] анизотропную ветвь глобального решения, ответвляющуюся от изотропной, а с помощью численных методов и вторую анизотропную ветвь с большей нормой.

Полученные результаты применяются для исследования термодинамических свойств системы эллипсоидальных частиц (уравнение состояния , химический потенциал и т.п.) в зависимости от концентрации частиц и их геометрии.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00132).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Parsons J. D. *Nematic ordering in a system of rods*// Phys. Rev. A. – 1979. – V. 19. – No 3. – P. 1225–1230.

2. Вайнберг М. М., Треногин В. А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

М. С. Беспалов (Владимир)

ОБОБЩЕНИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Мультипликативное преобразование Фурье $J[f](u) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\overline{K(x,u)}dx$ можно определить (сравн. с [1]), задав ядро преобразования в виде скрещенного произведения системы Прайса $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $K(x,u) = \phi_n(\{u\}) \cdot \phi_m(\{x\})$, где $n = [x], m = [u]$ (целая часть числа), а $\{x\} = x - [x], \{u\} = u - [u]$.

Частным случаем системы Прайса служат система Уолша в нумерации Пэли и система Крестенсона–Леви. В этих случаях мультипликативное преобразование Фурье превращается в преобразование Уолша и преобразование Крестенсона–Леви соответственно. Аналогично, систему Прайса можно заменить на любую полную ортонормированную в $L^2[0,1]$ систему функций. В частности, выбрав в качестве таковой систему Хаара, получим преобразование, которое по аналогии можно было бы назвать преобразование Хаара.

Предлагается следующее обобщение мультипликативного преобразования Фурье, при котором ядро задается как бискрещенное произведение двух различных ортонормированных на $[0,1)$ систем $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $K_{\phi,\varphi}(x,u) = \phi_n(\{u\}) \cdot \varphi_m(\{x\})$, где $n = [x], m = [u]$.

Если полагать, что $\phi_n(x) \equiv 0$ и $\varphi_n(x) \equiv 0$ при $x \notin [0,1)$, то ядро можно определить с помощью целочисленных сдвигов данных функций $\phi_{n,m}(x) = \phi_n(x-m)$, $\varphi_{n,m}(x) = \varphi_n(x-m)$: $K(x,u) = K_{\phi,\varphi}(x,u) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \phi_{n,m}(x) \cdot \varphi_{m,n}(u)$. Вопрос о сходимости двойного ряда здесь не возникает, так как для любой фиксированной точки плоскости (x,u) только одно слагаемое отлично от нуля.

Утверждение 1. *Система* $\{\phi_{n,m}(x)\}_{n,m=0}^{\infty}$ *образует ортонормированный базис пространства* $L^2[0,\infty)$.

Утверждение 2. *Для интегральных преобразований с ядром* $K_{\phi,\varphi}(x,u)$ *в виде бискрещенного произведения имеем* $J[\phi_{n,m}] = \overline{\varphi_{m,n}}$.

Если в качестве исходных систем взяты упомянутые выше системы или их регулярные (то есть внутри пачек) перестановки, то справедливы, доказанные в [2,3] для мультипликативных преобразований Фурье, следствия утверждения о том, что при этих преобразованиях класс ступенчатых (с соответствующим выбором длин ступенек) функций переходит в финитные и, наоборот, финитные переходят в ступенчатые.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00342).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* – М.: Наука. 1987.

2. Беспалов М. С. *Исследование аппроксимативных свойств обобщенных мультипликативных систем функций в метриках* L^p/ Дисс. канд. ф.-м. н. – Саратов: СГУ, 1983. – 94 с.

3. Беспалов М. С. *Об операторах мультипликативных преобразований Фурье*/ Деп. в ВИНИТИ 25 окт. 1983. N 5826–83 ДЕП. 27с.

А. М. Бикчентаев (Казань)

УСЕЧЕННАЯ СВЕРТКА ФУНКЦИЙ ОРЛИЧА ЯВЛЯЕТСЯ N–ФУНКЦИЕЙ

Пусть $I=(0,+\infty)$ и Φ — класс функций Орлича, т.е. множество всех непрерывных строго возрастающих функций $f : I \to I$ таких, что

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\to +\infty} f(t) = +\infty. \tag{1}$$

Для $f, g \in \Phi$ пишем $f \sim g$, если $C^{-1}g(C^{-1}t) \le f(t) \le Cg(Ct)$ для всех $t \in I$ с константой $C > 0$. Функция Орлича f называется N–функцией [1, стр. 16], если она допускает представление $f(t) = \int_0^t \varphi(u)du$, где непрерывная справа функция $\varphi : I \to I$ возрастает на I и удовлетворяет условиям (1). Усеченной сверткой функций $f, g \in \Phi$ называется функция

$$f \times g\,(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds, \quad t \in I.$$

Пусть U (соответственно, L) — класс равномерно непрерывных (непрерывных по Липшицу) на I функций Орлича. В [2] были установлены утверждения:

Теорема 1. *Каждая супераддитивная функция Орлича эквивалентна некоторой выпуклой функции Орлича.*

Теорема 2. i) *Для каждой функции $f \in \Phi$ в Φ существует функция $g \sim f$ такая, что $g \notin U$.*

ii) *Для функции $f \in \Phi$ в U существует функция $g \sim f$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim_{t\to +\infty}}\, t^{-1}f(t) = 0$.*

Теорема 3. i) *Для каждой функции $f \in \Phi$ в Φ существует функция $g \sim f$ такая, что $g \notin L$.*

ii) *Для функции $f \in \Phi$ в L существует функция $g \sim f$ тогда и только тогда, когда $\sup_{t>0} t^{-1}f(t) < +\infty$.*

Следующее утверждение показывает справедливость гипотезы Г3 из [2]:

Теорема 4. *Для любых $f, g \in \Phi$ усеченная свертка $f \times g$ является N–функцией.*

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103) и программой "Университеты России" (проект 990213).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* – М.: ГИФМЛ, 1958. – 272 с.

2. Бикчентаев А. М., Садыртдинова Л. И. *К теории функций Орлича,* I/ Казанск. ун–т, 1999. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.05.99, N 1528-В99.

А. М. Бикчентаев, С. А. Григорян,
А. Н. Шерстнев (Казань)

B(H) АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПОРОЖДАЕТСЯ СВОИМИ ПРОЕКТОРАМИ

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\Lambda(= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$. Через $B(H)$ обозначим $*$-алгебру всех линейных ограниченных операторов в H. Оператор $T \in B(H)$ называется *проектором*, если $T^2 = T = T^*$.

Когда H бесконечномерно, в [1] было доказано, что каждый оператор $T \in B(H)$ представляется в виде конечной суммы $T = \sum T_k$, где каждое T_k есть произведение проекторов не более, чем четырех проекторов. На самом деле справедливо следующее утверждение, которое является окончательным и неулучшаемым (по числу сомножителей):

Теорема. *Каждый оператор $T \in B(H)$ представляется в виде конечной суммы $T = \sum T_k$, где каждое T_k есть произведение не более, чем двух проекторов при* $\dim H = \infty$ *и не более, чем трех проекторов при* $2 \leq \dim H < \infty$.

Отметим, что ранее [2-4] изучались лишь представления вида $T = \sum \alpha_k T_k$, где $\alpha_k \in \Lambda$ и каждое T_k есть конечное произведение (без ограничения на число сомножителей) проекторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Работа поддержана программой "Университеты России" (проект 990213) и РФФИ (проекты 98-01-00103 и 99-01-00441).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикчентаев А. М. *$B(H)$ алгебраически порождается своими проекторами*// Теория функций, ее прил. и смежные вопросы. Материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. – Казань: Изд–во Каз. матем. об–ва, 1999. – С. 42–43.

2. Dixmier J. *Position relative de deux variétés linéares fermées dans un espace de Hilbert*// Revue Scientifique. – 1948. – V. 86. – P. 387–399.

3. Holland S. S., Jr. *Projections algebraically generate the bounded operators on real or quarternionic Hilbert space*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 123. – No 11. – P. 3361–3362.

4. Fillmore P. A. and Topping D. M. *Operator algebras generated by projections*// Duke Math. J. – 1967. – V. 34. – No 2. – P. 333–336.

А. М. Бикчентаев, А. Д. Маклаков (Казань)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ИДЕМПОТЕНТОВ

В [1] фактически показано, что каждый линейный ограниченный оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве представляется в виде конечных сумм произведений не более, чем трех ортопроекторов. В [2] это число уменьшено до двух и для конечномерного случая показано, что число сомножителей равно трем.

Здесь приведены два утверждения для $n \times n$–матриц $(n \geq 2)$ над полем вычетов Z_p, где p — простое число. Второе утверждение является аналогом упомянутых результатов. В таких полях ортопроекторам соответствуют симметричные идемпотенты (далее с.и.). Неожиданным является тот факт, что число сомножителей равно двум, как и для операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве ($p > 2$). При $p = 2$ результат аналогичен конечномерному случаю над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Теорема 1. i) *При* $p > 2$ *любая симметричная матрица представляется в виде конечной суммы с.и.*

ii) *При* $p = 2$ *не всякая симметричная матрица представляется в виде конечной суммы с.и. Доля симметричных матриц, представляемых в виде конечной суммы с.и., в общем числе симметричных* $n \times n$*-матриц составляет* 2^{1-n}.

Теорема 2. i) *При* $p > 2$ *любая матрица представляется в виде конечной суммы произведений не более, чем двух с.и.*

ii) *При* $p = 2$ *и* $n > 2$ *любая матрица представляется в виде конечной суммы произведений не более, чем трех с.и. Не всякая матрица может быть представлена в виде конечной суммы произведений двух с.и.*

iii) *При* $p = 2$ *и* $n = 2$ *ни одна матрица не может быть представлена в виде конечной суммы конечных произведений с.и. (кроме, разумеется, самих с.и.).*

Следующее утверждение является аналогом для конечных полей результата [3] для операторов бесконечномерного гильбертова пространства.

Предложение. *Любая матрица над полем* Z_p *представляется в виде конечной суммы идемпотентов.*

Заметим, что для конечномерного гильбертова пространства над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ имеет место лишь более слабое утверждение: каждый линейный оператор представляется в виде конечной суммы попарных произведений идемпотентов (в каждом слагаемом один из сомножителей можно выбрать эрмитовым).

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103) и программой "Университеты России" (проект 990213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикчентаев А. М. *B(H) алгебраически порождается своими проекторами*// Теория функций, ее прил. и смежные вопросы. Материалы школы–конф., посв. 130–летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. – Казань: Изд–во Каз. матем. об–ва, 1999. – С. 42–43.

2. Бикчентаев А. М., Григорян С. А., Шерстнев А. Н. $B(H)$

алгебраически порождается своими проекторами// См. настоящий сборник.

3. Pearcy C. and Topping D. *Sums of small numbers of idempotents*// Michigan Math. J. – 1967. – V. 14. – P. 453–465.

Р. Ф. Билялов (Казань)

СПИНОРЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

У ортогональных групп $O(p,q)$ существуют тензорные и спинорные представления, причем последние не допускают расширения до представления объемлющей полной линейной группы $GL(n)$, $n = p + q$. Поэтому для задания спиноров на римановых многообразиях вводятся поля ортогональных реперов, при переходе от одного поля ортогонального репера к другому с помощью некоторого поля ортогональных преобразований спиноры преобразуются с помощью соответствующего поля спин-преобразований. Эта необходимость использовать только ортогональные реперы при рассмотрении спиноров на римановых многообразиях приводит к трудностям уже при построении производной Ли спиноров. При переносе с помощью точечного бесконечно малого преобразования $x' = x + t\xi$ ортогонального репера e^α_a из точки $x - t\xi$ в точку x перенесенный репер $\bar{e}^\alpha_a(x)$ перестает быть ортогональным репером, следовательно, переход от этого репера к реперу $e^\alpha_a(x)$ описывается неортогональным преобразованием, и возникает проблема расширения спинорного представления группы $O(p,q)$ до представления объемлющей группы $GL(n)$. В дальнейшем для простоты рассуждений положим $q = 0$, т.е. ограничимся рассмотрением только собственно римановых пространств.

Лемма 1. *Для произвольной симметрической матрицы $g = (g_{\alpha\beta})$, задающей положительно определенную квадратичную форму, существует единственное положительное симметрическое преобразование $S(g)$, удовлетворяющее условию $S(g)gS(g) = (\delta_{\alpha\beta})$.*

Лемма 2. *Пусть $G = \{g\}$, где g задает положительно определенную квадратичную форму. Существует множество* *однозначных функций* S, *определенных на всем* $G = \{g\}$, *удовлетворяющих условию* $S(g)gS(g) = (\delta_{\alpha\beta})$. *Если даны две такие функции* S_1 *и* S_2, *то* $\forall g \in G$ $S_1^{-1}(g)S_2(g) \in O(n)$.

Теорема. *Пусть задано спинорное представление группы* $O(n)$ *в пространстве* $\Psi = \{\psi\}$: $L \in O(n) \to \Lambda(L) : \psi' = \Lambda(L)\psi$. *Расширение спинорного представления группы* $O(n)$ *до представления* $GL(n)$ *на пространстве* $G \times \Psi$ *задается преобразованиями:* $\forall A \in GL(n) :$ $g' = A^{-1^T} g A^{-1}$; $\psi' = \Lambda(S^{-1}(A^{-1^T} g A^{-1})$ $AS(g))\psi$.

Эта теорема позволяет рассматривать спиноры в произвольных реперах, в частности в натуральных, а это означает, что спиноры, как и тензоры, допускают описание в координатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Билялов Р.Ф. *Симметрический тензор энергии-импульса спинорных полей*// Теор. и матем. физика. – 1996. – Т. 108. – No 2. – С. 306–314.

2. Билялов Р.Ф. *Спиноры в координатах*// Изв. вузов. Физика. – 1998. – No 6. – С. 116–119.

С. А. Бронникова (Казань)

СЛАБЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ СУММ СЛУЧАЙНО ВЗВЕШЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ МАРТИНГАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрим схему серий $\{V_{nj}, j \geq 1, n \geq 1\}$ случайных элементов, определённых на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и принимающих значения в сепарабельном вещественном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ мартингального типа p $(1 \leq p \leq 2)$ с нормой $||\cdot||$ (см. [2]). Пусть $\{A_{nj}, j \geq 1, n \geq 1\}$ — схема серий (вещественнозначных) случайных величин (называемых *случайными взвесями*) и пусть $\{T_n, n \geq 1\}$ — последовательность целочисленных случайных величин, (называемых *случай-*

ными индексами). Получен слабый закон больших чисел для *одновременно* случайно взвешенных сумм со случайными индексами $\sum_{j=1}^{T_n} A_{nj}V_{nj}$. Аналогичная задача рассматривалась ранее, но не в столь общей постановке (см. [1]). Особенностью работы является то, что схемы серий $\{V_{nj}\}$ и $\{A_{nj}\}$ не предполагаются состоящими из независимых по лучам случайных элементов. Не накладываются условия на семейство совместных распределений, связанных с этими схемами серий. Наконец, не предполагается наличие каких либо моментов случайных элементов $\{V_{nj}, j \geq 1, n \geq 1\}$.

Теорема. *Пусть A_{nj} являются $\mathcal{F}_{n,j-1}$ — измеримыми для всех $j \geq 1$, где $\mathcal{F}_{n0} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_{nj} = \sigma(V_{ni}, 1 \leq i \leq j)$, $P\{T_n > i_n\} = o(1)$ для некоторой последовательности $i_n \to \infty$ натуральных чисел, и пусть g такая строго возрастающая непрерывная функция, определнная на $[0,\infty)$, что $g(0) = 0$ и $\frac{g^p(x)}{x} \to \infty$ при $x \to \infty$. Предположим, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{g^p(k)}{k^2} = O\left(\frac{g^p(n)}{n}\right), \qquad \sum_{j=1}^{i_n} E|A_{nj}|^p = o(1),$$

и существует последовательность таких положительных чисел $c_n \to \infty$, что $\sum_{j=1}^{i_n} P\{||V_{nj}|| > c_n\} = o(1)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq 1} \frac{c_n^p}{g^{-1}(c_n)} \sum_{j=1}^{i_n} E|A_{nj}|^p kP\{||V_{nj}|| > g(k)\} = 0.$$

Тогда $\sum_{j=1}^{T_n} A_{nj}(V_{nj} - E(V_{nj}I(||V_{nj}|| \leq c_n)|\mathcal{F}_{n,j-1})) \xrightarrow{P} 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонова О. В., Бронникова С. А., Давыдова В. В., Ордоньез Кабрера М. *О слабом законе больших чисел в банаховых пространствах мартингального типа при общем условии Чезаро*// Изв. ВУЗов. Матем. – 2000. – 3. – С. 3–7.

2. Pisier G. *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*// Lecture Notes in Mathematics. – 1986. – V. 1206. – P. 167–241.

А. П. Буланов (Обнинск)

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫХ СТЕПЕНЕЙ И О ТОЧНОСТИ ИХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Пусть последовательность такова, что $a_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n| = \overline{a} < \infty$, и пусть

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^{a_1} \cdot z^{\cdot^{\cdot^{\cdot a_{n-1}} \cdot z^{a_n}}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle. \qquad (1)$$

Поскольку функция $w = \operatorname{Ln} z$ многозначна, то образы отображения $z = e^w$ следует рассматривать на римановой поверхности логарифма. На ней же будем рассматривать область U, в которой функция (1) регулярна.

Теорема 1. *Если e^K — образ круга $K = \{w : |w| < 1/e \cdot \overline{a}\}$ на римановой поверхности логарифма при отображении $z = e^w$, а U — область регулярности $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$, то $U \supset e^K$.*

Теорема 1а. *Пусть коэффициенты $a_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Тогда граничная точка $z = x = \exp(1/e \cdot a)$ области e^K не является точкой регулярности функции $f(z) = \langle z; a_1, a_2, \ldots \rangle$.*

Теорема 2. *Пусть $a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = \beta, \quad |\beta| > 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$, и пусть*

$$q = \sqrt{|\beta|} \cdot \exp\left(\frac{2\tau^2}{1-\tau^2}\right), \qquad (2)$$

где $\tau = \tau(\gamma) = \tau(\sqrt{|\beta|})$ есть обратная функция по отношению к функции

$$\gamma(\tau) = \sqrt{|\beta|} = \frac{1+\tau}{1-\tau} \cdot \exp\left(\frac{2\tau}{1-\tau^2}\right), \quad 0 \leq \tau < 1. \qquad (3)$$

Тогда $U \supset e^K$, где U — область регулярности $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle$, e^K — образ круга $K = \{w : |w| < 1/e \cdot q\}$.

Теорема 2а. *Пусть в условиях теоремы 2 число* $\beta > 1$, *число* q *определяется по формулам* (2) *и* (3). *Тогда граничная точка* $z = x = \exp(1/e \cdot q)$ *области* e^K *не является точкой регулярности функции* $f(z) = \langle z; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle$.

Теорема 1 доказана в работе [1] для случая, когда у многозначного логарифма $\mathrm{Ln}\, z$ берется лишь главная ветвь $\ln z$, соответствующая значению $\ln 1 = 0$.

Динамическая система

$$\dot{x}_k = x_k \cdot \alpha_{k+1} \cdot x_{k+1} \cdot \big[1 + t \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} + t^2 \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdot \alpha_{k+3} \cdot x_{k+3} + \cdots$$

$$\cdots t^{m-1} \cdot \alpha_{k+2} \cdot x_{k+2} \cdots \alpha_k \cdot x_k\big] \cdot \big[1 - t^m \cdot \alpha_1 \cdot x_1 \cdot \alpha_2 \cdot x_2 \cdots \alpha_m \cdot x_m\big]^{-1}; \qquad (4)$$

с начальными условиями $x_k(0) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, имеет решение, представимое системой бесконечнократных экспонент $(k = 1, 2, \ldots, m)$

$$x_k(t) = \langle e^t; \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha_1, \ldots \rangle. \qquad (5)$$

По теореме 1 гарантировано, что все эти функции имеют смысл, если $t \in \left(-\frac{1}{e \cdot \overline{\alpha}}, \frac{1}{e \cdot \overline{\alpha}}\right)$, где $\overline{\alpha} = \max\limits_{1 \le k \le m} |\alpha_k|$.

В общем случае $\min\limits_{1 \le k \le m} \alpha_k < \max\limits_{1 \le k \le m} \alpha_k$, поэтому интервал сходимости для всех функций (5) может быть расширен (см. [2], [3]).

При $m = 2$ решение может быть сведено к двум экспонентам бесконечной кратности

$$x(t) = \langle e^t; \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle,$$

$$y(t) = \langle e^t; 1, \beta, 1, \beta, 1, \ldots \rangle, \quad t \in \left(-\frac{1}{e \cdot q}, \frac{1}{e \cdot q}\right).$$

Теорема 2 точно отвечает на вопрос: какую величину следует взять вместо $\overline{\alpha} = \max\limits_{1 \le k \le m} |\alpha_k|$ в случае, если $m = 2$.

Отметим, что в явном виде число q оценивается формулой:

$$q(|\beta|) \leq \sqrt{|\beta|} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}(\ln|\beta|) \cdot \frac{\sqrt{|\beta|}-1}{\sqrt{|\beta|}+1}\right], \quad 1 \leq |\beta| \leq 2803.$$

Если $|\beta| > 2803$, в силу вступают другие оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буланов А. П. *Регулярность степеней бесконечной кратности*// Известия АН РФ, серия матем. – Т. 62. – No 5. – 1998. – С. 49–78.

2. Буланов А. П. *О степени бесконечной кратности с коэффициентами, имеющими поочередно два значения*// Современные проблемы теории функций и их прил. – Тезисы докл. 9-й Саратовск. зимней школы (26 января – 1 февраля 1998 г.). – С. 31.

3. Амбарцумян Г. А., Буробин А. В. *О продолжении функций, представляемых экспонентами бесконечной кратности*// Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докл. Воронежск. зимней матем. школы (27 января – 4февраля 1999 г.). – С. 16.

Н. В. Вагизова, А. В. Кузнецов (Казань)

ЗАДАЧИ СОУДАРЕНИЯ ЖИДКИХ СТРУЙ С УЧЕТОМ СИЛ ТЯЖЕСТИ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Для теоретического анализа сварки взрывом двух пластин, метаемых навстречу друг другу под малым углом, использовалась модель соударения струй идеальной невесомой жидкости [1]. Однако на основе этой модели нельзя было получить и, следовательно, объяснить волнообразование на границе контакта. Качественное объяснение было дано позднее на основе учета сжимаемости металла пластин [2, 3].

В рамках модели несжимаемой жидкости причиной волн могут быть силы тяжести и поверхностного натяжения, если рассматривать соударение струй как двухслойное течение разнородных жидкостей с различными плотностями. В настоящей работе даны решения этих задач.

Краевая задача сопряжения для потенциалов течений сводится к линейному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению с ядром типа Коши. Его решение находится методом Винера-Хопфа.

На основе анализа решений показано, что в поперечном поле силы тяжести на границе контакта струй возникают возмущения, переходящие при $x \to \infty$ в периодическую структуру типа $y = A\sin(2\pi x/\lambda + \epsilon)$ с определенной длиной волны λ. Волны имеют место при любом числе Фруда $F = U^2/gH$, где U — скорость точки контакта, H — ширина струи. С ростом числа Фруда λ увеличивается.

При учете поверхностного натяжения капиллярные волны такой же структуры при $x \to \infty$, как и в случае гравитационных волн, имеют место при условии, что поверхностное натяжение T не превосходит некоторой определенной величины T_0, зависящей от плотности сред, U и H. Длина волны с уменьшением T уменьшается.

Работа поддержана программой "Университеты России" (проект 551).

ЛИТЕРАТУРА

1. Deribas A., Godunov S., Zabrodin A., Kozin N. *Hydrodinamic effects in colling solids*// J. Comput. Phys. - 1970. - V. 5. - No 3.

2. Годунов С. К., Дерибас А. А. *Волнообразование при сварке взрывом*// Некоторые вопросы математики и механики: К семидесятилетию М.А.Лаврентьева. - М.: Наука, 1970.

3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* - М.: Наука, 1973. - 416 с.

Р. Т. Валеева (Казань)

ОБ ОБРАЩЕНИИ ОДНОГО СЛАБОСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В терминах теории рядов Фурье по полиномам Чебышева первого рода $T_r(t) = \cos\arccos t$ $(r+1 \in \mathbb{N}, -1 \leq t \leq 1)$ строится решение двумерного интегрального уравнения

$$A(\varphi;t,\tau)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\xi-t|\ln|\eta-\tau|}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(t,\tau),$$

где $-1\le t,\tau,\xi,\eta\le 1$, $f(t,\tau)$ — известная, а $\varphi(\xi,\eta)$ — искомая функции.

Пусть $\Phi=L_2(\rho;[-1,1]^2)$ с весом $\rho=\rho(\xi,\eta)=(1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}}$ и с обычной нормой. Обозначим через $F=\widetilde{W}_2^1(\sigma;[-1,1]^2)$, $\sigma=\sigma(t,\tau)=(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1-\tau^2)^{\frac{1}{2}}$, множество таких функций $f(t,\tau)$ из $C([-1,1]^2)$, что существуют обобщенные производные по Соболеву f'_t, f'_τ, $f''_{t\tau}\in L_2(\sigma;[-1,1]^2)$.

С помощью соответствующих результатов [1, 2] доказывается

Теорема. *Пусть* $\Phi=L_2(\rho;[-1,1]^2)$, *a* $F=\widetilde{W}_2^1(\sigma;[-1,1]^2)$ *с любой нормой, при которой это пространство является полным. Тогда оператор* $A:\Phi\to F$ *непрерывно обратим и для обратного оператора* $A^{-1}:F\to\Phi$ *справедливо представление*

$$A^{-1}(f;t;\tau)=\frac{c_{00}(f)}{4\ln^2 2}-\frac{1}{2\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}kc_{k0}(f)T_k(t)-$$

$$-\frac{1}{2\ln 2}\sum_{j=1}^{\infty}jc_{0j}(f)T_j(\tau)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}kjc_{kj}(f)T_k(t)T_j(\tau),$$

где $t\in[-1,1]$, $\tau\in[-1,1]$, *а*

$$c_{kj}=\frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{f(t,\tau)T_k(t)T_j(\tau)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}\,dt\,d\tau$$

— *коэффициенты Фурье–Чебышева в двумерном случае.*

Эта теорема позволяет перенести некоторые результаты работы [2] на двумерные полные слабо сингулярные интегральные уравнения первого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1994. – 288 с.

2. Валеева Р. Т. *Аппроксимативные методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода:* Дисс... канд. физ.–мат. наук. – Казань, 1995. – 108 с.

Р. Т. Валеева (Казань)

СПЛАЙН–ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Исследуется сплайн–тригонометрический метод Галеркина решения двумерного слабосингулярного интегрального уравнения

$$(Ax)(s,\sigma) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\xi - s}{2}\right| \ln\left|\sin\frac{\eta-\sigma}{2}\right| x(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma;\xi,\eta)x(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = y(s,\sigma), \tag{1}$$

где $h(s,\sigma;\xi,\eta)$ и $y(s,\sigma)$ — данные непрерывные 2π–периодические функции, а $x(s,\sigma)$ — искомая функция, отыскиваемая в пространстве $L_2\left([0,2\pi]^2\right)$. Согласно этому методу приближенное решение уравнения (1) ищется в виде двумерного сплайна

$$x_{n,m}(s,\sigma) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj}\varphi_{kn}(s)\varphi_{jm}(\sigma), \quad n+1\in\mathbb{N}, \quad m+1\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

где $\varphi_{kn}(s)$ и $\varphi_{jm}(\sigma)$ суть 2π–периодические фундаментальные сплайны первой степени по системам узлов соответственно

$$s_{kn} = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad k=\overline{-n,n}; \quad \sigma_{jm} = \frac{2j\pi}{2m+1}, \quad j = \overline{-m,m}. \tag{3}$$

Неизвестные коэффициенты α_{kj} $(k=\overline{-n,n},\ j=\overline{-m,m})$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-m}^{m} \alpha_{kj}c_{rl}(A\varphi_{kn}\varphi_{jm}) = c_{rl}(y), \quad r=\overline{-n,n}, \quad l=\overline{-m,m}, \tag{4}$$

где

$$c_{rl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s,\sigma) e^{-i(rs+l\sigma)}\, ds\, d\sigma, \quad f \in L_2\left([0,2\pi]^2\right).$$

С помощью соответствующих результатов монографии [1] установлено теоретическое обоснование вычислительной схемы (1) — (4) в смысле Л. В. Канторовича [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений первого рода. Избранные главы.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1995. – 230 с.

2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

В. И. Васильев, О. А. Тихонова (Якутск)

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассматривается неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f(x)g(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{2}$$

и начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l. \quad (3)$$

Требуется восстановить плотность теплового источника при дополнительной информации — заданном распределении температуры на конечный момент времени

$$u(x,T) = u_T(x), \quad 0 \le x \le l. \tag{4}$$

Для численного решения поставленной обратной задачи предложен итерационный метод вариационного типа [2], связанный с последовательным уточнением правой части с учетом условия (4) [3,4].

Проведенный вычислительный эксперимент свидетельствует о качественном воспроизведении правой части при зашумлении входных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М. *Обратные задачи теплообмена.* –М.: Машиностроение, 1988. – 286 с.

2. Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 592 с.

3. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Васильев В. И. *Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности*// Матем. моделирование. – 1997. – No 5. – С. 119–127.

4. Вабищевич П. Н., Васильев В. И., Тихонова О. А. *Численное решение задачи оптимизации профиля имплантирования в микроэлектронике*: Сборн. докл. Третья междунар. науч. конф. "Идентификация динамических систем и обратные задачи". – М.–Сп.-б., 1998. – С. 107–113.

Л. В. Веселова, О. Е. Тихонов (Казань)

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

Цель настоящей работы — получить аналоги результатов работ [1], [2], где была доказана единственность решения обратных задач интерполяции линейных операторов в классической постановке.

Определение. Пусть (X,Y) — интерполяционная пара банаховых решеток. Промежуточная банахова решетка Z называется *положительно интерполяционной*, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого положительного линейного оператора T, действующего в паре (X,Y), имеем: $T(Z) \subset Z$

и $\|T\|_{Z\to Z} \leq c\max\{\|T\|_{X\to X}, \|T\|_{Y\to Y}\}$. Если это неравенство справедливо при $c = 1$, то решетка Z называется *нормально положительно интерполяционной.*

Теорема [4]. *Интерполяционная пара банаховых решеток восстанавливается с точностью до эквивалентности норм по совокупности своих положительно интерполяционных решеток. По совокупности нормально положительно интерполяционных решеток такая пара восстанавливается с точностью до пропорциональности норм.*

При доказательстве этой теоремы существенно используются результаты работы [3].

Работа поддержана РФФИ, грант 98-01-00103.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tikhonov O. E., Veselova L. V. *A Banach couple is determined by the collection of its interpolation spaces*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – P. 1049–1054.

2. Tikhonov O. E., Veselova L. V. *The uniqueness of the solution to the inverse problem of exact interpolation*// Israel Math. Conf. Proc. – 1999. – V. 13. – P. 208–214.

3. Веселова Л. В., Тихонов О. Е. *О единственности решения обратных задач интерполяции.* Препринт НИИММ No 95-2. – Казанский фонд «Математика». – Казань, 1995. – 17 с. (Англ. перевод: XXX E-print Archive, math.FA/9902108.)

4. Tikhonov O. E., Veselova L. V. *The uniqueness of the solution to inverse problems of interpolation of positive operators in Banach lattices.* – XXX E-print Archive, math.FA/0003095.

В. В. Вишневский (Казань)

ГОЛОМОРФНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СВЯЗНОСТЕЙ, СОХРАНЯЮЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ

Пусть M — гладкое многообразие размерности n с интегрируемой структурой точного представления $\varphi : A_m \to T_1^1$ ассоциативной коммутативной унитальной алгебры A_m. Её базису $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}$ отвечает на M набор постоянных линейных операторов $\Phi_\alpha = \varphi(\varepsilon_\alpha)$, задающих для векторного поля X распределение голоморфных площадок, натянутых на векторы $\Phi_\alpha(X)$. Назовем φ-связностью всякую связность ∇ без кручения, сохраняющую структуру представления $\varphi : \nabla\Phi_\alpha = 0$. Кривая на M называется голоморфно-геодезической (ГГ) , если её касательный вектор v при параллельном переносе вдоль нее остаётся лежащим в голоморфной площадке этого вектора: $\nabla v = \lambda^\alpha \Phi_\alpha(v)$ (здесь и далее $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, m; \quad i, j, \ldots = 1, \ldots, n$). Если $\bar{\nabla}$ — другая φ-связность, то преобразование $\bar{\nabla} - \nabla$ называется голоморфно-геодезическим (ГГ), если при этом всякая ГГ-кривая перейдет в ГГ-кривую. Для тензора деформации $T^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$ тогда имеем:

$$T^i_{jk} = \Theta^\alpha_{(j} \Phi_{\alpha}{}^{i}_{k)}. \tag{1}$$

Обладая групповыми свойствами, ГГ-преобразования разбивают множество φ-связностей на классы эквивалентности, среди которых есть и класс ГГ-плоских. Поскольку $\bar{\nabla}$ и ∇ чисты относительно операторов Φ_α (т.е. их объекты коммутируют со всеми Φ_α), то и Θ^α_j обладают обобщенной чистотой: $C^\alpha_{\beta\sigma}\Theta^\sigma_j = \Phi^k_{\beta j}\Theta^\alpha_k$, где $C^\alpha_{\beta\sigma}$ — структурные константы A_m. Если обе связности ещё и голоморфны, то голоморфно и тензорное поле (1): $\Phi^s_l \partial_s T^i_{jk} = \Phi^t_j \partial_l T^i_{tk}$, и такие преобразования образуют подгруппу. Для голоморфного объекта Θ и объект T^i_{jk} по (1) голоморфен, и такие преобразования назовем сильно ГГ-преобразованиями. Свёртка (1) даёт $T_j = \bar{\Gamma}_j - \Gamma_j = (C^\alpha_{\alpha\sigma} + \Phi^i_{\sigma i})\Theta^\sigma_j$. В частности, для локальной A_m, у которой ε_1 — главная единица, а остальные элементы базиса задают её радикал, имеем $C^\alpha_{\alpha\sigma} = \Phi^i_{\sigma i} = 0$ для $\sigma = 2, \ldots, m$, поэтому $\Theta^1_j = \frac{1}{m+n}(\bar{\Gamma}_j - \Gamma_j)$. С помощью естественных продолжений Θ^1_j в локальную A_m [1] теперь построим голоморфное поле Θ^α_j, компоненты которого выражаются через разности объектов $\bar{\Gamma}_j$ и Γ_j и их частных производных. Подставляя эти величины в (1) и относя надчеркнутые величины влево, а ненадчеркнутые вправо, получаем инварианты сильно ГГ-преобразования, обобщающие известные параметры Томаса.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00308).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шурыгин В. В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами*// «Пробл. геометрии.» Т. 19 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М., 1987. – С. 3–22.

Е. В. Владова, М. С. Матвейчук (Ульяновск)

УНИТАРНОПОРОЖДЕННАЯ БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА КАК АНАЛОГ ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКИ

В настоящем сообщении обсуждается задача о нахождении в гильбетовом простанстве H билинейных форм (б.ф.) наиболее общего вида, на которые возможен перенос теории операторов, известной в пространствах с индефинитной метрикой [1]. Идея состоит в выделении такой компоненты у унитарного оператора, которая воспринималась бы в качестве прямого интеграла канонических симметрий, умноженных на числовые множители.

Пусть U — унитарный опеатор в H, $\mathcal{A}$ — минимальная слабозамкнутая $*$−алгебра порожденная операторами U, U^*, $\mathcal{A}_+$ — множество всех положительных обратимых операторов из $\mathcal{A}$. Пусть W — множество всех частичных изометрий w, для которых $-w = UwU^*$ и $F := \bigvee\{w^*w : w \in W\}$. UF ($UF^{\perp}$) назовем *гиперболической* (*сферической*) частью U. Б.ф. $[.,.]_U := (U.,.)$ назовем *унитарнопорожденной.*

Нами вводится U-аналог J-положительных (J-равномерно положительных, J-отрицательных) подпространств β^+ (β^{++}, β^-) (см. [1]), U-аналоги несжимающих и плюс-операторов и определения U-строгого, нестрогого, фокусирующего, а также новые определения U-полустрогого, почти строгого, почти фокусирующего почти равномерно растягивающего оператора.. Например, U-плюс-оператор V называется *полустрогим*, если существует $\lambda > 0$ такое, что $[Vx, Vx]_U \geq \lambda[x, x]_U$, $\forall x \in \beta^{++}$. Для любого U-плюс-оператора обозначим через Z^V (Z_V) наибольший (наименьший) неотрицательный (самосопряженный) оператор из $\mathcal{A}$, для которого

$$[Vx, Vx]_U \geq [Z^V x, x]_U \quad \forall x \in \beta^{++},$$

$$([Vx, Vx]_U \geq [Z^V x, x]_U \quad \forall x \in \beta^{--}).$$

Имеем $Z^V \geq Z_V$.

Теоремы 1 – 2 — аналог теоремы 18 ([1], гл. III).

Теорема 1. *Пусть V — U-плюс-оператор и $Z \in \mathcal{A}_+$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $[Vx, Vx]_U - [Z^{-1}x, x]_U \geq \gamma \|x\|^2$ *для некоторого* $\gamma > 0$, $\forall x \in H$;

б) ZV*-равномерно растягивающий оператор;*

в) $Z^V \geq \gamma I + Z^{-2} > Z^{-2} - \gamma I \geq Z_V$ *для некорого* $\gamma > 0$.

Теорема 2. *Пусть V — U-плюс-оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) V *с точностью до множителя из* $\mathcal{A}_+$ *равномерно растягивающий;*

2) V *фокусирующий полустрогий* U*-плюс-оператор.*

Из свойств унитарнопорожденных б.ф. следует

Теорема 3. *Пусть V — U-плюс-оператор. Следующие условия эквивалентны:*

i) V *с точностью до множителя из* $\mathcal{A}_+$ *почти равномерно растягивающий оператор;*

ii) V*—полустрогий почти фокусирующий оператор;*

iii) $Z^V \in \mathcal{A}_+$, *оператор* $Z^V - Z_V \bigvee 0$ *неотрицателен и не обратим;*

iv) *существует оператор* $Z \in \mathcal{A}_+$ *такой, что* $[Vx, Vx]_U - [Zx, x]_U > 0$, $\forall x \in H$, $x \neq 0$ *и* $\inf\{[Vx, Vx]_U - [Zx, x]_U : \|x\| = 1\} = 0$.

Здесь $Z_V \bigvee 0$ *понимается как верхняя грань операторов* Z_V *и* 0.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00441).

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – М.: Наука, 1986. – 352 с.

Л. И. Власова, В. Ф. Кириченко (Москва)

О ГЕОМЕТРИИ КОНЦИРКУЛЯРНО-ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Конформное преобразование римановой метрики многообразия называется *конциркулярным*, если геодезические окружности исходной метрики являются геодезическими окружностями преобразованной метрики.

Почти эрмитово многообразие назовем *конциркулярно приближенно келеровым* (короче, $Z N\mathcal{K}$-многообразием), если его метрика конциркулярна метрике приближенно келерова многообразия. Такие многообразия с необходимостью являются собственными многообразиями Вайсмана-Грея (т.е. многообразиями класса $W_1 \oplus W_4$ в классификации Грея-Хервеллы, отличными от приближенно келеровых многообразий).

Теорема 1. *Многообразие Вайсмана-Грея (M^{2n}, J, g) является ZNK-многообразием тогда и только тогда, когда*

$$\nabla\omega = -\frac{1}{2}\omega \otimes \omega + \beta g,$$

где $\omega = -\frac{1}{n-1}\delta\Omega \circ J$ — форма Ли, $\Omega(X,Y) = g(X, JY)$ — фундаментальная форма структуры, ∇ и δ — риманова связность и оператор кодифференцирования, соответственно, $\beta \in C^\infty(M)$. При этом с необходимостью $\beta = \frac{1}{2n}(\delta\omega + \frac{1}{2}\|\omega\|^2)$.

Определение 1. Почти эрмитово многообразие (M, J, g) называется *многообразием постоянного по Ванхекке типа*, если на нем выполняется тождество

$$g\big(R(JX, JY)X, Y\big) - g\big(R(X,Y)X, Y\big) = c\|X\|^2\|Y\|^2;$$
$$X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad g(X,Y) = g(X, JY) = 0,$$

где функция $c \in C^\infty(M)$ называется *постоянной типа* многообразия, R — тензор Римана-Кристоффеля.

Теорема 2. *ZNK-многообразие M является многообразием постоянного по Ванхекке типа тогда и только тогда, когда* *оно либо эрмитово, либо является шестимерным ZNK-многообразием с неинтегрируемой структурой.*

Теорема 3. *Собственное ZNK-многообразие является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно с точностью до конциркулярного преобразования метрики локально голоморфно изометрично либо комплексному евклидову пространству $\mathbf{C}^n$, снабженному канонической келеровой структурой, либо шестимерной сфере S^6, снабженной канонической приближенно келеровой структурой.*

Б. Г. Габдулхаев (Казань)

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

В вещественном пространстве $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ квадратично-суммируемых 2π–периодических функций с обычными скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$ исследуются точные и приближенные методы решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения

$$a(s, x(s)) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)b(\sigma, x(\sigma))\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma =$$

$$= y(s), \quad -\infty < s < \infty; \qquad (1)$$

здесь $a(s,u)$ и $b(s,u)$ — известные непрерывные функции в области $\mathbb{R}^2$, 2π–периодические по переменной s; $h(s,\sigma)$ — известная симметрическая H–непрерывная 2π–периодическая по каждой из переменных функция; $y(s)$ — данная, а $x(t)$ — искомая функции из L_2, причем λ — произвольный вещественный параметр.

1. Теорема существования и единственности решения

Теорема 1. *Пусть для любых* $s, u, v \in \mathbb{R}$ *и некоторых* $M_1, M_2, m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+$ *выполнены условия:*

$$|a(s,u)-a(s,v)| \le M_1|u-v|, \quad [a(s,u)-a(s,v)]\,(u-v) \ge m_1|u-v|^2,$$

$$|b(s,u)-b(s,v)| \le M_2|u-v|, \quad [b(s,u)-b(s,v)]\,(u-v) \ge m_2|u-v|^2.$$

Тогда при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* $y \in L_2$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2$, *причем*

$$\frac{1}{M_1}\frac{m_2}{M_2}\|y(s)-a(s,c(s,0))\| \le \|x^*(s)\| \le$$

$$\le \frac{1}{m_1}\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^2 \|y(s)-a(s,c(s,0))\|,$$

где функция $c(s,u)$ *определяется в следующем параграфе.*

2. Итерационный метод

Полагая $b(s,x(s)) = z(s)$, в условиях теоремы 1 имеем $x(s) \equiv c(s,z(s))$, где $c(s,u)$ — липшиц–непрерывная по переменной u функция с постоянной $\dfrac{1}{m_2}$ и сильно монотонная функция с постоянной $\dfrac{m_2}{M_2^2}$. Введем оператор $K : L_2 \to L_2$ по формуле

$$Kz \equiv a(s,c(s,z(s))) + \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)z(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = y(s). \quad (2)$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение уравнения* (1) *можно найти итерационным методом*

$$x^i(s) = c(s,z^i(s)), \quad z^i = z^{i-1} + \frac{m}{M^2}\left(y - Kz^{i-1}\right), \quad i = 1,2,\ldots, \quad (3)$$

$$m = m_1 m_2 M_2^{-2}, \quad M = M_1 m_2^{-1} + \|Ih\|,$$

сходящимся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left(1-(m/M)^2\right)^{1/2} < 1$ *при любом начальном приближении* $z^0 \in L_2$; *здесь* $\|Ih\|$ — *норма сингулярного интегрального оператора с ядром Гильберта и с плотностью* $h(s,\sigma)$, *в частности,* $\|Ih\| = 1$ *при* $h(s,\sigma) = 1$.

3. Проекционные методы

Обозначим через $\{\varphi_i(s)\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему функций из $L_2(0,2\pi)$. Приближенное решение уравнения (1) будем искать по формуле

$$x_n(s) = c(s, z_n(s)), \quad z_n(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(s), \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где элемент $z_n(s)$ определим как решение конечномерного уравнения

$$P_n K z_n = P_n y, \quad P_n \varphi = \sum_{i=1}^{n} (\varphi, \varphi_i)\, \varphi_i, \quad \varphi \in L_2. \tag{5}$$

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *уравнения* (2) *и* (5) *имеют единственные решения* $z^*(s) \in L_2$ *и* $z_n(s) \in L_2$ *при любых* $y \in L_2$ *и любых* $n \in \mathbb{N}$, *а приближенные решения* $x_n(s)$ *из* (4) *сходятся в* L_2 *к точному решению* $x^* \in L_2$ *уравнения* (1) *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$\frac{E_n(z^*)}{M_2} \le \|x^* - x_n\| \le \frac{(M_1 + m_2\|Ih\|)\, M_2}{m_1 m_2} E_n(z^*), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $E_n(z^*)$ — *наилучшее среднеквадратическое приближение решения уравнения* (2) *всевозможными элементами вида* $z_n(s)$.

4. Квадратурные методы

Приближенное решение уравнения (1) при $y(s) \in C_{2\pi}$ ищется в виде

$$x_n^*(s) = c(s, z_n(s)), \quad z_n(s) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta_n(s - s_k), \quad s_k = \frac{2k\pi}{n}, \tag{7}$$

где

$$\Delta_n(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \sin(2n+1)\dfrac{\varphi}{2} \operatorname{cosec} \dfrac{\varphi}{2} & \text{при } n = 2m+1\ (m+1 \in \mathbb{N}); \\ \dfrac{1}{2} \sin n\varphi \operatorname{ctg} \dfrac{\varphi}{2} & \text{при } n = 2m\ (m \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определяются из системы конечномерных уравнений

$$a(s_j, c(s_j, \alpha_j)) + \frac{\lambda}{n} \sum_{k=1}^{n} h_{jk} \beta_{j-k} \alpha_k = y_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

где $y_j = y(s_j)$, $h_{jk} = h(s_j, s_k)$,

$$\beta_{j-k} = \beta_{j-k}(n) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{j-k}{2n}\pi, & \text{если } j-k \text{ четно;} \\ \operatorname{ctg} \dfrac{k-j}{2n}\pi, & \text{если } j-k \text{ нечетно} \end{cases}$$

при $n = 2m + 1$, а при $n = 2m$ —

$$\beta_{j-k} = \beta_{j-k}(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } j-k \text{ четно;} \\ 2\operatorname{ctg} \dfrac{k-j}{n}\pi, & \text{если } j-k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения (1) таковы, что в условиях теоремы 1 точное решение $x^*(s) \in C_{2\pi}$. Тогда система (8) имеет единственное решение и приближенные решения (7) сходятся к точному решению в пространстве L_2 со скоростью, определяемой структурными свойствами исходных данных; в частности, если они таковы, что $x^*(s) \in W^r H^\alpha$ $(r + 1 \in \mathbb{N},\ 0 \le \alpha \le 1)$, то*

$$\|x^* - x_n^*\| = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r + \alpha > 0. \tag{9}$$

Замечание. Условия на функции $a(s, u)$, $b(s, u)$ и $h(s, \sigma)$ могут быть ослаблены; напр., теоремы 1—4 остаются в силе и в том случае, когда функция $h(s, \sigma)$ не является симметричной, но удовлетворяет условию:

слабосингулярный интегральный оператор $\lambda I h^-$, где

$$I h^- x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(s, \sigma) - h(\sigma, s)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} x(\sigma)\, d\sigma, \quad x \in L_2,$$

является неотрицательным в пространстве L_2 или, более общо, наименьшее собственное значение λ_0 указанного симметричного оператора удовлетворяет неравенству $m_1 m_2 M_2^{-2} + \lambda_0 > 0$.

Б. Г. Габдулхаев, И. К. Рахимов (Казань)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются методы решения интегрального уравнения вида

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{h(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\ln^m|\tau - t|}{|\tau - t|^{\beta}}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1, \qquad (1)$$

в вещественном пространстве $L_2 = L_2(-1,1)$ с обычными скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_2$; здесь $a(t) \in C[-1,1]$, $h(t,\tau) \in H_\alpha[-1,1]$, $g(t,\tau) \in C[-1,1]^2$, $f(t) \in L_2$ — известные вещественные функции, $\varphi(t) \in L_2$ — искомая функция, λ и μ — произвольные вещественные параметры, а параметры α, β и m таковы, что $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, $m + 1 \in \mathbb{N}$.

С использованием работ [1] и [2], гл. 4, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $|a(t)| \geq m = \text{const} \geq 0$, $h(t,\tau) = h(\tau,t)$, $g(t,\tau) = -g(\tau,t)$. *Тогда при любых* λ *и* $\mu \in \mathbb{R}$ *оператор* $A : L_2 \to L_2$ *непрерывно обратим и*

$$\|A\| \leq M = \text{const} < \infty, \quad \|A^{-1}\| \leq m^{-1} < \infty. \qquad (2)$$

Теорема 2. *Слабосингулярный интегральный оператор* $B : L_2 \to L_2$, *где*

$$B\varphi \equiv \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{h(t,\tau) - h(\tau,t)}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{g(t,\tau) + g(\tau,t)}{2}\cdot\frac{\ln^m|\tau - t|}{|\tau - t|^{\beta}}\varphi(\tau)\,d\tau,$$

является симметричным и вполне непрерывным.

Теорема 3. *Пусть $a(t) \geq \gamma = \text{const} > 0$, а $\delta \in \mathbb{R}$ — минимальное собственное значение оператора B. Если $m \equiv \gamma + \delta > 0$, то оператор $A : L_2 \to L_2$ непрерывно обратим и справедливы неравенства (2).*

Следствие. *Если $\|B\| < \gamma$, то оператор $A : L_2 \to L_2$ непрерывно обратим и*

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq (\gamma - \|B\|)^{-1} < \infty.$$

Теорема 4. *В условиях любой из теорем 1 и 3 уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi^* \in L_2$ при любой правой части $f \in L_2$, где*

$$\frac{\|f\|}{M} \leq \|\varphi^*\| \leq \frac{\|f\|}{m},$$

которое можно найти универсальным одношаговым итерационным методом

$$\varphi^i(t) = \varphi^{i-1}(t) + \frac{m}{M^2}\left(f(t) - A\left(\varphi^{i-1}; t\right)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

сходящимся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left(1 - (m/M)^2\right)^{1/2} < 1$ при любом $\varphi^0 \in L_2$. Если же начальное приближение $\varphi^0(t) = \left(m/M^2\right) f(t)$, то погрешность i-го приближения может быть оценена неравенствами

$$\left\|\varphi^* - \varphi^i\right\| \leq \frac{q^{i+1}}{1-q}\frac{m}{M^2}\|f\|, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Обозначим через $\{e_i(t)\}_1^\infty$ полную ортонормальную систему функций в $L_2(-1,1)$. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде элемента

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

неизвестные коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}$ которого определяются из конечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(Ae_i, e_j\right) = (f, e_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Теорема 5. *В условиях любой из теорем* 1 *и* 3 *СЛАУ* (8) *имеет единственное решение при любых* $n \in \mathbb{N}$. *Приближенные решения* (7) *сходятся к точному решению со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(\varphi^*) \le \|\varphi^* - \varphi_n\| \le \frac{M}{m} E_n(\varphi^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $E_n(\varphi^*)$ — *наилучшее среднеквадратическое приближение решения* $\varphi^* \in L_2$ *всевозможными элементами вида* (7), *а постоянные* m *и* M *определены в теоремах* 1 *и* 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами*// Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. No 3. – С. 400–410.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун–та, 1995. - 230 с.

Е. Р. Газизов, Д. В. Маклаков (Казань)

ПРИНЦИП МАКСИМУМА РАСХОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ СТУПЕНИ

Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой весомой жидкости над неровным полигональным дном в форме наклонной ступени.

Для любых течений над ступенью, у которых свободная поверхность имеет горизонтальные асимптоты слева и справа на бесконечности, справедливы формулы:

$$Fr^2 + 2 = \frac{Fr^2}{(L - H/h)^2} + 2L, \qquad Fr(\infty) = \frac{Fr}{(L - H/h)^{3/2}}.$$

Здесь $Fr = V_0/\sqrt{gh}$ — число Фруда, g — ускорение силы тяжести, h — глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 — скорость невозмущенного потока слева на бесконечности, $L = y(\infty)/h$, $y(\infty)$ — ордината свободной поверхности справа на бесконечности, H — высота ступени в физической плоскости, $Fr(\infty)$ — число Фруда справа на бесконечности.

Отыскиваются безволновые режимы обтекания для случая, когда докритическое течение ($Fr < 1$) переходит в сверхкритическое ($Fr > 1$).

При $H > 0$ данная задача может трактоваться как задача о водосливе с широким порогом. В гидравлике для определения расхода через водослив используют так называемый принцип максимума расхода (ПМР), согласно которому на пороге водослива с течением времени сам собой устанавливается безволновой режим обтекания с максимальным расходом. Использовав ПМР для приближенного определения связи между Fr и H/h, найдем, что

$$H/h = 1 + Fr^2/2 - \frac{3}{2}Fr^{2/3}, \qquad Fr(\infty) = 1, \qquad L = H/h + Fr^{2/3}.$$

Проведенный в работе численный анализ показал, что ПМР является приближенно верным. Более того, на основе анализа численных данных получена уточненная зависимость между Fr и $Fr(\infty)$:

$$Fr(\infty) = 0,1982(1 - Fr)Fr^2 + 0,1871(1 - Fr) + 1.$$

Т. И. Гайсин (Казань)

НЕКОТОРЫЕ ЕСТЕСТВЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЛОЕНИЙ

Все многообразия и отображения предполагаются класса C^∞.

Определение. *Пусть M — многообразие со структурой слоения S коразмерности q, G — множество всех отображений $g : M \to R^q$, являющихся проектируемыми, то есть постоянными на слоях.*

Назовем число

$$Rank\{M,S,L\} = \max_{g\in G}[rank\{d(g)\}|_L]$$

верхним рангом слоя L *в слоении* S *на многообразии* M,

$$Rank\{M,S\} = \max_{L\in S}[Rank\{M,S,L\}]$$

— *верхним рангом слоения* S,

$$rank\{M,S\} = \min_{L\in S}[Rank\{M,S,L\}]$$

— *нижним рангом слоения* S *на многообразии* M.

Ясно, что если S — расслоение, то

$$Rank\{M,S\} = rank\{M,S\} = q.$$

Теорема 1. *Пусть* M — *компактное связное многообразие со структурой слоения коразмерности* q, *а отображение* $g : M \to R^q$ *является проектируемым и удовлетворяет условию* $rank\{d(g)\}|_L < q$ *для любого компактного в индуцированной топологии слоя* L. *Тогда образ* g *имеет меру нуль и* $rank\{d(g)\} < q$ *в каждой точке из* M.

Теорема 2. *Пусть* M — *компактное связное многообразие со структурой слоения* S *коразмерности* q. *Если множество компактных в индуцированной топологии слоев слоения* S *не более чем счетно (в частности, компактных в индуцированной топологии слоев нет), то* $rank\{M,S\} \le Rank\{M,S\} < q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985.
2. Тамура И. *Топология слоений.*– М.: Мир, 1979.
3. Molino P. *Riemannian foliations.* – Birkhäuser, 1988.

А. Ф. Галимянов (Казань)

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА

Построены и исследованы квадратурные формулы (к.ф.) для сингулярного интеграла

$$S(f,x) \equiv \int_a^b \frac{f(t)}{t-x}\,dt, \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши-Лебегу. В отличие от обычных квадратурных формул, они используют значения дробного интеграла Римана-Лиувилля в узлах:

$$S(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x) I_{a+}^{\alpha}(f,x_k) + R_n(f). \tag{2}$$

Здесь $A_k(x) \in C[a,b]$ и соответственно $x_k \quad (k=\overline{0,n})$ — коэффициенты и узлы, $R_n(f)$ — остаточный член, $I_{a+}^{\alpha}(f,x)$ — левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля от функции f в точке x, где $\alpha \in [0,1]$. При $\alpha = 0$ получаются обычные, а при $\alpha = 1$ — так называемые интервальные квадратурные формулы.

Квадратурные формулы вида (2) строятся различными способами. Опишем один из них. Пусть $x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, \quad k = \overline{0,n}$, а P_n^{α} — проекционный полиномиальный оператор, ранга не выше $n+1$, удовлетворяющий условиям $I_{a+}^{\alpha}(P_n^{\alpha}(\varphi,t),x_k) = I_{a+}^{\alpha}(\varphi,x_k), \quad k=\overline{0,n}, \varphi(t) \in C[a,b]$. Положим

$$S(f,x) = S(P_n^{\alpha}(f,t),x) + R_n(f) \tag{3}$$

На основании результатов [1], главы 3, доказывается

Теорема. *Пусть $f(t) \in H_{\omega}^{r}, r \geq 0$, где при $r=0$ выполняется усиленное условие Дини-Липшица. Тогда к.ф. (3) сходится равномерно со скоростью*

$$\|R_n(f)\|_{C[a,b]} = O\left(\frac{ln^2 n}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4}$$

Квадратурные формулы (2) используются при приближенном решении интегральных уравнений, в которых неизвестная функция находится под знаками сингулярного, а также дробного интегралов. Предложено теоретическое обоснование указанного квадратурного метода решения различных классов интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

Р. М. Ганеев (Елабуга)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОШИ И ДАРБУ ДЛЯ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе получены общие решения следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y^2 u_x + v_y + av = 0, \\ v_x + u_y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $|a| < 1$. Единственное регулярное решение задачи Коши получено в явной форме, а единственное обобщенное решение задачи Дарбу выражено через некоторое решение уравнения Эйлера.

В [1], [2] рассматривались задачи Коши, Гурса, Коши-Гурса для системы

$$\begin{cases} y^\kappa u_x - v_y = a_1(x,y)u + b_1(x,y)v + f(x,y), \\ u_x + v_x = a_2(x,y)u + b_2(x,y)v + g(x,y), \end{cases}$$

где $0 < \kappa < 2$.

В [3] из (1) выведено уравнение второго порядка и для него исследуются вопросы существования и единственности решения задачи Дарбу в зависимости от a.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекмарев Т. В. *Задачи Коши, Гурса и Коши-Гурса для вырождающихся систем уравнений, I*// Изв. вузов. Математика. – 1969. – No 12. – С. 99–111.

2. Чекмарев Т. В. *Задачи Коши, Гурса и Коши-Гурса для вырождающихся систем уравнений, II*// Изв. вузов. Математика. – 1970. – No 1. – С. 98–107.

3. Нахушев А. М. *Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса*// Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – No 9. – С. 1643–1649.

И. Б. Гарипов(Казань)

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО B-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E_2^{++} — первая четверть $x > 0,\ t > 0$ координатной плоскости Oxt; Δ^+ — полуполоса в E_2^{++}, ограниченная интервалом $\Gamma^{(0)} = \{x = 0,\ 0 < t < T\}$ и полупрямыми $\Gamma = \{x > 0,\ t = 0\}$ и $H = \{x > 0,\ t = T\}$; $\widetilde{\Delta}^+ = \Delta^+ \cup H$, $\bar{\Delta}^+ = \widetilde{\Delta}^+ \cup \Gamma$.

В данной работе рассматривается задача Коши об отыскании четного по x ограниченного решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x},\ k > 0 \tag{1}$$

в $\widetilde{\Delta}^+$, удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \Gamma, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — четная по x функция.

Доказывается

Теорема. *Если функция $u \in C(\bar{\Delta}^+) \cap C^2(\widetilde{\Delta}^+)$, четна по x, ограничена и удовлетворяет в $\widetilde{\Delta}^+$ уравнению (1), то $u(x,t)$ принимает наибольшое и наименьшее значение на Γ.*

На основе этой теоремы доказывается единственность решения задачи Коши (1), (2).

Далее, методом интегрального преобразования Фурье–Бесселя [1] строится формальное решение задачи Коши (1), (2). Оно имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{k-1}{2}}\xi^{-\frac{k-1}{2}}}{2t} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4t}} I_{\frac{k-1}{2}}\left(\frac{x\xi}{2t}\right)\xi^k d\xi, \tag{3}$$

где $I_\nu(\tau)$ — функция Бесселя мнимого аргумента ν–го порядка.

Доказывается, что функция $u(x,t)$, определяемая интегралом (3), является решением задачи Коши (1), (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киприянов И. А. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 89. – С. 130–213.

С. М. Гафурова (Казань)

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E_2^{++} — первая четверть $x > 0$, $y > 0$ координатной плоскости Oxy.

В данной работе рассматривается задача Коши об отыскании четного по y решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{n-1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}, \ n > 1, \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y) \in E_2^{++} : y > 0, x > g(y)\}$, удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{L^+} = \varphi(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{L^+} = \psi(y). \tag{2}$$

Здесь L^+ — часть симметричной относительно оси Ox гладкой кривой, расположенной в первой четверти координатной плоскости Oxy, и удовлетворяющей двум требованиям:

а) каждая прямая из двух семейств характеристик $x+y=C_1$, $x-y=C_2$ уравнения (1) пересекается с кривой L не более чем в одной ее точке;

б) направление касательной к кривой L ни в одной точке не совпадает с характеристическим направлением, соответствующим уравнению (1).

Доказывается существование единственного решения задачи (1), (2).

Рассматривается частный случай, когда кривая L совпадает с осью Oy. В этом случае задача Коши решается методом интегрального преобразования Фурье–Бесселя. Решение последней задачи представляется в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Таблицы интегральных преобразований.* Т.1. – М., 1969.

В. Э. Гейт (Челябинск)

ПОЛИНОМЫ НАИМЕНЬШЕГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УКЛОНЕНИЯ ОТ НУЛЯ С ПЯТЬЮ ПРЕДПИСАННЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Теорема. *Для заданного $n \in Z_+$ и точки $P=(A_1,\ldots,A_4) \in R^4$ полином $R_{n+5}(x)=x^{n+5}+A_1x^{n+4}+\ldots+A_4x^{n+1}+a_5x^n+\ldots+a_{n+5}$, имеющий наименьшую норму в $L[-1,1]$ за счет выбора $a_5,\ldots,a_{n+5} \in R$, допускает только одно из следующих пяти представлений:*

1) $R_{n+5}(x)=U_{n+1}(x)(x^4+A_1x^3+(A_2+\frac{n}{4})x^2+(A_3+\frac{n}{4}A_1)x+(A_4+\frac{n}{4}A_2+\frac{n^2+3n-2}{32}))$ *если и только если в точке P второй сомножитель сохраняет знак на $I=(-1,1)$, а $U_{n+1}(x)$ — чебышевский полином второго рода;*

2) $R_{n+5}(x)=(U_{n+2}(x)+\sigma U_{n+1}(x)+\frac{\sigma^2}{4}U_n(x))(x^3+(A_1-\sigma)x^2+(\frac{3}{4}\sigma^2-A_1\sigma+A_2+\frac{n+1}{4})x-(\frac{1}{2}\sigma^3-\frac{3}{4}A_1\sigma^2+(A_2+\frac{n+2}{4})\sigma-(A_3+\frac{n+1}{4}A_1)))$ *для точек P, характеризуемых условием: в интервале*

I существует корень σ уравнения

$$\frac{5}{8}\sigma^4 - \frac{1}{2}A_1\sigma^3 + \frac{12A_2+3n+9}{16}\sigma^2 - (A_3 + \frac{n+2}{4}A_1)\sigma +$$

$$+(A_4 + \frac{n+1}{4}A_2 + \frac{n^2+5n+2}{32}) = 0,$$

при котором второй сомножитель в 2) *сохраняет знак на* I;

3) $R_{n+5}(x) = R^{\max}_{n+3}(x,p,q)(x^2 + (A_1-p) + [A_2 - q - p(A_1-q)])$ *если и только если при данном* P *система* $(A_3-b_3)-q(A_1-p) = p[\ldots], (A_4-b_4)-b_3(A_1-p) = q[\ldots]$ *имеет решение* $(p,q) \in H_3(n,3)$ [1, с. 584], *для которого квадратический сомножитель из* 3) *сохраняет знак на* I, *а* b_3, b_4 — *коэффициенты при* x^n, x^{n-1} (*соответственно*) *в* $R^{\max}_{n+3}(x,p,q)$ (*там же*);

4) $R_{n+5}(x) = R^{\max}_{n+4}(x,p,q,r)(x + A_1 - p)$ *в тех и только тех точках* P, *для которых имеется решение* $(p,q,r) \in D_4(n,4)$ *с условием* $\mid A_1 - p \mid \geq 1$ *системы* $A_2 - q = p(A_1-p), A_3 - r = q(A_1-p), A_4 - b_4 = r(A_1-p)$; *причем* b_4 — *коэффициент при* x^n *в* $R^{\max}_{n+4}(x,p,q,r)$ [1, с. 586], *а область* $D_4(n,4)$ *задается неравенствами:* $1-\theta_1+\theta_2-\theta_3 > 0, 1+\theta_1+\theta_2+\theta_3 > 0, 3-\theta_1-\theta_2+3\theta_3 > 0, 1-\theta_2+\theta_1\theta_3-\theta_3^2 > 0$, *где* $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ *берутся из п.* 4) *теоремы* 7 [1];

5) $R_{n+5}(x) = R^{\max}_{n+5}(x,A_1,\ldots,A_4)$ *для всех остальных точек* $P = (A_1,\ldots,A_4)$, *не вошедших в пункты* 1) – 4), *см. в* [1,2] *полиномы* $R^{\max}_{n+l}$ *при* $l = 5$.

Отметим, что в другой форме и иными средствами полиномы $R^{\max}_{n+l}$ охарактеризовал ранее Ф. Пеерсторфер (см. [3] и указанную там литературу).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гейт В. Э. *О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике* $L[-1,1]$// Докл. Акад. Наук. – 2000. – Т. 370. – No 5. – С. 583–586.

2. Гейт В. Э. *О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике* $L[-1,1]$// Сиб. журн. вычисл. математики/ РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 1999. – Т. 2. – No 3. – С. 223–238.

3. Peherstorfer F. *Ortogonal Polynomials in* L^1 *– Aproximation*// J. of Aprox. Theory. – 1988. – V. 52. – No 3. – P. 241–268.

С. А. Гришина, О. В. Кожевникова, И. В. Коноплева, Б. В. Логинов (Ульяновск)

РЕШЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЫ СИММЕТРИИ В БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

В данном сообщении использованы терминология и обозначения работ [1,2], в которых содержатся также обзоры симметрийных результатов в теории ветвления решений нелинейных уравнений. Наиболее типичными в теории ветвления являются бифуркационные задачи о нарушении симметрии, когда нелинейное уравнение, инвариантное относительно группы движений евклидова пространства R^s, допускает решения с симметрией s-мерной кристаллографической группы. Особенно интересными для приложений в данной ситуации являются решения, инвариантные относительно нормальных делителей дискретной подгруппы кристаллографической группы (полупрямого произведения дискретной группы симметрии решетки и группы сдвигов порожденной основными трансляциями). Согласно результатам [3], п. 4.5, ядра гомоморфизмов всех неприводимых представлений конечной группы порождают структуру всех ее нормальных делителей. Поэтому переход к базису неприводимых инвариантных подпространств выделяет из уравнения разветвления подсистемы, группы инвариантности которых совпадают со всеми нормальными делителями, т.е. указываются координатные гиперплоскости (в новых и старых переменных), в которых следует искать инвариантные относительно соответствующего нормального делителя решения. При идейной простоте изложенной схемы в конкретных ее реализациях возникают технические трудности. В [1,2] эта теория применена к задаче о кристаллизации жидкого фазового состояния в статистической теории кристалла (простая кубическая решетка в R^3), в [4,5] — к задачам о капиллярно-гравитационных волнах и уравнению Монжа-Ампера на двумерном плоском торе (прямоугольная или квадратная решетка в R^2), в [6] — к построению периодических решений уравнений $\Delta u + \lambda^2\left\{\begin{smallmatrix}\mathrm{sh}\,u\\ \sin u\end{smallmatrix}\right\} = 0$ с гексагональной решеткой симметрии. Вычислена асимптотика соответствующих малых решений. В [1,2] содержатся глобальные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логинов Б. В. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – Ташкент: Фан, 1985. – 184 с.

2. Логинов Б. В. Вестник Самарск. гос. ун–та. – 1998. – No 4(10). – С. 15–70.

3. Владимиров С. А. // ДУ. – 1975. – Т. 12. – No 7. – С. 1180–1189.

4. Логинов Б. В., Гришина С. А. // В сб.: "Механика и прикладная математика". – Ульяновск: УлГТУ, 2000 (в печати).

5. Кожевникова О. В., Гришина С. А. // Труды Средневолжского мат. об-ва. – 1999. – Т. 2. – No 1. – С. 92–93.

6. Логинов Б. В., Коноплева И. В. // Труды Средневолжского мат. об-ва. – 2000. – Т. 2. – No 2 (в печати).

А. П. Гуревич, А. П. Хромов (Саратов)

О ЗАМЫКАНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^r[0,1]$ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Обозначим через D_L множество функций $y(x) \in C^{n-1}[0,1]$, у которых: 1) $y^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,1]$;
2) $y^{(n)}(x) \in L[0,1]$;
3) при $\nu = 1,\ldots,n$

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(0) + \beta_\nu y^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} (\alpha_{\nu j} y^{(j)}(0) + \beta_{\nu j} y^{(j)}(1)) = 0. \tag{1}$$

Условия (1) предполагаются нормированными (см. [1]).

Теорема 1. *Замыкание D_L в пространстве $C^r[0,1]$ $(0 \le r \le n-1)$ состоит из функций, принадлежащих $C^r[0,1]$ и удовлетворяющих тем условиям из (1), для которых $k_\nu \le r$.*

Отметим, что случай $r = 0$ впервые рассмотрен в [2].

Обозначим через R_λ резольвенту оператора L, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y$, $(p_k(x) \in L[0,1])$, с областью определения D_L. Пусть, далее, $g(\lambda, r)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям: а) при любом $r > 0$ $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \le r$ и аналитична по λ в $|\lambda| < r$; б) существует $C > 0$ такая, что при всех $r > 0$ и $|\lambda| \le r$ $|g(\lambda, r)| \le C$; в) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ; г) существуют положительные β, β_1, h такие, что

$$g(r\exp(i\varphi), r) = \begin{cases} O(|\varphi|^\beta) \text{ при } |\varphi| \le h,\ n = 4n_0; \\ O(|\varphi - \pi|^\beta) \text{ при } |\varphi - \pi| \le h, n = 4n_0 + 2; \\ \left.\begin{array}{l} O(|\varphi - \frac{\pi}{2}|^\beta) \text{ при } |\varphi - \frac{\pi}{2}| \le h, \\ O(|\varphi + \frac{\pi}{2}|^{\beta_1}) \text{ при } |\varphi + \frac{\pi}{2}| \le h, \end{array}\right\} n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Назовем выражения $-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} g(\lambda, r)R_\lambda f(x)\,d\lambda$ обобщенными средними по Риссу функции $f(x)$ (интегрирование ведется по окружности $|\lambda| = r$, на которой нет собственных значений L).

Теорема 2. *Предположим, что краевые условия* (1) *являются регулярными* [1]. *Тогда для того, чтобы обобщенные средние по Риссу функции $f(x)$ сходились к ней в метрике $C^r[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in C^r[0,1]$ и удовлетворяла тем из условий* (1), *для которых $k_\nu \le r$.*

Эта теорема является усилением аналогичного утверждения из [3].

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00075) и программой "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96123).

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

2. Хромова Г. В. *О регуляризации интегральных уравнений 1-го рода с ядром Грина*// Изв. вузов. Математика. – 1972. – No 8(123). – С. 94–104.

3. Kaufmann F. J. *Derived Birkhoff-series associated with* $N(y) = \lambda P(y)$// Results in mathematics. – 1989. – V. 15. – P. 256–289.

В. И. Данченко, Д. Я. Данченко (Владимир)

О СУММАХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАРДИ

Теорема 1. *Пусть в верхней открытой полуплоскости C^+ фиксирован некоторый набор точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ $(n \geq 3)$, и в классе Харди $\{f\} = H^1(C^+)$ имеем*

$$\sup\{|\sum\nolimits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|: \ \|f\|_{H_1} \leq 1\} = M. \tag{1}$$

Тогда $M \cdot \min_k\{\Im\zeta_k\} \geq A_1 \ \ln(\ln n)/\ln n$, $A_1 = const$. Оценка точна по порядку n.

Если в условии (1) суммы $\sum f(\zeta_k)$ заменить на $\sum f'(\zeta_k)$ (при сохранении прочих условий), то вместо предыдущей оценки будем иметь $\sqrt{M} \ \min_k\{\Im\zeta_k\} \geq A_2 \ln^2 n/\sqrt{n}$, $A_2 = const$.

Сформулируем подобное утверждение для функций класса Харди $\{f\} = H^1(D^+)$ во внешности $D^+ = \{z : \ |z| > 1\}$ единичного круга с дополнительным условием $f(\infty) = 0$.

Теорема 2. *Пусть $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\} \subset D^+$, и в указанном классе имеем $\sup\{|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|: \ \|f\|_{H^1} \leq 1\} = M$. Тогда $\min_k\{|\zeta_k| - 1\} \geq A_3 \ln n/n$ $(A_3 = const)$ при достаточно больших $n \geq n_0(M)$. Оценка точна по порядку n.*

Пусть в $D = \{z : \ |z| < 1\}$ задана бесконечная последовательность $\lambda = \{\zeta_j\}$ точек, попарные гиперболические расстояния (относительно D) между которыми не меньше чем A_4, а число точек из λ, лежащих в кругах $\{z : \ |z| < r\}$ при $0 < r < 1$, не меньше чем $A_5/(1 - r)$ $(A_4, A_5 = \text{const})$.

Теорема 3. *Пусть $p > 0$, $f \in H^p(D)$, $\psi(x) > 0$ — неубывающая при $x > 0$ функция такая, что $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\psi(x) = \infty$. Тогда для указанной последовательности $\lambda = \{\zeta_j\}$ имеем $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\psi(k)} | f(\zeta_k) | = \infty$.*

Отметим (см., например, работу В.Я.Эйдермана в Матем. заметках, 1995, т. 57, N 1, с. 150-153), что подобные оценки сумм применяются при исследовании $O(P)$-, $o(P)$-полноты систем дробей $\{1/(z - \zeta_k)\}$ в пространствах Харди, Неванлинны и др.

Работа поддержана РФФИ (проекты 99-01-00119, 00-01-00342).

М. Ю. Денисова (Казань)

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ B – m–ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E_{n+1}^{++} — пересечение полупространств $x_n > 0$ и $y > 0$ евклидова пространства точек $z = (x, y)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, D^+ — область, расположенная в E_{n+1}^{++}, ограниченная частями Γ_1 и Γ_2 соответственно гиперплоскостей $x_n = 0$ и $y = 0$ и гиперповерхностью Γ^+.

В данной работе рассматривается краевая задача об отыскании четного по y решения уравнения

$$\Delta_B^m u = 0 \tag{1}$$

в области D^+, удовлетворяющего граничным условиям

$$\lim_{x_n \to +0} H(\frac{\partial}{\partial n}, \Delta_B)u = f(x), \tag{2}$$

где $\Delta_B = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + B_y$, $B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$ — оператор Бесселя, $m > 2$, k — любое положительное число, n — внешняя нормаль к Γ^+, $H(\alpha)$ — функциональный столбец, j-элемент которого — $H_j(\alpha)$ — оператор степени m_j, $m_j < 2m$, $f(x)$ — функциональный столбец, определенный в E_n^{++}, j-элемент которого — $f_j(x)$ является функцией, непрерывно дифференцируемой $(m - m_j)$ раз, четной по y и не превышающей $\frac{c}{|x|^{m_j+\varepsilon}}$, ($c, \varepsilon$ — некоторые положительные постоянные, $j = \overline{1, m}$).

Теорема. *Если для любой действительной ненулевой точки* $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$

$$rg \int\limits_{+} \frac{H(\alpha)(1, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}^2, \cdots, \alpha_{n+1}^{2m-1})}{|\alpha|^{2m}} d\alpha_{n+1} = m, \tag{3}$$

то задача (1) – (2) *в пространстве* E_{n+1}^{++} *разрешима и решение может быть представлено в виде*

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{E_{n+1}^{++}} T_x^{y'} g_j(z) f_j(y') y_{n+1}^k dy',$$

где $g_j = \int\limits_{|\alpha'|=1} |\alpha'|^k d_{\alpha'} T \int\limits_{+} \Phi_B^{(2m-m_j-1)}(z,\alpha)|\alpha|^{-2m}(1, \alpha_{n+1}, \cdots,$
$\cdots \alpha_{n+1}^{2m-1}) R_j(\alpha') d\alpha_{n+1}$, $\Phi_B(z,\alpha)$ — *ядро Пуассона,*
$\gamma = n+1+k$, $(z,\alpha)_B^\lambda = \int\limits_0^\pi \left(\sum\limits_{i=1}^n x_i \alpha_i + y \alpha_{n+1} cos\varphi \right)^\lambda sin^{k-1}\varphi d\varphi$,
$R_j(\alpha')$ — *некоторая правая обратная для матрицы* (3).

В. В. Дмитриева (Уфа)

ТОЧЕЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ КЛАССЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим класс обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, разрешенных относительно старшей производной

$$y''' = f(x, y, y', y''). \tag{1}$$

Точечные преобразования общего вида $\tilde{x} = \tilde{x}(x,y)$, $\tilde{y} = \tilde{y}(x,y)$ переводят уравнение (1) в новое уравнение

$$\tilde{y}''' = g(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''). \tag{2}$$

Выберем специальный класс уравнений (1), у которых правая часть содержится в некотором множестве функций $f \in F$.

Определение. *Если для всех функций $f \in F$ правая часть g преобразованного уравнения (2) также содержится в F, то данный класс уравнений называется инвариантным или замкнутым классом относительно точечных преобразований.*

Примеры замкнутых классов уравнений второго порядка:

1. $y'' = P(x,y) + 3\,Q(x,y)y' + 3\,R(x,y)y'^2 + S(x,y)y'^3.$

2. $y'' = \dfrac{P(x,y)+4\,Q(x,y)\,y'+6\,R(x,y)\,(y')^2+4S(x,y)\,(y')^3+L(x,y)(y')^4}{Y(x,y)-X(x,y)y'}.$

3. $(y'')^2 = P_5(y'; x, y),$

где функция P_5 есть полином пятого порядка по производной y'.

Теорема. *Класс уравнений вида*

$$y''' = \frac{-3X(x,y)y''^2+P(x,y)y''y'^2+Q(x,y)y''y'+R(x,y)y''+S(x,y)y'^5+}{Y(x,y)-X(x,y)y'}$$

$$\frac{+L(x,y)y'^4+K(x,y)y'^3+M(x,y)y'^2+N(x,y)y'+T(x,y)}{Y(x,y)-X(x,y)y'}$$

является инвариантным классом относительно точечных преобразований.

Подробное доказательство см. в [1].

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00068).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dmitrieva V. V. *Point-invariant classes of the third order ordinary differential equations*// Electronic archive at LANL. – 2000. – Math. CA #0006130, – P. 1–6.

А. И. Долгарев (Пенза)

КРИВЫЕ ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА НА НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ

Одулярные пространства введены Л.В.Сабининым [1], вейлевские одулярные пространства (ВО-пространства) определены в [2]. Первым [2] изучалось ВО-пространство с касательным отображением в растран — одуль на основной аффинной группе. Одуль на нильпотентной группе Ли — сибсон определен в [3] операциями на R^3:

$$(x^1,y^1,z^1)+(x^2,y^2,z^2)=(x^1+x^2,y^1+y^2,z^1+z^2+x^2y^1),$$

$$t(x,y,z)=(xt,yt,zt+xyt(t-1/2)),\quad t\in R.$$

Производная сибсонной функции $\sigma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ равна (см. [3])

$$\sigma'(t)=(x'(t),y'(t),z'(t)+x'(t)(y'(t)/2-y'(t))).$$

Кривая ЕС-пространства (ВО-пространства на сибсоне) задается регулярной функцией $\sigma(s) = (s, x(s), y(s))$. Вдоль кривой определено касательное отображение в сибсон. Геометрия пространства на растране во многом аналогична классической дифференциальной геометрии [2], геометрия ЕС-пространства от них отличается принципиально. В частности, кривая ЕС-пространства не обладает соприкасающейся плоскостью. Найдены кривизна и кручение кривой 3-мерного пространства, получен аналог формул Френе. Не все прямые ЕС-пространства имеют нулевую кривизну, но их кривизны для каждой из плоскостей постоянны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабинин Л. В. *Одули как новый подход к геометрии со связностью*// ДАН СССР. – 1977. – N 5. – С. 800–803.

2. Долгарев А. И. *ЕМ-пространства.* Дис... канд. физ.-мат. наук. – Красноярск: КГПИ, 1991. – 95 с.

3. Долгарев А. И. *Дифференцирование одулярных функций*// Інтегральні перетворення та іх застосування до крайових задач. Зб. наук. пр. – Київ: Ін-т математики НАН Украіни, 1995. – Вип. 10. – С. 57–79.

С. Н. Дорофеев (Пенза)

ОБ ИНВАРИАНТАХ ГРУППЫ СИММЕТРИИ НЕКОТОРЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В пространстве E_3 рассмотрим ориентируемое многообразие F эйлеровой характеристики k. Пусть G есть максимально-симмстрическая группа, состоящая из всех движений пространства E_3, оставляющих на месте многообразие F. В E_3 зададим ортонормированный репер, связанный каноническим образом с многообразием F. Относительно этого репера каждое движение пространства можно задать некоторой ортогональной матрицей третьего порядка. Множество таких матриц образует конечную группу. Известно, что группа унимодулярных матриц второго порядка является группой накрытия группы $SO(3)$ ортогональных матриц третьего порядка. Используя соответствие, устанавливающее двулистное накрытие группы $SO(3)$ группой $SU(2)$, можно построить вложение максимально-симметрической группы многообразия F в группу $SL(2, C)$.

Действие группы унимодулярных матриц второго порядка на пространстве $C[x, y]$ многочленов от двух переменных x и y можно задать по закону: каждому элементу $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ представление φ ставит в соответствие линейное преобразование $\varphi(g)$, действующее по закону:

$$\varphi(g)x = \delta x - \beta y, \quad \varphi(g)y = -\gamma x + \alpha y.$$

Среди всех многочленов от переменных x и y можно выделить те, которые не изменяются при действии всех линейных преобразований, определяемых любым элементом $g \in G$. Принцип вложения максимально-симметрической группы G в группу унимодулярных матриц позволяет находить образующие алгебры инвариантов группы G [2].

В пространстве E_3 существует двумерное ориентируемое многообразие F_1 с максимально-симметрической группой, изоморфной подгруппе

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

группы перестановок из восьми элементов. Установлено, что алгебра инвариантов максимально-симметрической группы G многообразия F_1 изоморфна фактор-алгебре алгебры $C[X, Y, Z]$ по идеалу, порожденному элементом $4X^2 - Y^2 + Z^2$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Дорофеев С. Н. *Об инвариантах групп симметрии некоторых двумерных многообразий*// Движения в обобщенных пространствах. Межвуз. сбор. науч. тр. Пенз. гос. пед. ун-та. – 1999. – С. 20–23.

2. Мантуров В. О. *Изучение симметрии атомов с использованием Mathematica* 3.0// Тезисы докл. научно-практической конференции, посвященной 60-летию университета (физ.-мат. науки). – Пенза, изд-во Пенз. гос. пед. ун-та им. В. Г. Белинского, 1999. – С. 46–48.

М. И. Дьяченко (Москва)

ОБОБЩЕННЫЕ ЧЕЗАРОВСКИЕ СРЕДНИЕ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Пусть $m \geq 2$, $T = [-\pi, \pi)$, функция m переменных $f(\mathbf{x})$ является 2π-периодической по каждой переменной и $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$. Тогда эту функцию можно разложить в кратный тригонометрический ряд Фурье

$$\sum_{\mathbf{n}\in Z^m} a_{\mathbf{n}}(f)e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}. \tag{1}$$

Если $\mathbf{N} = (N_1, N_2, ..., N_m)$ — вектор с целыми неотрицательными компонентами, то обозначим через $S_{\mathbf{N}}(f;\mathbf{x})$ соответствующую прямоугольную частичную сумму ряда (1).

Укажем способ построения средних чезаровского типа по достаточно широкому классу множеств. Пусть ограниченное множество $U \subset Z^m \cap [0, \infty)^m$ и $|U|$ — число точек этого множества. Рассмотрим обобщенные средние Чезаро порядка 1

$$\sigma_U(f;\mathbf{x}) = \frac{1}{|U|}\sum_{\mathbf{k}\in U} S_{\mathbf{k}}(f;\mathbf{x}).$$

Определение. *Пусть ограниченное множество* $U \subset Z^m \cap [0, \infty)^m$. *Тогда скажем, что* U *принадлежит классу* A_1, *если из того, что точка* $\mathbf{k} = (k_1, ..., k_m) \in U$, *вытекает, что цело-*

численный прямоугольник

$$\left(\prod_{j=1}^{m}[0,k_j]\right) \cap Z^m \subseteq U.$$

Теорема. *Существует такая постоянная $K > 0$, зависящая только от размерности пространства, что для любого $U \in A_1$ верна такая оценка для нормы соответствующего оператора:*

$$\|\sigma_U\|_{L\to L} = \|\sigma_U\|_{C\to C} \le K.$$

Кроме того, при соответствующем сужении класса рассматриваемых множеств U, можно доказать и сходимость обобщенных чезаровских средних при расширении множеств U.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00042) и программой "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96143).

А. М. Елизаров, Д. А. Фокин (Казань)

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Работа посвящена развитию методов оптимального проектирования формы тел, обтекаемых идеальной несжимаемой жидкостью (ИНЖ), с использованием решений изопериметрических вариационных обратных краевых задач (см. [1]) и продолжает исследования [2]. Рассмотрена следующая

Задача А. *Пусть* $\mathbf{L}$ — *класс замкнутых непроницаемых гладких контуров с фиксированным периметром L, обтекаемых без отрыва струй потоком ИНЖ с заданной скоростью v_∞ на бесконечности, направленной горизонтально. Требуется найти контур из $\mathbf{L}$, максимизирующий величину подъемной силы (или, что то же самое, циркуляцию скорости Γ) при условии, что на контуре максимальное значение v_{max} приведенной скорости потока v/v_∞ не превосходит заданной величины v_*.*

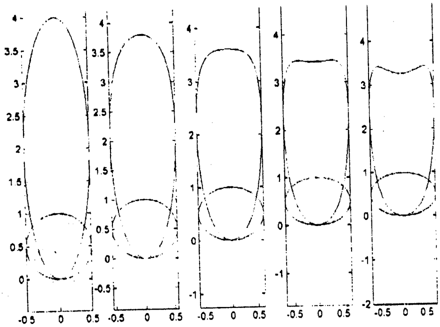


Рис.1

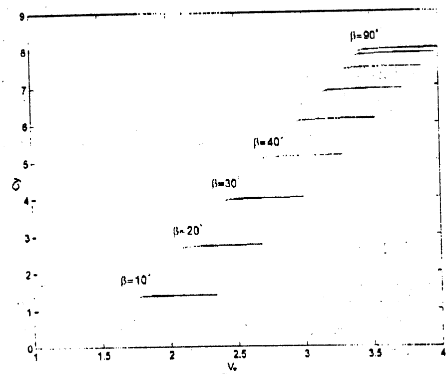


Рис.2

Пусть $\Lambda = \Gamma/(Lv_\infty)$ — безразмерная циркуляция скорости, а Λ^* и β^* — соответственно абсолютный максимум Λ и экстремальное значение теоретического угла атаки β. Доказана

Теорема 1. *При* $v_* > 1$ *и* $v_* \neq 2$ *задача А безусловно разрешима, причем* $\beta^* < \arcsin \ln v_*$ *и* $\Lambda^* \leq 2 \ln v_*$. *Кроме того:*

1^o *при* $1 < v_* < 2$ *экстремаль отлична от окружности;*

2^o *при* $v_* > 2$ *единственной экстремалью является окружность,* $\Lambda^* = v_* - 2$ *и* $\beta^* = \arcsin(v_*/2-1)$ *при* $2 < v_* \leq 4$, $\Lambda^* = 2$, $\beta^* = \pi/2$ *при* $v_* \geq 4$.

В частном случае задачи А, когда величина β заранее зафиксирована, имеет место

Теорема 2. *Необходимым условием разрешимости задачи* *является неравенство* $\sin\beta^* < \ln v_*$. *При этом если* $v_* > 2$ *и* $\sin\beta^* \leq v_*/2 - 1$, *то единственной экстремалью является окружность. При* $v_* > 1$ *и* $\max\{0, v_*/2 - 1\} \leq \sin\beta^* < \ln v_*$ *экстремаль отлична от окружности.*

На рис. 1 представлены примеры численного построения оптимальных контуров для $\beta = 90^o$ (с совпадением точек разветвления и схода потока) при различных ограничениях на максимальную скорость. Все контуры и соответственно распределения скорости симметричны относительно вертикали. Первый пример — окружность, $v_* = 4$. При дальнейшем уменьшении v_* толщина профилей значительно уменьшается, а у распределений скорости образуется почти "полка".

Зависимости максимального значения коэффициента подъемной силы C_y от значения максимальной скорости на контуре при различных значениях β приведены на рис. 2.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00173) и фондом Александра Гумбольта (Германия).

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 440 с.

2. Лаврентьев М. А. *Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана*// Тр. ЦАГИ. – 1934. – Вып. 155. – 41 с.

К. Ш. Еникеев (Казань)

ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ ГИЛЬБЕРТОВА ТИПА

Пусть M — полное связное однородное многообразие постоянной нулевой кривизны гильбертова типа (в качестве моделирующего пространства рассматривается сепарабельное гильбертово пространство H). Тогда M изометрично фактор пространству H/Γ, где Γ — группа сдвигов пространства H, действующая свободно и вполне разрывно. В данном случае это означает, что Γ — дискретная подгруппа аддитивной группы H (здесь мы отождествляем сдвиг t_h на вектор $h \in H$ с самим h).

Предложение 1. Γ — *свободная абелева группа, т. е.* $\Gamma = \sum_{i \in I}(a_i)$.

Случай конечного числа образующих Γ детально рассмотрен в [1]. Предположим, что число образующих бесконечно. Выясним, какие линейно независимые системы в H порождают группы, действующие вполне разрывно.

Предложение 2. *Группа сдвигов* Γ *пространства* H, *порожденная бесселевой системой* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ (*определение см. в* [2]), *действует на* H *свободно и вполне разрывно.*

Как следствие этого предложения получаем, что вполне разрывно действуют базисы Рисса и, в частности, ортонормированные системы. По теореме, доказанной в [2], базис Рисса эквивалентен некоторой ортонормированной системе; из сьойств эквивалентных систем следует, что если одна из них базис, то и другая тоже. Таким образом мы можем выделить следующие типы эквивалентных систем, действующих вполне разрывно: i) базисы Рисса и ортонормированные системы; ii) бесселевы системы, не являющимися базисами; iii) бесселевы системы, являющиеся базисами, но не базисами Рисса.

Таким образом, среди однородных пространств постоянной нулевой кривизны мы можем выделить по крайней мере три различных класса, отличающихся от H, определяемых вышеперечисленными системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны* (Пер. с англ.). – М.: Наука, 1982.

2. Бари Н. К. *Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве*// Уч. записки МГУ. – 1951. – Вып. 148. – С. 69–107.

Л. Б. Ермолаева (Казань)

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Исследуется краевая задача

$$Ax \equiv x^{(m)}(t) + B(x;t) = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \quad m+1 \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$R_k(x) = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad x \in C^{m-1}[-1,1], \tag{2}$$

где B — данный непрерывный (в том числе интегро-дифференциальный) оператор из пространства $X = W_2^m(\rho;[-1,1])$ в пространство $Y = L_2(\rho;[-1,1]$, $\rho = \rho(t) = (1-t^2)^{1/2}$, $y(t) \in Y$ — данная функция, а R_k — данные линейно независимые функционалы в пространстве $C^{m-1}[-1,1]$ (при $m = 0$ условия (2) отсутствуют). Приближенное решение задачи (1) — (2) ищется в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k t^{k-1}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

коэффициенты которого определяются из условий

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} A(x_n;t)\,dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)\,dt,\ i = \overline{1,n},\ t_r \in [-1,1];$$

$$R_k(x_n) = 0,\ k = \overline{1,m}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия:* а) $B : X \to Y$ *есть вполне непрерывный оператор;* б) *задача* (1) – (2) *имеет единственное решение* $x^* \in X$ *при любой правой части* $y \in Y$; в) *узлы определены по любой из формул*

$$t_r = \cos\frac{r\pi}{n}, \quad t_r = \cos\frac{2r+1}{2n+2}\pi, \quad r = \overline{0,n}. \tag{4}$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, коэффициенты многочлена* (3) *определяются однозначно и* $x_n(t) \to x^*(t)$, $n \to \infty$, *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\|_X = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_Y\}, \tag{5}$$

где $E_n(\varphi)_Y$ — наилучшее приближение функции $\varphi \in Y$ алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве Y.

Следствие. *В условиях теоремы метод осциллирующих функций является оптимальным по порядку [1] среди всевозможных прямых методов решения задачи (1) – (2), позволяющих построить приближенное решение в виде многочлена (3).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

Ю. Б. Ермолаев (Казань)

О ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ ЛИЕВЫХ СЛОВ В КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Пусть R — (приведенная) корневая система ранга r, $\Pi = \{\alpha_1, ..., \alpha_r\}$ — ее некоторая подсистема простых корней и $R = R^+ \cup R^-$ — разбиение R на отрицательную и положительную части относительно Π (см. [1]). Алгебру Ли L^+ над произвольным полем K назовем *алгеброй типа* R^+, если она имеет разложение

$$L = \bigoplus_{\alpha \in R^+} L_\alpha,$$

удовлетворяющее условиям:

1) $\dim L_\alpha \geq 1 \quad \forall \alpha \in R^+$.

2) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in R^+ \quad ([L_\alpha, L_\beta] = 0$, если $\alpha + \beta \notin R)$.

3) $\dim L_i = 1$ и L порождена подпространством $\oplus_{i=1}^r L_i$, где $L_i = L_{\alpha_i}$, $i = 1, ..., r$.

Аналогично, используя R^-, определяем алгебру Ли L^- типа R^- над K. Последовательность $a = (i_1, i_2, ..., i_m)$, $1 \leq i_s \leq r$, назовем *правильным путем*, если $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_s} \in R$ для всякого $s = 1, ..., m$. Индекс i_t в a назовем особым, если $(\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_{t-1}} | \alpha_{i_t}) = 0$.

Теорема 1. *Пусть R — неприводимая корневая система ранга r, L^+ — алгебра Ли типа R^+ над произвольным полем K и $f_1, ..., f_r$ — ее образующие элементы ($L_i = Kf_i$). Тогда для любых двух правильных путей $a = (i_1, i_2, ..., i_m)$ и $b = (j_1, j_2, ..., j_m)$, определяющих один корень (т.е. таких, что $\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_m} = \alpha_{j_1} + \cdots + \alpha_{j_m}$), в L имеет место равенство*

$$2^{-u(a)} f_a = (-1)^{d(i_1, j_1)} 2^{-u(b)} f_b,$$

где $f_a = [...[[f_{i_1}, f_{i_2}], f_{i_3}], ..., f_{i_m}]$, $u(a)$ — число особых индексов в a (аналогично определены f_b и $u(b)$), а $d(i_1, j_1)$ — расстояние между простыми корнями α_{i_1} и α_{j_1} в схеме Дынкина системы R. В частности, для всех $\alpha \in R^+$ имеем $\dim L_\alpha = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли. Гл.* VI (*Системы корней*). – М.: Мир, 1972.

М. И. Закиев, И. П. Семенов (Казань)

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В ряде прикладных задач встречается периодическая краевая задача

$$Kx \equiv x'(s) + a(s)\, x(s) + V(x; s) = y(s), \quad x(0) = x(2\pi), \tag{1}$$

где $a(s) \in C_{2\pi}$ и $y(s) \in L_2(0, 2\pi)$ — известные 2π–периодические функции, V — вполне непрерывный или малый по норме интегро–дифференциальный оператор.

Поскольку задача (1), как правило, точно не решается, то, следуя книге [1], предлагаем общий проекционный метод ее решения. Согласно этому методу приближенное решение ищется в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C},\ n + 1 \in N, \tag{2}$$

который определяется как точное решение конечномерного уравнения

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n, P_n \in \mathbb{P}_n), \qquad (3)$$

$$X_n = W_2^1(0,2\pi) \cap H_n^T, \quad Y_n = L_2(0,2\pi) \cap H_n^T,$$

где H_n^T — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n, а $\mathbb{P}_n = \{P_n\}$ — множество всех $N = (2n+1)$–мерных полиномиальных проекционных операторов в пространстве L_2.

Теорема 1. *Пусть* $P_n \in \mathbb{P}_n^{(1)} = \{P_n \in \mathbb{P}_n : \|P_n\|_{L_2 \to L_2} = O(1),\ n \to \infty\}$, *функции* $a(s), y(s) \in L_2$, *а* $V : W_2^1 \longrightarrow L_2$ – *вполне непрерывный оператор. Если краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $x^*(s) \in W_2^1$ *при любой правой части* $y(s) \in L_2$, *то при всех* $n \in N$, *начиная с некоторого, уравнение* (3) *общего проекционного метода также имеет единственное решение. Приближенные решения* (2) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в пространстве* W_2^1 *со скоростью*

$$\|x^*(s) - x_n(s)\|_{W_2^1} = O\left\{E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_{L_2}\right\},$$

$$E_n(\varphi)_{L_2} = \rho(\varphi, H_n^T)_{L_2}, \varphi \in L_2.$$

Теорема 2. *Пусть* $P_n \in \mathbb{P}_n^{(2)} = \{P_n \in \mathbb{P}_n : \|P_n\|_{L_2 \to L_2} = \infty,\ \|P_n\|_{C_{2\pi} \to L_2} = O(1),\ n \to \infty\}$, *функции* $a(s), y(s) \in C_{2\pi}$, *а* $V : W_2^1 \longrightarrow C_{2\pi}$ – *вполне непрерывный оператор. Если краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $x^*(s) \in W_2^1$ *при любой правой части* $y(s) \in L_2$, *то при всех* $n \in N$, *начиная с некоторого, уравнение* (3) *общего проекционного метода также имеет единственное решение* $x_n(s) \in H_n^T$. *Приближенные решения* (2) *при* $n \to \infty$ *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в пространстве* W_2^1 *со скоростью*

$$\|x^*(s) - x_n(s)\|_{W_2^1} = O\left\{E_n\left(\frac{d}{ds}x^*(s)\right)_C\right\},$$

$$E_n(\varphi)_C = \rho(\varphi, H_n^T)_{C_{2\pi}}, \varphi \in C_{2\pi}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

В. Н. Захаров (Самара)

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается уравнение

$$U_{xyz} + \frac{\beta}{z-y-x} U_{xy} - \frac{\alpha}{z-y-x} U_{xz} = 0, \qquad 0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1 \tag{1}$$

в области $H = \{(x, y, z) : 0 < x, y, z < +\infty, x + y < z\}$.

Задача А. *Найти функцию $U(x, y, z)$ со следующими свойствами:*

1) $U(x, y, z) \in C^2(\bar{H}) \cap C^3(H)$;
2) $U(x, y, z)$ является решением уравнения (1);
3) функция $U(x, y, z)$ удовлетворяет краевым условиям

$$U(x, y, x+y) = \phi(x, y), \qquad 0 \leq x, y < +\infty,$$

$$(U_x + U_y - U_z)|_{z=x+y} = \psi(x, y), \qquad 0 < x, y < +\infty,$$

$$U(0, y, z) = f(y, z), \qquad 0 \leq y \leq z < +\infty. \tag{2}$$

При доказательстве существованя и единственности решения этой задачи используется решение задачи Коши для уравнения (1), полученное автором

$$U(x, y, z) = \phi(z-y, y) + k_1 \int\limits_x^{z-y} dt \int\limits_y^{z-t} [\phi_s(t, s) - 2\phi_t(t, s) - \psi(t, s)] \times$$

$$\times (s-y)^{\beta-1} (z-y-t)^{1-\alpha-\beta} (z-t-s)^{\alpha-1} ds +$$

$$+k_2 \int\limits_x^{z-y} dt \int\limits_y^{z-t} \Theta(t,s)(s-y)^{-\alpha}(z-t-s)^{-\beta} ds, \qquad (3)$$

где

$$\Theta(x,y) = \lim_{z\to x+y+0} (z-y-x)^{\alpha+\beta}(U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}+2U_{xy}-2U_{xz}-2U_{yx}).$$

Подчиняя эту функцию условию (2), приходим к интегральному уравнению

$$\int\limits_0^{z-y} dt \int\limits_y^{z-t} \Theta(t,s)(s-y)^{-\alpha}(z-t-s)^{-\beta} ds = F(y,z),$$

где правая часть есть функция от известных краевых функций, решение которого имеет вид

$$\Theta(t,s) = -\frac{1}{B(\alpha,1-\alpha)B(\beta,1-\beta)}\times$$

$$\times \int\limits_s^{t+s} d\xi \int\limits_\xi^{t+s} F_{\xi\eta}(\xi,\eta)(\xi-s)^{\alpha-1}(t+s-\eta)^{\beta-1} d\eta. \qquad (4)$$

Функции (3) и (4) определяют решение задачи А.

Н. А. Зимина (Краснодар)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРА

Известно [1], что если интегральный оператор Урысона

$$(Ax)(t) = \int\limits_\Omega K(t,s,x(s)) ds$$

действует в пространстве $L_p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ и ограничен на каком-нибудь шаре, то он будет ограничен на любом шаре пространства $L_p(\Omega)$. При доказательстве этого утверждения существенную роль играют свойства пространств $L_p(\Omega)$ при $1 \le p <$

∞. Пространство $L_\infty(\Omega)$ этими свойствами не обладает. Тем не менее утверждение об ограниченности интегрального оператора в некоторых случаях оказалось справедливым и для пространства $L_\infty(\Omega)$.

В данной заметке соответствующее утверждение рассматривается для интегральных операторов Вольтерра и пространства $BC[a,\infty)$ (непрерывного аналога пространства $L_\infty(a,\infty)$).

Обозначим через M класс нелинейных интегральных операторов Вольтерра, действующих в пространстве $BC[a,\infty)$ и имеющих вид

$$(\tilde{K}x)(t) = \int_a^t K(t,s,x(s))ds,$$

где функция $K(t,s,\xi)$ непрерывна при $a \le s \le t < \infty$, $\xi \in (-\infty,+\infty)$.

Заметим, что каждый оператор $\tilde{K} \in M$ непрерывен относительно ограниченной сходимости почти всюду.

Теорема. *Каждый оператор $\tilde{K} \in M$, ограниченный на некотором шаре пространства $BC[a,\infty)$, будет ограничен на любом шаре этого пространства. При этом оператор $\tilde{K}$ можно единственным образом распространить на пространство $L_\infty(a,\infty)$ с сохранением условия непрерывности относительно ограниченной сходимости почти всюду.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. и др. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.* – М.: Наука, 1966.

В. В. Иванов (Йошкар-Ола)

К ВОПРОСУ О ВОЛНОВОМ ХАРАКТЕРЕ ОДНОЙ РЕАКЦИИ ГОРЕНИЯ

Горение движущейся топливной смеси описывается системой уравнений [1]

$$C_t + uC_x = k_1 C^\nu f(T), \tag{1}$$

$$T_t + uT_x = k_2 C^\nu f(T), \tag{2}$$

с начальными и краевыми условиями

$$C_T(x,0) = C_0, \quad T(x,0) = T_0, \quad C_T(o,t) = C_0, \quad T(0,t) = T_0. \tag{3}$$

Здесь $k_1 = -K_W$, $k_2 = \frac{K_W H_0}{C_p}$ и функция $f(T) = T^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right)$ определяют скорость химической реакции, ν — порядок химической реакции, K_W — постоянная реакции, E_A — энерия активации, H_0 — теплотворная способность топлива, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, R — газовая постоянная, $C(x,t)$ — концентрация топлива, $T(x,t)$ — температура, C_t, C_x, T_t, T_x — частные производные $C(x,t)$ и $T(x,t)$ по времени t и переменной x, u — скорость потока. Величины K_W, E_A, H_0, C_p, R, ν являются заданными постоянными.

От системы уравнений (1), (2) путем исключения переменной $C(x,t)$ перейдем к уравнению относительно переменной $T(x,t)$. В результате преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_t + uT_x) + u\frac{\partial}{\partial x}(T_t + uT_x) =$$
$$= \nu k_1 k_2^{\frac{1-\nu}{\nu}} f^{\frac{1}{\nu}} (T_t + uT_x)^{\frac{2\nu-1}{\nu}} + \frac{f_T}{f}(T_t + uT_x)^2 \tag{4}$$

Введем обозначения $z = T_t + uT_x$, $\alpha = \nu k_1 k_2^{\frac{1-\nu}{\nu}} f^{\frac{1}{\nu}}$, $\beta = \frac{f_T}{f}$. Тогда (4) запишется в виде

$$z_t + uz_x = \alpha z^{\frac{2\nu-1}{\nu}} + \beta z^2. \tag{5}$$

Полученное уравнение описывает распространение нелинейных температурных волн рассматриваемой реакции горения [2]. Решение уравнения (5) будем искать в виде $z = F(\varphi)$, $\varphi = x + ut$. Подставим $z = F(\varphi)$ в уравнение (5) и получим для функции $F(\varphi)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2uF_\varphi(\varphi) = \alpha F^{\frac{2\nu-1}{\nu}}(\varphi) + \beta F^2(\varphi). \tag{6}$$

Рассмотрим частный случай $\nu = 1$. Интегрируя уравнение (6), получим решение

$$F(x+ut) = \frac{\alpha \exp\left(\frac{\alpha}{2u}(x+ut) + \alpha C_1\right)}{1 - \beta \exp\left(\frac{\alpha}{2u}(x+ut) + \alpha C_1\right)}. \tag{7}$$

Таким образом, задача интегрирования системы (1), (2) с начальными и краевыми условиями (3) свелась к решению уравнения $T_t + uT_x = F(x + ut)$ с вычисленной на текущем временном слое функцией (7). Для численного решения данного уравнения предлагается использовать метод Лакса-Вендроффа [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сиразетдинов Т. К., Костерин В. А. *Одномерная динамическая модель процесса горения в камере ВРГ.* I// Изв. вузов. Авиационная техника. – 1999. – No 3. – С. 59-63.

2. Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии.* – М.: Наука, 1990. – 216 с.

3. Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 418 с.

Л. А. Игнаточкина (Москва)

ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ТЕНЗОРА КОНФОРМНОЙ КРИВИЗНЫ МНОГООБРАЗИЙ ВАЙСМАНА-ГРЕЯ

Рассмотрим почти эрмитовы многообразия класса $W_1 \oplus W_4$ [1] (иначе называемые многообразиями Вайсмана-Грея или VG-многообразиями). Определим в них подклассы cR_1, cR_2, cR_3, заменив в тождествах, определяющих классы R_1, R_2, R_3 в [2], тензор кривизны на его вейлеву компоненту, то есть на тензор конформной кривизны. Введенные классы являются конформно-инвариантными расширениями класса конформно-плоских VG-многообразий. Из свойств симметрии ковариантного дифференциала формы Ли VG-многообразий следует

Теорема 1. *Для VG-многообразий размерности выше 4 класс cR_3 совпадает с классом локально конформно приближенно келеровых многообразий.*

В частности, для класса $W_4 \subset W_1 \oplus W_4$ из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Для VG-многообразий размерности выше 4 класс W_4 совпадает с классом локально конформно келеровых многообразий.*

Следствие 2. *Для VG-многообразий размерности выше 4*

$$cR_1 \subset cR_2 = cR_3;\ R_1 \subset R_2 = R_3;\ R_3 \subset cR_3;\ R_2 \subset cR_2; R_1 \not\subset cR_1.$$

Из теоремы 1 и теоремы 6 [3] вытекает

Теорема 2. *VG-многообразие размерности выше 4 принадлежит классу cR_1 тогда и только тогда, когда оно локально конформно эквивалентно одному из следующих многообразий: 1) риччи-плоскому келерову многообразию; 2) собственному 6-мерному приближенно келерову многообразию; 3) произведению 6-мерного собственного приближенно келерова многообразия и 2-мерного келерова многообразия постоянной отрицательной кривизны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray A., Hervella L. M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*// Ann. Math. pure ed appl. – 1980. – V. 123. – P. 35–58.

2. Gray A. *Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds* // Tôhoku Math. J. – 1976. – V. 28. – P. 601–612.

3. Игнаточкина Л. А., Кириченко В. Ф. *Конформно-инвариантные свойства приближенно келеровых многообразий*// Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – No 5. – С. 653–663.

С. Н. Ильин (Казань)

КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ПОЛНЫХ МАТРИЧНЫХ ПОЛУКОЛЕЦ

Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle \mathcal{H}, +, \cdot, 0\rangle$ такая, что $\langle \mathcal{H}, +, 0\rangle$ — коммутативный моноид; $\langle \mathcal{H}, \cdot\rangle$

— полугруппа; для всех $x, y, z \in \mathcal{H}$ выполняются законы дистрибутивности $(x+y)z = xz+yz$, $x(y+z) = xy+xz$ и для любого $x \in \mathcal{H}$ верно $x0 = 0x = 0$. Полукольцо $\mathcal{H}$ называется *регулярным*, если для любого $a \in \mathcal{H}$ уравнение $axa = a$ имеет решение в $\mathcal{H}$. Согласно [1] полукольцо с квазитождеством $x + y = 0 \Rightarrow x = 0$ назовем *антикольцом*.

Пусть $\mathcal{A}$ — антикольцо, $\mathrm{L}(\mathcal{A})$ — множество идемпотентов из $\mathcal{A}$ и $M_n(\mathcal{A})$ — полукольцо матриц порядка n над $\mathcal{A}$.

Предложение. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $M_2(\mathcal{A})$ *— регулярно;*

2) *уравнение* $AXA = A$ *имеет решение для любой верхнетреугольной матрицы* $A \in M_2(\mathcal{A})$*;*

3) $\mathcal{A}$ *регулярно, все идемпотенты в* $\mathcal{A}$ *центральны и для всякого ненулевого идемпотента* e *идеал* $e\mathcal{A}$ *— булево идемпотентное агр-полукольцо;*

4) $\mathcal{A}$ *регулярно, для всякого ненулевого идемпотента* e *полукольцо* $e\mathcal{A}e$ *— булево идемпотентное агр-полукольцо и* $\forall e_1, e_2 \in \mathrm{L}(\mathcal{A})\ \exists e, f \in \mathrm{L}(\mathcal{A}) : ee_i = e_i f = e_i\ (i = 1, 2)$*;*

5) $\mathcal{A}$ *— регулярно и* $\langle \mathrm{L}(\mathcal{A}), +, \cdot, 0, 1\rangle$ *— обобщенная булева алгебра.*

Теорема. *Пусть* $\mathcal{H}$ *— полукольцо.*

1. *Полукольцо* $M_2(\mathcal{H})$ *регулярно тогда и только тогда, когда* $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{A}$*, где* $\mathcal{R}$ *— регулярное кольцо, а* $\mathcal{A}$ *— антикольцо, удовлетворяющее любому из условий 1) – 5) предложения.*

2. *При* $n \geq 3$ *полукольцо* $M_n(\mathcal{H})$ *регулярно тогда и только тогда, когда* $\mathcal{H}$ *— регулярное кольцо.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Вечтомов Е. М. *Полукольца как расширения колец при помощи антиколец*// Международный алгебраический семинар, посв. 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ. – 1999. – С. 14–15.

2. Вечтомов Е. М., Михалев А. В., Чермных В. В. *Абелево-регулярные положительные полукольца*// Труды семинара имени И. Г. Петровского. Вып. 20. – 1999. – С. 282–309.

Н. Б. Ильинский, А. В. Поташев (Казань)

ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

Одним из эффективных способов решения задач аэродинамического проектирования несущих элементов летательных аппаратов и судов на подводных крыльях, а также лопаточных элементов турбомашин является способ, основанный на теории обратных краевых задач аэрогидродинамики (ОКЗА). К настоящему времени разработаны методы решения самых разнообразных ОКЗА (см., напр., [1-5]). Существенным преимуществом этих задач является то, что во многих случаях их решение удается записать в явной аналитической форме. Однако, несмотря на кажущуюся простоту, при численной реализации возникает ряд проблем. Настоящий доклад содержит анализ проблем, которые возникают перед исследователями при численной реализации решений ОКЗА и методам их преодоления.

Первая часть доклада посвящена способам выделения особенностей при получении аналитических решений, построению условий разрешимости и методу квазирешений как аппарату удовлетворения этим условиям. Рассмотрены алгоритмы численной реализации полученных аналитических формул. Все затронутые вопросы проиллюстрированы на примерах различных ОКЗА. Во второй части основное внимание уделено моделям и методам, позволяющим учитывать такие свойства обтекающей среды как сжимаемость и вязкость. В третьей части доклада описаны особенности численной реализации решений ОКЗА для гидродинамических решеток профилей. Показаны аналитические приемы и численные способы преодоления трудностей решения в случае решеток малого шага. Описан метод решения для двумерных решеток, лежащих на осесимметричной поверхности тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. *Гидродинамика решеток турбомашин.* – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.

2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.

3. Eppler R. *Airfoil design and data.* – Berlin: Springer Verlag, 1990. – 562 p.

4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 436 с.

5. Elizarov A. M., Il'inskiy N. B., Potashev A. V. *Mathematical methods of airfoil design.* – Berlin: Akademie Verlag, – 1997. – 292 p.

Р. З. Ильясов (Казань)

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОМЕНТОВ К ЗАДАЧАМ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В работе получены приближенные аналитические зависимости для поля давления в нефтяных залежах проекционным методом моментов [1]. Построены графики полученных приближений и точных решений с использованием пакета программ Excel 7.0. Проведенный анализ результатов позволяет сделать вывод, что при решении конкретных задач разработки нефтяных месторождений с достаточной точностью для практики можно ограничиться приближениями второго и третьего порядков.

Полученные аналитические зависимости использованы при решении обратных задач подземной гидродинамики. В частности, при определении коэфициентов проницаемости, гидропроводности и пьезопроводности пласта по заданным промысловым значениям давления дебитов скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаймуратов Р. В, Ильясов Р. З. *Модификация алгоритма метода моментов при решении задач теории фильтрации*// Тезисы докл. Сибирск. конгресса по прикл. и индустриальной математике. Новосибирск: Изд-во Инс-та мат-ки, 2000. – С. 172.

Р. З. Ильясов, Р. В. Шаймуратов (Казань)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА ПРОЕКЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Известно, что итеративные методы, позволяющие получать приближенные решения начально-краевых задач в аналитическом виде, тесно связаны с классической проблемой моментов Чебышева-Маркова. Они выгодно отличаются быстрой сходимостью последовательных приближений. В данной работе использование элементов функционального анализа при исследовании характеристик фильтрационного потока методами Галеркина, Ритца позволило рассматривать их как единый проекционный метод моментов. Для последнего системой базисных элементов являются решения рекуррентных дифференциальных уравнений, построенных на основе исходной начально-краевой задачи.

Единый подход к реализации рассматриваемых задач позволил получить приближенные аналитические зависимости между характеристиками фильтрационного потока при разработке нефтяных месторождений, при исследовании различных вопросов, связанных с орошением и экологией. Полученные зависимости находят широкое применение при решении обратных задач в практических исследованиях.

В. П. Кадушин (Казань)

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

В работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение с комплексно – сопряженными неизвестными на единичной окружности

$$K\varphi(t) = H\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(t,\tau,\varphi(\tau))\,d\tau = f(t), \quad t \in \gamma, \qquad (1)$$

$$H\varphi(t) = a\varphi(t) + b\overline{\varphi(t)} + cS\varphi(t) + d\overline{S\varphi(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

где a, b, c, d — постоянные, $S\varphi(t)$ — сингулярный интеграл с ядром Коши, а $f \in L_2(\gamma)$ — известная функция.

С использованием соответствующего результата работы [2] установлены достаточные условия монотонности нелинейного оператора K.

К уравнению (1) применяется проекционно–итеративный метод [3], дается его обоснование в пространстве $L_2(\gamma)$. Достаточные условия сходимости метода и оценка скорости сходимости получены с использованием результатов работы [1] и отражают функционально–структурные свойства коэффициентов исходного уравнения.

В отличие от [2, 3], здесь предлагается другой алгоритм метода и, что особенно существенно для численной реализации алгоритма, оператором проектирования является оператор Фурье–Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

2. Кадушин В. П. *К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений с комплексно–сопряженными неизвестными и монотонными операторами*// Констр. теория функций и функциональный анализ. – Казань: Изд–во Казанск. ун–та. – 1990. – С. 36–44.

3. Лучка А. Ю. *Критерий сходимости проекционно–итеративного метода для нелинейных уравнений.* Препринт 82.84/ – Киев: Ин–т математики АН УССР. – 54 с.

Г. Н. Камышова (Саратов)

СИММЕТРИЗАЦИОННОЕ СВОЙСТВО МОДУЛЯ РОБЕНА

Пусть D — область в расширенной комплексной плоскости, содержащая точку ∞ и ограниченная аналитической жордановой кривой. Пусть граница области D разделена на два связных подмножества A и B, $C_r = \{z : |z| = r\}$ — достаточно большая окружность, содержащая внутри ∂D. Обозначим через D_r часть D, лежащую внутри C_r. Экстремальным расстоянием $\lambda(A, C_r)$ называется экстремальная длина семейства кривых, лежащих в D_r и соединяющих A и C_r. Емкость Робена A относительно D определяется формулой [1]

$$\delta(A; D) = e^{-\rho(A)}, \rho(A) = \lim_{r\to\infty}(2\pi\lambda(A, C_r) - \log r).$$

Четырехугольником Q называется жорданова область $D \subset \overline{C}$ с четырьмя отмеченными граничными точками z_1, z_2, z_3, z_4, которые называются вершинами Q. Модуль $m(Q)$ четырехугольника Q равен отношению длин сторон конформно эквивалентного ему прямоугольника. П.Дюреном и М.Шиффером [1] было введено понятие модуля Робена $\mu(Q)$ четырехугольника Q. Пусть A есть объединение двух дуг (z_1, z_2) и (z_3, z_4) границы ∂D четырехугольника Q, $B = \partial D \setminus A$. Тогда $\mu(Q) = \delta(A)/\delta(B)$. В представленной работе исследуется изменение модуля Робена четырехугольника при поляризации [2].

Теорема. *Пусть Q — четырехугольник с двумя отмеченными симметричными круговыми сторонами, Q' — результат его поляризации относительно положительной вещественной полуоси. Тогда*

$$\mu(Q) \leq \mu(Q').$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $Q' = Q$ или $Q' = Q^*$.

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00842) и INTAS (проект 99-00089).

ЛИТЕРАТУРА

1. Duren P., Schiffer M. *Robin functions and energy functionals of multiply connected domains*// Pacific J. Math. – 1991. – V. 148. – P. 251–273.

2. Дубинин В. Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*// Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49. – No 1. – С. 1–76.

О. В. Карабанова, М. Ю. Кокурин (Йошкар-Ола)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНОСТИ

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x) = 0$, где $F : H_1 \to H_2$, H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Предполагается, что оператор F дважды дифференцируем по Гато, линейный оператор $F'(x^*)$ вполне непрерывен и $\|F'(x)\| \le N_1$, $\|F''(x)\| \le N_2$ $\forall x \in \Omega_R$, где $\Omega_R = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \le R\}$, а x^* — решение исходного уравнения. Зафиксируем семейство конечномерных подпространств $\{M_m\}$, $M_m \subset H_1$, и обозначим через Q_m проектор на M_m. Предположим, что $\lim_{m\to\infty} \|Q_m x - x\| = 0$ $\forall x \in H_1$. В силу полной непрерывности $F'(x^*)$ существует такая последовательность $\{\omega_m\}$, что $\|(I - Q_m)F'(x^*)\| \le \omega_m$, $\lim_{m\to\infty} \omega_m = 0$. Пусть вместо точного оператора F известно лишь его приближение $\tilde{F} : H_1 \to H_2$, удовлетворяющее вышеприведенным неравенствам и условию $\|\tilde{F}(x) - F(x)\| \le \delta$ $\forall x \in \Omega_R$. Исследуется группа итерационных методов отыскания решения x^*:

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(\tilde{F}'^*(x_n)Q_m\tilde{F}'(x_n), \alpha_0)\tilde{F}'^*(x_n)Q_m(\tilde{F}(x_n) -$$

$$-\tilde{F}'(x_n)(x_n - \xi)). \qquad (1)$$

Здесь $x_0 \in H_1, \alpha_0 > 0, \xi \in H_1$ — управляющий параметр, $\Theta(\lambda, \alpha)$ — семейство аналитических по λ порождающих функции. Сходимость метода (1) исследуется при условии приближенной ис-

токопредставимости начальной невязки
$x^* - \xi = (F'^*(x^*)F'(x^*))^\nu v + w$, где $\nu \geq \frac{1}{2}$, $v, w \in H_1$, $\|w\| \leq \Delta$.

Теорема. *Пусть $q \in (0,1)$, начальное приближение x_0 и погрешности δ и Δ удовлетворяют условиям:*

$$\frac{C_1}{\sqrt{\alpha_0}}\Big(\Delta + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha_0}}\Big) \leq q, \quad \|v\| \leq \min\Big\{\frac{q\sqrt{\alpha_0}}{C_2(\delta + \omega_m + \sqrt{\alpha_0})}, \frac{1}{2C_3}\Big\},$$

$$(1 - C_3\|v\|)^2 - \frac{C_4}{\sqrt{\alpha_0}}\Big((\delta + \omega_m + \alpha_0^\nu)\|v\| + \Delta + \frac{\delta}{\sqrt{\alpha_0}}\Big) \geq 0,$$

$$\|x_0 - x^*\| \leq C_5\sqrt{\alpha_0}q + C_6(\delta + \Delta + \omega_m + \alpha_0^\nu\|v\|),$$

где $C_1, \ldots, C_6$ — положительные постоянные, явно выражающиеся через параметры задачи. Тогда $\|x_n - x^*\| \leq C_5\sqrt{\alpha_0}q^{n+1} + C_6(\delta + \Delta + \omega_m + \alpha_0^\nu\|v\|)$.

Следствие. *В условиях теоремы 1 имеет место соотношение $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x^*\| \leq C_6(\delta + \Delta + \omega_m + \alpha_0^\nu\|v\|)$.*

А. А. Карамова, К. Б. Сабитов (Стерлитамак)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y|y|^n u_{xx} + x^m u_{yy} = 0, \quad n, m > 0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной: 1) простой кривой Γ, лежащей в первой четверти $x, y > 0$ с концами в точках $A(1,0)$, $B(0,b)$, $b > 0$; 2) отрезком OB оси Oy; 3) характеристиками OC и CA уравнения (1) при $y < 0$, где $O = (0,0)$, $C = ((1/2)^{1/\alpha}, -(\beta/2\alpha)^{1/\beta})$, $\alpha = (m+2)/2$, $\beta = (n+2)/2$.

Задача TN. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OB) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$u(x,y) = \hat{f}(x,y), \ (x,y) \in \Gamma, \tag{4}$$

$$u_x(0+0,y) = 0, \ y \in (0,b), \quad u(x,y) = 0, \ (x,y) \in OC, \tag{5}$$

где $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $\hat{f}$ — заданная достаточно гладкая функция.

В данной работе в классе регулярных в D решений уравнения (1) получена теорема единственности решения задачи TN без каких-либо геометрических ограничений на кривую Γ при всех $n, m > 0$. Существование решения задачи (2) – (5) сведено к нелокальной эллиптической задаче. В случае, когда $n = m > 0$, $b = 1$ и Γ совпадает с "нормальной кривой" $\Gamma_0 : x^{2\alpha} + y^{2\alpha} = 1$, решение эллиптической задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Затем построено решение задачи TN в гиперболической области.

Пусть $r^2 = x^{2\alpha} + y^{2\alpha}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)^\alpha$. Тогда
$u|_\Gamma = \hat{f}(\cos^{1/\alpha}\varphi, \sin^{1/\alpha}\varphi) = f(\varphi)$.

Теорема. *Если $f(\varphi) \in C^1[0,\pi/2]$, функция $f(\varphi)$ в малой окрестности точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ дважды непрерывно дифференцируема и $f(0) = f'(0) = f(\pi/2) = f'(\pi/2) = 0$, то существует единственное решение задачи TN в области D и оно определяется формулой (при $(x,y) \in D_+$ или $(x,y) \in D_-$ соответствено)*

$$u(x,y) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{2\rho_n - 2q} \sin^{1/2-q} 2\varphi \, \mathrm{P}^{1/2-q}_{\rho_n - 1/2}(-\cos 2\varphi), \\ \displaystyle -2^{q+1/2}\sqrt{\pi}\Big(x^\alpha + (-y)^\alpha\Big)^{-2q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Gamma(1+\rho_n)\Gamma(q-\rho_n)} \times \\ \displaystyle \times \Big(x^\alpha - (-y)^\alpha\Big)^{2\rho_n} F\left(\rho_n + q, q, 1+\rho_n; \left(\frac{x^\alpha - (-y)^\alpha}{x^\alpha + (-y)^\alpha}\right)^2\right), \end{cases}$$

$$f_n = \frac{\Gamma(q)\sin(\pi q)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi h_n(\theta)\omega(\theta)d\theta, \qquad h_n(\theta) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{(2\cos(\theta/2))^{3/2-q}}\sum_{i=1}^{n}\sin(i\theta)B_{n-i},\ q=\frac{m}{2(m+2)},$$

$$\omega(\theta)=\sin\theta\int\limits_0^\theta\left(f\left(\frac{\pi-t}{2}\right)\sin^{2q-1}t\right)'(\cos t-\cos\theta)^{-q}dt,$$

$$B_l=\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}C_1^{l-m}C_{1/2-q}^{m},\ \ C_l^n=\frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{n!},$$

$\rho_n=n+\frac{q}{2}+\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}_\nu^\mu(\cdot)$ — *модифицированная функция Лежандра,* $F(\cdot)$ — *гипергеометрическая функция,* $h_n(\theta)$ — *биортогональная система* [1] *к системе* $\{\sin[(n+\frac{q}{2}-\frac{3}{4})+\frac{\pi}{2}]\}_{n=1}^{\infty}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Е. И. *О базисности одной системы синусов*// Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – No 1. – С. 177–179.

Б. А. Кац (Казань)

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА КОШИ НА НЕСПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

Пусть Γ есть замкнутая жорданова кривая на комплексной плоскости, ограничивающая область D, а $f(t)$ — заданная на ней функция. Если кривая Γ спрямляема, а $f\in L(\Gamma)$, то определена функция

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)dt}{t-z}, \tag{1}$$

называемая интегралом Коши. Различные её свойства, такие, например, как условия непрерывности F в замыкании области D, постоянно привлекают внимание исследователей.

В данной работе интеграл (1) изучается в ситуации, когда кривая Γ неспрямляема. Несмотря на это, интеграл существует при определенных условиях на Γ и f. Пусть $\Phi(x)$ непрерывная, монотонно возрастающая и логарифмически выпуклая при

$x \geq 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Кривая Γ называется Φ-спрямляемой, если конечна величина $\sup_Z \sum_{j\geq 1} \Phi(|z_j - z_{j-1}|)$, где супремум берется по всем конечным последовательностям точек $Z = \{z_0, z_2, \ldots, z_j, \ldots\} \subset \Gamma$, занумерованных в порядке обхода Γ. Относительно функции f будем предполагать, что она удовлетворяет условию Гёльдера $\sup\{\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\nu} : t, t' \in \Gamma, t \neq t'\} < \infty$ с некоторым показателем $\nu \in (0, 1]$. Можно показать, что интеграл (1) существует как интеграл Стильтьеса при условии сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{1+\nu}(1/n)$, где φ есть функция, обратная к Φ.

Теорема 1. *Пусть кривая Γ является Φ-спрямляемой, а заданная на ней функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем ν. Если $\liminf_{x\to 0} \Phi(x)/x^d > 0$ для некоторого $d < 2\nu$, то функция $F(z)$ непрерывна в $\overline{D}$.*

Для случая, когда кривая спрямляема, т. е. $\Phi(x) = x$, это условие непрерывности интеграла Коши приобретает вид $\nu > 1/2$. Таким образом, для спрямляемых кривых теорема 1 совпадает с известным результатом Е.М. Дынькина [1].

При $\nu = 1$ теорема 1 может быть уточнена следующим образом.

Теорема 2. *Пусть кривая Γ является Φ-спрямляемой, а заданная на ней функция f удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\nu = 1$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^2(1/n) < \infty$, то функция $F(z)$ непрерывна в $\overline{D}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Дынькин Е. М. *Гладкость интеграла типа Коши.* Записки научн. сем. Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 115–133.

Б. А. Кац, А. Ю. Погодина (Казань)

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА КОШИ НА НЕГЛАДКОЙ КРИВОЙ

Пусть Γ есть простая спрямляемая кривая на комплексной плоскости. Тогда для любой заданной на Γ непрерывной функции $f(t)$ интеграл типа Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \tag{1}$$

существует и представляет голоморфную при $z \in C\setminus\Gamma$ функцию. Традиционный интерес вызывает вопрос о непрерывности функции F на дуге Γ, т. е. о существовании пределов, получающихся при приближении z к точке $t \in \Gamma$ слева и справа соответственно. Этот интерес в значительной степени обусловлен приложениями интеграла Коши при решении краевых задач и сингулярных интегральных уравнений. В случае, когда кривая Γ не является кусочно гладкой, здесь остаются открытыми многие вопросы.

В данной работе вопрос о непрерывности интеграла Коши исследуется для кривых вида

$$\Gamma = \{x + iy : x \in I, y = Y(x)\}, \tag{2}$$

где $Y(x)$ есть заданная на отрезке $I = [0,1]$ непрерывная, но, вообще говоря, не дифференцируемая функция.

Теорема. *Пусть дуга Γ задана уравнением вида (2), где функция Y имеет ограниченную вариацию на отрезке $[\varepsilon, 1]$ при любом $\varepsilon > 0$, а заданная функция $f(\zeta), \zeta \in \Gamma$, имеет проекцию $f^*(x) \equiv f(x + iY(x)), x \in I$, дифференцируемую на интервале $(0,1]$ и удовлетворяющую на отрезке I условию Гёльдера с показателем $\nu \in (0,1]$. Пусть, кроме того, функция f обращается в нуль на концах дуги Γ. Если для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке I функции $Y_0(x)$ и некоторого числа $p > 2$ выполняется условие*

$$\int_0^1 \left|\frac{df^*}{dx}\right|^p |Y(x) - Y_0(x)|\,dx < \infty,$$

то интеграл типа Коши существует (вообще говоря, как несобственный) и в любой точке дуги Γ *имеет граничные значения с обеих сторон. Эти граничные значения удовлетворяют условию Гёльдера с показателем* $\mu = \min\{\nu, 1 - 2/p\}$.

Отметим, что эта теорема позволяет установить непрерывность интеграла Коши во многих случаях, не подпадающих под условия известных теорем о непрерывности интеграла Коши, включая известные результаты Е.М. Дынькина [1].

Полученные результаты допускают обобщение на неспрямляемые кривые.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дынькин Е. М. *Гладкость интеграла типа Коши*// Записки научн. сем. Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР. – 1979. – Т. 92. – С. 115–133.

В. Ф. Кириченко (Москва)

О ГЕОМЕТРИИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЛАГРАНЖА

Подмногообразия Лагранжа, т.е. n-мерные подмногообразия $2n$-мерного симплектического многообразия, аннулирующие структурную форму, играют важную роль в симплектической геометрии и часто встречаются в различных задачах механики и физики. С точки зрения эрмитовой геометрии такие подмногообразия есть не что иное, как вполне вещественные подмногообразия почти келеровых многообразий, наделенных эрмитовым продолжением исходной симплектической структуры.

Теорема 1. *Через каждую точку симплектического многообразия M размерности свыше четырех с фиксированным эрмитовым продолжением в направлении любой лагранжевой плоскости проходит единственное вполне геодезическое лагранжево подмногообразие (короче, s-лагранжево подмногообразие) тогда и только тогда, когда M — комплексная пространственная форма.*

Теорема 2. *s-лагранжевы подмногообразия комплексной пространственной формы голоморфной секционной кривизны c являются пространствами постоянной кривизны $\frac{c}{4}$.*

Справедливы контактные аналоги этих результатов. Именно, контактным аналогом подмногообразия Лагранжа является подмногообразие Лежандра, т.е. n-мерное интегральное многообразие контактного распределения $(2n+1)$-мерного контактного многообразия. Контактный аналог s-лагранжева подмногообразия назван нами *подмногообразием Блэра.* Контактный аналог комплексной пространственной формы, как хорошо известно, называется *сасакиевой пространственной формой.* С учетом этих замечаний легко сформулировать контактный аналог теоремы 1 (доказать его, конечно, значительно сложнее). Контактный аналог теоремы 2 формулируется следующим образом:

Теорема 3. *Подмногообразия Блэра сасакиевой пространственной формы Φ-голоморфной секционной кривизны c являются пространствами постоянной кривизны $\frac{c+3}{4}$.*

Доказана следующая теорема, выявляющая взаимосвязь между s-лагранжевыми подмногообразиями и подмногообразиями Блэра:

Теорема 4. *Каждое s-лагранжево подмногообразие N комплексной пространственной формы M конечнолистно накрывается некоторым подмногообразием Блэра в расслоении Бутби-Вана над M, являющимся полным горизонтальным поднятием подмногообразия N. При этом группа инвариантности подмногообразия Блэра является подгруппой фундаментальной группы соответствующего s-лагранжева подмногообразия.*

С. Н. Киясов (Казань)

ОЦЕНКИ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Предложен метод получения оценок для частных индексов, который условно можно назвать методом нормальных представлений, состоящий в доказательстве существования нормального представления матриц-функций (м-ф) с определенными порядками строк на бесконечности или задании границ их изменения, что позволяет сделать вывод о возможных значениях ее частных индексов.

Рассмотрим м-ф, заданные на простом гладком замкнутом контуре Γ, разбивающем плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- $(0 \in D^+, \infty \in D^-)$ и принадлежащие классу $H_\mu(\Gamma)(0 < \mu < 1)$. Под факторизацией H_μ–непрерывной на Γ м-ф $G(t)$ будем понимать ее представление в виде $G(t) = G^+(t)G^-(t), t \in \Gamma$, где $G(z)$ – м-ф конечного порядка на бесконечности [1,с.12]; $\det G(z) \neq 0$ в конечной части плоскости, а на бесконечности порядок $\det G^-(z)$ равен сумме порядков $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ строк м-ф $G^-(z)$. Эти числа называются частными индексами, а их сумма $\kappa_1+\kappa_2+\cdots+\kappa_n = \kappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ — суммарным индексом м-ф $G(t)$. Если в указанном представлении для м-ф $G^-(z)$ не выполнено условие на бесконечности, то будем называть такое представление $G(t)$ нормальным представлением.

Предположим, что доказано существование нормального представления м-ф $G(t) = G^+(t)G^-(t)$ с порядками строк $G^-(z)$ на бесконечности $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$ соответственно. Пусть $m_k = s_k - s_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$, $s = \sum_{k=1}^{n} s_k - \kappa$,

$$m = \max(0, s - m_1) + \max(0, s - m_1 - 2m_2) + \cdots +$$

$$+ \max(0, s - m_1 - 2m_2 - \cdots - (n-1)m_{n-1}).$$

Тогда справедливы неравенства:

$$s_1 - s \leq \kappa_1 \leq s_1 - s + m, s_2 - \max(0, s - m_1) \leq \kappa_2 \leq$$

$$\leq s_2 - \max(0, s - m_1) + m,$$

$$s_3 - \max(0, s - m_1 - 2m_2) \leq \kappa_3 \leq s_3 - \max(0, s - m_1 - 2m_2) + m, \cdots,$$

$$s_n - \max(0, s - m_1 - 2m_2 - \cdots - (n-1)m_{n-1}) \leq \kappa_n \leq$$

$$\leq s_n - \max(0, s - m_1 - 2m_2 - \cdots - (n-1)m_{n-1}) + m.$$

Дана иллюстрация предлагаемого метода для м-ф третьего порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа Н. П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* – М.: Наука, 1970. – 380 с.

Д. Э. Клепнев (Самара)

О РЕГУЛЯРНОСТИ СУБМЕРЫ ДОБРАКОВА

В настоящей работе получено обобщение классической теоремы о регулярности меры, определенной на σ-кольце подмножеств топологического пространства [1].

Пусть X — непустое множество; пусть классы его подмножеств $\mathcal{C}$ и $\mathcal{U}$ удовлетворяют следующим аксиомам:

1. $\forall\, C_1, C_2 \in \mathcal{C}\; C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$; 2. $\forall\, U_1, U_2 \in \mathcal{U}\; U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$;

3. $\forall\, \{C_n\}_n \subset \mathcal{C}\; \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{C}$; 4. $\forall\, \{U_n\}_n \subset \mathcal{U}\; \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n \in \mathcal{U}$;

5. $\forall\, C \in \mathcal{C}\, \forall\, U \in \mathcal{U}\; C \setminus U \in \mathcal{C}$; 6. $\forall\, C \in \mathcal{C}\, \forall\, U \in \mathcal{U}\; U \setminus C \in \mathcal{U}$;

7. $\forall\, C \in \mathcal{C} \quad \exists\, U \in \mathcal{U}\; C \subset U$; 8. $\forall\, U \in \mathcal{U} \quad \exists\, C \in \mathcal{C}\; U \subset C$;

и пусть класс $\mathcal{S} = S(\mathcal{C} \cup \mathcal{U})$ — σ-кольцо, порожденное классом $\mathcal{C} \cup \mathcal{U}$.

Пусть $\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ — субмера Добракова [2].

Определение 1. Назовем множество $E \in \mathcal{S}$ *внутренне регулярным* относительно субмеры φ, если $\inf\{\varphi(E \setminus C) : C \in \mathcal{C},\, C \subset E\} = 0$.

Определение 2. Назовем множество $E \in \mathcal{S}$ *внешне регулярным* относительно субмеры φ, если $\inf\{\varphi(U \setminus E) : U \in \mathcal{U},\, E \subset U\} = 0$.

Множество, регулярное и внешне, и внутренне, будем называть регулярным (относительно субмеры φ). Субмеру φ назовем регулярной, если все множества из класса $\mathcal{S}$ регулярны относительно φ.

Теорема 1. *Все множества из класса $\mathcal{C}$ внешне регулярны тогда и только тогда, когда все множества из класса $\mathcal{U}$ внутренне регулярны.*

Теорема 2. *Все множества из класса $\mathcal{C}$ внешне регулярны тогда и только тогда, когда все множества из класса $\mathcal{S}$ регулярны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Халмош П. *Теория меры.* М.: ИЛ, 1953. – 251 с.
2. Dobrakov I. *On submeasures* I// Rozpr. Math. – 1974. – V. 112. – P. 30–35.

В. М. Климкин (Самара)

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ В. М. ДУБРОВСКОГО В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ МЕРЫ

Пусть T — некоторое множество; $\Sigma \subset 2^T$ ($\emptyset \in \Sigma$). Предполагается, что рассматриваемые функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на Σ, $\varphi(\emptyset) = 0$ и принимают значения из $[0, +\infty]$.

Функции множества

$$\tilde{\varphi}(E) = \sup\{\varphi(A), A \subset E, A \in \Sigma\} \qquad (E \subset T)$$

называют супремацией функции φ ([2], стр. 43).

Класс множеств, замкнутый относительно операции разности, называют m-классом ([2], стр. 6–7).

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно квазитреугольные, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любой пары непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, $A \cup B \in \Sigma$:

если $\varphi(A) \cup \varphi(B) < \delta$, то $\varphi(A \cup B) < \varepsilon$,

если $\varphi(A) \cup \varphi(A \cup B) < \delta$, то $\varphi(B) < \varepsilon$.

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на классе $S \subset \Sigma$, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset S$

$$\lim \varphi(E_n) = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

Говорят, что функция $\varphi \in \Phi$ сконденсирована на классе $S \subset \Sigma$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого множества $E \in \Sigma$ существует такое множество $e \in S$, что $\tilde{\varphi}(E \triangle e) < \varepsilon$.

Теорема. *Пусть функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ заданы на m–классе Σ, равномерно квазитреугольные; пусть класс $S \subset \Sigma$ замкнут относительно пересечения; пусть, далее, каждая функция $\varphi \in \Phi$ сконденсирована на S.*

Если функции семейства $\Phi = \{\varphi\}$ — равномерно исчерпывающие на S, то супермации $\{\tilde{\varphi}, \varphi \in \Phi\}$ — равномерно исчерпывающие на S.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровский В. М. *О базисе семейства вполне аддитивных функций множества и о свойствах равномерной аддитивности и равностепенной непрерывности*// ДАН СССР. - 1947. - Т. 58. - No 5. - С. 737–740.

2. Климкин В. М. *Введение в теорию функций множества.* – Саратов: Изд–во Саратовск. ун–та. 1989. 209 с.

3. Gudder S. *Generalized measure theory*// Found. Phys. - 1973. - V. 3. - No 3. - P. 399–411.

А. И. Козлов, М. Ю. Кокурин, Н. А. Юсупова (Йошкар–Ола)

К НЕОБХОДИМЫМ И ДОСТАТОЧНЫМ УСЛОВИЯМ МЕДЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В гильбертовом пространстве H рассматривается линейное операторное уравнение $Au = f$, где $A^* = A \in L(H, H), A \geq 0, \mathrm{cl}R(A) \neq R(A), f \in R(A), \|A\| \leq a < 1$. Исследуется класс методов нахождения ближайшего к выбранному начальному приближению $u_0 \in H$ решения исходного уравнения: $u_\alpha = (I -$

$\Theta(A,\alpha)A)u_0 + \Theta(A,\alpha)f$, где $\Theta(\lambda,\alpha), \alpha \in (0,\alpha_0), \alpha_0 < 1$, — семейство измеримых по Борелю функций (см. [1]). Известно [1], что без наложения дополнительных условий на решение u^* скорость сходимости $u_\alpha \to u^*$ может быть сколь угодно медленной. В [1], [2] показано, что условие истокопредставимости $u^* - u_0 = A^p v, v \in H$, весьма точно описывает множество решений u^* для которых выполняется степенная оценка $\|u_\alpha - u^*\| \le C_0\alpha^p, \quad \forall\alpha \in (0,\alpha_0] \quad (p > 0)$. В настоящей заметке выделен класс решений, на котором имеет место более медленная сходимость:

$$\|u_\alpha - u^*\| \le C_1(-\ln\alpha)^{-p} \quad \forall\alpha \in (0,\alpha_0] \quad (p > 0). \tag{1}$$

Теорема. 1) *Пусть выполняется условие* $\sup\{(-\ln\lambda)^{-p}|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda| : \lambda \in (0,a]\} \le C_2(-\ln\alpha)^{-p}, \forall\alpha \in (0,\alpha_0] \ (p > 0)$, *и имеет место истокообразное представление* $u^* - u_0 \in R((-\ln A)^{-p})$. *Тогда справедлива оценка* (1).

2) *Пусть выполняется оценка* (1). *Тогда для любого* $q \in (0,p)$ *справедливо включение* $u^* - u_0 \in R((-lnA)^{-q})$.

Условие п.1 теоремы выполняется, в частности, для функций $\Theta(\lambda,\alpha) = \lambda^{-1}[1 - (\alpha/(\alpha+\lambda))^N], N \in \{1,2,\ldots\}, \Theta(\lambda,\alpha) = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda/\alpha})$, порождающих соответственно итерированный метод М.М.Лаврентьева и метод установления. Аналогичный результат получен также для класса итерационных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* –М.: Наука, 1986. –184 с.

2. Кокурин М. Ю. *Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач.* – Йошкар–Ола: МарГУ, 1998.– 292 с.

М. Ю. Кокурин, П. Г. Федяков (Йошкар-Ола)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАВИМЕТРИИ

Рассматривается нелинейное операторное уравнение $F(x) =$

0, где $F : H_1 \to H_2$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Предполагается, что F дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и $\|F'(x)\| \le N_1$, $\|F''(x)\| \le N_2$ $\forall x \in \Omega_R$, где $\Omega_R = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \le R\}$ и x^* — решение исходного уравнения. Считаем, что вместо точного оператора F известно лишь его приближение $\tilde{F} : H_1 \to H_2$, удовлетворяющее указанным выше неравенствам и условию $\|\tilde{F}(x^*) - F(x^*)\| \le \delta$. Определим оператор P_M как проектор на выбранное конечномерное подпространство M пространства H_1. Исследуется итерационный метод [1] отыскания решения x^*:

$$x_0 \in H_1, \qquad x_{n+1} = P_M(x_0 - \xi - \gamma \tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}(x_n)) + \xi. \tag{1}$$

Здесь $\xi \in H_1$, $0 < \gamma < \frac{2}{N_1^2}$ — параметры процедуры. Сходимость метода (1) исследуется при условии $\|(P_M(x_0) - E)(x^* - \xi)\| \le \Delta$ в предположении достаточной малости δ и Δ.

Теорема 1. *Существуют такие константы $l > 0$, $C > 0$, $q \in (0,1)$, что если $\|x_0 - x^*\| \le l + C(\delta + \Delta)$ и $M \cap \operatorname{Ker}(F'(x^*)) = \{0\}$, то имеет место оценка $\|x_n - x^*\| \le lq^n + C(\delta + \Delta)$, так что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|x_n - x^*\| \le C(\delta + \Delta)$.*

Метод (1) применялся при решении трехмерной обратной задачи гравиметрии, приводящей к уравнению $A(\rho) = g$. Здесь оператор $A : L_2([0,\pi] \times [0,2\pi]) \to L_2([a,b] \times [c,d])$ имеет вид

$$A(\rho) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} \frac{(H - r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta}{G(x,y,r,\varphi,\theta,H)},$$

где $G(x,y,r,\varphi,\theta,H) = [(x - r\sin\varphi\cos\theta)^2 + (y - r\sin\varphi\sin\theta)^2 + (H - r\cos\theta)^2]^{3/2}$, $\rho = \rho(\theta,\varphi)$, $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $H > 0$. В результате тестовых расчетов за 150–250 итераций функционал невязки $\|A(\rho) - g\|^2$ удается уменьшить в 50–60 раз. В качестве M выбиралось подпространство тригонометрических полиномов от θ, φ размерности 10–12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б. *Итеративные методы градиентноио типа для нерегулярных операторных уравнений*// ЖВМ и МФ. – 1998. – Т. 38. – No 12. – С. 1962–1966.

М. Ю. Кокурин, Н. А. Юсупова (Йошкар-Ола)

О СХОДИМОСТИ КЛАССА ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ С ПРОЕКТИРОВАНИЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается нелинейное уравнение $F(x) = 0$, где $F : H_1 \to H_2$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. Считаем, что оператор F дважды дифференцируем по Гато и удовлетворяет условиям

$$\|F'(x)\| \leq N_1, \quad \|F''(x)\| \leq N_2 \quad \forall x \in \Omega_R, \tag{1}$$

где $\Omega_R = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \leq R\}$, x^* — решение уравнения. Пусть вместо точного оператора F доступно его приближение $\tilde{F} : H_1 \to H_2$ такое, что $\|\tilde{F}(x^*)\| \leq \delta$, $\|F'(x^*) - \tilde{F}'(x^*)\| \leq \delta$ и выполняется условие (1).

В работе исследуется группа итерационных методов:

$$x_{n+1} = P_Q[-\Theta(\tilde{F}'^*(x_n)\tilde{F}'(x_n), \alpha_0)\tilde{F}'^*(x_n) \times \\ \times (\tilde{F}(x_n) - \tilde{F}'(x_n)(x_n - \xi))] + \xi, \tag{2}$$

где P_Q — проектор на выпуклое замкнутое множество $Q \subset H_1$; ξ — начальное приближение. Функция $\Theta(\lambda, \alpha_0)$ в (2) аналитична по λ в окрестности отрезка $[0, N_1^2]$ и удовлетворяет следующим условиям: $\sup\limits_{\lambda \in [0, N_1^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}}$ $\forall \alpha \in (0, \overline{\alpha}]$; $\sup\limits_{\lambda \in [0, N_1^2]} |1 - \lambda\Theta(\lambda, \alpha)|\lambda^\nu \leq g(\nu)\alpha^\nu$ $\forall \alpha \in (0, \overline{\alpha}], \nu \in [0, \nu_0] (\nu_0 > 0)$. Предполагается также, что $\sup\limits_{\alpha \in (0, \overline{\alpha}]} \int\limits_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \lambda\Theta(\lambda, \alpha)|}{|\lambda|} |d\lambda| \leq \infty$, где $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \overline{\alpha}]} \subset \mathbf{C}$ — семейство положительно ориентированных замкнутых контуров, лежащих в области аналитичности функции $\Theta(\lambda, \alpha_0)$ и охватывающих отрезок $[0, N_1^2]$.

Считаем, что начальная невязка $x^* - \xi$ удовлетворяет условию истокопредставимости вида $x^* - \xi = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v + w$, $p \in [\frac{1}{2}, \nu_0]$, $\|w\| \leq \Delta$, и имеет место оценка $\|(P_Q - E)(x^* - \xi)\| \leq \Delta$. Справедлива следующая

Теорема. *Для произвольного* $q \in (0,1)$ *существуют такие константы* $d(q), \epsilon(q) > 0$, *что при выполнении условий* $\|v\| \leq \epsilon(q)$, $\|x_0 - x^*\| \leq \min\{\frac{\sqrt{\alpha_0}}{2g(p)N_2}; \frac{R}{2}\} + d(q)(\delta + \Delta + \alpha_0^p\|v\|)$ *верна оценка* $\|x_n - x^*\| \leq \min\{\frac{\sqrt{\alpha_0}}{2g(p)N_2}; \frac{R}{2}\}q^n + d(q)(\delta + \Delta + \alpha_0^p\|v\|)$.

В случае $Q = H_1$ другой подход к построению регуляризующих алгоритмов на основе схемы (2) использовался в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокурин М. Ю., Юсупова Н. А. *О невырожденных оценках скорости сходимости итерационных методов решения некорректных нелинейных операторных уравнений*// ЖВМ и МФ. – 2000.– No 6.

Д. А. Колесов, Г. Н. Тимофеев (Йошкар-Ола)

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ДЕКАРТОВА КОМПОЗИЦИЯ В ПРОЕКТИВНО-ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ

Пространство аффинной связности $\overline{A}_N$ называют полусимметрическим [2], если его тензор кривизны обладает симметрией второй ковариантной производной:

$$\overline{\nabla}_\theta \overline{\nabla}_\mu \overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \overline{\nabla}_\mu \overline{\nabla}_\theta \overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta,$$

где $\overline{\nabla}$ — знак ковариантной производной в связности $\overline{\Gamma}$, а тензор кривизны имеет строение

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \partial_\alpha \overline{\Gamma}^\delta_{\beta\gamma} - \partial_\beta \overline{\Gamma}^\delta_{\alpha\gamma} + \overline{\Gamma}^\delta_{\alpha\sigma}\overline{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} - \overline{\Gamma}^\delta_{\beta\sigma}\overline{\Gamma}^\sigma_{\alpha\gamma}$$

Пространство аффинной связности A_N называется *проективно-полусимметрическим*, если оно при проективном отображении соответствует полусимметрическому пространству $\overline{A}_N$.

Можно показать, что пространство A_N ($N > 1$) является проективно-полусимметрическим тогда и только тогда, когда выполняется система соотношений:

$$R_{\theta\mu\sigma}{}^{\delta}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} - R_{\theta\mu\alpha}{}^{\sigma}R_{\sigma\beta\gamma}{}^{\delta} - R_{\theta\mu\beta}{}^{\sigma}R_{\alpha\sigma\gamma}{}^{\delta} - R_{\theta\mu\gamma}{}^{\sigma}R_{\alpha\beta\sigma}{}^{\delta} -$$
$$-4p_{[\theta\mu]}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + 2\delta^{\delta}_{[\mu}p_{\theta]\sigma}R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} - R_{\mu\beta\gamma}{}^{\delta}p_{\theta\alpha} + R_{\theta\beta\gamma}{}^{\delta}p_{\mu\alpha} -$$
$$-R_{\alpha\mu\gamma}{}^{\delta}p_{\theta\beta} + R_{\alpha\theta\gamma}{}^{\delta}p_{\mu\beta} - R_{\alpha\beta\mu}{}^{\delta}p_{\theta\gamma} + R_{\alpha\beta\theta}{}^{\delta}p_{\mu\gamma} = 0,$$
$$-R_{\theta\mu\alpha}{}^{\sigma}p_{\sigma\beta} - R_{\theta\mu\beta}{}^{\sigma}p_{\alpha\sigma} - 4p_{[\theta\mu]}p_{\alpha\beta} - p_{\mu\beta}p_{\theta\alpha} + p_{\theta\beta}p_{\mu\alpha} -$$
$$-p_{\alpha\mu}p_{\theta\beta} + p_{\alpha\theta}p_{\mu\beta} = 0,$$

где $R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}$ — тензор кривизны пространства A_N, а $p_{\alpha\beta}$ — тензор проективного преобразования.

Далее рассматривается проективно-полусимметрическое пространство Вейля W_N как пространство, допускающее интегрируемую π-структуру с абсолютно параллельными полями площадок размерности n и m (причем, $n + m = N$), т.е. структуру, определяемую аффинором a^{β}_{α}:

$$a^{\sigma}_{\alpha}a^{\beta}_{\sigma} = \delta^{\beta}_{\alpha}, \quad \nabla_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha} = 0.$$

При этом предполагается, что $a^{\sigma}_{\alpha}g_{\sigma\beta} = a^{\sigma}_{\beta}g_{\sigma\alpha}$ (площадки распределения взаимно ортогональны), где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор.

Доказаны следующие утверждения: 1. Пространство W_N — риманово. 2. Имеет место один из трех случаев: a) пространство W_N является евклидовым, b) отображение тождественно, c) пространство W_N полуевклидово.

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А. П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

2. Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 254 с.

О. А. Копп (Казань)

ОПЕРАДЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ СИММЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ

Будут использоваться определения и обозначения из [1]. Обозначим через $\mathbf{L}$ категорию, объекты которой — семейства $P = \{P(n) | n = 1, 2, \ldots\}$, в которых $P(n)$ — левые $K\Sigma_n$-модули. Моноиды в моноидальной категории $\mathbf{L}$ называются операдами. Для операд R и D рассмотрим категории левых, правых и двухсторонних объектов над ними: ${}_R\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_D$, ${}_R\mathbf{L}_D$. Для $P, Q \in {}_R\mathbf{L}$ определен ${}_R[P, Q] \in \mathbf{L}$, такой, что для любого $X \in \mathbf{L}$ имеется естественный изоморфизм: ${}_R\mathbf{L}(P \odot X, Q) \cong \mathbf{L}(X, {}_R[P, Q])$. ${}_R[P, P]$ является моноидом в $\mathbf{L}$, то есть операдой. Напомним ([1]), что $[P, Q](m) = \prod\limits_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_m}(\widetilde{P}(n, m), Q(n))$. Пусть R — операда, $P, Q \in {}_R\mathbf{L}$, тогда ${}_R[P, Q](m) \subseteq \prod\limits_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_m}(\widetilde{P}(n, m), Q(n))$ состоит из всех тех $\varphi = (\varphi_n)_{n \geq m}$, $\varphi_n : \widetilde{P}(n, m) \to Q(n)$, которые обладают следующим свойством. Представим φ_n как семейство $\varphi_{n,\alpha} : P(n_1) \otimes \ldots \otimes P(n_m) \to Q(n)$, где $\alpha = (n_1, \ldots, n_m)$, $n_1 + \ldots + n_m = n$. Тогда, если $\overline{r}_i p_i \in P(n_i), \overline{r}_i = r_{1,i} \ldots r_{k_i,i}$, $r_{j,i} \in R(d_{ji})$, $d_{1i} + \ldots + d_{k_i i} = n_i$, $p_i \in P(k_i)$, $1 \leq i \leq m$, то $(\overline{r}_1 p_1) \ldots (\overline{r}_m p_m)\varphi_{n,\alpha} = (\overline{r}_1 \ldots \overline{r}_m)(p_1 \ldots p_m \varphi_{l,\beta})$, где $l = k_1 + \ldots + k_m$, $\beta = (k_1, \ldots, k_m)$. $D = {}_R[P, P]$ является подоперадой $[P, P]$, ${}_R[P, R] \in {}_D L_R$, $P \in {}_R L_D$.

Пусть $F \in {}_R\mathbf{L}$, $F(n) = R(n) \otimes_K KX$, где KX — свободный модуль с базисом X над коммутативным кольцом K.

Теорема 1. *$({}_R P_D, {}_R Q_D)$ есть Морита-контекст в смысле [1]. Функторы $\odot_R P$ $(\bigcirc_R P), \odot_D Q$ $(\bigcirc_D Q)$ образуют эквивалентность категорий $\mathbf{L}_R$ и $\mathbf{L}_D$ $(Alg(R)$ и $Alg(D))$ тогда и только тогда, когда P есть ретракт F (с конечным X) и R есть ретракт копроизведения конечного числа экземпляров P.*

Теорема 2. *Имеет место изоморфизм линейных операд: ${}_R[F, F] \cong M(X, R)$, где $M(X, R)$ — матричная операда, введенная в [2].*

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00469).

ЛИТЕРАТУРА

1. Копп О. А., Тронин С. Н. *Морита-эквивалентные линейные операды*// Настоящий сборник. – С . 117–119.

2. Тронин С. Н., Копп О. А. *Матричные линейные операды*// Изв. вузов. Математика. – 2000. – No. 6. – С. 53–62.

О. А. Копп, С. Н. Тронин (Казань)

МОРИТА-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАДЫ

Пусть $\mathbf{S}$ обозначает категорию, объекты которой — семейства $A = \{A(n,m) \mid n,m = 1,2,\ldots\}$, причем $A(n,m)$ есть $K\Sigma_n$-$K\Sigma_m$-бимодуль, K — коммутативное ассоциативное кольцо, Σ_r – группа подстановок r-й степени, а морфизмы $\mathbf{S}$ — семейства бимодульных гомоморфизмов. Известно, что $\mathbf{S}$ есть моноидальная замкнутая категория с тензорным произведением $(A \otimes B)(n,m) = \bigoplus\limits_{r=1}^{\infty} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} B(r,m)$. Пусть $\overline{\mathbf{S}}$ есть подкатегория $\mathbf{S}$, состоящая из биградуированных ассоциативных колец (без единицы) и кольцевых гомоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{L}$ категорию, объекты которой — семейства $P = \{P(n) | n = 1,2,\ldots\}$, в которых $P(n)$ — левые $K\Sigma_n$-модули. Образуем функтор $\otimes : \mathbf{S} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, $(A \otimes P)(n) = \bigoplus\limits_{r=1}^{\infty} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} P(r)$. Рассмотрим функтор $\widetilde{(\ )} : \mathbf{L} \to \mathbf{S}$ (фактически даже в $\overline{\mathbf{S}}$): $\widetilde{P}(n,m) = \bigoplus\limits_{m=1}^{n} \bigoplus\limits_{n_1+\ldots+n_m=n} K\Sigma_n \otimes_C (P(n_1) \otimes_K \ldots \otimes_K P(n_m))$, где $C = K\Sigma_{n_1} \otimes \ldots \otimes K\Sigma_{n_m}$. Определим "тензорное произведение" в $\mathbf{L}$ по формуле $P \odot Q = \widetilde{P} \otimes Q$.

Теорема 1. *Тензорное умножение $\odot$ превращает $\mathbf{L}$ в моноидальную замкнутую категорию. Точнее, $\mathbf{L}(P \odot Q, V) \cong$ $\cong \mathbf{L}(Q, [P,V])$, где $[P,V](m) = \prod\limits_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_n}(\widetilde{P}(n,m), V(n))$. Функтор $\widetilde{(\ )}$ при этом становится моноидальным, $\widetilde{P \odot Q} \cong \widetilde{P} \otimes \widetilde{Q}$. Как функтор в $\overline{\mathbf{S}}$, он обладает правым сопряженным: $\overline{\mathbf{S}}(\widetilde{P}, A) \cong \mathbf{L}(P, A_0)$. Здесь $A_0(n) = A(n,1)$.*

Моноиды в моноидальной категории $\mathbf{L}$ [1] называются операдами. Следуя [1], можно ввести для операд R и D категории левых, правых и двухсторонних объектов над ними: ${}_R\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_D$, ${}_R\mathbf{L}_D$, и для $P \in {}_R\mathbf{L}_D$ функтор $\otimes_R P : \mathbf{L}_R \to \mathbf{L}_D$. Для $P, Q \in {}_R\mathbf{L}$ определен ${}_R[P, Q] \in \mathbf{L}$, такой, что для любого $X \in \mathbf{L}$ имеется естественный изоморфизм: ${}_R\mathbf{L}(P \odot X, Q) \cong \mathbf{L}(X, {}_R[P, Q])$; ${}_R[P, P]$ является моноидом в $\mathbf{L}$, то есть операдой. Рассмотрим категорию K-модулей $\mathbf{M}$, и определим функтор $\bigcirc : \mathbf{M} \times \mathbf{L} \to \mathbf{M}$, $V \bigcirc P = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n} \otimes_{K\Sigma_n} P(n)$. Ввиду наличия естественного изоморфизма $V \bigcirc (P \odot Q) \cong (V \bigcirc P) \bigcirc Q$ можно определить категорию (правых) объектов $\mathbf{M}$ над операдой R, которая будет обозначаться через $Alg(R)$, а ее объекты будут называться алгебрами над операдой R (R-алгебрами).

Кроме того, можно (прмерно так же, как и в [1]) определить функторы $\bigcirc_R P : Alg(R) \to Alg(D)$, $P \in {}_R\mathbf{L}_D$. При этом, если $Q \in {}_D\mathbf{L}_W$, то $(V \bigcirc_R P) \odot_D Q \cong V \bigcirc_R (P \odot_D Q)$. В частности, если при $W = R$ $\odot_R P$ и $\odot_R Q$ – взаимно обратные эквивалентности, то и $\bigcirc_R P$ с $\bigcirc_D Q$ будут взаимно обратными эквивалентностями.

Определим Морита-контекст, как пару (P, Q), $P \in {}_R\mathbf{L}_D$, $Q \in {}_D\mathbf{L}_R$, вместе с морфизмами $P \odot_D Q \to R$, $Q \odot_R P \to D$, обладающими теми же свойствами, что и Морита-контексты у модулей.

В [2] было показано, что для того, чтобы $\odot_R P$ и $\odot_D Q$ были взаимно обратными эквивалентностями, необходимо и достаточно, чтобы все отображения $\bigoplus\limits_{m \geq 1} \widetilde{P}(n, m) \otimes_{K\Sigma_m} Q(m) \to R(n)$, $\bigoplus\limits_{m \geq 1} \widetilde{Q}(n, m) \otimes_{K\Sigma_m} P(m) \to D(n)$, были сюръекциями. Назовем это условием эквивалентностями Морита-контекста.

Пусть $F \in {}_R\mathbf{L}$, $F(n) = R(n) \otimes_K KX$, где KX — свободный модуль с базисом X над коммутативным кольцом K.

Теорема 2. *Пусть Морита-контекст $({}_RP_D, {}_DQ_R)$ удовлетворяет условию эквивалентности. Тогда имеют место изоморфизмы $D \cong {}_R[P, P]$, $R \cong {}_D[Q, Q]$, $Q \cong {}_R[P, R]$, $P \cong {}_D[Q, D]$. Кроме того, P, как объект из ${}_R\mathbf{L}$, есть ретракт F для некоторого конечного X, и R есть ретракт $P \sqcup \ldots \sqcup P$ (конечное число слагаемых).*

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00469).

ЛИТЕРАТУРА

1. Pareigis B. *Non-additive ring and module theory I. General theory of monoids*// Publ. Math. (Debrecen). – 1977. – T. 24, fasc. 1–2. – P. 189–203.

2. Тронин С.Н., Копп О.А. *О Морита-контекстах для многообразий алгебр над операдами*// Универсальная алгебра и ее приложения. Тез. докл. международн. семинара, посвящ. памяти проф. Л.А. Скорнякова. Волгоград, 6-11 сент. 1999 г. – С. 64–65.

Н. А. Корешков (Казань)

ТЕОРЕМА ЭНГЕЛЯ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИЕВСКОГО ТИПА

Пусть G — алгебра над полем k. Обозначим через W_G множество пар векторного пространства $G \times G$ таких, что для каждой пары $(a, b) \in W_G$ существует пара линейных операторов $\varphi_{a,b}, \psi_{a,b} \in Hom_k(G)$, удовлетворяющих соотношению

$$L_a L_b = \varphi_{a,b} L_b L_a + \psi_{a,b} L_{a \cdot b},$$

где L_g — оператор левого умножения в алгебре G.

Тогда конечномерную алгебру G с антикоммутативным умножением будем называть алгеброй лиевского типа, если W_G содержит непустое, открытое в $G \times G$ (в топологии Зарисского) подмножество. Для таких алгебр имеет место утверждение, аналогичное теореме Энгеля для алгебр Ли.

Теорема. *Пусть G алгебра лиевского типа. Если для любого g из G оператор L_g — нильпотентен, то алгебра G нильпотентна.*

Под нильпотентной алгеброй здесь понимается алгебра, для которой существует такое натуральное n, что произведение любых n элементов алгебры при любой расстановке скобок равно нулю.

А. В. Костин (Елабуга)

К ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРОРИСФЕР

Паре $(\vec{\rho}, \omega)$, где $\vec{\rho}(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, в [1] сопоставляются гиперплоскость

$$2\sum_{i=1}^{n} \xi^i x^i + (\vec{\rho}^2 - \varepsilon)x^{n+1} - \omega = 0$$

пространства E_{n+1} $(\varepsilon = 1)$ или ${}^1E_{n+1}$ $(\varepsilon = -1)$ и гипорисфера с уравнением

$$(\vec{\zeta} - \vec{\rho})^2 + \varepsilon\left(\zeta^{n+1} - \frac{\omega}{2}\right)^2 = \varepsilon\left(\frac{\omega}{2}\right)^2$$

собственной или идеальной области пространства Лобачевского. С использованием данного соответствия изучаются зависимости между огибающими семейств гиперорисфер Λ_{n+1} $({}^1\Lambda_{n+1})$ и гиперплоскостей E_{n+1} $({}^1E_{n+1})$. Вложением пространства E_{n+1} $({}^1E_{n+1})$ в виде гиперплоскости в пространство ${}^1E_{n+2}$ с линейным элементом

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + \varepsilon\left[(dx^{n+1})^2 - (dx^{n+2})^2\right]$$

в многообразие огибающих семейств гиперорисфер вводится псевдоевклидова метрика.

В частности, в подмногообразии самих гиперорисфер как огибающих семейств гиперорисфер индуцируется полуриманова метрика

$$ds^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d\eta^i)^2}{(\eta^{n+1})^2}.$$

Она совпадает с угловой метрикой в многообразии гиперорисфер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костин А. В. *К геометрии орисфер собственной и идеальной областей пространства Лобачевского*// Междунар. школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Тез. докл. – Ростов-на-Дону, 1998. – С. 40–42.

2. Талантова Н. В., Широков А. П. *Касательные расслоения и геометрия Лагерра*/ Казанск. ун-т., 1992. – Деп. в ВИНИТИ 10.03.92, No 820-B92. – 18 с.

В. Л. Крепкогорский (Казань)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ НОРМЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

В статьях [1, 2] функторы вещественной интерполяции $(\cdot,\,\cdot)_{\theta,\,q}$ применялись к парам пространств Бесова $B^s_p(R_n)$ или пространств Лизоркина – Трибеля $F^s_{p,q}(R_n)$. При этом были получены пространства типа BL с нормами, заданными с помощью последовательности сверток. К сожалению, нормы такого типа неудобно использовать в случае пространств, заданных на области. В данной заметке предлагается описание интерполяционных норм с помощью "модуля непрерывности".

Пусть $L_{p,\,q}(\mathcal{X},\xi,\mu)$ – пространство Лоренца с весом ξ на пространстве $\mathcal{X}$ с мерой μ; $\Delta_\rho f = f(x+\rho)-f(x)$; $\Delta^\ell_\rho f = \Delta_\rho(\Delta^{\ell-1}_\rho f)$. Модулем непрерывности функции $f(x)$ назовем величину $w_f(r,\,x) = \sup_{|\rho|\le r}|\Delta^\ell_\rho f|$, $0 < r < \infty$.

Теорема. *Пусть* $1 < p_i < \infty$, $1 \le q_i \le \infty$, $s_i > n/p_i, 0 < \theta < 1, 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1; s_i = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$; k — *угловой коэффициент прямой, проходящей через точки* $(1/p_i,\,s_i)$, ℓ — *целое число* $\ell > \max s_i$. *Тогда*

$$(B^{s_0}_{p_0}(R_n),\,B^{s_1}_{p_1}(R_n))_{\theta,\,q} = \left(F^{s_0,}_{p_0,\,q_0}(R_n),\,F^{s_1,}_{p_1,\,q_1}(R_n)\right)_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(R_n)$$

с нормой

$$\|f|BL^{s,k}_{p,q}(R_n)\| := \|f|L_{p,q}(R_n)\| +$$

$$\|(w_f(2^{-j},\,x))_{j=1,\,2,\ldots}|L_{p,q}(Z_+\times R_n, 2^{jb}, 2^{jk}\nu\times\mu_n)\|,$$

где $Z_+ = \{1,\,2,\ldots\}$, ν — *атомическая мера на* Z_+ *с мерой атома равной единице.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Крепкогорский В. Л. *Интерполяция в пространствах Лизоркина-Трибеля и Бесова*// Матем. сборник. – Т. 185. – No 7. – С. 63–76.

2. Крепкогорский В. Л. *Интерполяция и теоремы вложения для квазинормированных пространств Бесова*// Изв. вузов Математика. – 1999. – No 7. – С. 23–29.

В. Р. Кристалинский (Смоленск)

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Пусть L — простой гладкий замкнутый контур на плоскости комплексного переменного z. Область внутри L мы будем называть внутренней и обозначать D^+, а область, дополнительную к $D^+ \cup L$, содержащую бесконечно удаленную точку, мы будем называть внешней и обозначать D^-.

Мы предлагаем метод приближенного вычисления интеграла типа Коши, пригодный для широкого класса контуров L и плотностей $f(\tau)$. Сущность этого метода заключается в следующем.

Пусть функция $w = \varphi(z)$ отображает область D^+ конформно на единичный круг, причем $\varphi(0) = 0$, $z = \psi(w)$ — обратная функция.

Рассмотрим на единичном круге функцию

$$F(w) = f(\psi(w)).$$

Пусть $S_n(e^{i\theta}) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$ — n-ая частичная сумма ряда Фурье функции $F(e^{i\theta})$. Заменим плотность $f(\tau)$ на $S_n(\varphi(\tau))$. Пусть $\Phi^+(z)$ — функция, определенная интегралом типа Коши, и $\Phi_n^+(z)$ — функция, определенная интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{S_n(\varphi(\tau))d\tau}{\tau - z}$, в области D^+.

Заметим, что

$$S_n(\varphi(\tau)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \varphi(\tau)^k = \frac{\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \varphi(t)^{n+k}}{\varphi(t)^n}$$

— граничное значение аналитической функции, имеющей в точке 0 полюс порядка n. Следовательно,

$$\Phi_n^+(z) = \frac{\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \varphi(z)^{n+k}}{\varphi(z)^n} - L_n(z),$$

где $L_n(z)$ — главная часть ряда Лорана уменьшаемого.

В работе доказывается

Теорема. *Пусть функция $f(\tau(s))$ принадлежит классу Гельдера H_β, функция $z = \psi(w)$, отображающая единичный круг на область D^+, удовлетворяет следующему условию: $\psi'(w)$ непрерывна, если $| w | \leq 1$. Тогда для любого β', $0 < \beta' < \beta$, найдутся постоянные d_0 и d_1, такие, что*

$$\max_{z \in D^+ \cup L} | \Phi^+(z) - \Phi_n^+(z) | \leq \frac{d_0 + d_1 \ln n}{n^{\beta - \beta'}}.$$

Р. Е. Кристалинский (Смоленск)

О ФУНКЦИИ ГРИНА БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $\Delta^2 = 0$ — бигармоническое уравнение, $\omega(x, y)$ — элементарное решение этого уравнения с полюсом в точке (x_0, y_0). Тогда, как известно, ([1], с. 178),

$$\omega(x, y) = \frac{r^2}{8\pi} \ln \frac{1}{r},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Пусть $v_0(x, y)$ — регулярное в области T решение бигармонического уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$v_0 = -\omega, \quad \frac{\partial v_0}{\partial n} = -\frac{\partial \omega}{\partial n},$$

имеющее непрерывные производные до третьего порядка включительно в $T \cup \partial T$.

Функция $v = \omega + v_0$ называется *функцией Грина* бигармонического уравнения в области T.

Доказывается следующая

Теорема. *Для прямоугольной области T функция Грина бигармонического уравнения не существует.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1946.

М. Ф. Кулагина (Чебоксары)

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ РЯДА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

В работах [1] и [2] вводится обобщенное дискретное преобразование Фурье, которое каждой почти-периодической в смысле Бора функции, заданной на действительной оси, ставит в соответствие ее ряд Фурье. Коэффициенты ряда Фурье и его показатели определяются через заданную функцию по известным формулам. Есть также формулы, дающие обратное преобразование. Существует взаимно-однозначное соответствие между почти-периодическими функциями и их рядами Фурье.

С помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье в [3] получены решения основных задач теории упругости для полуплоскости и полосы.

На основании решения этих задач строятся решения различных задач теории упругости для двуслойных и двулистных полос (полосы либо плотно прилегают друг к другу, либо наложены друг на друга и скреплены). Каждая полоса характеризуется своими упругими постоянными. На их общих границах задаются различные условия склеивания (см., например, [4]). Решаются задачи об изгибе упругой полуплоскости и изгибе ленточных плит.

Обобщенное дискретное преобразование Фурье применяется автором для решения задач о распространении поверхностных волн в случаях, когда поверхностные волны возникают под действием динамического давления и когда поверхностные волны обусловлены начальным смещением. Рассмотрены случаи бесконечной и конечной глубины жидкости.

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00308).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулагина М. Ф. *О некоторых бесконечных системах с разностными индексами*// Изв. вузов. Математика. – 1992. – No 3. – С. 18–23.

2. Кулагина М. Ф. *Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций*// Изв. вузов. Математика. – 1993. – No 8. – С. 19–28.

3. Кулагина М. Ф. *Построение почти-периодических решений основных задач теории упругости для полосы и полуплоскости*// Вестник Чувашского университета. Чебоксары. Изд-во при Чувашском университете. – 1996. – No 2. – С. 126–137.

4. Кулагина М. Ф. *Построение почти-периодических решений второй основной задачи теории упругости для двухслойной полосы*// Известия Национальной Академии наук и искусств Чувашской Республики. – 1996. – No 6.

А. Г. Лабуткин, Р. Б. Салимов (Казань)

ОБ "ОШИБКАХ" В ТЕОРИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ВЫЯВЛЕННЫХ ГОНОРОМ А.Л.

В статьях Гонора А. Л. [1,2] исправляются неточности, допущенные при выводе формулы, выражающей распределение модуля скорости $|\tilde{v}|$ на крыловом профиле $\tilde{C}$, близком к исходному профилю C, распределение модуля скорости $|v|$ вдоль которого известно. Речь идёт о формуле (7) п. 66 на с. 365 книги [3].

При чтении статей [1,2] у читателя может сложиться впечатление, что речь идёт о существенных ошибках принципиального характера, допущенных при выводе вышеуказанной формулы, тем более, что в этих работах не раскрываются характер и истоки упомянутых ошибок, отмечается лишь факт их наличия. Этому способствует и название статьи [1], претендующей на большее, чем её содержание: в ней обсуждается одна формула, относящаяся к приложениям, а не к теории конформных отображений, поскольку относящаяся к этой теории формула М. А. Лаврентьева, дающая отображение на внешность круга области, близкой к последней, как это отмечается в статье [1], не содержит неточностей.

В действительности, ошибки, обсуждаемые в работах [1,2], представляют результат просмотра, при внимательном чтении легко могут быть обнаружены и устранены квалифицированным специалистом.

В самом деле, ошибка, указанная в статье [1], появилась из-за того, что в случае внешних областей в формуле, дающей конформное отображение, не изменён знак перед $\delta(\varphi)$, хотя необходимость этого указана ранее в предыдущем пункте книги [3].

Ошибка, указанная в статье [2], произошла из-за неудачного обозначения: вместо $F(z,\tilde{C})$ надо было взять $F(\tilde{z},\tilde{C})$, где $\tilde{z}$ — точка изменённого контура $\tilde{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. *Об одной ошибке в теории конформных отображений близких областей и в приложении к обтеканию профилей*// ПММ. – 1988. – Т. 52. – Вып. 2. – С. 345–348.

2. Гонор А. Л. *Определение параметров плоского течения несжимаемой жидкости при малой вариации контура профиля*// ПММ. – 1993. – Вып. 6. – С. 167–169.

3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров (Казань)

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ АДЕЛЬНЫХ ФЕЙНМАНОВСКИХ АМПЛИТУД φ^4-ТЕОРИИ

Для изучения моделей статистической физики и квантовой теории поля на группе аделей [1] необходимо построение теории адельных фейнмановских амплитуд.

Пусть G — фейнмановский граф φ^4-теории, не содержащий отделимых подграфов. Исследование аналитических свойств адельных фейнмановских амплитуд, отвечающих графу G сводится к изучению свойств бесконечного произведения

$$f_G(\underline{\varepsilon}) = \prod_p f_{G,p}(\underline{\varepsilon}), \qquad (1)$$

$$f_{G,p}(\underline{\varepsilon}) = \int F_{G,p}(x_{v,p}, v \in V_{ext}; \underline{\varepsilon}) \prod_{v \in V_{ext}} \chi_p(x_{v,p}) dx_{v,p},$$

$$F_{G,p}(x_{v,p}, v \in V_{ext}; \underline{\varepsilon}) = \int \prod_{l \in L} ||x_{i(l),p} - x_{f(l),p}||_p^{-d/2+\varepsilon_l} \prod_{v \in V_{in}} dx_{v,p},$$

Q_p^d — d-мерное p-адическое пространство, V_{in}, (V_{ext}) — множество внутренних (внешних) вершин графа G, L — множество линий графа G, $i(l)$ $(f(l))$ — начало (конец) линии l, $l \in L$, $x_{v,p} \in Q_p^d$, χ_p — индикатор единичного шара в Q_p^d, $\underline{\varepsilon}$ есть вектор $(\varepsilon_l, l \in L)$, $\varepsilon_l \in C$, бесконечное произведение в (1) ведется по всем простым p.

В работе [2] было доказано, что для любого графа G при достаточно больших d существует непустая область значений в пространстве параметров $\underline{\varepsilon}$, для которой бесконечное произведение (1) сходится.

Теорема 1. *Для любого графа G пересечение области аналитичности функции $f_G(\underline{\varepsilon})$ с диагональю $\{\underline{\varepsilon} : \varepsilon_l = \varepsilon, l \in L(G)\}$ включает область (в одномерном комплекном пространстве) $D(G,d) = \{\varepsilon : 1/2 < \mathrm{Re}\,\varepsilon < a'\}$, $a' = a'(G,d) \in R$. Для достаточно больших d область $D(G,d)$ не пуста.*

Теорема 2. *Пусть $\hat{f}_G(\varepsilon) = f_G(\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Функция $\hat{f}_G(\varepsilon)$ аналитически продолжается из области $D(G,d)$ в область $0 <$*

$\operatorname{Re}\varepsilon \leq 1/2$. *В любом порядке теории возмущений существуют амплитуды, для которых прямая* $\operatorname{Re}\varepsilon = 0$ *является границей области аналитического продолжения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Manin Yu. I. *Reflections on Aritmetical Physics*, in "Conformal Invariance and String Theory", eds. P. Dita. Boston: Academic Press, 1989. – P. 293–303.

2. Лернер Э. Ю., Миссаров М. Д. *Адельные фейнмановские амплитуды в низших порядках теории возмущений*// ТМФ. – 2000. – Т. 124. – N 1. – С. 11–24.

Е. К. Липачёв (Казань)

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА СПЛАЙН–ПОДОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

В [1] получено интегральное уравнение краевой задачи дифракции волн на неровной поверхности (см., напр., [2]):

$$\varphi(x) + \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)\,dy = g(y), \quad -1 \leq y \leq 1, \tag{1}$$

и показано [1, 3], что уравнение (1) однозначно разрешимо в $L_2[-1,1]$ при естественных для дифракционных задач предположениях на исходные данные.

Для вычислительной схемы метода сплайн подобластей [4], примененной для приближенного решения уравнения (1), справедлива следующая

Теорема. *В условиях разрешимости (см. [1]) уравнения (1), при достаточно больших* n *усредненные сплайны* $\varphi_n^m(x)$ $(m = 0,1)$ *метода сплайн–подобластей существуют и сходятся к точному решению* $\varphi^*(x)$ *уравнения (1) со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^m\|_2 = O\left\{\omega_x(K;\delta_n)_2 + \omega(g;\delta_n)_2\right\},$$

где δ_n *— норма сетки узлов, а* $\omega_x(K;\delta_n)_2$ *и* $\omega(g;\delta_n)_2$ *— модули непрерывности функций* $K(x,y)$ *и* $g(x)$ *по переменной* x *в* *пространстве* $L_2(-1,1)$.

Следствие. *Если* $K \in C\left([-1,1]^2\right)$ *и* $g \in C[-1,1]$, *то рассматриваемый метод сходится равномерно со скоростью*

$$\sup_{-1\leq x\leq 1} |\varphi^*(x) - \varphi_n^m(x)| = O\left\{\omega_x(K;\delta_n)_C + \omega(g;\delta_n)_C\right\},$$

где $\omega_x(\cdot;\delta_n)_C$ *и* $\omega(\cdot;\delta_n)_C$ — *соответствующие модули непрерывности в пространстве* $C = C[-1,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Липачёв Е. К. *О разрешимости задачи рассеяния на бесконечной решетке с конечной нарезкой*// Материалы конф. "Алгебра и анализ". – Казань: Изд–во Казанск. матем. общества, 1997. – С. 135 – 136.

2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. *Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.* М.: Наука., 1972. – 424 с.

3. Липачёв Е. К. *Разрешимость краевой задачи дифракции волн на областях с кусочно-гладкой границей* // Материалы конф. "Теория функций, ее прил. и смежные вопр." – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1999. – С. 136–138.

4. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1994. – 288 с.

Г. Д. Луговая, А. Н. Шерстнев (Казань)

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, $\mathcal{M}^{pr}$, $\mathcal{M}^+$ — соответственно множества ортопроекторов и положительных операторов в $\mathcal{M}$, H — гильбертово пространство. Будем рассматривать линейные отображения $F : \mathcal{M} \to H$, обладающие свойством

$$pq = 0\ (p, q \in \mathcal{M}^{pr}) \Rightarrow \langle F(p), F(q)\rangle = 0. \qquad (1)$$

Отображение F называется *ортогональным векторным полем* (овп), если оно ограничено. Назовем F *σww-овп* (соответственно w-*нормальным* овп), если F непрерывно в ультраслабой топологии $\mathcal{M}$ и слабой топологии H (соответственно $x_\alpha \nearrow x$ $(x_\alpha, x \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow F(x_\alpha) \xrightarrow{w} F(x)$).

Теорема 1. *Линейное отображение F со свойством (1) является w-нормальным овп тогда и только тогда, когда оно σww-овп.*

Теорема 2. *Если $F : \mathcal{M} \to H$ — овп, то $F(\mathcal{M}^+)$ — конус в H.*

Овп $F : \mathcal{M} \to H$ назовем *нормальным*, если $x_\alpha \nearrow x$ $(x_\alpha, x \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow F(x_\alpha) \nearrow F(x)$ в смысле порядка, задаваемого в H конусом $F(\mathcal{M}^+)$. Овп назовем *точным*, если $F(x) = \theta$ $(x \in \mathcal{M}^+) \Rightarrow x = 0$.

Теорема 3. *Если овп точно, то оно нормально.*

Существуют w-нормальные овп, которые не являются нормальными. Следующий пример показывает, что из нормальности овп не следует его w-нормальность. Пусть $\widehat{l^\infty}$ — алгебра фон Неймана умножений на ограниченные последовательности в координатном гильбертовом пространстве l^2:

$$\widehat{x} f = (x^1 f^1, x^2 f^2, \ldots), \quad f = (f^n) \in l^2, \ x = (x^n) \in l^\infty.$$

Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство и $\{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ — ортогональная последовательность в $H \setminus \{\theta\}$ такая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \|e_k\|^2 < +\infty$. Пусть $\mathcal{U}$ — ультрафильтр в $\mathbb{N}$, мажорирующий фильтр Фреше. Определим отображение $F : \widehat{l^\infty} \to H$ равенством

$$F(\widehat{x}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} x^k e_k,$$

где $x = (x^1, x^2, \ldots) \in l^\infty$, а $x^0 \equiv \lim\limits_{\mathcal{U}} x^n$. Тогда F — нормальное овп, которое не является w-нормальным.

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103) и программой "Университеты России" (проект 990213).

С. Ф. Лукомский (Саратов)

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L^∞

Пусть (G, Σ, μ) пространство с конечной мерой μ и $\mu(G) = 1$. Классы Орлича $L^o(\varphi)$ в случае, когда N-функция φ не удовлетворяет Δ_2 условию не являются линейными. Чтобы превратить такой класс в линейное пространство рассматривают их объединение $L(\varphi) = \cup_\lambda L^o(\varphi(\cdot\lambda))$ и традиционно определяют норму одним из следующих равенств

$$\|f\|_1 = \sup\{\int_G |fg|d\mu : \int_G \varphi^*(g)d\mu \leq 1\},$$

$$\|f\|_2 = \inf\{\lambda > 0 : \int_G \varphi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) d\mu \leq 1\}.$$

Мы рассмотрим поведение рядов Фурье-Уолша в пространствах, лежащих по шкале пространств Орлича между $L(\gamma^x)$ и L^∞. Известно [1], что для банахова пространства B следующие условия эквивалентны:

a)$B \supset L(e^x)$,

b)$\forall f \in C, \|S_n(f) - f\|_B \to \infty$ ($S_n(f)$ — частичные суммы Фурье-Уолша-Пэли).

Определим пространства, лежащие по шкале пространств Орлича между $L(\gamma^x)$ и L^∞ и отличные от пространств Орлича.

Определение. *Пусть* $1 < p < 2$, $\alpha \geq 1$. *Через* $\hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ *обозначим совокупность всех измеримых, п. вс. конечных функций* $f : G \to \mathbf{R}$ *таких, что*

1) *для каждой* $f \in \hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ *существует положительная, непрерывная, строго возрастающая на* $(0, \infty)$ *функция* φ *такая, что*

$$\int_1^\infty \left(\frac{\varphi^{-1}(x)}{x^\alpha}\right)^p dx < \infty \quad (\varphi^{-1} - \text{обратная к } \varphi),$$

2) *существует постоянная* $\gamma > 1$ *такая, что*

$$\int_G \gamma^{\varphi(|f|)} d\mu < \infty.$$

Теорема 1. *$\hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha}(G)$ есть банахово пространство с нормой*

$$\|f\|_{\hat{p},\alpha} = \left(\int_1^\infty \left(\frac{\|f\|_x}{x^\alpha}\right)^p dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha \geq 2$ и $1 < p < 2$. Если $f \in \hat{\mathcal{L}}_{p,\alpha-1}(G)$, то*

$$\|S_n(f) - f\|_{\hat{p},\alpha} \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Finet C., Tkebuchava G. E. *Walsh-Fourier series and their generalisations in Orlicz spaces.* – J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – V. 221. – P. 405–418.

А. Д. Маклаков (Казань)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФЛАШМЕЙЕРА–КАТРНОШКИ О ЧИСЛЕ ЭРМИТОВЫХ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Число инволютивных (т. е. $A^2 = \mathbb{I}_n$) $n \times n$–матриц ($n \geq 2$) над полем Галуа с q элементами $\mathbb{F}_q$ ($q = p^m$; $m \in \mathbb{N}, p$ — простое) определено в [1]. Матричное уравнение вида $f(X) = 0$, где f — заданный многочлен над полем $\mathbb{F}_q$, изучалось в [2, 3]. В [4] доказано, что имеется в точности q^{n^2-n} нильпотентных $(n\times n)$–матриц над полем $\mathbb{F}_q$. Известно также и число кососимметрических, симметрических и эрмитовых матриц (см. [5, стр. 397–399]).

В [6, 7] подсчитано число идемпотентных (т. е. $A^2 = A$) (2×2)–матриц над полем $\mathbb{F}_q$, ($q = p^m$; $m \in \mathbb{N}$, p — простое). Заметим, что при нечетном q число идемпотентных матриц совпадает с числом инволютивных матриц. В [7] поставлена задача о нахождении числа *эрмитовых* идемпотентов среди $q^2 + q + 2$ идемпотентных (2×2)–матриц. Справедлива

Теорема. *Для (2×2)–матриц над конечным полем Галуа $\mathbb{F}_{q^2}$ ($q = p^m$; $m \in \mathbb{N}$, p — простое, $p \neq 2$) число эрмитовых идемпотентов равно $q^2 + q\eta(2^{-2}\mu)$.*

Здесь η — действительная функция, заданная на мультипликативной группе $\mathbb{F}_q^*$ ненулевых элементов поля $\mathbb{F}_q$ нечетной характеристики (квадратичный характер поля $\mathbb{F}_q$), такая, что $\eta(c) = 1$ для элементов c, являющихся квадратами некоторых элементов группы $\mathbb{F}_q^*$, и $\eta(c) = -1$ для всех остальных элементов $c \in \mathbb{F}_q^*$, μ — произвольный элемент $\mathbb{F}_q$, для которого $\eta(\mu) = -1$.

Автор благодарит А.М. Бикчентаева за полезные обсуждения.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00441) и внебюджетным Республиканским фондом НИОКР РТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hodges J. H. *The matrix equations $X^2 - I = 0$ over a finite field*// Amer. Math. Monthly. - 1958. - V. 65. - P. 518–520.

2. Hodges J. H. *Scalar polynomial equations for matrices over a finite field*// Duke. Math. J. - 1958. - V. 25. - P. 291–296.

3. Brawley J. V. and Mullen G. L. *A note of equivalence classes of matrices over a finite field*// Int. J. Math. and Math. Sci. - 1981. - V. 4. - P. 279–287.

4. Gerstenhaber M. *On the number of nilpotent matrices with coefficients in a finite field*// Illinois J. Math. - 1961. - V. 5. - P. 330–333.

5. Лидл Р., Нидеррайтер Г. *Конечные поля. Том* 1. М.: Мир, 1988. - 428 с.

6. Flachsmeyer J. *Orthomodular posets of idempotents in finite rings of matrices*// Inter. J. Theor. Phys. - 1995. - V. 34. - No 8. - P. 1359–1367.

7. Flachsmeyer J. and Katrnoška F. *On the number of the idempotents of some matrix rings*// Tatra Mountains Math. Publ. - 1997. - V. 10. - P. 129–132.

Д. В. Маклаков (Казань)

О ВОЛНАХ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ДВИЖУЩИМСЯ ТЕЛОМ

Рассмотрим систему нелинейных периодических прогрессивных волн длиной λ, движущихся справа налево с постоянной фазовой скоростью c над плоским горизонтальным дном под действием силы тяжести. Пусть форма волн и поле скоростей в установившемся движении известны. Спрашивается, можно ли по этим данным определить фазовую скорость c перемещения волн? Поскольку физическое условие для определения c отсутствует, то, вообще говоря, этого сделать нельзя. Однако предположим, что рассматриваемая система волн возникла за некоторым телом в результате его поступательного перемещения параллельно дну со скоростью c . Тогда скорость движения тела будет совпадать с фазовой скоростью волн. Обозначим через h высоту невозмущенного уровня жидкости слева на бесконечности над дном. Для установившегося движения слева на бесконечности скорость потока $v_\infty = Q/h = c$, где Q — расход жидкости. Согласно уравнению Бернулли все скорости на уровне h будут одинаковы, поэтому справа на бесконечности справедливы соотношения

$$ch = Q, \quad c^2 + 2gh = C,$$

где g — ускорение силы тяжести, C — константа Бернулли. Так как мы предполагаем, что поле скоростей справа на бесконечности известно, то параметры Q, C и g также известны. Следовательно, эти соотношения можно рассматривать как систему двух уравнений относительно двух неизвестных c и h. Таким образом, для всякой периодической системы волн можно найти фазовую скорость c, которую имели бы эти волны, если бы они были сгенерированы движущимся телом, и определить глубину жидкости h слева на бесконечности. Можно получить также формулу для вычисления волнового сопротивления D тела. Табуляция параметров c, h и D была проведена численно. На основе проведенных расчетов получены точные верхние оценки длин волн и волнового сопротивления во всем диапазоне чисел Фруда: $0 < Fr < 1$.

Работа поддержана РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-00173).

Д. В. Маклаков, Р. Р. Шарипов (Казань)

БЕЗВОЛНОВОЕ ОБТЕКАНИЕ УГЛУБЛЕНИЯ НА ДНЕ

Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой жидкости над неровным дном, имеющем форму полигонального углубления. Задаются H — глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 — скорость набегающего потока, $\alpha\pi$ и $\beta\pi$ — углы наклона левой и правой стенок углубления к оси Ox соответственно, g — ускорение силы тяжести, которая действует в направлении обратном направлению оси Oy.

Для решения задачи применяется метод сопоставления плоскостей. Отыскивается конформное отображение области течения в физической плоскости z на полосу ширины $\pi/2$ в параметрической плоскости t. Вводится функция $\chi(t)$, связанная с производной dz/dt формулой:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2H}{\pi} \exp[\chi(t)].$$

Относительно аналитической функции $\chi(t)$ формулируется краевая задача, которая затем редуцируется к нелинейному интегральному уравнению:

$$\lambda(s) = \frac{2}{\pi f r^2} \exp(3S[\lambda](s)) \sin(TS[\lambda](s) + f(s)) \qquad (1),$$

где $\lambda(s) = \frac{d}{ds} \operatorname{Re} \chi(s+\pi i/2)$, $f(s)$ — известная функция аргумента s, S и T известные линейные интегральные операторы, $Fr = V_0/\sqrt(gH)$ — число Фруда.

После дискретизации уравнение (1) решается методом Ньютона. Определяются решения для сверхкритических режимов обтекания, не имеющие волн вниз по потоку. Установлено, что при достаточно большой глубине ямы решение становится неоднолистным и теряет физический смысл.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00169), фондом НИОКР АНТ и программой "Университеты России".

И. Е. Максименко (Санкт-Петербург)

БИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть M — целочисленная матрица $d \times d$, такая, что все её собственные числа по модулю больше 1, $m := |detM|$ и пусть $c : Z^d \to C$, $\varphi : R^d \to C$, тогда уравнение $\varphi(x) = \sum\limits_{q \in Z^d} mc(q)\varphi(Mx - q)$, $x \in R^d$ назовем масштабирующим, и будем говорить, что функция φ является (M,c)-масштабирующей. Определим оператор W_c, действующий из $l^2(R^d)$ в $l^2(R^d)$, по формуле $(W_c b)(p) := \sum\limits_{q \in Z^d} mc(Mp - q)b(q)$, $b \in l^2(R^d)$. Если $f : R^d \to C$, то через f_1 будем обозначать сужение f на целочисленную решетку. Пусть здесь и далее φ, $\tilde{\varphi} : R^d \to C$, с компактным носителем; c, $\tilde{c} : Z^d \to C$. Положим $\varphi_*(x) = \int\limits_{R^d} \varphi(t)\overline{\tilde{\varphi}(t-x)}dt$, $x \in R^d$; $c_*(p) = \sum\limits_{q \in Z^d} c(q)\overline{\tilde{c}(q-p)}$, $p \in Z^d$.

Теорема 1. *Пусть $c, \tilde{c}$ — последовательности такие, что $\hat{c}(0) = \hat{\tilde{c}}(0) = 1$. Функции $\varphi, \tilde{\varphi}$ — соответственно (M,c), $(M,\tilde{c})$-масштабирующие с компактным носителем. Тогда следующие условия равносильны:* 1. *Целые сдвиги функций φ, $\tilde{\varphi}$ биортогональны.* 2. *$\delta(p)$ - единственный собственный вектор оператора W_{c_*}, соответствующий собственному числу* 1 (*здесь $\delta(0) = 1$, $\delta(p) = 0$ если $p \neq 0$*). 3. а) *$mc_*(Mp) = \delta(p)$ для любого $p \in Z^d$* б) *$\hat{\varphi}_{*1}(u) \neq 0$ для любого $u \in R^d$*. 4. *$\hat{\varphi}_{*1}(u) = 1$ для любого $u \in R^d$.*

Маскам $c, \tilde{c}$ соответственно можно сопоставить 2π-периодические по каждой переменной функции, которые тоже часто называют масками $m_0(x) := \sum\limits_{k \in Z^d} c(k)e^{-i(k,x)}$, $\tilde{m_0}(x) := \sum\limits_{k \in Z^d} \tilde{c}(k)e^{-i(k,x)}$, $x \in R^d$. Положим $H = Z^d \cap M^*[0,1)^d$ (здесь M^* — сопряженная к M матрица).

Лемма. *Если целые сдвиги φ, $\tilde{\varphi}$ биортогональны и финит-*

ны, то

$$\sum_{s\in H} m_0(u+2\pi(M^{-1})^*s)\overline{\tilde{m}_0(u+2\pi(M^{-1})^*s)} = 1,$$

$$\text{для п.в. } u \in R^d. \qquad (1)$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi, \tilde{\varphi}$ *— соответственно* (M,c), $(M,\tilde{c})$*-масштабирующие функции с компактным носителем, их маски* m_0, $\tilde{m}_0$ *удовлетворяют условию* (1), $m_0(0) = \tilde{m}_0(0) = 1$. *Для того, чтобы целые сдвиги* φ, $\tilde{\varphi}$ *были биортогональны необходимо и достаточно, чтобы существовал компакт* K, *конгруэнтный* $[-\pi,\pi]^d$ *по модулю* 2π, *содержащий окрестность* 0, *такой что*

$$\inf_{k\in N}\inf_{u\in K}|m_0((M^{-k})^*u)| > 0, \ \inf_{k\in N}\inf_{u\in K}|\tilde{m}_0((M^{-k})^*u)| > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*// CBMS-NSR Series in Appl. Math., SIAM. – 1992.

2. Lawton W, Lee S. L, Chen Z. *Stability and orthonormality of multivariate refinable functions*// SIAM J. of Math. Anal. – 1997. – V. 28. – No 4. – P. 999–1014.

М. А. Малахальцев (Казань)

КОМПЛЕКС СПЕНСЕРА СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В работе [1] для любой интегрируемой G-структуры на гладком многообразии M построена резольвента пучка инфинитезимальных автоморфизмов этой структуры — комплекс пучков векторнозначных форм, являющийся P-комплексом Спенсера дифференциального оператора, индуцированного производной Ли. Для комплексной структуры соответствующий комплекс есть комплекс Дольбо, для структуры слоения — комплекс Вайсмана.

В [2] показано, что для многообразия над алгеброй этот комплекс выражается через комплекс Вайсмана-Молино, построенный в [3]. Важным примером интегрируемой G-структуры является симплектическая структура, которая активно изучается в связи с применениями в гамильтоновой механике (см., например, [4]).

Пусть (M,ω) — симплектическое многообразие. Соответствующая интегрируемая $Sp(n)$-структура, где $Sp(n)$ — группа симплектических преобразований, определяет подрасслоение аффиноров $E_{Sp(n)}$ и дифференциальный оператор $D : X(M) \to F = T_1^1(M)/E_{Sp(n)}$, где $X(M)$ — пучок векторных полей на M [1]. В адаптированной системе координат $DV = \frac{1}{2}(\partial_a V^b + \omega_{ac}\omega^{bq}\partial_q V^c)$. Симплектическая структура ω задает изоморфизм $\overline{\omega} : T_1^k M \to T^{k+1}M$, $t^j_{i_1\dots i_k} \to \omega_{i_1 s} t^s_{i_2\dots i_{k+1}}$.

Утверждение.
1) $\overline{\omega}(D(V)) = d(\overline{\omega}(V))$.
2) *P-комплекс симплектической структуры изоморфен комплексу де Рама многообразия M.*
3) *P-комплекс симплектической структуры есть резольвента пучка локально гамильтоновых векторных полей.*

Таким образом, когомологии P-комплекса симплектической структуры дают топологические инварианты многообразия и не содержат информацию о структуре ω. Сам P-комплекс зависит от ω, которая определяет изоморфизм этого комплекса и комплекса де Рама.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00308).

ЛИТЕРАТУРА

1. Malakhaltsev M. A. *The Lie derivative and cohomology of G-structures*// Lobachevskii J. of Math. – 1999. – V. 3. – C.195–198.

2. Гайсин Т. И. *Комплекс Спенсера для многообразий над алгебрами*// Тр. геом. семин. – Казань. – 1997. – Вып. 23. – С.33–41.

3. Шурыгин В.В. *О когомологиях многообразий над локальными алгебрами*// Изв. вузов. Математика. – 1996. – No 9. – С.71–85.

4. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений.* – М.: Изд-во «Факториал», 1995.

В. П. Маслов, А. С. Мищенко (Москва)

ГЕОМЕТРИЯ ЛАГРАНЖЕВОГО МНОГООБРАЗИЯ В ТЕРМОДИНАМИКЕ (ПРИНЦИП МИНИМИЗАЦИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА)

Считается, что классические термодинамические свойства вещества определяются соотношениями, связывающими объем, давление, температуру, энтропию и энергию данного вещества. В общем случае вещество характеризуется некоторым числом величин, половина которых является интенсивными, а половина — экстенсивными величинами. С этой точки зрения давление и температура считаются интенсивными величинами, а объем и энтропия — экстенсивными величинами. Современная точка зрения заключается в том, что в состоянии термодинамического равновесия вещество следует характеризовать точкой в пространстве $R^{2n+1}(p,q,\Phi)$, где координаты $q=(q_1,q_2,\dots,q_n)$ являются интенсивными величинами, первые две из которых являются давлением и температурой ($q_1 = P, \quad q_2 = -T$), а координаты $(p_1,p_2,\dots,p_n)$ являются экстенсивными координатами, первые две из которых являются объемом и энтропией ($p_1 = V, \quad p_2 = S$). Первые четыре координаты (P,V,T,S) описывают, так сказать, переменные механической природы для гомогенных веществ. В общем случае следует рассматривать гетерогенные (т.е. многокомпонентные) системы, а также переменные немеханической природы (например, электромагнитные свойства).

В любом случае, пространство $R^{2n+1}(p,q,\Phi)$ снабжается контактной структурой, т.е. дифференциальной 1-формой $\omega = d\Phi - pdq$, а множество термодинамических равновесных состояний вещества представляется подмногообразием $L \subset R^{2n+1}(p,q,\Phi)$, на котором $\omega = 0$. Следовательно, проекция $L_0 \subset R^{2n}(p,q)$ является лагранжевым подмногообразием в симплектическом пространстве $R^{2n}(p,q)$ с симплектической формой $\Omega = dp \wedge dq$. Функция Φ является функцией действия на лагранжевом многообразии L_0, $d\Phi = pdq$. Для классической термодинамики она совпадает с термодинамическим потенциалом ($\Phi = E + PV - TS$).

По Гиббсу [1] энергия E является функцией переменных (V, S), как, впрочем, и все остальные термодинамические величины. Это означает, что лагранжево многообразие L_0 взаимно-однозначно проектируется на область в пространстве $R^2(P,S)$, т.е. многообразие L задается графиком функции $E = E(V,S)$. Неявно Гиббс на самом деле предполагает, что поверхность $E = E(V,S)$, будучи некомпактной, обладает свойством, что всякая ее опорная плоскость касается поверхности в каждой общей точке. Это условие обеспечивает выполнение следующего утверждения: из минимизации термодинамического потенциала при фиксированных P и T следует положительность гессиана функции $E = E(V,S)$, $\mathrm{Hess}_{(V,S)}E(V,S) > 0$. По Маслову [3] такие состояния называются *существенными*. Тогда в существенных состояниях выполняются локальные термодинамические неравенства [2].

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}^L(q) = \min_{q(x)=q;\, x\in L} \Phi(x)$$

при условии существования указанного минимума. Рассмотрим симплектическое преобразование φ симплектических пространств

$$\varphi : R^{2n}(p,q) \longrightarrow R^{2n}(P,Q)$$

и лагранжево многообразие $\Gamma_\varphi \subset R_{4n}(P,p,Q,q)$, являющееся графиком преобразования φ. Пусть S — функция действия на лагранжевом многообразии Γ_φ, $dS = PdQ - pdq$. Предположим, что многообразие Γ_φ однозначно проектируется на пространство $R^{2n}(Q,q)$. Тогда функция S может пониматься как функция от переменных (Q,q), $S = S(Q,q)$. В этом случае функция S называется *производящей функцией* преобразования φ.

Симплектическое преобразование естественно продолжается до контактного преобразования контактных пространств

$$\tilde{\varphi} : R^{2n+1}(p,q,\Phi) \longrightarrow R^{2n+1}(P,Q,\Phi_1).$$

Пусть $L_1 = \tilde{\varphi}(L)$ и $\tilde{\Phi}^{L_1}(Q)$ определяется по аналогии для многообразия L_1.

Теорема 1. *При подходящем выборе граничных условий на многообразие L и преобразование φ имеет место следующая формула*

$$\tilde{\Phi}^{L_1}(Q) = \min_q \left(S(Q,q) + \tilde{\Phi}^L(q) \right).$$

Аналогично, если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ — последовательность симплектических преобразований, допускающих производящие функции

$$S_1(Q,q_1), S_2(q_1,q_2), \ldots, S_n(q_{n-1},q_n)$$

и $L_1 = \tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2\cdots\tilde{\varphi}_n(L)$, то

$$\tilde{\Phi}^{L_1}(Q) = \min_{q_1,q_2,\ldots,q_n}((S_1(Q,q_1) + S_2(q_1,q_2) + \cdots +$$

$$+ S_n(q_{n-1},q_n) + \tilde{\Phi}^L(q_n))).$$

Выбор граничных условий должен обеспечить существование минимума при вычислении $\tilde{\Phi}^{L_1}$. Теорема 1 обеспечивает отображение несущественных точек многообразия L в несущественные точки многообразия L_1 (ср. [3]).

Теорема 2. *Пусть матрица $Hess_{(Q,q)}S(Q,q)$ имеет индекс инерции, равный (n,n), и пусть существует минимум*

$$\tilde{\Phi}^{L_1}(Q) = \min_q \left(S(Q,q) + \tilde{\Phi}^L(q) \right).$$

Тогда

$$Hess_Q\tilde{\Phi}^{L_1}(Q) < 0.$$

Теорема 2 обеспечивает выполнение локальных термодинамических неравенств в существенных точках лагранжевого многообразия L_1.

Теорема 3. *Пусть L — лагранжево многообразие, однозначно проектирующееся на p–координаты. Тогда при подходящем выборе граничных условий в существенных точках выполняются локальные термодинамические неравенства, т.е.*

$$Hess_q \Phi^L(q) < 0.$$

В качестве подходящих граничных условий для теоремы 3 может служить следующее условие:

Условие 1. *Функция $E(p)$, $dE = -qdp$, $E = \Phi^L(p) - pq$ локально выпукла вверх во всей области определения $G(p) \subset R^n(p)$ за исключением некоторого компакта $K \subset G(p)$.*

Условие 1 выполняется для большинства модельных примеров газов (идеальный газ, газ Ван дер Ваальса, вырожденный газ Ферми).

Теоремы 1 и 2 позволяют построить такое лагранжево многообразие, которое не проектируется однозначно на p–координаты, но во всех существенных точках удовлетворяет локальным термодинамическим неравенствам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиббс Дж. В. *Метод геометрического представления термодинамических свойств веществ при помощи поверхностей.* – В книге: "Термодинамика. Статистическая механика". – М.: Наука, 1982. – С. 40–60.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика.* – М.: Наука, 1964.

3. Маслов В. П. *Об одном классе лагранжевых многообразий, отвечающем вариационным задачам, задачам теории управления и термодинамики*// Функц. анализ и его приложения. – 1998. – Т. 32. – No 2. – С. 89–91.

А. В. Медведев (Москва)

О ВОГНУТОЙ МАЖОРАНТЕ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Получены два обобщения леммы С.Б. Стечкина [1] о вогнутой мажоранте модуля непрерывности.

Пусть $T = I_1 \times \ldots \times I_n$, где для каждого $\overline{1,n}$ $I_i = [0,\infty)$ или $I_i = [0, l_i]$, $0 < l_i < \infty$, $n \geq 1$.

Функция $\omega(t)$, определенная на T, называется модулем непрерывности, если она непрерывна, полуаддитивна, не убывает по каждому аргументу t^i, $\omega(0) = 0$ и $\omega(t) > 0$ для $t \neq 0$.

Теорема 1. *Если $\omega(t)$ — модуль непрерывности, определенный на T, то существует вогнутый модуль непрерывности $\bar{\omega}(t)$, определенный на T и удовлетворяющий на $T \setminus \{0\}$ неравенству $\omega(t) \leq \bar{\omega}(t) < (k+1)\omega(t)$, где k — число отличных от нуля координат точки t. Кроме того, существует модуль непрерывности $\omega(t)$ с областью определения T, для которого ни один из множителей $k+1$ нельзя заменить на меньшую константу.*

Теорема 2. *Для любого модуля непрерывности $\omega(t)$, заданного на $T = [0,\infty)$ или $T = [0,l]$, $0 < l < \infty$, существует вогнутый на T и бесконечно дифференцируемый на $T \setminus \{0\}$ модуль непрерывности $\bar{\omega}(t)$, удовлетворяющий неравенству $\omega(t) \leq \bar{\omega}(t) < 2\omega(t)$ для всех $t \in T \setminus \{0\}$, причем $\bar{\omega}(t) = \omega'(0)t$ в некоторой окрестности нуля, если $\omega'(0) < \infty$. Кроме того, существует модуль непрерывности $\omega(t)$ с областью определения T, для которого множитель 2 нельзя заменить на меньшую константу.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов А. В. *Линейные методы приближения непрерывных периодических функций*// Мат. Сборник. - 1961. - Т. 54. - Вып. 1.

А. В. Мерлин (Чебоксары)

О ПОЛНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В КЛАССЕ НЕСУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается полное сингулярное интегральное уравнение [1]

$$K\varphi = K^0\varphi + \lambda k\varphi = f, \quad x \in J\backslash\tau, \tag{1}$$

где $J = [\alpha; \beta]$ — отрезок действительной прямой, $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_{n+1}\}, x_0 = \alpha, x_{n+1} = \beta$ — разбиение отрезка J. $K^0 = aI + bS$ — характеристический сингулярный интегральный оператор с гельдеровскими коэффициентами $a(x), b(x)$, причем $a^2(x) - b^2(x) \equiv 1$ на J, I — тождественный оператор, S — оператор сингулярного интегрирования вдоль J, k — регулярный оператор с гельдеровским по обеим переменным ядром, λ — числовой параметр и $|\lambda|$ — достаточно малая величина.

Уравнение (1) решается в классе функций, представимых в виде

$$\varphi(x) = \psi(x) \cdot \omega^{-1}(x), \tag{2}$$

где $\psi(x)$ — функция из класса Н. И. Мусхелишвили [1] с узлами $\alpha, \beta; \omega(x) = \prod\limits_{j=1}^{n}(x - x_j)$. Правая часть $f(x)$ уравнения (1) берется также из класса (2).

Решение уравнения (1) строится по классической схеме с учетом представления (2). Сначала решается уравнение $K^0\varphi = f$ в классе (2) [2], затем проводится регуляризация методом Карлемана–Векуа. Регуляризованное уравнение решается методом последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 512 с.

2. Мерлин А. В. *О несуммируемых решениях сингулярного интегрального уравнения*// Изв. вузов. Математика. – 1975. – No 6. – С. 87–95.

М. В. Мещеряков (Саранск)

ВЛОЖЕНИЯ ГРАССМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ $G_2(V)$ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СЕКЦИОННОЙ КРИВИЗНЫ

Функциональная природа секционной кривизны $K_\sigma : G_2(V) \to \mathbf{R}$ на грассманиане $G_2(V)$ двумерных подпространств линейного пространства V исследована лишь в ряде специальных случаев. Представляет интерес изучение задачи Петрова-Зингера-Торпа (см. [1, 2]) о нормальных формах алгебраических тензоров кривизны на основе некоторого аналога вложения Веронезе в алгебраической геометрии, позволяющего линеаризовать K_σ. Алгебраический тензор кривизны $R : \Lambda^2(V) \to \Lambda^2(V)$ — самосопряженный оператор в алгебре Ли $\Lambda^2(V)$ группы ортогональных операторов $SO(V)$. Пространство $S^2(\Lambda^2(V))$ таких тензоров приводимо относительно действия $SO(V)$ и допускает разложение $B \oplus \Lambda$ в сумму инвариантных подпространств B и Λ. Здесь B — пространство тензоров кривизны, удовлетворяющих тождеству Бьянки, а Λ — изоморфное внешней степени $\Lambda^4(V)$, ортогональное дополнение к B в метрике $< R_1, R_2 >= \mathrm{Tr}\,(R_1 \cdot R_2)$ на $S^2(\Lambda^2(V))$. Положим $N = \dim(\Lambda^2(V))$.

Теорема. *Отображение $i : \alpha \mapsto P_\alpha$, сопоставляющее $\alpha \in \Lambda^2(V)$ ортопроектор на одномерное подпространство, порожденное α, задает вложение $\mathbf{RP}^{N-1}$ в пространство $S^2(\Lambda^2(V))$, причем образ $i(G_2(V))$ определяется системой уравнений $P^2 = P, P^* = P$, $< P, \varepsilon >= 0, \forall \varepsilon \in \Lambda$, а функция $K_\sigma(\alpha) =< R\alpha, \alpha > / < \alpha, \alpha >= \mathrm{Tr} RP_\alpha$ линеаризуется, становясь функцией высоты на пересечении $i(G_2(V)) = B \cap i(\mathbf{RP}^{N-1})$.*

Сделаем замену $X = E - 2P$ в $\mathrm{End}(\Lambda^2(V)) = S^2(\Lambda^2(V)) \oplus so((\Lambda^2(V))$. Теперь пара $G_2(V) \subset \mathbf{RP}^{N-1}$ вкладывается в $SO(N)$ и $G_2(V)$ реализуется как пересечение $SO(N)$ с плоскостью $B \cap \{X : \mathrm{Tr}\mathrm{X} = N - 2\}$ и $K_\sigma(X) = 1/2\mathrm{Tr}R - 1/2\mathrm{Tr}(R \cdot X)$. Используя важные примеры интегрируемых градиентных потоков на $SO(N)$ из [3], получаем (см. для сравнения [4])

Следствие. *Критические точки кривизны K_σ в реализации*

$G_2(V) \subset SO(N)$ являются решениями уравнения $\beta(XRX) = R$, где $\beta : S^2(\Lambda^2(V)) \to S^2(\Lambda^2(V))$ — проектор Бьянки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 496 с.

2. Johnson D. L. *Sectional curvature and curvature normal forms*// Michigan Math. J. – 1980. – V. 27. – P. 275–293.

3. Веселов А. П., Дынников И. А. *Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса*// Алгебра и анализ. – 1996. – Т. 8, No 3. – С. 78–103.

4. Мещеряков М. В. *Оценки секционных кривизн римановых симметрических пространств*// УМН. – 1996. – Т. 51, No 1. – С. 157–158.

В. П. Микка (Йошкар-Ола)

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ВЫПУКЛЫХ КОНТУРАХ С ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНОЙ И С ОДНОЙ УГЛОВОЙ ТОЧКОЙ

Принцип максимума Понтрягина [1] позволяет установить теорему о структуре решения следующей экстремальной задачи.

Требуется определить фигуру наименьшей площади, если ее граница является выпуклым контуром с одной угловой точкой, имеющим фиксированную длину $l(L)$ и ограниченную кривизну $k(L) \in [0, k_0]$.

Теорема. *Если класс контуров, удовлетворяющих условиям задачи, непуст, то ее решение, составленное из окружностей радиуса $\frac{1}{k_0}$ и отрезков, касательных к ним, существует.*

С помощью метода симметризации Штейнера [2], обосновано решение задачи о минимуме площади:

Если длина контура, имеющего одну угловую точку с величиной $\alpha \in (0, \pi)$ и ограниченную кривизну $k(L) \in [0, k_0]$, удовле-

творяет условию

$$l(L) > \frac{2}{k_0}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2} + (\pi + \alpha\pi)\frac{1}{k_0},$$

то решение задачи о минимуме площади существует, и этот контур составлен из дуг окружностей радиуса $\frac{1}{k_0}$, касающихся сторон угла в вершине угла, двух отрезков касательных к ним и дуги окружности радиуса $\frac{1}{k_0}$ с центром на биссектрисе угла.

Отметим, что при отсутствии ограничения сверху на кривизну, решение указанной задачи не существует, а наименьшее значение площади при любых значениях длины равняется нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1961. – 392 с.

2. Бляшке В. *Круг и шар.* – М: Наука, 1967. – 232 с.

Г. Ф. Мирзиева, Ф. Г. Мухлисов (Казань)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Рассматривается уравнение вида

$$U_{xx} + \operatorname{sign} y B_y U = 0, \tag{1}$$

где $B_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{k}{y}\dfrac{\partial}{\partial y}$ — оператор Бесселя.

Пусть D — область, ограниченная при $x \geq 0$ спрямляемой жордановой кривой Γ с концами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$ и отрезком $[0, A]$ оси $0x$, а при $x \leq 0$ характеристикой BC уравнения (1), выходящей из точки B и пересекающейся с осью $0x$ в точке $C(-1,0)$ и отрезком $[C, 0]$ оси $0x$.

Часть области D, лежащую в полуплоскости $x > 0$ $(x < 0)$, обозначим через D^+ (D^-).

Задача. *Найти в области D четное по y решение уравнения* (1), *непрерывное в* $\overline{D}$, *принимающее на кривой* Γ *и на характеристике* BC *заданные непрерывные значения*

$$U|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad U|_{BC} = \psi(x), \tag{2}$$

и удовлетворяющее при $x = 0$ *условиям склеивания*

$$U(+0, y) = U(-0, y), \quad \frac{\partial U(+0, y)}{\partial x} = \frac{\partial U(-0, y)}{\partial x}. \tag{3}$$

Пусть $U(x, y)$ — решение задачи (1) — (3). Вводим обозначения

$$U(0, y) = \tau(y), \quad 0 < y < 1, \tag{4}$$

$$U_x(0, y) = \nu(y), \quad 0 < y < 1. \tag{5}$$

Пусть $\overline{U}(x, y)$ — решение задачи типа N: *найти четное по y решение уравнения (1) в области D^+, удовлетворяющее граничным условиям:*

$$U|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad U_x|_{OB} = \nu(y),$$

а $\widetilde{U}(x, y)$ — решение задачи Коши: *найти четное по y решение уравнения* (1) *в области* D^-, *удовлетворяющее начальным условиям* (4), (5).

Тогда $U(x, y)$, определяемая формулой

$$U(x, y) = \begin{cases} \overline{U}(x, y) & (x, y) \in D^+, \\ \widetilde{U}(x, y) & (x, y) \in D^- \end{cases}$$

будет решением задачи (1) — (3), если она удовлетворяет второму условию из (3) и условию (4). Подставляя (6) в условие (4) и во второе граничное условие (2), получаем относительно $\tau(y)$ и $\nu(y)$ систему интегральных уравнений. Доказывается однозначная разрешимость полученной системы интегральных уравнений.

А. Н. Миронов (Елабуга)

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В R^n

Рассматривается уравнение

$$u_{x_1 x_2 \dots x_n} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_n^k} a_{q_1 \dots q_k} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} = 0, \tag{1}$$

$$Q_n^k = \{(q_1, \dots, q_n) \mid q_1 < \dots < q_k,\, q_{k+1} < \dots < q_n,\, 1 \le q_i \le n\}.$$

Задача Гурса ставится для него следующим образом [1]: найти регулярное решение (1), удовлетворяющее на характеристиках $x_i = x_i^0$, $i = \overline{1,n}$, условиям

$$u|_{x_i = x_i^0} = \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Здесь речь идет о связи между φ_i, $i = \overline{1,n}$, и значениями нормальных производных порядка $m \ge 2$ функции u на соответствующих характеристиках.

Рассмотрим характеристику $x_1 = x_1^0$. Сведем (1) к системе

$$v_{s\, x_{s+1}} + a_{s+1} v_s = \sum_{k=1}^{s} \sum_{Q_s^k} h_{q_1 \dots q_k, s+1} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_s}} + v_{s+1}, \quad s = \overline{0, n-1}, \tag{2}$$

где $v_0 \equiv u$, $v_n \equiv 0$, функции $h_{q_1 \dots q_{k-1}, q_k}$ определяются соотношениями

$$h_{q_1 \dots q_{k-1}, q_k} = (a_{q_1 \dots q_{k-1}})_{x_{q_k}} + a_{q_1 \dots q_{k-1}} a_{q_k} - a_{q_1 \dots q_k},$$

$$1 \le q_1 < q_2 < \dots < q_k \le n, \quad k = \overline{2,n}.$$

Пусть $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^m}(x_1^0, x_2, \dots, x_n)$ задана. Продифференцируем соответствующее $s = 0$ уравнение системы (2) $m-1$ раз по x_1. Затем последовательно от $s = n-1$ к $s = 1$ разрешаем уравнения (2) относительно функций v_s. В результате получим нагруженное $(n-1)$-мерное интегральное уравнение Вольтерра относительно

φ_1. При этом, вообще говоря, функция $\varphi_1(x_2,\ldots,x_n)$ определяется по $\dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^m}(x_1^0,x_2,\ldots,x_n)$ с точностью до произвольных функций $\left.\dfrac{\partial^p u}{\partial x_1^p}\right|_{\substack{x_1=x_1^0\\ x_i=x_i^0}}$, $p=\overline{0,m-1}$, $i=\overline{2,n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. *Задача Гурса в n-мерном пространстве*/ Редакция СМЖ. – Новосибирск, 1997. – Деп. в ВИНИТИ 08.07.97, No 2290–В97. – 4 с.

Н. П. Миронов (Елабуга)

СРАВНЕНИЕ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается уравнение

$$y'(x)=\int_0^\infty y^\alpha(x-s)\,dr(x,s)\quad (a\le x<b) \tag{1}$$

с начальной функцией $\varphi(t)$ и уравнение

$$z'(x)=\int_0^\infty z^\alpha(x-s)\,dr_1(x,s)\quad (a\le x<b) \tag{2}$$

с начальной функцией $\psi(t)$, $\alpha>0$.

Начальные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $(-\infty,a]$, ядра $r(x,s)$ и $r_1(x,s)$ не убывают по s при каждом фиксированном $x\in[a,b)$ и обеспечивают существование и единственность решений на $[a,b)$.

Интегрирование ведется по s, интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Далее используются обозначения из [1], $\psi_0=\inf\limits_{(-\infty,a]}\psi(x)$.

Для монотонных решений уравнений (1) и (2) справедлива следующая теорема сравнения.

Теорема. 1) *Если* $r(x,s) \le r_1(x,s)$, $r_1(x,+\infty) > 0$ $(a \le x < b$, $0 \le s < +\infty)$, $\psi(x_1) > |\varphi(x)|$ $(-\infty < x \le x_1 \le a)$, $\psi_0 > 0$, $(-1)^\alpha = 1$, *то* $y'(x) < z'(x)$ $(a \le x < b)$.

2) *Если* $r(x,s) \le r_1(x,s)$, $r(x,+\infty) > 0$ $(a \le x < b$, $0 \le s < +\infty)$, $\psi(x_1) > |\varphi(x)|$ $(-\infty < x \le x_1 \le a)$, $\psi_0 \ge 0$, $(-1)^\alpha = 1$, *то* $y'(x) < z'(x)$ $(a \le x < b)$.

3) *Если* $r(x,s) \le r_1(x,s)$, $r_1(x,+\infty) > 0$ $(a \le x < b$, $0 \le s < +\infty)$, $\psi(x_1) > \varphi(x)$ $(-\infty < x \le x_1 \le a)$, $\psi_0 > 0$, $(-1)^\alpha = -1$, *то* $y'(x) < z'(x)$ $(a \le x < b)$.

4) *Если* $r(x,s) \le r_1(x,s)$, $r(x,+\infty) > 0$ $(a \le x < b$, $0 \le s < +\infty)$, $\psi(x_1) > \varphi(x)$ $(-\infty < x \le x_1 \le a)$, $\psi_0 \ge 0$, $(-1)^\alpha = -1$, *то* $y'(x) < z'(x)$ $(A \le x < b)$.

5) *Если в условиях пунктов* 1) *и* 3) *всюду допускать знак равенства, то при выполнении хотя бы одного из условий* $\delta_0 > 0$ *или* $\alpha \ge 1$ *для некоторого* $[a, b_1)$, *где* $b_1 < b$, *будет* $y'(x) \le z'(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М.: Наука, 1972. – 352 с.

В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров (Казань)

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ АРГУМЕНТА В 2π–ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

Пусть $p > 0$ и $q \ge 0$ — целые числа, $M(p,q)$ (с наименьшим q) — множество всех целых чисел $m \ge 0$ таких, что для каждого целого k числа $\dfrac{k^m - k^q}{p}$ четные; $J = \{-(p-1), \cdots, -1, 0, \cdots, p\}$; целые числа $q_1, \cdots, q_N$ таковы, что при всех $a \in J$, $q \ge 2$ в случае $M(p,q) \bigcap [1, N-1] \ne \emptyset$, числа $\frac{1}{p}{\sum_q}' \sum_{j=m+1}^N q_j C_J^m (-a)^{j-m}$ чётные, где $C_j^m = \dfrac{j!}{m!(j-m)!}$, символ ${\sum_q}'$ означает, что суммирование производится по всем $m \in$

$M(p,q)\bigcap[1,N-1]$;

$$h_a=-\frac{1}{p}\sum_1{}' \sum_{j=m+1}^{N} q_j C_j^m(-a)^{j-m}, d_a=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{N} q_j(-a)^j.$$

Теорема. $2\pi-$*периодичесская задача* $\sum_{s=0}^{Q}\sum_b(c_{s,b}y^{(s)}(t+\pi\tau_{s,b,1})+\sum_{a\in J}f_{s,b,a}(2pt)\exp(iat)\times\ y^{(s)}(t+\pi(\tau_{s,b,2}+h_a)))=0$, *имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ненулевое решение имеет задача*

$$\sum_{s=0}^{Q}\sum_b(c_{s,b}z^{(s)}(t+\pi\tau_{s,b,1})+g_{s,b}(t)z^{(s)}(t+\pi\tau_{s,b,2}))=0,$$

в которой
$g_{s,b}(t)=\sum_n\sum_{a\in J}f_{s,b,a,r}\exp(i\pi d_a)\exp(-i\pi(2p\pi+a)h_a)\times$ $\exp(i(2pn+a)t)$ *и* $f_{s,b,a,r}$ — *коэффициент Фурье с номером* r *функции* $f_{s,b,a}(x)\in L^2(2\pi)$, $i=\sqrt{-1}$.

Следствие. *Задача*

$$y^{(1)}(t)=\sum_{a\in J}f_a(2pt)\exp(iat)y(t+\pi h_a),\quad y(t+2\pi)\equiv y(t)$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\int_0^{2\pi}f_0(2pt)dt=ik$ *при некотором целом* k.

Ранее подобные результаты удавалось получить (см. [1], [2]) только, когда коэффициенты уравнения принадлежали классу Харди $H_2(2\pi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мокейчев В. С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – 222 с.

2. Сидоров А. М. *Об аналитичности спектральных пар несамосопряженных операторов*: Дисс ... канд. физ.–мат. наук. – Казань, 1996. – 99 с.

О. А. Монахова (Пенза)

О НЕКОТОРЫХ ЛИФТАХ НА ТЕНЗОРНОМ РАССЛОЕНИИ ТИПА (0, 2)

В работе рассматриваются вертикальные лифты тензорных полей типа $(0,2)$, полные и горизонтальные лифты векторных полей, найдены их компоненты относительно натурального репера на расслоении, доказан ряд тождеств.

Пусть M_n — гладкое многообразие, $T_2^0(M_n)$ — расслоенное пространство тензоров типа $(0,2)$. Локальная карта (U, x^i) на базе индуцирует локальную карту на расслоении $(\pi^{-1}(U), x^i, x_{jk})$, где $\pi : T_2^0(M_n) \to M_n$ есть проекция расслоения, $\pi(x^i, x_{jk}) = (x^i)$ $(i, j, k = 1, \dots, n)$. На базе M_n относительно локальных координат (x^i) имеем поле натурального репера $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и дуального ему корепера dx^j. Тогда локально векторное поле X записывается в виде $X = X^i \partial_i$, а тензорное поле Q типа $(0,2)$ в виде $Q = Q_{jk} dx^j \otimes dx^k$. На расслоении поле натурального репера определяют векторы: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\overset{jk}{\partial}_{\bullet} = \frac{\partial}{\partial x_{jk}}$. Найдены разложение вертикального лифта тензорного поля Q типа $(0,2)$ по натуральному реперу на $T_2^0(M_n)$: $Q^V = Q_{ij}\partial^{ij}$ и компоненты полного лифта векторного поля $X = X^i \partial_i$, заданного на базе M_n:

$$X^C = X^k \partial_k + (-\partial_i X^m x_{mj} - \partial_j X^m x_{im})\partial^{ij}.$$

Если на базе M_n задана аффинная связность ∇, то можно получить компоненты горизонтального лифта векторного поля X:

$$X^H = X^k \partial_k + X^s(\Gamma^m_{si} x_{mj} + \Gamma^h_{sj} x_{ih})\partial^{ij}.$$

Вычислены следующие коммутаторы (X — векторное поле, Q, W — тензоры типа (0,2) на M_n):

$[Q^V, W^V] = 0,$

$[X^H, Q^V] = (X^k \partial_k Q_{pq} - X^s(\Gamma^m_{sp} Q_{mq} + \Gamma^h_{sq} Q_{ph}))\partial^{pq},$

$[X^C, Q^V] = (X^k \partial_k Q_{pq} + Q_{mq}\partial_p X^m + Q_{ph}\partial_q X^h)\partial^{pq}.$

Доказаны тождества:

$[X^H, Q^V] = (\nabla_X Q)^V$, где $\nabla_X Q$ — ковариантная производная тензорного поля Q типа $(0,2)$ в направлении векторного поля X.

$[X^C, Q^V] = (L_X Q)^V$, где $L_X Q$ — производная Ли тензорного поля Q типа $(0,2)$ в направлении векторного поля X.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry.* – New York, 1973.

Н. А. Москалев, Ф. Г. Мухлисов (Казань)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ МЕТОДОМ ГРИНОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В конечной области D_i евклидова пространства E_p, ограниченной гиперповерхностью Ляпунова Γ; $D_e = E_p \setminus D_i$, рассматривается задача дифракции об отыскании решений уравнений

$$\Delta U_j + \lambda_j^2 U_j = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

соответственно в областях D_i и D_e, удовлетворяющих на границе Γ условиям сопряжения

$$U_1^+ - U_2^- = f_1,$$

$$\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial U_1^+}{\partial n_z} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial U_2^-}{\partial n_z} = \varphi_1,$$

а на бесконечности U_2 удовлетворяет условиям излучения Зоммерфельда

$$\int_{S_R} |U_2|^2 dS_R = O(1),$$

$$\int_{S_R} \left| \frac{\partial U_2}{\partial r} - i\lambda_2 U_2 \right|^2 dS_R = o(1).$$

Известно [1], если λ_1^2 не является собственным значением Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа, то внутренние и внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца однозначно разрешимы. Поэтому при этом условии для этих задач существуют функции Грина. Пусть $G_1(x,\xi)$ и $G_2(x,\xi)$ — функции Грина соответственно внутренней и внешней задач Дирихле, а $N_1(x,\xi)$ и $N_2(x,\xi)$ — функции Грина внутренней и внешней задач Неймана. Тогда гриновые потенциалы имеют вид

$$W_j(x,\nu) = \int\limits_\Gamma \nu(\xi)\frac{\partial G_j(x,\xi)}{\partial n_\xi}d\Gamma, \quad V_j(x,\mu) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi)N_j(x,\xi)d\Gamma,$$

где $\nu(\xi), \mu(\xi)$ — плотности потенциалов.

Решения задачи дифракции ищем в виде

$$U_j = a_j V_j(x,\mu) + b_j W_j(x,\nu) \qquad (j = 1,2).$$

Удовлетворяя условиям сопряжения, сводим задачу дифракции к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\mu(\zeta) + \lambda \int\limits_\Gamma \mu(\eta)K(\zeta,\eta)d\Gamma = F(\zeta),$$

где λ — вполне определенное число.

Доказана однозначная разрешимость этого интегрального уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

Мохамед Сабри Салем (Каир)

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

Мы изучаем семейство 2π-периодических функций $f(x)$, которое определяется тем, что на каждом интервале (a,b) длины $b-a<\pi$ функции этого семейства являются суб-M функциями в смысле Е.Ф. Беккенбаха [1]. Порождающие функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ задаются как линейно независимые решения уравнения вида

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Мы решаем ряд экстремальных задач в этом семействе – периодическом аналоге выпуклых функций. В частности, для 2π-периодических суб-М функций доказываются аналоги неравенств Адамара (см., например, [2]) и теоремы Майлса [3]. А именно, мы доказываем, что

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

при условиях

$$g_i(a) = g_i(b) = 2g_i\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{2}{b-a}\right)\int\limits_a^b g_i(x)\,dx \quad (i=1,2)$$

и находим точку минимума функции

$$\varphi(s) = \int\limits_a^b \Big[f(x) - T_s(x)\Big]\,dx,$$

где $T_s(x)$ — опорная функция для $f(x)$ в точке s.

Кроме того, мы показываем, что в некоторых случаях функции этого семейства реализуются как индикатрисы роста целых решений уравнения Бельтрами.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю Ф.Г. Авхадиеву за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beckenbach E. F. *Generalized convex functions*// Bull. Amer. Math. Soc. - 1937. - V. 43. - P. 363–371.

2. Dragomir S. S. and Mond M. *Integral inequalities of Hadamard type for Log-convex functions*// Demonstr. Math. - 1998. - V. 31. - P. 355-364.

3. Miles M. J. *An extremum property of convex functions*// Amer. Math. Monthly. - 1969. - V. 76. - P. 921–922.

Р. Г. Мухарлямов (Москва)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Решение вариационных задач с ограничениями, исследование динамики несвободных механических и электромеханических систем приводит к системе, состоящей из дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \nu} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q + F^T\lambda, \quad V = \dot{q}, \tag{1}$$

$$q = (q_1, \ldots, q_n),\ L = L(\nu, q, t),\ Q = Q(\nu, q, t),\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r),$$
$$F = (f_{ij}), \quad i = \overline{1, r},\ j = \overline{1, n},$$

и уравнений связей

$$f(q, t) = 0, \quad f'(\nu, q, t) = 0, \tag{2}$$

$$f = (f_1, \ldots, f_m),\ f' = (f_{m+1}, \ldots, f_r),\ f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j},\ i = \overline{1, m},$$
$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \nu_j},\ i = \overline{m+1, r}.$$

Уравнения (1) и (2) составляют систему дифференциально–алгебраических уравнений индекса 3 (ДАУ–3) относительно неизвестных q, λ. Система (1), (2) может быть приведена к ДАУ–2

$$\frac{dx}{dt} w(x, t) + B(x, t)\lambda, \quad g(x, t) = 0. \tag{3}$$

ДАУ вида (1) — (2) или (3) привлекают серьезное внимание исследователей в последние годы. Разработке методов решения ДАУ посвящено значительное число работ. Для обеспечения устойчивости решения ДАУ–3 предлагается учитывать отклонения от уравнений связей (2):

$$f(q, t) = \alpha, \quad f'(\nu, q, t) = \alpha', \tag{4}$$

$$\ddot{\alpha} = a(\dot{\alpha}, \alpha, \alpha', \nu, q, t), \quad \dot{\alpha}' = a'(\dot{\alpha}, \alpha, \alpha', \nu, q, t). \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) различного назначения были введены в работах А. Пуанкаре, Т. Леви–Чивита, У. Амальди и в работе [1] основателя Казанской школы устойчивости Н. Г. Четаева. Их можно рассматривать как уравнения программных связей и уравнений возмущений связей [2]. Соответствующее уравнение связей ДАУ–2 заменяется системой

$$g(x,t) = \beta, \quad \dot{\beta} = b(\beta, x, t).$$

Решение ДАУ состоит из двух этапов. На первом этапе из уравнений (3), (6) определяется вектор λ. Второй этап заключается в решении дифференциального уравнения с определенным λ и соответствующими начальными или граничными условиями. Определение выражения равносильно построению системы дифференциальных уравнений по заданным частным интегралам [3, 4]. Последняя задача имеет неоднозначное решение. Правые части искомых дифференциальных уравнений содержат произвольные функции, которые можно использовать для обеспечения устойчивости связей $g(x,t) = 0$ и для других целей. Критерий устойчивости основывается на методе функций Ляпунова. Соответствующий выбор уравнений связей и правых частей дифференциальных уравнений дает решение обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений (ОЗ КТДУ), поставленной М. И. Алмухаметовым.

Задачи построения дифференциальных уравнений, имеющих сложные особые точки, рассматривались С. В. Волковым. Решение ОЗ КТДУ используется также для составления уравнений неголономных программных связей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. *О вынужденных движениях. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.* — М.: Изд. АН СССР, 1962. — С. 329 – 335.

2. Мухарлямов Р. Г. *Об уравнениях кинематики и динамикн несвободных механических систем* // Вестник РУДН, сер. “Прикладная математика и информатика”. — 2000. — N 1. — С. 24 – 32.

3. Еругин Н. П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кри-*

вую // ПММ. — 1952. — Т. XXI, вып. 6. — С. 659 - 670.
4. Мухарлямов Р. Г. *О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию* // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т. 7, N 10. — С. 1825 - 1834.

Р. Г. Мухарлямов (Москва)

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО - АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система дифференциально–алгебраических уравнений

$$\dot{x} = w(x,t) + B(x,t)\lambda, \quad f(x,t) = 0, \quad x(t_0) = x^0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

приводится к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = c\,[f_x C] + f_x^+ \left(Pf - f_t\right), \quad x(t_0) = x^0, \qquad (1)$$

где $[f_x C]$ — векторное произведение. Определяются условия, накладываемые на скаляр c и матрицы C, P, для того, чтобы решение системы удовлетворяло уравнению связей $f(x,t) = 0$ с заданной точностью.

Теорема 1. *Существуют такие постоянные $\alpha, \tau_1, \varepsilon$ и матрица $P(x,t)$, что при выполнении неравенств*

$$\|f^0\| \le \varepsilon, \quad \tau \le \tau_1, \quad \|E + \tau P(x,t)\| \le \alpha < 1,$$

$$\tau_1^2 \left\| f^{(k2)} \right\| \le 2(1-\alpha)\varepsilon, \quad f^{(k2)} = v^T f_{xTx} v + \varepsilon f_{xt} v + f_{tt}, \quad v = \dot{x},$$

решение разностного уравнения

$$x^{k+1} = x^k + \tau v^k, \quad x^k = x(t_k), \quad f^k = f(x^k, t_k), \quad t_{k+1} = t_k + \tau,$$

удовлетворяет условию $\left\|f^k\right\| \le \varepsilon$ при всех $k \ge 1$.

Теорема 2. *Если для решения уравнения (1) используется разностная схема*

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k, \quad \Delta x^k = \tau(1-\sigma)v^k + \sigma\overline{v}^k, \quad \sigma > 0,$$

$$\overline{v}^k = v(\overline{x}^k, t_k + \alpha\tau), \quad \alpha > 0,$$
$$\overline{x}^k = x_k + \alpha\tau v^k,$$

и при всех $x = x^k$, $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, k$ *величины* τ, $q > 0$, α, σ, f, $P(x,t)$ *и остаточный член* $R^{(k3)}$ *в разложении* $x = x(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\|f^0\| \leq \varepsilon, 2\alpha\sigma = 1, \left\|R^{(k3)}\right\| \leq$$
$$\leq (1-q)\varepsilon, \left\|E + \tau P^k + \frac{1}{2}\tau^2\left((P^k)\right)^2 + \dot{P}^k\right\| \leq q < 1,$$

то неравенства $\|f^k\| \leq \varepsilon$ *выполняются при всех* $k = 1, 2, \ldots, k$.

Предложенный метод численного решения используется для решения задач определения реакций связей несвободных механических систем, задач управления программным движением, задач робототехники, машинной графики и других.

А. А. Назипов (Казань)

МНОГОЧЛЕНЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть задана таблица значений некоторой функции $z_{k,l} = z(x_k, y_l)$, $k = \overline{0, n+1}$, $l = \overline{0, m}$, где $n, m \in N$. Предполагается, что значения аргументов упорядочены по возрастанию. Алгебраический полином

$$P_{nm}(x,y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + \ldots + c_{nm}x^n y^m$$

при фиксированных $y = y_l$ имеет по отношению к исходной таблице естественную характеристику — максимальное уклонение [1]: $\max\limits_{k\in[0:n]} \mid z_{kl} - P_{nm}(x_k, y_l) \mid$. Для того, чтобы $P_{nm}(x,y)$ был полиномом наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы при некотором h_l выполнялись соотношения [1]

$$(-1)^k h_l + P_{n,m}(x_k, y_l) = z_{kl}. \tag{1}$$

Многочлен $P_{n,m}(x,y)$ строится в матричной форме [2]

$$P_{n,m}(x,y) = (1, x, ..., x^n) \otimes (1, y, ..., y^m)\, c, \tag{2}$$

где c — искомая матрица-столбец. Система из $m+1$ уравнений, содержащих x_0, имеет вид

$$h + (1, x_0, ..., x_0^n) \otimes Y\, c = g, \tag{3}$$

где

$$h = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ ... \\ h_m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & ... & y_0^m \\ 1 & y_1 & ... & y_1^m \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & y_m & ... & y_m^m \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} z_{00} \\ z_{01} \\ ... \\ z_{0m} \end{pmatrix}.$$

Остальные уравнения также записываются в матричной форме

$$-e \otimes h + X \otimes Y\, c = z, \tag{4}$$

где

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ ... \\ (-1)^m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & ... & x_1^n \\ 1 & x_2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & x_{n+1} & ... & x_{n+1}^n \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{11} \\ ... \\ z_{nm} \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (3) и (4) определяются искомые величины

$$c = X^{-1} \otimes Y^{-1}\, (e \otimes h + z). \tag{5}$$

$$h = (g - ((1, x_0, ..., x_0^n) X^{-1} \otimes E)\, z)\, detX/r_0, \tag{6}$$

где

$$r_0 = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)...(x_n - x_1) + (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)...(x_{n+1} - x_{n-1}) +$$

$$+ (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)...(x_{n+1} - x_n) \neq 0,$$ E — единичная матрица.

Полученные результаты использованы при решении интегральных и дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. *Введение в минимакс.* – М.: Наука, 1972. – 368 с.

2. Назипов А. А. *Матричное представление интерполяционного многочлена*/ Деп. в ВИНИТИ Казанск. ун-том, 12.10.90. – No 5361-390. – 7 с.

Н. Д. Никитин (Пенза)

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ С АФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

В работе [1] по аффинной связности Γ общего пространства путей $A_{n,y}$ строится афинная связность Γ^c в касательном расслоении $T(M_n)$.

Для инфинитезимальных слоесохраняющих аффинных движений касательного расслоения $T(M_n)$ с аффинной связностью $\tilde{\Gamma} = \Gamma^c + H^v$, где H^v — вертикальный лифт поля H типа $(1,2)$, заданного на базе, справедливы утверждения.

Теорема 1. *Полный лифт X^c векторного поля X многообразия M_n является инфинитезимальным аффинным движением касательного расслоения $T(M_n)$ с аффинной связностью $\tilde{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда X является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве путей $A_{n,y}$ и $L_X H = 0$, где L_X — обозначение производной Ли вдоль векторного поля X.*

Теорема 2. *Инфинитезимальное слоесохраняющее преобразование $\tilde{X}$ касательного расслоения $T(M_n)$ является инфинитезимальным аффинным движением в пространстве $(T(M_n), \tilde{\Gamma})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

а) *$\tilde{X} = X^c + D^v + {}^{vx}C$, где X^c — полный лифт инфинитезимального аффинного движения X в пространстве путей $A_{n,y}$, D^v — вертикальный лифт векторного поля $D = D^i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x^i}$, ${}^{vx}C$ — вертикально-векторное поднятие аффинора $C(C^h_\beta)$ с базы M_n на $T(M_n)$;*

б) $D^\beta \Gamma^h_{ji\beta} = 0, \quad \nabla_s D^\beta \Gamma^h_{ji\beta} = 0, \quad L_{D^c}\Gamma^h_{ji} + L_X H^h_{ji} = C^h_\rho H^\rho_{ji};$
в) $\nabla_j C^h_i = 0, \quad C^\rho_\sigma x^{n+\sigma}\Gamma^h_{ji\rho} = 0, \quad (C^h_\rho K^\rho_{j\sigma i} + C^s_\sigma K^h_{jis})x^{n+\sigma} = 0.$

В условиях б), в) теоремы 2 Γ^h_{ji} — компоненты объекта аффинной связности Γ, K^h_{jis} — компоненты тензора кривизны K пространства путей, ∇_j — обозначение ковариантной производной относительно связности Γ, $\Gamma^h_{ji\beta} = \Gamma^h_{ji\cdot\beta}$, H^h_{ji} — компоненты тензора H $(i, j, h, \beta, \rho, s, \sigma = \overline{1, n})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yano K., Okubo T. *On the tangent bundles of generalized spaces of pats*// Rendiconti di matematica. - 1971. - V. 4. - No 2. - P. 327–348.

С. Я. Новиков (Самара)

МНОЖЕСТВА ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИЕ К A-СИСТЕМАМ

Будем говорить, что последовательность (F_n) вещественных измеримых функций, определенных на некотором вероятностном пространстве (Ω, μ), *подобна* последовательности $(f_n) \in (L^\circ([0,1]))^{\mathbf{N}}$, если

$$\forall n \, \forall \tau > 0 \quad \mu(\omega : |F_n(\omega)| > \tau) = \mathbf{m}(t : |f_n(t)| > \tau),$$

где $\mathbf{m}$ — мера Лебега.

Определение 1. *Множество $U \subset L^\circ([0,1])$ назовем множеством типа (p,q), если $\forall (a_n) \in l_{p,q}$ и для $\forall (f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ имеем*

$$\sup_n |a_n f_n(t)| < \infty \quad \textit{почти всюду.}$$

При $p = q = 1$ получаем определение A-системы [1].

Определение 2. *Множество $U \subset L^\circ([0,1])$ назовем множеством независимого типа (p,q), если $\forall (a_n) \in l_{p,q}$ и для $\forall (f_n) \in$*

$U^{\mathbf{N}}$ *имеем*

$$\sup_n |a_n F_n(\omega)| < \infty \quad \textit{почти всюду}$$

для любой последовательности (F_n) *независимых в вероятностном смысле функций, подобной* (f_n).

Определение 3. *Множество* $U \subset L^\circ([0,1])$ *назовем множеством свободного типа* (p,q), *если* $\forall (a_n) \in l_{p,q}$ *и для* $\forall (f_n) \in U^{\mathbf{N}}$ *имеем*

$$\sup_n |a_n F_n(\omega)| < \infty \quad \textit{почти всюду}$$

для любой последовательности функций (F_n), *подобной* (f_n).

Доказаны три теоремы, которые дают полное описание множеств независимого и свободного типов для различных p и q. Приведем одну из них.

Теорема. *Пусть* $U \subset L^\circ([0,1])$, $\quad 0 < q \leq p < \infty$.
Следующие утверждения эквивалентны:
1) U *— множество независимого типа* (p,q);
2) U *ограничено в пространстве* $L_{p,\infty}([0,1])$;
3) U *— множество свободного типа* (p,p).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. *Ортогональные ряды.* – М.: АФЦ, 1999. – 550 с.

В. В. Ноздрунов (Орел)

О ДИСКРЕТНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Простейшим дискретным нелокальным преобразованием автономной системы

$$\begin{cases} y'' = F(y, z, \bar{a}), \\ z'' = G(y, z, \bar{a}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\bar{a} \in R^n$ — вектор существенных параметров [1], (рассматривается система приведенная к каноническому виду [2]), является преобразование вида

$$\begin{cases} y = f(u, v), \\ z = g(u, v), \\ x = h(u, v) + \int c(u, v)\, dt. \end{cases} \tag{2}$$

где $c(u, v) \neq 0$. Преобразование (2) является нелокальным аналогом точечного преобразования, в которое преобразование (2) вырождается при $c(u, v) = c$ — константа.

Рассмотрение задачи по нахождению нелокального аналога (2) дискретного точечного преобразования, переводящего автономную систему (1), приведенную к каноническому виду, в систему того же класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений, что и исходное, то есть в систему вида

$$\begin{cases} \ddot{u} = F(u, v, \bar{b}), \\ \ddot{v} = G(u, v, \bar{b}), \end{cases} \tag{3}$$

приводит к следующим утверждениям.

Теорема. *Нетривиальная автономная система* (1) *не допускает никакой дискретной точечной группы преобразования* (2).

Следствие. *Для автономной системы* (1), *дискретные нелокальные симметрии могут быть только динамическими, т.е. зависящими от производных.*

Таким образом, нелокальные аналоги точечных дискретных симметрий можно и не искать для автономных систем типа (1). Поиск динамических дискретных симметрий возможен только при конкретизации зависимости дискретных преобразований от $\dot{u}$ и $\dot{v}$ и конкретизации правых частей системы (1) и принципиально не отличается от алгоритма поиска точечных преобразований, подробно рассмотренного в статье [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев В. Ф., Флегонтов А. Ф. *Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Л.: Изд-во ЛИИАН, 1991.

2. Ноздрунов В. В. *О построении групп эквивалентности по параметрам системы обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сборник научных трудов ученых Орловской области. Вып. 2. – Орел: Изд-во ОрелГТУ, 1996.

3. Ноздрунов В. В. *О точечных дискретных симметриях автономной системы двух ОДУ второго порядка*// Сборник научных трудов. – Т.9 – Орел: Изд-во ОрелГТУ, 1996.

П. Г. Овчинников (Казань)

ОДИН КОНТРПРИМЕР В ТЕОРИИ МЕРЫ НА КОНЕЧНЫХ ЛОГИКАХ МНОЖЕСТВ

Построена логика множеств L (см. [1,2]) на 33-элементном множестве такая, что:
(i) L является решеткой;
(ii) любая максимальная цепь в L 4-элементна;
(iii) L имеет тривиальный центр;
(iv) граф отношения ортогональности на атомах в L связен;
(v) существует двузначное состояние на L, не являющееся линейной комбинацией точечных состояний;
(vi) любой заряд на L есть линейная комбинация двузначных состояний.

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103 и 99-01-00441) и АН РТ (проект 09-04/99) и программой "Университеты России" (проект 990213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gudder S. *Stochastic Methods in Quantum Mechanics.* – New York: North Holland, 1979.

2. Ovchinnikov P. *Measures on finite concrete logics*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 127. – No 7. – P. 1957–1966.

А. В. Ожегова, Н. Т. Халитов (Казань)

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается интегральное уравнение вида

$$Gx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \rho(\tau)\ln|\tau - t|x(\tau)\,d\tau + \lambda\sin\nu t = y(t),$$

$$-1 \le t \le 1, \tag{1}$$

где $y(t)$ — данная, $x(t)$ — искомая функции, $\nu \neq 0$ — данный, λ — искомый параметр, $\rho(t) = (1-t)^{\pm 1/2}(1+t)^{\mp 1/2}$.

Следуя разработанной Б. Г. Габдулхаевым [1] методике исследований, выбираем пару пространств искомых элементов X и правых частей Y, в которой задача решения слабосингулярного интегрального уравнения (1) является корректно поставленной.

Пусть $L_{2,\rho} = L_{2,\rho}[-1,1]$ пространство квадратично суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(t)$. Обозначим через $\overline{X} = L_{2,\rho} \oplus \mathbb{R}$ — пространство вектор–функций $\overline{x}(t) = \{x(t);\lambda\}$ с компонентами $x \in L_{2,\rho}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а через $Y = W^1_{2,q}$ — пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих первые производные из $L_{2,q}$, $q(t) = 1/\rho(t)$. Нормы в этих пространствах определяются следующим образом:

$$\|\overline{x}\|_{\overline{X}} = \|x\|_{2\rho} + |\lambda|, \quad \|x\|_{2\rho} = \left\{\int_{-1}^{1} \rho(t)|x(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|y\|_Y = \|y\|_\infty + \|y'\|_{2q}, \quad \|y\|_\infty = \max_{-1\le t\le 1}|y(t)|.$$

Пусть $T_k(t)$, $R_k(t)$, $Q_k(t)$ — полиномы, ортогональные на $[-1,1]$ с весами соответственно $(1-t^2)^{-1/2}$, $\rho(t)$, $q(t)$, а $c_k^R(\varphi) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \rho(t)\varphi(t)R_k(t)\,dt$.

Теорема. *Пусть параметр $\nu \neq 0$ таков, что $c_0^R(\cos\nu t) \neq 0$. Тогда при любой правой части $y \in Y$ уравнение (1) имеет* *единственное решение* $\overline{x}(t) = \{x(t), \lambda\} \in \overline{X}$, *причем*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k^R(y') Q_k(t) - \lambda\nu \sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k^R(\cos\nu t) Q_k(t),$$

$$\lambda = \pm \frac{\ln 2 c_0^R(y') + c_0^T(y)}{\ln 2\nu c_0^R(\cos\nu t)},$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k = 0$ *следует поделить на* 2.

Следствие. *В условиях теоремы оператор* $G : \overline{X} \to Y$ *имеет ограниченный обратный и* $\|G^{-1}\|_{Y \to \overline{X}} \leq M$, *где*

$$M = \max\left\{\pi + \frac{2\pi\sqrt{\pi}|\nu| + 2}{\sqrt{\pi}\ln 2|\nu|\,\left|c_0^R(\cos\nu t)\right|}; \frac{2\pi\sqrt{\pi}|\nu| + 2}{\ln 2|\nu|\,\left|c_0^R(\cos\nu t)\right|}\right\}.$$

На основании этой теоремы и ее следствия для уравнения

$$K\overline{x} \equiv G\overline{x} + V\overline{x} = y \quad \left(\overline{x} \in \overline{X}, y \in Y\right),$$

где $V : \overline{X} \to Y$ вполне непрерывный оператор, применяются и теоретически обосновываются в выбранных пространствах прямые и проекционные методы решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд–во КГУ, 1995. – 230 с.

И. Л. Ойнас (Краснодар)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассматривается система

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} x_k + f_n. \tag{1}$$

Выясняются условия, при которых для резольвенты $\{R_n\}$ ядра $\{A_n\}$ справедливо представление

$$R_n = U_n^{(1)} + B_n + \sum_{k=0}^{n} B_{n-k} U_k^{(2)},$$

где $\{B_n\}$ — некоторая известная последовательность, а $\{U_n^{(i)}\} \in l_1$. В скалярном случае последовательность $\{B_n\}$ определяется нулями функции $1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, где $|z| \leq 1$, а в матричном — характером особых точек $\left(I - \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n\right)^{-1}$. Кроме того, в скалярном случае рассмотрена ситуация с нулями не целой кратности, а именно, если $\lambda_1 = e^{i\gamma_1}, \ldots, \lambda_k = e^{i\gamma_k}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_t$ — нули $1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ при $|z| \leq 1$ кратности $m_1 + \alpha_1, \ldots, m_k + \alpha_k, m_{k+1}, \ldots, m_t$ соответственно, где $m_j \geq 0$ целые, $\alpha_j \in (0,1), \gamma_j \in [0, 2\Pi)$, причем $m_1 = \ldots = m_k = p = \max\limits_{|\lambda_j|=1} m_j$, то

$$B_n = \sum_{j=1}^{k} e^{-in\gamma_j} \frac{(\alpha_j + n - 1)^{[n]}}{n!} P_p(n) + \sum_{j=1}^{t} P_{m_j - 1}(n) \lambda_j{}^{-n}.$$

Здесь $P_r(n)$ — многочлен степени r, а $n^{[m]} = n(n-1)\ldots(n-m+1)$ при $n \in Z, m \in N$, $n^{[0]} = 1$.

В матричной ситуации задача решена в случае, когда особые точки функции $\left(I - \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n\right)^{-1}$ — полюса. Для случая $A_n \geq 0, n \geq 0$ получены некоторые результаты и для особых точек вида $z^{-\alpha}, \alpha \in (0,1)$. Найденное представление резольвенты используется также для получения асиптотики решения $\{x_n\}$ уравнения (1) по заданному тейлоровскому разложению свободного члена $\{f_n\}$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Б. П. Осиленкер (Москва)

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИММЕТРИЧНЫМ ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА – СОБОЛЕВА

Обозначим через $B_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$; $x \in Z_+$, полиномы, ортонормированные по отношению к скалярному произведению

$$< f, g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + M[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)]+$$

$$+N[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)], \quad M, N \geq 0.$$

Каждой суммируемой на $[-1, 1]$ функции f с помощью T-регулярной треугольной матрицы

$$\Lambda = \{\lambda_k^{(n)},\ k = 0, 1, \ldots, n, n+1;\ \lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_{n+1}^{(n)} = 0,\ n = 0, 1, \ldots\}$$

сопоставим последовательность Λ-средних

$$U_n(f, x, \Lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} c_k(f) B_k(x),\ c_k(f) =< f, B_k >, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Получены условия на элементы матрицы Λ, при которых в точках Лебега $x \in [-1, 1]$ (и, следовательно, почти всюду) справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x, \Lambda) = f(x) + M[f(1) - f(x)] \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1)B_n(x)+$$

$$+M[f(-1) - f(x)] \sum_{n=0}^{\infty} B_n(-1)B_n(x)+$$

$$+N[f'(1) \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(1)B_n(x) + +f'(-1) \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(-1)B_n(x)].$$

Н. А. Осьминина (Пенза)

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ $(T_2(M_n), \nabla^*)$ НАД МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

И.П. Егоров в работе [1] показал, что максимально подвижные пространства аффинной связанности нулевой кривизны являются проективно-евклидовыми пространствами второй лакунарности.

Ранее нами было получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования $(T_2(M_n), \nabla^*)$ над проективно-евклидовыми пространствами и условия, накладываемые на компоненты данного разложения.

Теорема. *Алгебра Ли $L^\sim$ всех инфинитезимальных аффинных преобразований $(T_2(M_n), \nabla^*)$ над максимально подвижными симметрическими пространствами ненулевой кривизны с транзитивной группой движений раскладывается в прямую сумму подалгебр: $L^\sim = L^{II} + L^{I} + L^{H_2\gamma_1}$. Здесь*

$$L^k = \{X^k | L_X \nabla = 0,\ k = 0, I, II\}, \quad L^{H_2\gamma_1} = \{cI^{H_2\gamma_1} | c = const\}.$$

Указаны базисные векторы данной алгебры в некоторой локальной системе координат.

Эта алгебра Ли при $n = 2$ является разрешимой и не нильпотентной. При $n \geq 3$ алгебра Ли $L^\sim$ неразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. П. *Геометрия: Спецкурс для студентов физ.-мат. пед. ин-тов.* – М.: Просвещение, 1979.

В. И. Паньженский, О. П. Сурина (Пенза)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ

Рассматривается обобщенное лагранжево пространство $\mathcal{L}^n$ с

метрикой
$$g_{ij} = e^{2\sigma(z)}\gamma_{ij}(x),$$
где $\gamma_{ij}(x)$ — компоненты риманова метрического тензора многообразия M, (x^i) — локальные координаты на M, (x^i, y^i) — естественные локальные координаты на касательном расслоении TM, а $\sigma(z)$ — произвольная функция аргумента $z = \gamma_{ps}y^py^s$ $(i, j, k, \ldots = \overline{1,n})$. Для этой метрики каноническая финслерова связность является связностью Картана, а её коэффициенты совпадают с коэффициентами связности Леви-Чивита римановой метрики $\gamma_{ij}(x)$. На касательном расслоении TM строятся две диагональные метрики. В адаптированном репере $\delta_A = (\delta_i, \delta_j)$, где $\delta_i = \partial_i - \Gamma_{ik}{}^l\partial_{n+l}$, $\Gamma_{ik}{}^l$ — коэффициенты связности Леви-Чивита, эти метрики имеют вид
$$\tilde{g}_{AB} = \begin{pmatrix} e^{2\sigma(z)}\gamma_{ij} & 0 \\ 0 & e^{2\sigma(z)}\gamma_{ij} \end{pmatrix}, \ \hat{g}_{AB} = \begin{pmatrix} e^{2\sigma(z)}\gamma_{ij} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma(z)}\gamma_{ij} \end{pmatrix}.$$

Метрика $\tilde{g}$ является эрмитовой относительно почти комплексной структуры $\tilde{J}$: $\tilde{J}X^h = X^\nu$, $\tilde{J}X^\nu = -X^h$, а $\hat{g}$ является эрмитовой относительно почти комплексной структуры $\hat{J}$: $\hat{J}X^h = e^{2\sigma}X^\nu$, $\hat{J}X^\nu = -e^{2\sigma}X^h$, где X^h, X^ν — горизонтальный и вертикальный лифты векторного поля X базисного многообразия M.

Найдены необходимые и достаточные условия принадлежности тому или иному классу классификации Грея – ХерVеллы почти эрмитовых структур $(TM, \tilde{g}, \tilde{J})$ и $(TM, \hat{g}, \hat{J})$.

Д. В. Поляков, А. В. Поташев (Казань)

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ОТКЛОНЕННЫМ ЩИТКОМ

На основе теории обратных краевых задач [1] в настоящей работе предложен метод проектирования крылового профиля с отклоненным щитком-закрылком. Для моделирования процесса обтекания профиля воздушным потоком предлагается использовать кавитационную схему течения Wu [2] безциркуляционного обтекания профиля и образуемой за ним отрывной области.

Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый непроницаемый крыловой профиль с отклоненным на угол $\delta\pi \in (0, \pi)$ прямолинейным щитком CD обтекается со срывом струй плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности v_∞. За профилем образуется застойная зона конечной протяженности, ограниченная линиями тока с постоянным значением скорости $v_0 = v_\infty\sqrt{Q+1}$ на них, где Q — число кавитации. Вдоль контура профиля задается распределение скорости $v = v(s)$ как функция дуговой абсциссы s, причем $v(s) < 0$ при $s \in [0, s_*]$ и $v(s) > 0$ при $s \in [s_*, L]$, $v(s_*) = 0$. Требуется определить форму профиля, его аэродинамические характеристики, угол атаки α, длину щитка l и распределение по нему скорости при заданных величинах Q и v_∞.

Аналитическое решение. Вводится каноническая область $G_\zeta = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ и используется метод сопоставления плоскостей. Тогда решение поставленной задачи будет состоять в определении аналитической функции $z(\zeta)$, реализующей конформное отображение области G_ζ на внешность искомого профиля в плоскости z: $z(\zeta) = \frac{1}{v_\infty}\int \frac{dw}{d\zeta}\exp[-\chi(\zeta) + i\theta_0]d\zeta$, где $w(\zeta) = (\varphi_B + v_0 l_1)(\zeta + \zeta^{-1})/4 + C$ — комплексный потенциал потока, обтекающего круг G_ζ. Здесь $\varphi_B = \int\limits_{s_*}^{L} v(s)ds$, l_1 — длина струи. Вспомогательная функция $\chi(\zeta) = \ln(v_0^{-1}dw/dz) + i\theta_0$ в области G_ζ восстанавливается из решения смешанной краевой задачи. Неизвестный параметр l_1 определяется из условия совпадения заданной и определяемой в процессе решения задачи величины v_∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 436 с.

2. Konhauser P. *Berechnung zweidimensionaler Totwasserstromungen um vorgegebene Konturen. – Von der Fakultat Verfahrenstechnik der Universitat Stuttgart zur Erlangung der Wurde eines*

Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung. – Institut A fur Mechanik der Universitat Stuttgart, 1984. – 72 с.

К. В. Полякова (Калининград)

ТЕНЗОР ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Многомерная поверхность проективного пространства рассматривается как многообразие касательных плоскостей. Вводится композиционное оснащение поверхности, заданное полями плоскостей Картана и нормалей 2-ого рода Нордена. Найдены выражения для внешних дифференциалов ковариантных дифференциалов оснащающего квазитензора. С помощью полученных геометрических объектов построен тензор параллельности, и показано, что этот тензор обращается в нуль тогда и только тогда, когда параллельные перенесения оснащающих плоскостей являются абсолютными, то есть осуществляются при их смещении вдоль всей поверхности.

М. К. Потапов (Москва)

ТЕОРЕМА О ВЗАИМОСВЯЗИ ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ И K-ФУНКЦИОНАЛА ПЕТРЕ

Скажем, что функция $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, если для при $1 \leq p < \infty$ f измерима на $[-1,1]$, $\alpha > -\frac{1}{p}$, $\beta > -\frac{1}{p}$ и

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int_{-1}^{1} \left|f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а для $p = \infty$ f непрерывна на $[-1,1]$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \left|f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\right|$. Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции f при помощи алгебраических многочленов P_{n-1} степени не выше, чем $n-1$ в метрике $f \in$

$L_{p,\alpha,\beta}$, т.е. $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_{p,\alpha,\beta}$. Введем оператор обобщенного сдвига

$$T_y(f,x) = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} f(R)\psi(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где $R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$,

$$\psi(x,y,z) = \frac{\cos(\varphi+\mu-2\varphi_1)(1-R)\sqrt{1-R^2}}{(1+y)^2(1-x)\sqrt{1-x^2}},$$

$$\cos\varphi_1 = z, \quad \sin\varphi_1 = \sqrt{1-z^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{1-y^2}+yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-R^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{z(1-xy)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R}, \qquad \sin\mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R}.$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ определим обобщенный модуль гладкости

$\hat{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t|\le\delta} \|f(x) - T_{\cos t}(f,x)\|_{p,\alpha,\beta}$.

Введем оператор дифференцирования $D = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - (2+6x)\frac{d}{dx}$. Скажем, что функция $g \in AD(p,\alpha,\beta)$, если $g \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $Dg \in L_{p,\alpha,\beta}$. Пусть

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g\in AD(p,\alpha,\beta)}(\|f-g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^2\|Dg\|_{p,\alpha,\beta})$$

— K-функционал Петре.

Теорема. *Пусть даны числа p и α такие, что $1 \le p \le \infty$, $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ при $p = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2p} < \alpha < 1 - \frac{1}{2p}$ при $1 < p < \infty$, $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ при $p = \infty$. Пусть функция $f \in L_{p,\alpha+1,\alpha}$. Тогда для любого $\delta \in (0,\pi)$ справедливы неравенства*

$$C_1E_n(f)_{p,\alpha+1,\alpha} \le \hat{\omega}(f,\frac{1}{n})_{p,\alpha+1,\alpha} \le \frac{C_2}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu E_\nu(f)_{p,\alpha+1,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00042).

К. А. Поташев, Д. В. Шевченко (Казань)

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПЛОТНЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ОТСТОЙНИКАХ СТОЧНЫХ ВОД

Предлагается одномерная математическая модель оседания высококонцентрированных осадков сточных вод. Модель может быть применена также к описанию консолидации грунта на дне водоемов. Осадок рассматривается как насыщенная пористая среда. Полагается, что усилия между твердыми частицами передаются через тонкие прослойки жидкости. Это приводит к вязкой реологической модели для эффективных напряжений в пористой матрице с нелинейным возрастанием вязкости при уплотнении:

$$\sigma^f = M(\Theta)\frac{d\Theta}{dt}, \qquad M(\Theta) \to \infty \quad \text{при} \quad \Theta \to \Theta_{min}.$$

Осадок уплотняется под действием собственного веса. Реологическое сопротивление уплотнению пористой матрицы и фильтрационное сопротивление при отжиме жидкости — два механизма, препятствующие этому процессу. Процесс описывается уравнениями фильтрационной консолидации:

$$\frac{d\Theta}{dt} + \mathrm{div}\mathbf{V}_f = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma^f}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - g(\rho_s(1-m) + \rho_l m) = 0,$$

где $\mathbf{V}_f = m(\mathbf{V}_l - \mathbf{V}_s)$ — скорость фильтрации, $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{V}_l$ — истинные скорости твердых частиц и жидкости, p — давление в жидкости, ρ_s, ρ_l — плотности твердых частиц и жидкости, m — пористость, z — вертикальная координата.

Начальное состояние полагается однородным.

В результате оседания появляются два фронта, первый из которых определяется самыми верхними из оседающих частиц, а второй — толщиной слоя максимально уплотненных частиц.

При решении задачи получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений для определения координат фронтов, которую для случая малых деформаций удается решить аналитически. В ходе решения определены скорости обоих фронтов, объемная деформация среды и перепад давления в жидкости. Оказалось, что весь процесс определяется двумя безразмерными параметрами. Первый из них (равный отношению плотностей твердых частиц и жидкости) задает масштаб и скорость процесса. Второй, характеризующий отношение реологического сопротивления к фильтрационному, влияет на неоднородность распределения усадки и давления по высоте отстойника.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00466).

В. Ф. Пуляев (Краснодар)

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ

В докладе рассматриваются свойства интегральных уравнений вида

$$x(t) = \int_0^\infty K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $K(t,s)$ — почти периодическая матрица.

Матрица $K(t,s)$ называется почти периодической, если при каждом $t \in R^1$ она суммируема по s, удовлетворяет условиям

$$\|K\| = \sup_{t \in R^1} \int_{-\infty}^{\infty} \|K(t,s)\| ds < \infty,$$

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|K(t+h,s) - K(t,s)\| ds = 0$$

и при каждом $\varepsilon > 0$ имеет относительно плотное множество ε-

почти периодов τ:

$$\sup_{t\in R^1}\int_{-\infty}^{\infty}\|K(t+\tau,s+\tau)-K(t,s)\|ds<\varepsilon.$$

Утверждение. *Пространство всех почти периодических $n\times n$-матриц совпадает с замыканием линейной оболочки матриц вида* $\exp(i\alpha t)P(t-s)$, *где* $i=\sqrt{-1}$, $P(t)\in L_1^{n\times n}(R^1)$.

Оказывается, что уравнение (1) обладает многими свойствами, присущими интегральным уравнениям с разностным ядром. В частности, нетеровость уравнения (1) в пространстве непрерывных и ограниченных на R_+ функций $BC^n(R_+)$ влечет его нетеровость и совпадение дефектных чисел во многих естественных его подпространствах. Отсюда следует, что спектр оператора

$$\tilde{K}x=\int_0^{\infty}K(t,s)x(s)ds$$

в пространстве $BC^n(R_+)$ совпадает со спектром его сужений на эти подпространства.

Полученные результаты применяются также для исследования интегро-дифференциальных уравнений вида $x'=A(t)x+\tilde{K}x+f$, где $A(t)$ — почти периодическая по Бору $n\times n$-матрица.

И. К. Рахимов, Р. Н. Сухов (Казань)

БИСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВНЕШНИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Следуя работам [1, 2], устанавливается простое достаточное условие существования и единственности решения двумерного сингулярного интегрального уравнения с ядрами Гильберта

$$A\varphi\equiv a_0(s,\sigma)\varphi(s,\sigma)+\frac{a_1(s,\sigma)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\varphi(\xi,\sigma)\,d\xi+$$

$$+\frac{a_2(s,\sigma)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(s,\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{a_{12}(s,\sigma)}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+ \tag{1}$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,\sigma;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=f(s,\sigma),$$

где $a_i \in C\left([0,2\pi]^2\right)$, $h \in L_2\left([0,2\pi]^4\right)$ и $f \in L_2\left([0,2\pi]^2\right)$ — известные функции, а $\varphi(s,\sigma) \in L_2\left([0,2\pi]^2\right)$ — искомая функция.

Теорема 1. *Пусть* $h(s,\sigma;\xi,\eta) = -h(\xi,\eta;s,\sigma)$ *и*

$$\gamma^2 \equiv \min_{s,\sigma}|a_0(s,\sigma)| - \max_{s,\sigma}|a_1(s,\sigma)| - \max_{s,\sigma}|a_2(s,\sigma)| -$$

$$-\max_{s,\sigma}|a_{12}(s,\sigma)| > 0. \tag{2}$$

Тогда при любых $\lambda \in \mathbb{R}$ *уравнение (1) имеет единственное решение* $\varphi^* \in L_2$ *при любой правой части* $f \in L_2$, *причем*

$$\|\varphi^*(s,\sigma)\|_{L_2} \le \gamma^{-2}\|f(s,\sigma)\|_{L_2}, \tag{3}$$

где $L_2 = L_2\left([0,2\pi]^2\right)$ *с обычной нормой.*

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение уравнения* (1) *можно найти итерационным методом*

$$\varphi^i = \varphi^{i-1} + \left(\frac{\gamma}{M}\right)^2\left(f - A\varphi^{i-1}\right), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

сходящимся при любом начальном приближении $\varphi^0 \in L_2$ *со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* $q = \left(1-\gamma^4 M^{-2}\right)^{1/2} < 1$, *где*

$$M = \|a_0\|_C + \|a_1\|_C + \|a_2\|_C + \|a_{12}\|_C + \|h\|,$$

а $C = C\left([0,2\pi]^2\right)$ *с обычной нормой,* $\|h\|$ *— норма функции* $h(s,\sigma;\xi,\eta)$ *в пространстве* $L_2\left([0,2\pi]^4\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1994. – 288 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1995. – 230 с.

О. И. Рейнов (Санкт–Петербург)

ЗАМЕТКИ О ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ В ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Исследуется вопрос, связанный с вычислением норм тензорных произведений операторов, действующих между функциональными пространствами Лебега: верно ли, что если у нас есть два оператора $A : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ и $B : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$, то норма их тензорного произведения

$$A \otimes B : L^p(\mu \otimes \mu) \to L^q(\nu \otimes \nu)$$

совпадает с произведением $\|A\|\,\|B\|$ их норм?

Теорема. *Ответ на сформулированный выше вопрос положителен в том и только в том случае, когда* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Этот результат является ответом на вопрос, поставленный автору Я.Ю. Никитиным в конце мая 2000 г., и связан с некоторыми гипотезами в теории вероятностей.

Положительная часть утверждения теоремы может быть установлена с использованием абстрактной техники теории тензорных произведений в нормированных пространствах, но имеется также и элементарное доказательство, использующее только некоторые стандартные факты классической теории интеграла Лебега. Что касается отрицательной части нашего результата — "контрпримеров" — то для их получения мы используем некоторые оценки из теории конечномерных p-суммирующих операторов в нормированных пространствах.

Е. М. Романова, В. Е. Фомин (Казань)

ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГООБРАЗИИ КОМПАКТНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех гладких компактных подмногообразий евклидова векторного пространства E^n. $\mathcal{M}$ наделяется структурой гладкого многообразия типа Фреше ([1], примеры 4.1.7, 4.4.7, 4.5.5), определяемой естественным атласом $\mathcal{A} = \{c_N\}_{N\in\mathcal{M}}$, каждая карта $c_N = \big(U_N, \varphi_N, \Gamma^\infty(N^\perp)\big)$ которого является центрированной в точке $N \in \mathcal{M}$. Модельное пространство $\Gamma^\infty(N^\perp)$ — пространство Фреше всех гладких сечений нормального расслоения $(N^\perp, N, \pi_N)$ многообразия N. Атлас $\mathcal{A}$ порождает на $\mathcal{M}$ линейную связность без кручения, объект которой в точке $N \in \mathcal{M}$ относительно карты $c_N \in \mathcal{A}$ по определению равен $0 \in \mathcal{L}_2\left(\Gamma^\infty(N^\perp); \Gamma^\infty(N^\perp)\right)$. Вид этого объекта (относительно фиксированной карты c_{N_0}) в произвольной точке $s = \varphi_{N_0}(N) \in \varphi_{N_0}(U_{N_0}) \subset \Gamma^\infty(N_0^\perp)$, $\forall X, Y \in \Gamma^\infty(N_0^\perp)$:

$$L_s(X,Y) = -\mathrm{пр}_{N_0^\perp \| TN}([\nabla^\perp Y^\perp(X^\top) +$$

$$+ \nabla^\perp X^\perp(Y^\top) + H^\perp(Y^\top, X^\top))], \tag{1}$$

здесь $\nabla^\perp$ — линейная связность в нормальном расслоении многообразия $N = \varphi_{N_0}^{-1}(s)$ ([2], с. 23), $X^\perp = \mathrm{пр}_{N^\perp\|TN} X$ $(X^\top = \mathrm{пр}_{TN\|N^\perp} X)$ — ортогональная проекция нормального сечения $X \in \Gamma^\infty(N_0^\perp)$ на нормальное $N^\perp$ (соответственно, касательное TN) расслоение, $\mathrm{пр}_{N_0^\perp\|TN}$ — проекция на нормальное расслоение $N_0^\perp$ параллельно касательному расслоению TN, $H^\perp$ — тензор второй основной формы подмногообразия N ([2], с. 21). В частности, при $s = \varphi_{N_0}(N_0) = 0$ $\quad X^\top = Y^\top = 0$ и $L_0 \equiv 0$.

Если, например, $N_0 \in \mathcal{M}$, а $V \in T_{N_0}\mathcal{M}$, где вектор V, относительно естественной карты c_{N_0} отождествляемый с нормальным векторным полем на N_0, является полем постоянной ненулевой длины, то уравнение геодезической линии, проходящей через N_0 в направлении V в связности (1), в карте c_{N_0} имеет вид $s_t = t\cdot V$,

$t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, и геодезическая представляет собой однопараметрическое семейство подмногообразий $N_t \in E^n$, имеющих общие нормали. В частности, если N_0 — гиперсфера радиуса R в E^n, а V — поле внешних нормальных ортов, то N_t, $t \in (-R, \infty)$ — семейство концентрических гиперсфер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamilton R. S. *The inverse function theorem of Nash and Moser*// Bull. Amer. Math. Soc. - 1982. - V. 7. - No 1. - P. 62-222.

2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. - М.: Наука, 1981. - 414 с.

А. К. Рыбников, К. В. Семенов (Москва)

СВЯЗНОСТИ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ, И ОТОБРАЖЕНИЯ БЭКЛУНДА

Работа посвящена построению инвариантной геометрической теории отображений Бэклунда (частным случаем отображения Бэклунда являются преобразования Бэклунда) для дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$F(x^i,\, z,\, z_j,\, z_{ki}) = 0. \tag{1}$$

Аргументы и неизвестная функция рассматриваются как адаптированные локальные координаты в расслоении общего типа E с n-мерной базой M, координатами которой служат аргументы x^i $(i, j, ... = 1, \ldots, n)$.

Вводится понятие *специальной связности* в расслоении $R^* E$ (фактормногообразие расслоения реперов многообразия E). При этом $R^* E$ рассматривается как частный случай главного расслоения, базой которого является многообразие струй расслоения E, а структурной группой — группа $GL(n)$. Связность в ассоциированном расслоении $\mathrm{Re} = F(R^* E)$ с одномерным типовым слоем F, порожденная специальной связностью, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (1), условимся называть *связностью Бэклунда*, соответствующей уравнению (1).

В случае, когда сечение $\sigma \subset E$ является решением уравнения (1), и только в этом случае, уравнение Пфаффа $\tilde{\theta}_\sigma = 0$ (где $\tilde{\theta}_\sigma$ – форма связности Бэклунда, рассматриваемая над сечением $\sigma \subset E$) вполне интегрируемо. При этом многообразие Re расслаивается на сечения $\Sigma_\sigma \subseteq \mathrm{Re}$, являющиеся интегральными многообразиями уравнения $\tilde{\theta}_\sigma = 0$. Соответствия

$$E \supset \sigma \to \Sigma_\sigma \subset \mathrm{Re} \tag{2}$$

при которых решению $\sigma \subset E$ уравнения (1) сопоставляется сечение $\Sigma_\sigma \subset \mathrm{Re}$, удовлетворяющее заданным начальным условиям, условимся называть *отображением Бэклунда*. Система, которую принято называть отображением Бэклунда при традиционном изложении, представляет собой локальную запись отображения (2) при условии, что в качестве главных форм выбраны контактные формы. Эта система не произвольна, но должна иметь вид

$$y_k = \xi_i^j(y) \cdot \Gamma^i_{jk}(x^l, z, z_m), \tag{3}$$

где Γ^i_{jk} — коэффициенты специальной связности в R^*E, определяющей представление нулевой кривизны для заданного уравнения (1). Соотношения (3) при $n = 2$ можно представить в виде

$$y_i = \Gamma_i + Ce^y\Gamma^1_{2i} - \frac{1}{C}e^{-y}\Gamma^2_{1i},$$

где $i, j, ... = 1, 2,$; $C = const$; $\Gamma_1 = \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}$; $\Gamma_2 = \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}$. Эти соотношения можно представить также в виде

$$x_i = -\Gamma^2_{1i} + x\Gamma_i + x^2\Gamma^1_{2i}$$

или в виде

$$X_i = \Gamma^1_{2i} - \Gamma^2_{1i} + \sin X \cdot \Gamma_i - \cos X \cdot (\Gamma^1_{2i} + \Gamma^2_{1i})$$

В работе рассматривались также проблема существования специальных связностей, определяющих представления нулевой кривизны.

Работа поддержана программой "Университеты России" (проект 5271). Первый автор был поддержан также РФФИ (проект 00-06-80437).

В. С. Рыхлов (Саратов)

О БАЗИСНОСТИ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫРОЖДЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ пучок операторов $L(\lambda)$

$$l(y,\lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

$$U_\nu(y,\lambda) \equiv U_{\nu 0}(y,\lambda) + U_{\nu 1}(y,\lambda) :=$$
$$(\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0)) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1,2,$$

где $p_j, \alpha_{\nu s}, \beta_{\nu s} \in \mathbf{C}$. Предположим, что корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$ лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Не нарушая общности, считаем, что $0 < \omega_1 < \omega_2$. Фундаментальная система решений уравнения $l(y,\lambda) = 0$ есть $y_1(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Для определенности, считаем $\alpha_{\nu 1} \neq 0$, $\beta_{\nu 1} \neq 0$. Обозначим $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j,\lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} := \exp(-\lambda\omega_j) U_{\nu 1}(y_j,\lambda)/\lambda$ $(\nu, j = 1,2)$ и $V_j := [v_{1j}, v_{2j}]^T$, $W_j := [w_{1j}, w_{2j}]^T$ $(j = 1,2)$. Пусть $\tau := \omega_2/\omega_1$, $a_{sk} := \det[W_s, W_k]$, $a_{\bar{s}k} := \det[V_s, W_k]$, $a_{s\bar{k}} := \det[W_s, V_k]$, $a_{\bar{s}\bar{k}} := \det[V_s, V_k]$.

Основными являются следующие предположения

$$a_{\overline{12}} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0, \quad W_2 = 0, \quad a_{11} \neq 0. \qquad (1)$$

Обозначим $b_0 := -a_{1\bar{1}}/a_{1\bar{2}}$, $c_0 := -a_{\overline{12}}/a_{1\bar{2}}$, $d_0 := \ln_0 c_0$ ($\ln_0$ есть фиксированная ветвь логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $\Lambda = \{\lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $Y = \{y(x,\lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda\omega_2 x),\ \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, $\Lambda\backslash\{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$, а множество $Y\backslash\{y(x,0)\}$ есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям.

В случае $W_2 \neq 0$ или $W_2 = 0$ и $a_{11} = 0$ система Y 1-кратно полна, минимальна и образует базис Рисса в $L_2[0,1]$. В случае $W_2 = 0$ и $a_{11} \neq 0$ система Y не является 2-кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0,\sigma]$, $\sigma > 0$, и имеет там ∞ дефект. Что касается 1-кратной базисности Рисса, то справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *При условиях* (1) *для того, чтобы система* Y *образовывала базис Рисса в* $L_2[0, \frac{1}{\tau}]$, *достаточно выполнения условия* $\tau < |b_0|^2$.

Теорема 2. *Пусть справедливы условия* (1). *Если при некотором* $m = 1, 2, \ldots$ *имеют место неравенства* $m < \tau \leq m + 1$, *то для того, чтобы система* Y *образовывала базис Рисса в* $L_2[0, 1]$, *достаточно выполнения условия* $|b_0|^2 \sum_{s=0}^{m} |c_0|^{2s} < \tau$.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00075) и программой "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96123).

Р. Г. Салахудинов (Казань)

ЖЕСТКОСТЬ КРУЧЕНИЯ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В [1] введены новые геометрические функционалы односвязной области, названные моментами инерции области относительно своей границы, и доказано, что они эквивалентны жесткости кручения.

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — односвязная область, $R(z, D)$ — конформный радиус области D в точке z, $dist(z, \partial D)$ — функция расстояния от точки z до границы области. Интегралы

$$I_c(\partial D) = \int\int_D R^2(z, D)dxdy \text{ и } I(\partial D) = \int\int_D dist^2(z, D)dxdy$$

называются конформным моментом инерции области D и моментом инерции области относительно своей границы.

В [2] доказано, что указанные геометрические функционалы имеют такие же изопериметрические свойства, что и жесткость кручения.

В этой работе рассматриваются обобщения моментов инерции на случай двусвязных областей. На эти обобщения естественно было бы наложить одно из следующих требований: 1) искомый геометрический функционал эквивалентен жесткости кручения двусвязной области (или в каком либо классе двусвязных областей); 2) геометрический функционал обладает свойствами, аналогичными изопериметрическим свойствам жесткости кручения двусвязной области.

Жесткость кручения области геометрически интерпретируют как объем холма, построенного над областью, поверхность которого является значение функции напряжения. Из геометрической интерпретации следует, что в случае двусвязных областей геометрические функционалы, которые зависят только от функции расстояния до внешней границы области или только от функции расстояния до границы области, не будут удовлетворять указанным требованиям.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00366).

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Изд–во Казанский фонд "Математика", 1996. – 216 с.

2. Авхадиев Ф. Г., Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические неравенства для моментов инерции и точные оценки в пространствах Бергмана*// В сб.: "Фонд научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ Республики Татарстан. Фундаментальные науки. Конкурс проектов '96". – Казань, 1998. – С. 157–165.

И. Г. Салехова (Казань)

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Решение некоторых граничных задач, имеющих приложение в гидромеханике, теории упругости и других разделах математической физики, сводится к решению задачи Римана

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{1}$$

Так, например, видоизменённая задача Дирихле, смешанная задача для плоскости и полуплоскости сводится к задаче (1) с постоянным коэффициентом $G(t)$ и переменным свободным членом $g(t)$.

Интересным, с точки зрения приложений, является решение этих задач в случае счетного множества периодически расположенных щелей, а также в случае счетного множества щелей, периодически расположенных в правой полуплоскости. В этом случае мы имеем частный случай так называемой квазипериодической задачи Римана.

Пусть $L = \cup_{k=0}^{\infty} L_k$, где $L_k = (a_k, b_k)$ — отрезки вещественной оси, причем $L_0 = (a_0, b_0)$, $0 < a_0 < b_0 < 1$, а L_k получены из L_0 с помощью преобразований $z + k$, $k \in \mathbf{N}$. Обозначим через $D_\delta = \cup_{k=0}^{\infty} D_\delta^k$, где $D_\delta^k = \{|z - c_k| < \delta\}$ — круг с центром в точке $c_k = a_k$, произвольно малого постоянного радиуса $\delta > 0$.

Требуется найти почти ограниченную при $z \to \infty, z \notin D_\delta$ функцию $\Phi(z) \in h(b_k)$ по условию (1), где $G(t) \equiv G_k,\ t \in L_k$, G_k — константа, отличная от действительной положительной, $g(t) \in H(A, \mu), \quad t \in [a_k, b_k], \quad 0 < \mu < 1$.

Каноническая функция соответствующей однородной задачи имеет вид $\chi_b(z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1 - z/b_k}{1 - z/a_k}\right)^{\alpha_k + i\beta_k}$, $\alpha_k + i\beta_k = \frac{\ln G_k}{2\pi i}$, где под $\ln G_k$ понимается значение, определяемое условием $0 < \arg G_k < 2\pi$. С помощью канонической функции общее решение задачи (1) запишется в виде

$$\Phi(z) = C\chi_b(z) + \frac{\chi_b(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(x+k)}{\chi_b^+(x+k)} \left(\frac{1}{x+k-z} - \frac{1}{x+k}\right) dx.$$

Каноническая функция в классах $h_0, h(c_k), h(c_{k_n})$ имеет соответственно вид $\chi_0(z) = \chi_b(z)\frac{\Gamma(b_0 - z)}{\Gamma(b_0)}$, $\chi_c(z) = \chi_b(z)\frac{\Gamma(a_0)}{\Gamma(a_0 - z)}$,

$$\chi(z) = \chi_b(z)\frac{\prod_1(z)}{\prod_2(z)}, \prod\nolimits_1(z) = \prod_{a_k \in C_{k_n}} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}},$$

$\prod_2(z) = \prod\limits_{b_k \notin C_{k_n}} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) e^{\frac{z}{b_k}}$, где $C_{k_n} = \{c_{k_n}\}$ — любая подпоследовательность последовательности всех концов $C_k = \{c_k\}$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Полученные результаты применяются к решению видоизменённой задачи Дирихле, а также смешанной задачи для плоскости и полуплоскости.

Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин (Казань)

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть D — круговое кольцо в плоскости комплексного переменного z. Обозначим через $L = L_1 \bigcup L_0$ границу области D, причем для точек линий L_1, L_0 имеем соответственно $|z| = q, |z| = 1$.

Требуется найти функцию $F(z)$, аналитическую и однозначную в области D, непрерывно продолжимую на границу (за исключением, возможно, конечного числа точек), по краевому условию

$$\mathrm{Re}[(a(t) + ib(t))F(t)] = c(t),$$

где $a(t), b(t), c(t)$ — заданные на L действительные функции точки t, непрерывные или имеющие разрывы первого рода в конечном числе точек $t_{j,k}$, $k = \overline{1,p}$, $j = 0, 1$. При этом будем считать, что искомая функция $F(z)$ может быть неограниченной вблизи некоторых из точек $t_{j,k}$ и удовлетворет в этом случае условию

$$|F(z)| < C|z - t_{j,k}|^{-\mu}, 0 < \mu < 1.$$

Реализуется новый подход к решению поставленной задачи, основанный на непосредственном построении общего решения однородной задачи с аналитическим выделением особенностей коэффициентов. После этого общее решение неоднородной задачи сводится к задаче Шварца для кругового кольца с непрерывными краевыми условиями. Исследована картина разрешимости задачи, приведены формулы общего решения.

Э. Н. Самойлова (Казань)

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается сингулярное интегро–дифференциальное уравнение

$$K\varphi \equiv \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t), -1 \le t < 1, \quad (1)$$

при условии

$$\varphi(-1) = 0; \quad a, b, f \in C[-1,1], \quad (2)$$

где $\varphi(u)$ — искомая функция из пространства Соболева $\overset{0}{W}{}_2^1[-1,1] \equiv X$ с обычной нормой. Задача (1) — (2) решается методом ортогональных многочленов. Приближенное решение ищется в виде многочлена

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k = \sum_{i=0}^{n}\beta_i Q_i(t), \quad -1 \le t \le 1, \quad (3)$$

где α_k и β_i — неизвестные постоянные, а $Q_n(t)$ — ортогональные многочлены Лежандра. Эти коэффициенты (а, следовательно, многочлен $\varphi_n(t)$) определяются методом Галеркина из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i(KQ_i, Q_{j-1}) = (f, Q_{j-1}), \quad j = \overline{1,n}, \quad \sum_{i=0}^{n}\beta_i Q_i(-1) = 0, \quad (4)$$

где (φ, ψ) — скалярное произведение в пространстве $L_2(-1,1) \equiv Y$.

С помощью результатов гл. 1 и 4 монографии [1] доказана следующая

Теорема. *Если задача* (1) — (2) *однозначно разрешима в пространстве* X *при любой правой части из пространства* Y, *то при всех* $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, СЛАУ* (4) *также однозначно разрешима. Приближенные решения* (3) *сходятся к точному решению* $\varphi^*(t)$ *задачи* (1) — (2) *в пространстве* X *со* *скоростью*

$$\|\varphi^*(t) - \varphi_n(t)\|_X = O\left\{E_n\left(\frac{d\varphi^*(t)}{dt}\right)_Y\right\}, \tag{5}$$

где $E_n(\psi)_Y$ *— наилучшее приближение функции* $\psi \in L_2$ *всевозможными алгебраическими многочленами степени не выше* n *в пространстве* L_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.

В. В. Сильвестров (Чебоксары)

ПРИМЕНЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ

Идея применения краевой задачи Римана на римановых поверхностях для решения задач теории упругости, гидромеханики и других разделов механики сплошной среды заложена в работах Л.И.Чибриковой (1967), Э.И.Зверовича (1971). В теории упругости этот метод в сочетании с методом симметрии применялся в основном к задачам в однородных средах. При этом исследования задач ограничивались их разрешимостью в рамках теории функций; вопросы механики разрушения не затрагивались.

Нами рассматриваются вопросы применения краевой задачи Римана на римановых поверхностях для решения в замкнутой аналитической форме задач теории упругости и механики разрушения для кусочно-однородных сред с трещинами и включениями на линии раздела сред при наличии на их продолжениях линий скольжения Комниноу и пластических линий Дагдейля. При этом упор делается на решение вопросов, связанных с распределением напряжений вблизи критических к разрушению точек, получением аналитических формул для параметров разрушения и нахождением неизвестных заранее геометрических параметров задач.

Математически рассматриваемые задачи эквивалентны комбинированной задаче Римана-Гильберта на совокупности коллинеарных отрезков, решение которой находится путем сведения ее к задаче Римана на двулистной римановой поверхности. Данным методом нами решены явно задача о системе межфазных трещин при наличии на их продолжениях линий скольжения и при произвольных заданных нагрузках на берегах трещин и на бесконечности; задача взаимодействия межфазной трещины с полностью отслоившимся тонким жестким остроугольным межфазным включением при условии отсутствия линий скольжения на их продолжениях и другие. Подробно изучены случаи полубесконечной межфазной трещины с линией скольжения на ее продолжении; межфазной трещины и отслоившегося тонкого жесткого межфазного включения (решения задач выражаются через элементарные функции и интегралы от них); конечной трещины с линиями скольжения на продолжении обеих концов; двух полубесконечных трещин с линиями скольжения на их продолжениях (решения выражаются через эллиптические интегралы); полубесконечной и конечной трещины с линиями скольжения на их продолжениях (решение задачи выражается через абелевы интегралы). В случае межфазной трещины и тонкого жесткого межфазного включения, сцепленного со средой, механическая задача сводится к комбинированной задаче Римана-Маркушевича для совокупности отрезков.

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00308).

М. А. Скопина (Санкт-Петербург)

РЕЛЬЕФНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция вида $F(x\cdot\theta)$, где $x,\theta \in \mathbf{R}^2$, $x\cdot\theta$ — скалярное произведение, называется плоской волной. Задача рельефной аппроксимации состоит в том, чтобы приблизить функцию двух переменных конечными линейными комбинациями плоских волн. Рельефная аппроксимация в L_2 изучалась в работах В.Темлякова [1], К.Осколкова [2], [3], [4], В.Майорова [5] и др. Мы исследуем рельефную аппроксимацию в пространстве $C(B)$, где B — единичный круг.

Пусть $L_{2,w}$ — гильбертово пространство функций, заданных на B, со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int\limits_B fgw$, где $w(x) = \pi^{-1}(1-|x|^2)^{-1/2}$. Положим $\mathcal{P}_n = \operatorname{span}\{X_n(x\cdot\varphi), x, \varphi \in B, |\varphi| = 1\}$, где X_n — многочлены Лежандра. В $\mathcal{P}_n$ строится ортогональный базис рельефных полиномов $\{P_{nk}\}_{k=0}^n$ по $n+1$ волновому направлению, которые сгущаются с ростом n. При этом вся совокупность функций $\{P_{nk}\}_{k,n}$ образует полную ортонормированную систему в $L_{2,w}$. Для непрерывных на B функций рассматривается их разложение в ряд Фурье по этой системе

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\langle f, P_{nk}\rangle P_{nk}. \tag{1}$$

Для широкого класса линейных методов установлена суммируемость ряда (1) для любого $f \in C(B)$. Показано, что для $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$, $\alpha > 1/2$, ряд (1) равномерно сходится к f. Построен полиномиальный рельефный базис в $C(B)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Temlyakov V. *On approximation by ridge functions*// Preprint. Department of Mathematics , University of South Carolina. – 1996. – 12 p.

2. Oskolkov K. *Ridge approximation, Chebyshev-Fourier analysis and optimal quadrature formulas*// Preprint. Department of Mathematics, University of South Carolina. – 1997. – 22 p.

3. Oskolkov K. *Ridge approximation and Kolmogorov-Nikol'skii problem*// Preprint. Department of Mathematics, University of South Carolina. – 1998. – 7 p.

4. Oskolkov K. *Non-linear versus linearity in ridge approximation* // Preprint. Department of Mathematics, University of South Carolina. – 1998. – 28 p.

5. Majorov V. E. *On best approximation by ridge functions*// Preprint. Department of Mathematics, Technion, Haifa. – 1997. – 16 p.

Д. Г. Сокол (Краснодар)

О ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Изучаются условия допустимости пар пространств $(\widetilde{A}_0^n[a,\infty), \widetilde{A}_0^n[a,\infty))$ $\Big((\widetilde{C}_0^n[a,\infty), \widetilde{C}_0^n[a,\infty))\Big)$ для операторов $\widetilde{K}x = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$, $\Phi x = \varphi(t, x(t))$ и уравнения $x = \widetilde{K}\Phi x + f$. Пространство $\widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\Big(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\Big)$ состоит из непрерывных и ограниченных на $[a,\infty)$ функций $x(t) : [a,\infty) \to R^n$, имеющих на бесконечности конечный (нулевой) предел по мере Лебега:

$$\exists a = a(x) \in R^n \ \forall \delta > 0 \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \mu\{t \geq T : \|x(t) - a\| > \delta\} = 0$$

$$\big(\forall \delta > 0 \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \mu\{t \geq T : \|x(t)\| > \delta\} = 0\big).$$

Будем считать, что функция $K(t,s)$ при каждом $t \in [a,\infty)$ суммируема по s на $[a,t]$ и

$$\lim_{h\to+0}\Big(\int\limits_a^t |K(t+h,s) - K(t,s)|\,ds + \int\limits_t^{t+h} |K(t+h,s)|\,ds\Big) = 0,$$

а функция $\varphi(t,\xi)$ непрерывна при $t \in [a,\infty)$, $\xi \in R^n$. Найдены достаточные, а в ряде случаев необходимые и достаточные условия, обеспечивающие допустимость указанных пар пространств для оператора $\widetilde{K}$, а также необходимые и достаточные условия для их допустимости относительно оператора Φ. Полученные результаты используются при изучении свойств решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра – Гаммерштейна.

Теорема. *Пусть пара пространств* $(\widetilde{A}_0^n[a,\infty), \widetilde{A}_0^n[a,\infty))$ $\Big((\widetilde{C}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{C}_0^n[a,\infty))\Big)$ *допустима для операторов* $\widetilde{K}$ *и* Φ. *Тогда, если существует такая непрерывная на* $[a,\infty)$ *функция* $\omega(t)$, *что*

$$|\varphi(t,\xi_1) - \varphi(t,\xi_2)| \leq \omega(t)|\xi_1 - \xi_2| \quad (\forall t \geq a\ \forall \xi_1, \xi_2 \in R^n)$$

и ядро $|K(t,s)|\,\omega(s)$ *устойчиво, то уравнение*

$$x = \widetilde{K}\Phi x + f$$

при любом свободном члене f *из* $\widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$ *имеет единственное решение* $x(t) \in \widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$.

А. П. Солдатов (Великий Новгород)

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$(\mathrm{sgn}\ y)\,u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в смешанной области D комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной при $y \geq 0$ ($y \leq 0$) ляпуновскими дугами σ (γ) с общими концами в точках $z = k$, $k = 0, 1$. Эллиптическую (гиперболическую) части D обозначим D^+ (D^-) и пусть $\theta_k = \theta_k^+$ и θ_k^- означают внутренние углы областей $D^\pm$ в точках $z = k$. Предполагается, что эти углы положительны, а кривая γ некасательна к семейству характеристик $x \pm y = \mathrm{const}$. В частности, $0 < \theta_k \leq \pi$, $0 < \theta_k^- < \pi/4$, $k = 0, 1$, а область D^- лежит внутри характеристического треугольника с основанием $J = \{0 < x < 1,\ y = 0\}$.

Под решением уравнения в области D^- класса C^n, $n \geq 0$, понимается функция, представимая формулой Даламбера $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ с некоторыми $f, g \in C^n(J)$. Ясно, что это решение принадлежит $C^n\left(\overline{D^-} \setminus \{0,1\}\right)$. При $n \geq 1$ функции f и g могут быть определены через данные Коши $\tau(x) = u(x,0)$ и $\nu(x) = u_y(x,0)$ из соотношений $f + g = \tau$, $f' - g' = \nu$.

Задача Пуанкаре (задача P) заключается в отыскании решения уравнения (1) в классе $C^1(\overline{D} \setminus \{0,1\})$ по краевому условию

$$\left.(a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u)\right|_{\sigma\cup\gamma} = g. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты a_j непрерывны по Гельдеру на каждой из дуг σ и γ (их сужения на эти дуги обозначаем, соответственно, a_j^+ и a_j^-), причем $(a_1 + ia_2)^+(t) \neq 0$, $t \in \sigma$, и одна из функций $(a_1 \pm a_2)^-$ всюду отлична от нуля на γ.

Особо отметим два следующих частных случая P^0 и P^1 задачи P, когда краевое условие (2) на γ переходит, соответственно, в $u_x - u_y = g$ и $u_x + u_y = g$. Из уравнения (1) при $y < 0$ видно, что в характеристическом треугольнике Δ с основанием $[0, 1]$ линейная комбинация $u_x \pm u_y$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристик $x \pm y = \text{const}$. Поэтому в постановке задачи P^r область D^- можно можно заменить на Δ, выбирая в качестве носителя краевого условия соответствующий отрезок характеристики $x + y = 0$, $(r = 0)$ или $x - y = 1$, $(r = 1)$. В результате получаем аналоги известной задачи Трикоми [1] с краевым условием Пуанкаре на σ.

Из тех же соображений задачу P^r, $r = 0, 1$, можем переформулировать как задачу Пуанкаре для гармонической в области D^+ функции, краевые условия которой получаются заменой γ интервалом J действительной оси.

С задачей P свяжем параметры $\lambda_k^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ и $\nu_k \in \mathbb{R}$, по формулам

$$\lambda_k^* = 1 + \frac{(-1)^k}{2p_k\theta_k} \ln \left|\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\right|^- (k), \quad \varepsilon_k = \operatorname{sgn}\,(a_1^2 - a_2^2)^-(k),$$

$$\nu_k = \pi/4 - \theta_k + (-1)^k(\pi/2 + \arg(a_1 + ia_2)^+(k)), \; k = 0, 1, \quad (3)$$

где $\arg(a_1 + ia_2)^+$ означает некоторую непрерывную на σ ветвь аргумента и p_k определяется из равенства $\theta_k p_k = \operatorname{arcth}(\operatorname{th}\theta_k^-)$. Заметим, что величина $2\theta_k p_k$ совпадает с $|\ln q_k|$, где $q_0 = \operatorname{th}(\pi/4 - \theta_0)$ и $q_1 = \operatorname{th}(\pi/4 + \theta_1)$ есть тангенсы углов наклона касательной кривой γ к характеристике $x + y = 0$ в точках, соответственно, $\tau = 0$ и $\tau = 1$,

С помощью этих параметров введем на числовой прямой множества Δ_k и Δ_k^*, $k = 0, 1$, следующим образом. Множество Δ состоит из всех корней $\delta \neq \lambda^*$ уравнения

$$\cos 2(\nu + \theta\delta) = \operatorname{th} 2p\theta(\lambda^* - \delta), \quad \varepsilon \sin 2(\nu + \theta\delta) > 0,$$

а Δ^* определяется уравнением

$$\frac{1}{p}\operatorname{arcch} r + \operatorname{arcth}\frac{r\sin 2(\nu+\theta\delta)}{\sqrt{r^2-1}} = \varepsilon\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

$$r = \frac{\cos 2(\nu+\theta\delta)}{\operatorname{th} 2p\theta(\lambda^*-\delta)} > 1.$$

Структура этих множеств такова. Множество Δ не имеет конечных предельных точек и

$$\operatorname{th}^{\pm 1}(\nu+\theta\delta) \to 0 \text{ при } \delta\in\Delta,\ \delta\to\mp\infty. \tag{4}$$

Что касается Δ^*, то это множество либо пусто, либо имеет единственной предельной точкой λ^*, лежит по одну сторону от λ^* и пересекается с Δ самое большее по одной точке. Более точно, множество Δ^* имеет λ^* своей единственной предельной точкой и лежит в связной компоненте $\{\delta \mid r \geq 1\}$, содержащей λ^*. В частности, Δ^* расположено слева (справа) от λ^* при $\cos a > 0$ ($\cos a < 0$), $a = 2(\nu+\theta\lambda^*)$. Если $\cos a = 0$, то это множество пусто.

Положим

$$\chi^*(\delta) = \left[\frac{\nu+\theta\delta}{\pi}+\frac{1}{2}\right],\ \delta>\lambda^*; \quad \chi^*(\delta) = \left[\frac{\nu+\theta\delta}{\pi}\right],\ \delta<\lambda^*,$$

где [ ] означает целую часть числа, и рассмотрим на $\mathbb{R}\setminus\{\lambda^*\}$ кусочно постоянную целочисленную функцию $\chi(\delta)$, допускающую разрывы только в точках $\delta\in\Delta\cup\Delta^*$ вида

$$\chi(\delta+0)-\chi(\delta-0) = \begin{cases} 1, & \text{если}, \quad \delta\in\Delta, \\ 2, & \text{если}, \quad \delta\in\Delta^*, \end{cases}$$

и удовлетворяющую условию $\chi(\delta)-\chi^*(\delta)\to 0$ при $\delta\to\infty$, $\operatorname{th}^2(\nu+\theta\delta)=1$ на бесконечности. В силу (4) это условие имеет смысл.

Заметим, что замена ν на $\nu+\pi n$ с целым n не меняет множеств Δ , Δ^* и добавляет к $\chi(\delta)$ слагаемое n. В частности, сумма $\chi_0(\lambda_0)+\chi_1(\lambda_1)$ не зависит от выбора непрерывной ветви аргумента в (3).

Следующий центральный результат о разрешимости задачи P тесно связан с соответствующими теоремами [2] о разрешимости задачи Римана–Гильберта для системы Лаврентьева–Бицадзе.

Теорема. *Пусть* $\lambda_0^*\lambda_1^* \le 0$, *причем числа* λ_k^* *одновременно в нуль не обращаются и* $(a_1-a_2)^-(t) \ne 0$ *при* $\lambda_0^* \le 0$, $(a_1+a_2)^- \ne 0$ *при* $\lambda_1^* \le 0$. *Тогда*

(*i*) *однородная задача* P *в классе функций* $u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, *допускающих в точках* $x = 0$, $x = 1$ *прямой* $y = 0$ *особенности порядка меньше 1, имеет конечное число* n *линейно независимых решений;*

(*ii*) *существует конечное число* n' *линейно независимых функций* $h_j \in C(\partial D)$, *условия ортогональности* $\langle g, h_j \rangle = 0$ *к которым необходимы, а при дополнительном предположении, что функция* $t(1-t)g(t)$ *непрерывна по Гельдеру на* ∂D *и обращается в точках* $t = 0$, $t = 1$ *в нуль, и достаточны для разрешимости неоднородной задачи* P *в этом классе;*

(*iii*) *разность* $n - n'$ *вычисляется по формуле* $n - n' = 1 - \chi_0(+0) - \chi_1(+0)$.

Если $\lambda_0^* = \lambda_1^* = 0$, *то утверждения* (*i*)–(*iii*) *справедливы в классе* C_r^*, $r = 0, 1$, *функций* $u \in C(\overline{D} \setminus \{r\})$, *производные которых в точке* $z = r$ *допускают особенности порядка меньше* 1, *а в точке* $z = 1 - r$ – *особенности любого порядка больше* 1.

Выражение (3), определяющее параметры λ_k^*, имеет простой геометрический смысл. Обозначим через $\alpha(t)$ непрерывную ветвь угла, который вектор $a^- = (a_1^-, a_2^-)$ образует с характеристикой $x + y = 0$ (ориентированной в нижнюю полуплоскость). Пусть $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ имеют аналогичный смысл по отношению, соответственно, к касательному вектору $s = (s_1, s_2)$ на γ и конормали $\tilde{n} = (-n_1, n_2)$, где n_j– компоненты нормали. Поскольку $s_1 + is_2 = i(n_1 + in_2) = -i(\tilde{n}_1 - i\tilde{n}_2)$, векторы s и $\tilde{n}$ симметричны относительно прямой $x + y = 0$ и можно положить $\alpha_2(t) = -\alpha_1(t)$, $0 \le \alpha_1(t) < \pi/2$. Очевидно, величина $2p_k\theta_k$ совпадает с $(-1)^{1-k}\operatorname{th}\alpha_1(k)$, так что в соединении с (3) имеем: $\lambda_k^* = 1 - \ln|\operatorname{th}\alpha(k)|/\ln[\operatorname{th}\alpha_1(k)]$, $\quad k = 0, 1$.

В частности, равенство $\lambda_k^* = 0$ возможно только при $\alpha(k) = \pm\alpha_1(k)$. С учетом отмеченного выше равенства $2p_k\theta_k = = (-1)^{1-k}\operatorname{th}\alpha_1(k)$ это означает, что вектор $a(k) = (a_1(k),\ a_2(k))$ направлен вдоль касательной или конормали к кривой γ в точке $t = k$.

Что касается общего условия $(a_1 \pm a_2)^- \ne 0$ (для одного из знаков), то оно равносильно $\alpha_1(t) \ne \pi/2 \pmod{\pi}$ в случае знака "минус" и $\alpha_1(t) \neq 0 \pmod{\pi}$ в случае знака "плюс." Другими словами, вектор (a_1, a_2) не имеет соответствующих характеристических направлений на кривой γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. *К проблеме уравнений смешанного типа*// Тр. Матем. ин-та АН СССР. - 1953. - XLI.

2. Солдатов А. П. *Задача Римана-Гильберта для системы Лаврентьева-Бицадзе*// Диф. уравнения. - 1998. - Т. 34. - No 12. - С. 1-11.

Е. Н. Сосов (Казань)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ЦЕНТРА ОГРАНИЧЕННОГО МНОЖЕСТВА В СПЕЦИАЛЬНОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство, удовлетворяющее следующим условиям A, B, C:

A. Для любых x, y из X найдется единственная точка $\omega(x, y) \in X$ такая, что $\rho(x, \omega(x, y)) = \rho(y, \omega(x, y)) = \rho(x, y)/2$.

B. Для всех p, x, y из X выполняется неравенство

$$2\rho(\omega(p, x), \omega(p, y)) \leq \rho(x, y).$$

C. Для каждого $r > 0$ и для любых ограниченных последовательностей $(p_n), (x_n), (y_n)$ пространства X таких, что $\rho(p_n, x_n) \leq r$, $\rho(p_n, y_n) \leq r$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(p_n, \omega(x_n, y_n)) = r$, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Отметим, что пространство X является геодезическим пространством [1], а (B) является условием неположительности кривизны пространства в смысле Буземана ([2], с. 304). Простыми примерами таких пространств являются равномерно выпуклые банаховы пространства и пространства Лобачевского (включая бесконечномерные). Напомним, что точка $z \in X$, для которой

$$\sup_{x\in M} \rho(x, z) = \inf_{y\in X} \sup_{x\in M} \rho(x, y),$$

называется чебышевским центром непустого ограниченного множества $M \subset X$ [2]. Сформулируем теперь полученный результат.

Теорема. *Для каждого непустого ограниченного множества полного метрического пространства, удовлетворяющего условиям A, B, C, существует и единственен чебышевский центр.*

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00308).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремович В. А. *Неэквиморфность пространств Евклида и Лобачевского*// Успехи матем. наук. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2 (30). – С. 178–179.

2. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 504 с.

3. Гаркави А. Л. *О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве*// Изв. АН СССР. Серия матем. – 1962. – Т. 26. – No 1. – С. 87–106.

Ф. Ф. Султанбеков (Казань)

ОБ (2,3)-ОДНОРОДНЫХ КВАНТОВЫХ ЛОГИКАХ

В классе конечных квантовых логик (ортомодулярных упорядоченных множеств) представляют интерес так называемые *однородные* логики [1]. Пусть n, m — натуральные числа. Логика L называется (n, m)-*однородной*, если каждый атом содержится в n блоках (блок — максимальное по включению семейство попарно ортогональных атомов), а каждый блок в L содержит ровно m атомов логики L. Ортомодулярные решетки с подобными свойствами рассматривались в [2]. Рассмотрим подробнее (2,3)-однородные логики L. Пусть A — множество всех атомов L, B — множество всех блоков L, S_2 — множество всех двузначных состояний в L. Как было установлено в [1] $2\mathrm{card}A = 3\mathrm{card}B$, поэтому необходимое условие существования двузначного состояния в L выполняется всегда.

Теорема. 1. *Существует единственная* $(2,3)-$*однородная логика* L *с* $\mathrm{card}A = 9$. *При этом* L *регулярная логика множеств и* $\mathrm{card}S_2 = 6$.

2. *Существуют только две* $(2,3)-$*однородные логики с* $\mathrm{card}A = 12$. *При этом одна из них является регулярной логикой множеств с* $\mathrm{card}S_2 = 9$, *другая не является логикой множеств и* $\mathrm{card}S_2 = 7$.

3. *Существуют только пять* $(2,3)-$*однородных логик с* $\mathrm{card}A = 15$. *Все они не являются логиками множеств и* $\mathrm{card}S_2 \in \{6, 8, 9, 11, 12\}$.

Замечание. Реализации (2,3)-однородных логик с $\mathrm{card}A = 18$, рассмотренные автором, допускают двузначные состояния. В связи с этим возникает проблема: существует ли на любой (2,3)-однородной логике двузначное состояние?

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103) и программой "Университеты России" (проект 990213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников П. Г. *Об однородных конечных логиках Гричи, допускающих двузначное состояние*// Теория функций, ее прил. и смежные вопросы. Материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д.Ф.Егорова. – Казань: Изд-во Каз. матем. общ–ва, 1999. – С. 167–168.

2. Rogalewicz V. *A remark on* $\lambda-$*regular orthomodular lattices*// Aplikace Mat. – 1989. – V. 34. – P. 449–452.

А. Я. Султанов (Пенза)

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СУММ УИТНИ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Пусть M_n — дифференцируемое многообразие, ∇ — линейная связность на M_n, $T(M_n)$ — касательное расслоение и $\tilde{M}_n =$

$T(M_n) \oplus \ldots \oplus T(M_n)$ — сумма Уитни m экземпляров касательных расслоений над M_n.

На $\tilde{M}_n$ существует единственная линейная связность ∇^H, удовлетворяющая условиям

$$\nabla^H Y^H(X^H) = (\nabla Y(X))^H, \quad \nabla^H Y^{(\alpha)}(X^H) = (\nabla Y(X))^\alpha,$$
$$\nabla^H Y^H(X^\alpha) = \nabla^H Y^{(\alpha)}(X^{(\sigma)}) = 0.$$

Всякое инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$ пространства $(\tilde{M}_n, \nabla^H)$ допускает единственное разложение [1]:

$$\tilde{X} = X^H + (F^\alpha)^H_{[\alpha]} + (Q^\alpha_\sigma)^{(\sigma)}_{[\alpha]} + Y_\sigma{}^{(\sigma)},$$

где $X, Y_\sigma \in \tau^1_0(M_n)$, $F^\alpha, Q^\alpha_\sigma \in \tau^1_1(M_n)$, $\alpha, \sigma = 1, 2, \ldots, m$, причем $L_X \nabla = 0$, $\nabla F^\alpha = 0$, $\nabla Q^\alpha_\sigma + \delta^\alpha_\sigma \hat{R}(X) = 0$, $\nabla^2 Y_\alpha = 0, R \circ F = 0$, $T \circ F = 0$.

Приведенное разложение позволяет построить другое разложение векторного поля $\tilde{X}$, которое использует полное поднятие векторных полей с базы в сумму Уитни. Доказано, что инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$ на $(\tilde{M}_n, \nabla^H)$ допускает единственное разложение вида

$$\tilde{X} = X^0 + (F^\alpha)^H_{[\alpha]} + (P^\alpha_\sigma)^{(\sigma)}_{[\alpha]} + Y_\sigma{}^{(\sigma)},$$

причем $L_X \nabla = 0$, $\nabla F^\alpha = 0$, $\nabla P^\alpha_\sigma = 0$, $\nabla^2 Y_\sigma = 0, R \circ F = 0$, $T \circ F = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Султанов А. Я. *Инфинитезимальные аффинные преобразования в расслоениях Вейля первого порядка со связностью горизонтального лифта*// Движения в обобщенных пространствах. Межвуз. сб. науч. тр. Пенз. гос. пед. ун-та. – 1999. – С. 142–149.

Н. С. Султанова (Пенза)

О ПРОЕКТИРУЕМЫХ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ АФФИННЫХ КОКАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА

Пусть M_n — дифференцируемое многообразие, $T^*(M_n)$ — его кокасательное расслоение. Предположим, что ∇ — линейная связность, заданная на M_n, ∇^H — горизонтальный лифт этой связности на $T^*(M_n)$. В данной работе устанавливается строение проектируемого инфинитезимального аффинного преобразования в $T^*(M_n)$ со связностью ∇^H.

Векторное поле $\tilde{X}$, заданное на $T^*(M_n)$, называется *проектируемым*, если на базе M_n существует векторное поле X такое, что $\tilde{X} - X^{(0)}$ — вертикальное. Векторное поле $X^{(0)}$ является полным лифтом поля X. В работе [1] установлено, что всякое инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$ в $T^*(M_n)$ со связностью ∇^H имеет следующее строение

$$\tilde{X} = X^0 + F^{\gamma H} + Q^{\gamma V^*} + \Theta^{V^*}$$

где X — векторное поле, F — тензорное поле типа $(2,0)$, Q — тензорное поле типа $(1,1)$ и Θ — линейная форма, заданные на M_n и удовлетворяющие некоторым условиям. Если потребовать, чтобы $\tilde{X}$ было проектируемым, то получим, что $F = 0$. Верно и обратное. При $F = 0$ векторное поле $\tilde{X}$ — проектируемое. Исходя из этого имеем:

Инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$ в $(T^*(M_n), \nabla^H)$ является проектируемым тогда и только тогда, когда

$$\tilde{X} = X^0 + Q^{\gamma V^*} + \Theta^{V^*},$$

причем $L_X\nabla = 0$, $\nabla Q = 0$, $\nabla^2\Theta = 0$. Здесь ∇Q — ковариантный дифференциал тензорного поля Q, $\nabla^2\Theta$ — ковариантный дифференциал второго порядка линейной формы Θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Султанова Н. С. *Инфинитезимальные аффинные преобразования кокасательного расслоения со связностью горизон-*

тального лифта// Движения в обобщенных пространствах. Межвуз. сб. науч. тр. Пенз. гос. пед. ун-та. – 1999. – С. 150–156.

А. Г. Терентьев (Чебоксары)

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ПРЕДЕЛЬНО МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Рассматривается движение цилиндрического тела в ограниченной вязкой жидкости в приближении Стокса. Из общего уравнения Навье-Стокса следует, что в окрестности обтекаемого твердого тела при малых числах Рейнольдса отношение конвективных членов к членам, характеризующим сопротивление трения, может быть малым и с математической точки зрения конвективными членами можно пренебречь. Такое упрощение было предложено Стоксом, который рассмотрел обтекание сферы и цилиндра. Им был обнаружен любопытный факт, что для цилиндра, в отличие от сферы, получить решение, удовлетворяющее всем граничным условиям, в том числе отсутствию возмущений на бесконечности, не удается. Этот факт известен в литературе как "парадокс Стокса"[1].

Задача сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции тока, которое решается методом конформного отображения области течения на кольцо с последующим использованием разложений искомых функций в ряд Лорана. Для частных случаев движения кругового цилиндра в жидкости, ограниченной концентрическим неподвижным цилиндром, получены точные аналитические решения. В случае эксцентрических окружностей для определения коэффициентов предложен численный алгоритм, основанный на методе коллокации. Путем предельного перехода к бесконечно большому радиусу внешнего цилиндра получено движение цилиндра перпендикулярно к плоскости.

Предложен численный алгоритм исследования движения произвольного тела в ограниченной области. Бигармоническое уравнение сводится к системе уравнений Лапласа и Пуассона, решения которых удовлетворяют на границах области двум интегральным уравнениям [2]. Эти уравнения методами граничных элементов [3] сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. *Гидродинамика.* – М.: ИЛ, 1963. – 244 с.

2. Elliot L., Ingham D. B. & Bashir T. B. A. *The boundary element method for the solution of slow flow problems for which a paradoxical situation arises*// Boundary Element Methods on Fluid Dynamics II. – Boston: Southampton, 1994. – P. 3–10.

3. Терентьев А. Г. *Численное исследование в гидродинамике*// Изв. АН ЧР, Чебоксары. – 1994. – No 2. – С. 61–84.

О. Е. Тихонов (Казань)

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДОВ НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА НЕРАВЕНСТВОМ СУБАДДИТИВНОСТИ ДЛЯ МОДУЛЯ

Хорошо известно, что для произвольного следа φ на алгебре фон Неймана M и любых операторов a_1, a_2 из M выполняется неравенство

$$\varphi(|a_1 + a_2|) \leq \varphi(|a_1|) + \varphi(|a_2|). \qquad (*)$$

Теорема. *Пусть φ — такой вес на алгебре фон Неймана M, что для любых самосопряженных операторов a_1, a_2 из M выполняется неравенство* (*). *В следующих двух случаях можно утверждать, что φ — след:*

1) *φ конечен;*

2) *φ нормален и полуконечен.*

Доказательство для первого случая использует конструкцию из работы [1]. Для перехода от случая 1) к случаю 2) применяется следующая

Лемма. *Пусть φ — такой нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана M, что для любого проектора $p \in M$, для* *которого $\varphi(p) < \infty$, редуцированный вес φ_p на редуцированной алгебре фон Неймана M_p является следом. Тогда φ — след.*

При доказательстве этой леммы используются результаты Ф. Комба [2, предложения 3.3 и 3.6] и следующее утверждение, на справедливость которого автору указал А. Н. Шерстнев.

Предложение. *Для нормального полуконечного веса на полуконечной алгебре фон Неймана единица этой алгебры представляется в виде суммы попарно ортогональных проекторов из алгебры, на каждом из которых вес принимает конечное значение.*

Работа поддержана РФФИ (проект 98-01-00103) и программой "Университеты России" (проект 990213).

ЛИТЕРАТУРА

1. Столяров А.И., Тихонов О.Е. *О характеризации следов в терминах теории некоммутативного интегрирования*/ Казань, 1992. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 05.11.92, № 3186-B92.

2. Комб Ф. *Веса и условные ожидания на алгебрах фон Неймана*// Математика (Сб. переводов). – 1974. – No 18:6. – С. 80–113.

С. Ю. Тихонов (Москва)

ОЦЕНКИ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ, II

Данная работа является продолжением работы [1].

Пусть L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство всех 2π-периодических измеримых функций, для которых $\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$; $\omega_\beta(f,t)_p$ — модуль гладкости порядка β $(\beta > 0)$ функции $f \in L_p$:

$$\omega_\beta(f,t)_p = \sup_{|h|\le t} \Big\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!} f(x+(\beta-\nu)h) \Big\|_p.$$

Введем следующие обозначения: для $\forall N \in \mathbb{N}$ и $\forall t \in (0, 2\pi]$ $P_0(t) = 1$, $P_N(t) = \prod\limits_{i=1}^{N} \ln_i \frac{d_i}{t}$, где $\ln_1 u = \ln u$, $\ln_i u = \ln(\ln_{i-1} u)$, $i = 2, 3, \ldots, N$, а константы d_i удовлетворяют условиям $1 \leq \ln_i \frac{d_i}{2\pi}$.

Под записью $\sigma(f, \lambda_n)$ будем понимать преобразованный ряд Фурье функции $f(x)$, а именно, если $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)$, то $\sigma(f, \lambda_n) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n(x)$, где λ_n в нашем случае имеет вид: $\{\lambda_n = n^r (\ln_N (nd_N))^A\}$ ($r > 0$ и $A > 0$) (сравните с [1],[2]).

Теорема 1. *Пусть $\theta = \min(2,p)$ и $\tau = \max(2,p)$. Если для $f(x) \in L^p$ при некотором $\beta > 0$*

$$\int_0^1 t^{-r\theta-1} (\ln_N \frac{d_N}{t})^{A\theta} \omega_{r+\beta}^{\theta}(f,t)_p dt < \infty,$$

то $\sigma(f, \lambda_n)$ есть ряд Фурье некоторой функции $\varphi(x) \in L_p$ и, кроме того,

$$\left\{ \delta^{\beta\tau} (\ln_N \frac{d_N}{\delta})^{A\tau} \int\limits_{\delta}^{1} \frac{t^{-\beta\tau-1}}{P_N(t)(\ln_N \frac{d_N}{t})^{A\tau}} \omega_\beta^\tau(\varphi,t)_p dt + \omega_\beta^\tau(\varphi,\delta)_p dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} \ll$$

$$\ll \left\{ \int\limits_0^\delta t^{-r\theta-1} (\ln_N \frac{d_N}{t})^{A\theta} \omega_{r+\beta}^\theta(f,t)_p dt \right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 2. *Пусть $\theta = \min(2,p)$ и $\tau = \max(2,p)$. Если для $f(x) \in L_p$ ряд $\sigma(f, \lambda_n)$ есть ряд Фурье некоторой функции $\varphi(x) \in L_p$, то $\forall \beta > 0$*

$$\left\{ \int\limits_0^\delta t^{-r\tau-1} (\ln_N \frac{d_N}{t})^{A\tau} \omega_{r+\beta}^\tau(f,t)_p dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} \ll$$

$$\ll\left\{\delta^{\beta\theta}(\ln_N \frac{d_N}{\delta})^{A\theta}\int\limits_\delta^1 \frac{t^{-\beta\theta-1}}{P_N(t)(\ln_N \frac{d_N}{t})^{A\theta}}\omega_\beta^\theta(\varphi,t)_p dt+\omega_\beta^\theta(\varphi,\delta)_p dt\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов С. Ю. *Оценки модулей гладкости функций с преобразованным рядов Фурье*// Сов. проблемы теории функций и их приложения. Саратов. – 2000. – С. 139–140.

2. Потапов М. К., Симонов Б. В. *Об оценках модулей гладкости функций с преобразованным рядом Фурье*// Фунд. и прикл. математика. – 1995. – Т. 1. – No 2. – С. 455–469.

С. Н. Тронин (Казань)

ОПЕРАДЫ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ГИПЕРГРАФОВ

Обозначим через $Gr(n)$ множество графов с n вершинами ($n = 1, 2, \ldots$), не обязательно простых, причем вершины занумерованы числами от 1 до n, и графы с различными нумерациями являются различными элементами $Gr(n)$. Аналогично, пусть $OGr(n)$ есть множество ориентированных графов с n вершинами, $FCat(n)$ есть множество категорий с n объектами, $Lat(n)$ — множество решеток с n элементами, $HGr(n)$ — множество гиперграфов с n вершинами, $Smp(n)$ — множество симплициальных комплексов с n вершинами. Предполагается, что все вершины, объекты и элементы снабжены нумерациями. Пусть $R(n)$ — любое из этих множеств, $R = \{R(n)|n \geq 1\}$.

Теорема. *Все семейства Gr, OGr, $FCat$, Lat, HGr, Smp обладают естественной структурой операды, то есть определены операции композиции вида $R(m)\times R(n_1)\times\ldots\times R(n_m)\to R(n_1+\ldots+n_m)$, обладающие рядом естественных свойств* [1].

Пусть $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ — множества вершин и ребер графа Γ. Если $\Gamma_0 \in Gr(m)$, $\Gamma_i \in Gr(n_i)$, $1 \leq i \leq m$, то результат композиции в операде Gr, граф $\Gamma = \Gamma\Gamma_1\ldots\Gamma_m$, устроен следующим образом: $V(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{m} V(\Gamma_i)$, причем производится перенумерация в порядке следования, от 1 до $n_1 + \ldots + n_m$. Множество $E(\Gamma)$ включает все $E(\Gamma_i)$, $1 \leq i$, и, кроме того, следующий набор ребер. Если в Γ_0 вершины v_k и v_j соединены ребром, то каждая вершина из $V(\Gamma_k) \subseteq V(\Gamma)$ соединена ребром с каждой вершиной из $V(\Gamma_j) \subseteq V(\Gamma)$, причем кратным ребрам из Γ_0 соответствуют кратные ребра в Γ. Примерно так же устроены композиции в OGr, $FCat$ и Lat.

В случае гиперграфов ребрами являются произвольные подмножества множества вершин. Сохраняя введенные выше обозначения, опишем композицию в HGr. Вершины $\Gamma = \Gamma\Gamma_1 \ldots \Gamma_m$ описываются так же, как и для графов, $E(\Gamma)$ содержит все $E(\Gamma_i)$, $i \geq 1$, а также следующие множества. Пусть вершина $v_k \in V(\Gamma_0)$ соответствует Γ_k, и $e = \{v_{k_1}, \ldots, v_{k_s}\} \in E(\Gamma_0)$. Тогда множество $\bigcup_{j=1}^{s} V(\Gamma_{k_j})$ является ребром Γ. В случае Smp для любых $e_{k_j} \in E(\Gamma_{k_j})$ симплексами Γ будут множества $e_{k_1} \cup \ldots \cup e_{k_s}$.

Работа поддержана РФФИ (грант 99-01-00469).

ЛИТЕРАТУРА

1. May J. P. *Definitions: operads, algebras and modules*// Contemp. Math. – 1997. – V. 202. – P. 1–7.

Г. М. Устинов (Екатеринбург)

АННУЛЯТОРЫ ЧЕБЫШЕВСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВ В $C(Q)$

Изучение свойств аннуляторов подпространств $L^\perp$ во многом позволило описать аппроксимационные свойства тех подпространств $L \subset C(Q)$, для которых $\operatorname{codim} L < +\infty$. Далее $\partial S_{L^\perp}$ есть множество всех экстремальных точек шара $S_{L^\perp} = \{\varphi \in L^\perp : \|\varphi\| \leq 1\}$.

Теорема. *Пусть Q — связный метризуемый компакт, L — чебышевское подпространство в $C(Q)$,* codim L> 1, *тогда $\partial S_{L^\perp}$ несчетно и $\partial S_{L^\perp}$ не содержит w^*-изолированных точек.*

Эта теорема в частности дополняет известные результаты о чебышевских подпространствах $L \subset C(Q)$, $\dim\ L < +\infty$.

З а м е ч а н и е. Опираясь на результаты работы [1], в пространстве c можно привести примеры чебышевских подпространств L, codim L= 2, для которых $\partial S_{L^\perp}$ счетно. В то же время можно установить, что если $L \subset c$, $\mathrm{codim} L = +\infty$, $\partial S_{L^\perp}$ — счетно, то L — не чебышевское подпространство.

Следующее предложение выявляет особую роль дискретных составляющих мер аннулятора рефлексивных подпространств с "хорошими" аппроксимационными свойствами.

Предложение. *Если L — рефлексивное квазичебышевское подпространство в сепарабельном пространстве* $C(Q)$, *то* $\forall\, q \in Q\ \exists \mu \in L^\perp :\ \|\mu\|\{q\} > 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гаркави А. Л. *Задача Хелли и наилучшее приближение в пространстве непрерывных функций*// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31. – No 3. – С. 641–656.

Б. Ф. Фатулаев (Смоленск)

О РЕШЕНИИ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СЛУЧАЕ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$, а область $T = \{z : |z| > 1\}$. Напомним [1], что функция $F(z)$ называется метааналитической в бесконечной области T, если она в этой области является регулярным решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} + \frac{a_1}{z} \cdot \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + \frac{a_0}{z^2} \cdot F(z) = 0, \qquad (1)$$

где a_0, a_1 — некоторые комплексные постоянные.

Известно [1], что если характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \qquad (2)$$

имеет один двукратный корень λ_0, то всякая метааналитическая в T функция имеет вид

$$F(z) = [\varphi_0(z) + \bar{z}\varphi_1(z)] \cdot \exp\{\lambda_0\bar{z}/z\}, \tag{3}$$

где $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$ — аналитические в T функции.

В сообщении рассматривается следующая краевая задача.

Требуется найти все метааналитические в T функции вида (3), *удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:*

$$F[\alpha(t)] = G_0(t) \cdot \overline{F(t)} + g_0(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial F[\alpha(t)]}{\partial n} = G_1(t) \cdot \overline{\frac{\partial F(t)}{\partial n}} + g_1(t), \tag{5}$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к контуру L, $G_k(t), g_k(t)$ $(k = = 0,1)$ — заданные на L функции класса Гельдера, а $\alpha(t)$ — функция сдвига, сохраняющая ориентацию контура.

С использованием представления (3) и уравнения Шварца для единичной окружности, удается установить следующий результат

Теорема. *Краевая задача* (4) – (5) *равносильна совокупности двух обычных внешних краевых задач типа Карлемана для аналитических функций.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов К. М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения.* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 345 с.

А. С. Феденко (Минск)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Идея предельного перехода в группах и пространствах известна давно. Достаточно напомнить переход от пространства

Лобачевского к пространству Евклида или от группы Пуанкаре к группе Галилея. Однако конкретная разработка соответствующей теории находится в самом начале своего пути.

Предельный переход в группах Ли и однородных пространствах можно трактовать, например, следующим образом. Пусть G — произвольная группа Ли, и $X_1, X_2, \ldots, X_r$ — базис соответствующей алгебры Ли g. Возьмем квадратную матрицу $A(\varepsilon)$ порядка r, элементы $A^i_j(\varepsilon)$ которой являются функциями параметра ε, $\det A(0) = 0$, но $\det A(\varepsilon) \neq 0$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Если $\varepsilon \neq 0$, то равенства

$$\tilde{X}_i = A^j_i(\varepsilon) X_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, r$$

определяют замену базиса в алгебре Ли g. При этом структурные константы примут новые значения

$$\tilde{c}^s_{pq}(\varepsilon) = A^i_p(\varepsilon) A^j_q(\varepsilon) B^s_k(\varepsilon) c^k_{ij}.$$

Предположим, что существуют предельные значения величин $\tilde{c}^s_{pq}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда эти предельные величины $\bar{c}^s_{pq}$ будут структурными константами некоторой алгебры Ли $\bar{g}$, которая называется предельной по отношению к алгебре Ли g. До настоящего времени изучены лишь простейшие случаи указанного предельного перехода. Например, матрицу $A(\varepsilon)$ можно взять в виде: $A(\varepsilon) = [1, \ldots, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon]$. Другими словами, базисные векторы алгебры Ли g делятся на две группы: X_α и X_i; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m$; $i, j, k = m + 1, \ldots, r$, и производится замена базиса: $\tilde{X}_\alpha = X_\alpha$, $\tilde{X}_i = \varepsilon X_i$. Структурные формулы алгебры Ли g в новом базисе будут иметь вид:

$$[\tilde{X}_\alpha, \tilde{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} \tilde{X}_\gamma + \underline{\frac{1}{\varepsilon} c^i_{\alpha\beta} \tilde{X}_i} + \ldots \quad .$$

Для того чтобы предельный переход был возможен, необходимо и достаточно, чтобы отсутствовали подчеркнутые члены, т. е. чтобы векторы X_α порождали подалгебру h в алгебре Ли g. Переходя на язык локальных групп Ли, можно утверждать, что любая подгруппа H заданной группы Ли G приводит к предельной группе $\bar{G}$. Тем самым возникает предельное однородное пространство $\bar{G}/\bar{H}$. Предельное пространство $\bar{G}/\bar{H}$ обладает многими свойствами исходного пространства. Исходя из известной классификации симметрических пространств с простыми основными группами, для каждого из этих пространств получены целые серии предельных симметрических пространств с неполупростыми основными группами.

Д. А. Фокин (Казань)

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ПРОФИЛЯ КРЫЛА НАД ЭКРАНОМ

Дана общая постановка задачи построения профиля крыла над экраном в потоке идельной несжимаемой жидкости. Постановка включает в качестве частных случаев задачу расчета обтекания профиля, задачу построения профиля по заданному на его контуре распределению скорости и задачу достраивания контура профиля. Решение задачи сведено к интегральному уравнению для распределения скорости на контуре профиля. Для удовлетворения условиям разрешимости задачи использована идея метода квазирешений обратных краевых задач [1]. Численная процедура отыскания квазирешения, использующая алгоритм численной минимизации функционала, позволяет учитывать широкий набор аэродинамических ограничений — ограничения на максимальную скорость на профиле, ограничение на величину формпараметра пограничного слоя для обеспечения безотрывности обтекания. Выбор целевой функции при получении квазирешения позволяет легко перейти к решению задач оптимизации формы профиля над экраном и, в частности, рассмотреть задачи максимизации подъемной силы профиля с заданной нижней поверхностью при заданных ограничениях на максимальную скорость и формпараметр пограничного слоя.

В работе приведены примеры построения профилей, сравнение полученных результатов с известными, результаты численной оптимизации профилей с частично заданным контуром над экраном.

Автор благодарит фонд Александра Гумбольта (Германия) и РФФИ (проекты 99-01-00173, 99-01-00365 и 99-01-04029) за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 436 с.

Б. Н. Хабибуллин (Уфа)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛНОТЫ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ВЫПУКЛОМ КОМПАКТЕ

Пусть K — выпуклый компакт в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $k(\theta)$ — опорная функция компакта K, $\theta \in [0, 2\pi]$. $S^*(K) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{C} : \theta \in s^*(k)\}$, где $s^*(k)$ — множество направлений θ, в любой окрестности которых функция $k(-\varphi)$ не тригонометрическая. $A(K)$ — пространство функций, непрерывных комплекснозначных на выпуклом компакте K и одновременно голоморфных внутри K, если внутренность K не пуста, с обычной sup-нормой.

Последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\} \subset \mathbf{C}$ сопоставим систему кратных экспонент $\operatorname{Exp}\Lambda = \{z^{k-1}e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \le k \le \Lambda(\lambda), k \in \mathbf{N}\}$, где $\Lambda(\lambda)$ — число повторений точки λ в последовательности Λ.

Гипотеза. *Пусть* K — *выпуклый компакт в* $\mathbf{C}$ *и две последовательности комплексных чисел* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *и* $\Gamma = \{\gamma_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *связаны соотношением*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n - \gamma_n|}{1 + \operatorname{dist}\left(\lambda_n, S^*(K)\right) + \operatorname{dist}\left(\gamma_n, S^*(K)\right)} < +\infty, \qquad \text{(AR)}$$

где $\operatorname{dist}(\lambda, S)$ — *расстояние от* $\lambda \in \mathbf{C}$ *до* $S \subset \mathbf{C}$. *Тогда системы* $\operatorname{Exp}\Lambda$ *и* $\operatorname{Exp}\Gamma$ *полны или неполны (минимальны или неминимальны) в пространстве* $A(K)$ *одновременно.*

Гипотеза справедлива, когда K — *отрезок* на $\mathbf{R}$ (см. [1, теорема 3]; в этой ситуации $\operatorname{dist}\left(\lambda, S^*(K)\right) = |\operatorname{Re}\lambda|$, $\lambda \in \mathbf{C}$). Развивая метод из [1] и используя обобщения на некоторые выпуклые компакты известного тождества Левинсона для отрезков, мы доказали гипотезу для *выпуклых компактов* K *с непустой внутренностью и с опорной функцией класса* C^2 и для *выпуклых многоугольников* K. В общем же случае пока можем утверждать лишь следующее: *если выполнено условие* (AR) *и система* $\operatorname{Exp}\Lambda$ *полна в* $A(K)$, *то система* $\operatorname{Exp}\Gamma''$, *где последовательность* Γ'' *получена после присоединения к* Γ *любых двух возможно повторяющихся чисел, также полна в* $A(K)$, *и наоборот.* Доказательство этого ослабленного варианта гипотезы использует метод из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexander W. O., Redheffer R. *The excess of sets of complex exponentials*// Duke Math. J. – 1967. – V. 34. – No 1. – P. 59–72.

2. Хабибуллин Б. Н. *Неконструктивные доказательства теоремы Берлинга-Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций*// Изв. РАН. Серия матем. – 1994. – Т. 58. – No 4. – С. 125–148.

Р. С. Хайруллин (Казань)

О ЗАДАЧЕ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается уравнение

$$\operatorname{sgn} y \cdot u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y}u_x + \frac{2p}{y}u_y = 0, \quad p < 1, \tag{1}$$

где p, q — вещественные параметры, в смешанной области D, эллиптическая часть которой D_1 совпадает со всей верхней полуплоскостью, а гиперболическая часть D_2 представляет собой бесконечный треугольник, ограниченный характеристикой AB : $x + y = 0$ и положительной осью абсцисс.

Задача $T_{p,q}$. *В области* D *найти функцию* $u(x,y) \in C(D)$ *со свойствами:*

1) $u(x,y) \in C^2(D_1 \cup D_2)$ *и удовлетворяет уравнению (1) в* $D_1 \cup D_2$;

2) *существуют пределы*

$$\nu_i(x) = \lim_{y\to 0, y\in D_i} |y|^{2p}[u(x,y) - A^i_{p,q}(x,y,\tau)]_y, \quad x > 0,$$

$i = 1, 2$, и выполняется условие склеивания $\nu_1(x) = c\nu_2(x)$;

3) $u(x,0) = 0, \quad x < 0$;

4) $u(x,y)|_{AB} = \psi(x)$;

где $A^i_{p,q}(x,y,\tau)$ — определенный оператор [1], $\psi(x)$ — заданная функция, $\tau(x)$ — обозначение $u(x,0), c \neq 0$ — числовой параметр.

Задача исследуется методом интегральных уравнений. Для различных значений параметров p и q доказывается существование единственного решения задачи при выполнении определенного числа условий разрешимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайруллин Р. С. *Задача Трикоми для одного уравнения с сингулярными коэффициентами*// Изв. вузов. Математика. – 1996. – No 3. – С. 75–84.

С. Г. Халиуллин (Казань)

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МЕРЫ И УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ

Для решения некоторых дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (например, параболических уравнений второго порядка) удобнее бывает рассматривать неизвестную функцию как некоторую меру, а не как функцию точки. Поэтому встает задача введения понятия производной меры и построения теории дифференцирования меры в линейных функциональных пространствах (см. [1 – 2]). Мы рассматриваем ультрапроизведения таких мер относительно свободного ультрафильтра в множестве $\mathbb{N}$ (см. [4]).

Определение 1. Пусть $\mathbf{E}_n$ — линейные пространства, $\mathfrak{E}_n$ — σ−алгебры подмножеств $\mathbf{E}_n$, причем операция сдвига на элемент $h_n \in \mathbf{E}_n$ измерима, μ_n — вероятностная мера на $\mathfrak{E}_n (n \in \mathbb{N})$. Скажем, что последовательность мер $\{\mu_n\}$ *равностепенно непрерывна относительно последовательности векторов* $\{h_n\}$, $h_n \in \mathbf{E}_n$, если для любой последовательности $\{A_n\}$, $A_n \in \mathfrak{E}_n$, последовательность числовых функций $\{t \to \mu_n(A_n - th_n)\}$ равностепенно непрерывна при $t = 0$.

Определение 2. (см. [3]). Мера μ, заданная в линейном пространстве с измеримыми сдвигами $(\mathbf{E}, \mathfrak{E})$, называется *дифференцируемой по направлению* $h \in \mathbf{E}$, если для каждого $A \in \mathfrak{E}$ функция $\{t \to \mu(A - th)\}$ дифференцируема.

Напомним, (см. [3]) что, если мера μ дифференцируема по направлению h, то функция множеств $A \to \frac{d}{dt}\mu(A-th)\mid_{t=0}$ автоматически оказывается σ-аддитивной мерой. Последняя называется производной меры μ по направлению h и обозначается $d_h\mu$. Обозначим через $D(\mu)$ множество всех $h \in \mathbf{E}$, по направлениям которых мера μ дифференцируема.

Теорема. *Пусть* $(\mathbf{E}_n, \mathfrak{E}_n)$ *— последовательность линейных пространств, где операция сдвига на элемент* $h_n \in \mathbf{E}_n$ *является измеримой, последовательность* (μ_n) *— равностепенно непрерывна относительно последовательности* (h_n) *при* $t = 0$, *причем* $h_n \in D(\mu_n)$, $\mathfrak{U}$ *— произвольный нетривиальный ультрафильтр в* $\mathbb{N}$. *Тогда мера ультрапризведения* $\mu_{\mathfrak{U}}$ *дифференцируема по направлению* $h = (h_n)_{\mathfrak{U}}$ *и* $d_h\mu_{\mathfrak{U}} = \lim_{\mathfrak{U}} d_{h_n}\mu_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г., Фомин С. В. *Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах*// Труды ММО. – 1971. – Т. 24. – 133–174.

2. Скороход А. В. *Интегрирование в гильбертовых пространствах*. – М.: Наука, 1975.

3. Фомин С. В. *Дифференцируемые меры в линейных пространствах*// Тез. кратких сообщ. Межд. конгр. математиков. Секц. 5. – 1966. – С. 78–79.

4. Heinrich S. *Ultraproducts in Banach space theory*// J. für die reine und angewandte Math. – 1980. - T. 313. – P. 72–104.

Р. Н. Хасанов (Казань)

СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ КАК РАССЛОЕНИЯ НАД R_n-МНОЖЕСТВОМ

Супергеометрические структуры активно изучаются в связи с приложениями в современной теории поля [1]. В настоящее время известен ряд неэквивалентных определений супермногообразий, мы будем использовать определение из [2].

Пусть Λ_q — вещественная супералгебра Грассмана с образующими ξ_i, $i = \overline{1,q}$, $L^{m,n} = (\Lambda_q^0)^m \oplus (\Lambda_q^1)^n$, где через Λ_q^0 (Λ_q^1) обозначено векторное пространство четных (нечетных) элементов. Отображение $f : U \subset L^{m,n} \to L$, где U — открытое множество, называется Λ_q-дифференцируемым, если $f(X, \Theta) = \sum\limits_{k=0} f_{i_1 \ldots i_k}(X)\Theta^{i_1} \ldots \Theta^{i_k}$, $X \in (\Lambda_q^0)^m$, $\Theta \in (\Lambda_q^1)^n$, где в правой части каждая функция от $X \in \Lambda_q^0$ имеет вид $g(x^i) + \partial_i g(x^i) y^i + \frac{1}{2}\partial_{ij} g(x^i) y^i y^j + \ldots$, где $X^i = x^i + y^i$, x^i — вещественная часть, y^i — радикальная часть, $g : R \to \Lambda_q$ — гладкая функция. Отображение $f : U \to L^{s,t}$ называется Λ_q-дифференцируемым, если все его компоненты Λ_q-дифференцируемы. Пусть $\mathcal{G}$ — псевдогруппа преобразований векторного пространства $L^{(m,n)}$, состоящая из Λ_q-диффеоморфизмов.

Супермногообразие размерности (m, n) есть вещественное гладкое многообразие размерности $(m+n)2^{q-1}$, моделируемое на $L^{(m,n)}$ и наделенное $\mathcal{G}$-атласом [2].

Определение супермногообразия как пространства, наделенного пучком суперкоммутативных колец [1], является частным случаем приведенного выше определения, и в этом случае (m, n)-мерное супермногообразие M есть тотальное пространство расслоения над вещественным многообразием B размерности m. Соответствующие примеры приведены в [2]. В общем случае на M имеется лишь слоение, пространство слоев которого не обязано быть многообразием. Как показано в [3], на множестве слоев любого слоения определена структура R_n-множества, а в [4] построены расслоения над R_n-множествами.

Утверждение. *Если вещественное многообразие M допускает структуру (m, n)-мерного супермногообразия, то:*

1) *на M определено слоение F коразмерности m;*
2) *M есть тотальное пространство расслоения над R_n-множеством M/F, слой которого есть аффинное пространство A размерности $(m+n)2^{q-1}-m$, а структурная группа есть подгруппа в группе полиномиальных преобразований A.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Манин Ю. И. *Калибровочные поля и комплексная геометрия.* – М.: Наука, 1984. – 336 с.

2. Rabin J. M., Crane Louis. *Global properties of supermanifolds*// Communicat. Math. Phys. – 1985. – V. 100. – No 1. – P. 141–150.

3. Лосик М. В. *О некотором обобщении многообразия и его характеристических классах*// Функц. анализ и его приложения. – 1990. – Т. 24. – No 1. – С. 29–37.

4. Хасанов Р. Н. *Характеристические классы расслоений над R_n-множествами*// Межд. школа-семинар по совр. проблемам теор. и матем. физики, 22 июня - 2 июля 1998 г. Тез. докладов. – Казань, 1998. – С. 27–29.

Г. В. Хромова (Саратов)

О РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ СЕМЕЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Рассмотрим уравнение Абеля

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(t)\,dt = f(x),\ 0<\alpha<1. \tag{1}$$

Считаем, что $u(x) \in C[0,1]$, а $f(x)$ задана ее δ-приближением в пространстве $L_2[0,1]$.

В [1] был предложен метод регуляризации уравнения (1), базирующийся на приближающих свойствах оператора Стеклова, при условии, что $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Ограничение снизу на параметр α удается снять, если вместо оператора Стеклова взять интегральные операторы с финитными ядрами, рассмотренные в [2]. Справедлива

Теорема. *Семейство интегральных операторов* $K_{h,\alpha}$, $h > 0$ *— параметр, с ядрами*

$$K_{h,\alpha}(x,\tau) = 3[2h^3\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)(2-\alpha)]^{-1}\tilde{K}_{h,\alpha}(x,\tau),$$

где

$$\tilde{K}_{h,\alpha}(x,\tau) = \begin{cases} (x+h-\tau)^{1-\alpha}[(1-\alpha)h+\tau-x]+ & \\ +(x-h-\tau)^{1-\alpha}[(1-\alpha)h+x-\tau], & 0 \le \tau \le x-h; \\ (x+h-\tau)^{1-\alpha}[(1-\alpha)h+\tau-x)], & |\tau - x| \le h; \\ 0, & x+h < \tau \le 1 \end{cases}$$

$\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon$, $\varepsilon > h$, *является регуляризирующим семеством для уравнения* (1) *при любых значениях параметра* α *из интервала* $(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хромова Г. В. *О регуляризации уравнения Абеля*// Обратные и некорректно поставленные задачи. Тез. докл. конф. – Москва, 2000. – С. 83.

2. Хромова Г. В. *О дифференцировании функций, заданных с погрешностью*// Диф. уравнения и выч. матем. Межвуз. науч. сб. Саратов. – 1984. – Вып. 6. – С. 53–58.

В. И. Художников (Йошкар-Ола)

ДВУХМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ С ОДНОЙ ФУНКЦИЕЙ АППЕЛЯ В ЯДРАХ

Рассмотрим двухмерное интегральное уравнение типа Абеля, ядро которого, кроме степенной особенности, содержат функцию Аппеля F_2:

$$\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2} \frac{(x_1-s_1)^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}\frac{(x_2-s_2)^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)} F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta_1,\beta_2\\ \gamma_1,\gamma_2\end{matrix}\middle| 1-\frac{s_1}{x_1},\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{s_2}{x_2}\right)\frac{s_1}{x_1}\right) f(s_1,s_2)\,ds_1ds_2 = g(x_1,x_2), \qquad (1)$$

где $0 < \mathrm{Re}\gamma_1 < 1$, $0 < \mathrm{Re}\gamma_2 < 1$, $g(x_1,x_2) \in AC([a_1,b_1]\times[a_2,b_2])$, $a_ib_i \geq 0$, $i = 1,2$. Уравнение (1) при $\beta_1 = \gamma_1$ с помощью формулы приведения [1] можно свести к уравнению

$$\int\limits_{a_1}^{x_1}\int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{(x_1-s_1)^{\gamma_1-1}}{\Gamma(\gamma_1)}\frac{(x_2-s_2)^{\gamma_2-1}}{\Gamma(\gamma_2)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\gamma_1\\ \gamma_1\end{matrix}\middle| 1-\frac{s_1}{x_1}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta_2\\ \gamma_2\end{matrix}\middle| 1-\frac{s_2}{x_2}\right) f(s_1,s_2)\,ds_1ds_2 = g(x_1,x_2). \qquad (2)$$

Уравнение (2) рассмотрено в работе [2] и его решение имеет вид

$$f(x_1,x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\int\limits_{a_1}^{x_1}\int\limits_{a_2}^{x_2}\frac{(x_1-t_1)^{-\gamma_1}}{\Gamma(1-\gamma_1)}\frac{(x_2-t_2)^{-\gamma_2}}{\Gamma(1-\gamma_2)}\times$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\alpha,-\gamma_1\\ 1-\gamma_1\end{matrix}\middle| 1-\frac{t_1}{x_1}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\alpha,-\beta_2\\ 1-\gamma_2\end{matrix}\middle| 1-\frac{t_2}{x_2}\right) g(t_1,t_2)\,dt_1dt_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1973. – 296 с.

2. Художников В. И. *Многомерные интегральных уравнениях типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах*// Теория функций, ее прил. и смежные вопросы. Материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. – Казань: Изд-во Каз. матем. об-ва, 1999. – С. 241–242.

В. И. Художников (Йошкар-Ола)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА СВЕРТКИ СО ВТОРОЙ ФУНКЦИЕЙ АППЕЛЯ

Рассматриваются интегральные формулы типа свертки для функции Аппеля $F_2(\alpha,\beta_1,\beta_2;\gamma_1,\gamma_2;x,y)$. Получены формулы изменения пар параметров (β_1, β_2) и (γ_1, γ_2). На основании интегрального представления для F_2 [1] и указанных выше формул получен аналог формулы Бейтмена с гипергеометрической функцией Гаусса

$$F_2\left(\begin{matrix}\alpha, \beta_1, \beta_2 \\ \gamma_1, \gamma_2\end{matrix}\middle| x, y\right) = \Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\int_0^1\int_0^1 \frac{u^{\delta_1-1}}{\Gamma(\delta_1)}\frac{(1-u)^{\gamma_1-\delta_1-1}}{\Gamma(\gamma_1-\delta_1)}\times$$
$$\times\frac{v^{\delta_2-1}}{\Gamma(\delta_2)}\frac{(1-v)^{\gamma_2-\delta_2-1}}{\Gamma(\gamma_2-\delta_2)}(1-ux-vy)^{\alpha_1-\alpha}F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \\ \delta_1, \delta_2\end{matrix}\middle| ux, vy\right)\times$$
$$\times F_2\left(\begin{matrix}\alpha-\alpha_1, \beta_1-\delta_1, \beta_2-\delta_2 \\ \gamma_1-\delta_1, \gamma_2-\delta_2\end{matrix}\middle| \frac{x(1-u)}{1-ux-vy}, \frac{y(1-v)}{1-ux-vy}\right) du\,dv, \tag{1}$$

где $0 < \operatorname{Re}\delta_i < \operatorname{Re}\gamma_i$, $i = 1, 2$. Из формулы (1) с помощью преобразований (5.11 [1]) можно получить еще несколько формул такого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1973. – 296 с.

Э. Д. Хусаинова (Казань)

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО B–ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $D^{++} = \{x > 0,\ y > 0\}$ — область, представляющая собой первую четверть координатной плоскости, ограниченная осями Ox и Oy. Рассматривается задача: найти четное по y решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 u = 0,\ k > 0, \tag{1}$$

в области D^{++}, удовлетворяющее граничному условию

$$u|_{x=0} = \varphi(y) \tag{2}$$

и при $R \to \infty$ условиям излучения

$$\int_{C'_R} |u|^2 y^k dC'_R = O(1), \quad \int_{C'_R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda u \right|^2 y^k dC'_R = o(1). \tag{3}$$

Здесь $C_R = \{(x,y) \in E_2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ — окружность, $C'_R = D^{++} \cap C_R$, $\lambda = \alpha\beta(\alpha > 0,\ \beta > 0)$, α, β — постоянные; $\varphi \in S_B$, где S_B — множество четных по y бесконечно непрерывно дифференцируемых функций $f(y)$, удовлетворяющих неравенству $\left|B_y^m f(y)\right| \leq \frac{c_{mn}}{(1+y^2)^n}$ при всех $m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и $y > 0$, где B_y^m — m-тая итерация оператора Бесселя $B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$.

Задача решается методом интегрального преобразования Фурье-Бесселя [1].

Решение задачи (1)–(3) представляется в виде

$$u(x,y) = \int_0^\infty \hat{\varphi}(\zeta)\Psi(\zeta,y)\zeta^k d\zeta,$$

где $$\Psi(\zeta,y) = \frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} \int_0^\infty e^{i\sqrt{\lambda^2-\eta^2}x} j_\nu(\eta y) j_\nu(\eta\zeta)\eta^k d\eta,$$

$j_\nu(\tau) = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{\tau^\nu} J_\nu(\tau)$, J_ν — функция Бесселя первого рода ν-го порядка, $\nu = \frac{k-1}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киприянов И. А. // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 89. – С. 130–213.

С. С. Чистоклетова (Краснодар)

О ВИДЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Изучается вид решения уравнения

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)\,[x(s) + \varphi(x(s))]\,ds + f(t).$$

при ограниченном свободном члене $f(t)$. Используя теорему об асимптотике резольвенты [1], доказана

Теорема. *Пусть* $1 - \hat{K}(z)$ *имеет в полуплоскости* $Re\, z \geq 0$ *конечное число нулей* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *и* $Re\,\lambda_j > 0$. *Пусть, далее* $\varphi(x) = O\left(|x|^\beta\right)$, $0 \leq \beta < 1$, *причем* $Re\,\lambda_j \neq \beta\,\mu$, *где* $\mu = \max Re\,\lambda_j$. *Тогда при любой ограниченной* f *решение*

$$x(t) = \sum_{Re\,\lambda_j > \beta\mu} P_j(t) e^{\lambda_j t} + O\left(t^{\beta(n-1)} e^{\beta\mu t}\right),$$

где $P_j(t)$ *— некоторые многочлены степени меньшей кратности корня* λ_j, *а* n *— максимальная кратность тех* λ_j, *для которых* $Re\,\lambda_j = \mu$.

Следствие. *Если* φ *— ограниченная функция, то*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} P_j(t) e^{\lambda_j t} + u(t),$$

где $u(t)$ *— ограниченная функция.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Дербенев В. А., Цалюк З. Б. *Асимптотическое поведение резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром*// Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – No 1. – С. 74–79.

А. Н. Чупрунов (Казань)

К ПОЧТИ ВСЮДУ ВЕРСИЯМ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ

Рассмотрим обобщение В.М.Кругловым [2] предельной теоремы Туманяна [1] для статистики Пирсона.

Пусть ξ_i, $i \in \mathbf{N}$, — последовательность независимых случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, равномерно распределенных на промежутке $[0,1)$, x_k; $0 \le k \le s$ ($s \in \mathbf{N}$), — такие числа, что $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{s-1} < x_s = 1$. Обозначим $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k)$, $p_k = x_k - x_{k-1}$, $1 \le k \le s$. Статистикой Пирсона (которую мы запишем в несколько нетрадиционной форме) называется случайная величина

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^{s} \frac{n}{p_k}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{\{\xi_i \in \Delta_i\}} - p_k\Big)^2.$$

Пусть $W \subset \{1, 2, \ldots n\}$. Предположим, что входящие в W числа записаны в виде конечной последовательности в возрастающем порядке. Обозначим $N(W)$ — число элементов в W, $p_0 = \min\{p_k : k \in W\}$, $S_n = \frac{\chi_n^2 - \mathbf{E}\chi_n^2}{\mathbf{D}\chi_n^2}$, $n \in \mathbf{N}$, γ — стандартная гауссовская случайная величина, $\xrightarrow{w}$ — слабая сходимость.

Теорема Круглова. *Предположим, что величины* s, p_k, $k = 1, 2, \ldots, s$ *и множество* W *зависят от* n *таким образом, что* $s \to \infty$ *при* $n \to \infty$, $\inf_{n \in \mathbf{N}}\{n \min_{1 \le k \le s} p_k\} = \alpha > 0$, $\lim_{n\to\infty} n p_0(W) = \infty$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s} N(W) = 1$. *Тогда* $L(S_n) \xrightarrow{w} L(\gamma)$, $n \to \infty$.

Обозначим

$$Q_n(\omega) = (\ln n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\delta_{S_k(\omega)} =$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big)^{-1}(1 + o(1))\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\delta_{S_k(\omega)}, \ \omega \in \Omega, \ n \in \mathbf{N}.$$

Сформулируем версию "почти всюду" теоремы Круглова.

Теорема. *В условиях теоремы Круглова* $Q_n(\omega) \overset{w}{\to} L(\gamma)$, $n \to \infty$, *для почти всех* $\omega \in \Omega$.

В докладе приводятся версии "почти всюду" иных предельных теорем.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00441).

ЛИТЕРАТУРА

1. Туманян С. Х. *Асимптотическое распределение критерия* χ^2 *при одновременно возрастании объема наблюдений и числа групп*// Теория вероятн. и ее примен. – 1956. – Т. 1. – Вып. 1. – С. 131–145.

2. Круглов В. М. *Асимптотическое поведение статистики Пирсона*// Теория вероятн. и ее примен. – 2000. – Т. XXXXV. Вып. 1. – С. 73–102.

Г. Г. Шарафутдинова (Стерлитамак)

АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Рассмотрим уравнение

$$sgny|y|^n u_{xx} + sgnx|x|^n u_{yy} = 0, \quad n > 0, \tag{1}$$

в области D, ограниченной: 1) кривой Γ из класса Ляпунова, лежащей в первой четверти плоскости с концами в точках $B(1,0)$ и $B_1(0,1)$; 2) характеристиками AC и CB уравнения (1) при $x > 0, y < 0$; 3) характеристиками AC_1 и C_1B_1 уравнения (1) при $x < 0, y > 0$, где $A = (0,0)$, $C = (l,-l)$, $C_1 = (-l,l)$, $l = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha = \frac{n+2}{2}$. Пусть $D_1 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $D_3 = D \cap \{x < 0, y > 0\}$; $x = x(s), y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, s — длина дуги, отсчитываемая от точки B; S — длина кривой Γ.

Задача Трикоми (Задача T). *Найти функцию u(x,y), удов-*

летворяющую условиям: $u(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$; $\quad Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3; \quad u(x,y) = u(x(s),y(s)) = \varphi(s), \quad 0 \le s \le S; \quad u(x,y)\Big|_{AC \cup AC_1} = \psi(x)$, $-l \le x \le l$, *где* φ *и* ψ *— заданные достаточно гладкие функции.*

Регулярным решением задачи Трикоми назовем функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям задачи T и дополнительно потребуем, чтобы производная u_η (u_ξ) в характеристических координатах была непрерывна в $D_2 \cup AC$ $(D_3 \cup AC_1)$. Равномерный в $\overline{D}$ предел последовательности регулярных решений задачи T назовем обобщенным решением задачи T.

Теорема 1. *Если* $\varphi(s) \in C^1[0,S]$, $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$, $\psi(x) \in C[-l,l] \wedge C^3[-l,0] \wedge C^3[0,l]$ *и кривая* Γ *в малых окрестностях точек* B *и* B_1 *совпадает с дугами нормальной кривой уравнения* (1), *то существует регулярное решение задачи Трикоми.*

Теорема 2. *Если* $\varphi(s) \in C[0,S]$, $\varphi(0) = \varphi(S) = 0$, $\psi(x) \in C[-l,l] \wedge C^3[-l,0] \wedge C^3[0,l]$, *то существует единственное обобщенное решение задачи Трикоми, которое принадлежит классу* $C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, *при произвольном подходе кривой* Γ *к осям координат, за исключением случаев, когда в достаточно малых окрестностях точек* B *и* B_1 *соответственно* dx/ds *и* dy/ds *меняют знаки.*

Доказательство теорем 1 и 2 проводится на основании работ [1,2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сабитов К. Б., Карамова А. А., Шарафутдинова Г. Г. *К теории уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения*// Изв. вузов. Математика. – 1999. – No 11. – С. 69–80.

2. Сабитов К. Б. *К вопросу о существовании решения задачи Трикоми*// Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 2. – No 12. – С. 2092–2101.

Г. Н. Шарипова (Казань)

ОБЩИЙ КВАДРАТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен способ исследования общего квадратурного метода дискретизации полного сингулярного интегрального уравнения типа Гильберта в пространстве непрерывных функций. В основу изложения положены понятия регулярной и компактной сходимости регуляризованных дискретизированных операторов.

При использовании любых вычислительных схем, в конечном счете, приходится решать последовательность систем линейных алгебраических уравнений, получающихся в результате применения различных квадратурных формул для окончательной дискретизации. Эти схемы можно рассматривать как вариант общего метода квадратур. Большой интерес представляет выбор в качестве основного пространства — пространство непрерывных функций и его дискретные аналоги. В этом случае сингулярный интегральный оператор неограничен, поэтому не удается использовать непосредственно способы, основанные на методах функционального анализа.

С помощью [1, 2] построена схема обоснования общего квадратурного метода для сингулярных интегральных уравнений Гильберта в пространстве непрерывных функций. Исследовано полное уравнение при произвольных значениях его индекса. Используется хорошо известный прием сведения сингулярного интегрального уравнения к эквивалентному регулярному уравнению. Но, в отличие от известных работ, в которых приближенная схема для исходного уравнения строится на основе регуляризованного, регуляризация используется лишь для обоснования разрешимости системы линейных алгебраических уравнений, непосредственно дискретизирующей сингулярное интегральное уравнение. Полученные результаты переносятся также на сингулярные интегральные уравнения с ядрами Гильберта и Коши по разомкнутому контуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений*

линейных задач. – Казань: Изд–во Казанск. ун–та, 1980. – 232 с.
2. Вайникко Г. М. *Анализ дискретизационных методов.* – Тарту: Изд–во Тартуск. ун–та, 1976. – 161 с.

Г. Н. Шарипова (Казань)

ОБ ОДНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Следуя работам [1, 2], исследуем структурные свойства слабосингулярного оператора

$$Sx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{\sigma - s}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma \tag{1}$$

в пространстве суммируемых функций $L_1[0, 2\pi]$.

Если этот оператор рассматривать как оператор из $L_1[0, 2\pi]$ в $L_1[0, 2\pi]$, то он вполне непрерывен. Если же его рассматривать на некоторых сужениях пространства $L_1[0, 2\pi]$, то оператор S будет ограничен и непрерывно обратим.

Пусть X — пространство суммируемых функций, для которых сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$Ix \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{ctg}\frac{\sigma - s}{2} x(\sigma)\,d\sigma,$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, является также суммируемой функцией.

В качестве пространства Y выберем пространство дифференцируемых в смысле Соболева функций, имеющих первые производные из пространства X. Нормы в этих пространствах определим следующим образом:

$$\|x\|_X = \|x\|_L + \|Ix\|_L, \quad \|y\|_Y = \|y\|_L + \|y'\|_L.$$

Теорема. *Слабосингулярный оператор $S : X \to Y$ ограничен и непрерывно обратим, причем*

$$\|S\|_{X\to Y} \le \frac{2 + \ln^2 2}{2\ln 2}, \quad \|S^{-1}\|_{Y\to X} \le 3.$$

Заметим, что интегральное уравнение первого рода с рассматриваемым оператором (1) в главной части возникает в задачах дифракции, а полученные результаты служат основой для теоретического обоснования приближенных методов его решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г., Хазириши Э. О. *О приближенных решениях сингулярных интегральных уравнений*// Сообщения АН ГССР. – 1985. – Т. 117. – No 2. – С. 249–252.

2. Ожегова А. В. *Равномерные приближения решений слабосингулярных интегральных уравнений первого рода:* Дисс... канд. физ.–мат. наук. – Казань, 1996. – 92 с.

Е. А. Широкова (Казань)

ПОЛУЧЕНИЕ КЛАССОВ ДАННЫХ ДЛЯ КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ КРИВОЙ

Пусть $\tilde{w}(\sigma) = \tilde{u}(\sigma) + i\tilde{v}(\sigma), 0 \leq \sigma \leq \sigma_k$, — уравнение замкнутой кривой, σ — естественный параметр, причем

$$\max_{0 \leq r, \sigma \leq \sigma_k} |\Phi^{(5)}_{rrr\sigma\sigma}| \frac{\sigma_k^5}{\pi 144} \equiv b < \frac{1}{\pi},$$

где $\Phi(r,\sigma) \equiv \arg[\tilde{w}(r) - \tilde{w}(\sigma)]$.

Если $\sigma = \sigma(s), 0 \leq s \leq l$, — монотонная функция, удовлетворяющая условиям: $0 < m_1 \leq \sigma'(s) \leq M_1 < \infty, |\sigma'(s_1) - \sigma'(s_2)| \leq \omega(s_1 - s_2)$, где

$$\omega(0) = 0, \quad \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty, \quad \delta > 0,$$

причем

$$\inf_{0<\delta\leq\sigma_k/2}[\frac{1}{m_1}\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}dt + 2|\ln M_1||\ln(l/(2\delta))|] <$$

$$< \frac{\pi(1-2b)(1-\pi b)m_1}{2M_1},$$

то зависимость $w(s) \equiv \tilde{w}(\sigma(s))$ представляет собой исходные данные, при которых решение соответствующей внутренней обратной краевой задачи по параметру s (см. [1]) будет однолистным – почти выпуклым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.*– Казань: Изд-во Казанс. ун-та., 1965. – 333 с.

В. В. Шуликовская (Ижевск)

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана последовательность независимых случайных матриц $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ из $G = SL(m, R)$, имеющих одинаковое распределение μ. Обозначим $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество натуральных чисел, не больших, чем m, а $\tau = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ — подмножество множества I, для которого $i_1 < i_2 < \ldots < i_s = m$. Пусть $V_\tau = \{v\}$ — множество блочно-диагональных ортогональных матриц с блоками размерности $i_1 \times i_1$, $(i_2 - i_1) \times (i_2 - i_1), \ldots, (i_s - i_{s-1}) \times (i_s - i_{s-1})$, а $Y_\tau = \{y\}$ — однородное пространство левых смежных классов группы унимодулярных ортогональных матриц по подгруппе V_τ, которое можно понимать как область некоторого многообразия в R^{m^2}. Тогда для каждой матрицы g можно определить действие группы G на Y_τ: $y \to y\overline{g}$, полагая $y\overline{g}$ проекцией в Y_τ произведения g и произвольной матрицы из класса y. Обозначим произведение матриц через $g(n) = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n$. Нетрудно убедиться, что последовательность элементов $\{y_n = y_0\overline{g(n)}\}$ является цепью Маркова. Так как вероятности перехода такой цепи Маркова зависят только от распределения μ, ее принято называть μ-блужданием на Y_τ.

В настоящей работе найдены условия на носитель меры μ, обеспечивающие невырожденность распределения μ на специальных гиперпространствах, размерности которых зависят от индекса τ. При этих условиях доказано, что μ — блуждание $\{y_n\}$ имеет единственное стационарное распределение ν^τ и является эргодичным. Более того, если обозначить $\Phi_k(y, g) = \int_{V_\tau} \ln d_k(vug)\chi(dv)$, где χ — мера Хаара на V_τ, $d_k(g)$ — k-ый диагональный элемент матрицы $d(g)$ в разложении Ивасавы, $u \in y$, то с P-вероятностью 1 существуют пределы

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Phi_k(E, g(n))}{n} = a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

причем неслучайный вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ удовлетворяет условию $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_s}$.

Данная работа обобщает результаты, полученные ранее И.Я. Гольдшейдом, Г.А. Маргулисом [1] и А.В. Летчиковым [2].

Работа поддержана РФФИ (проекты 97-01-00704 и 00-01-00225).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольдшейд И. Я., Маргулис Г. А. *Показатели Ляпунова произведения случайных матриц*// Успехи мат. наук.– 1989. – Т. 44. – Вып. 5. – С. 13–59.

2. Летчиков А. В. *Произведения унимодулярных независимых случайных матриц*// Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51. – Вып. 1. – С. 51–100.

В. В. Шурыгин (Казань)

О КОГОМОЛОГИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЯХ ДЛЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ А-ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ НЕКОТОРОМУ РАССЛОЕНИЮ А-СКОРОСТЕЙ ВЕЙЛЯ

С n-мерным гладким многообразием $M_n^{\mathbf{A}}$ над локальной алгеброй Вейля $\mathbf{A}$ естественно ассоциируются два локально тривиальных расслоения $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ со стандартным слоем $\dot{\mathbf{A}}^n$, где $\dot{\mathbf{A}}$ — максимальный идеал алгебры $\mathbf{A}$ [1]. Расслоения $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ являются слоеными расслоениями по отношению к каноническому $\dot{\mathbf{A}}^n$-слоению на $M_n^{\mathbf{A}}$. В случае локальной алгебры $\mathbf{R}(N,1)$ высоты 1 $O^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ оказывается аффинным расслоением, а $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ — ассоциированным с ним векторным расслоением. Поднятое слоение определяет частичную плоскую связность Γ в расслоении $O^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$. Ковариантная производная $\nabla\sigma$ канонического сечения $\sigma : M_n^{\mathbf{R}(N,1)} \to O^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ в связности Γ является 1-формой на $M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ со значениями в сечениях расслоения $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$.

Рассуждениями, аналогичными примененным в [1] при изучении аффинных многообразий, доказывается следующая

Теорема. *Полное $\mathbf{R}(N,1)$-гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ $\mathbf{R}(N,1)$-диффеоморфно некоторому расслоению N^1-скоростей Эресмана $T^{\mathbf{R}(N,1)}W_n$ тогда и только тогда, когда обращается в нуль класс $[\nabla\sigma]$ в группе d_F-когомологий*

$$H_F^{1,0}(M_n^{\mathbf{R}(N,1)}, \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)})$$

(*см.* [2]) *для канонического $\dot{\mathbf{R}}(N,1)$-слоения форм со значениями в сечениях расслоения $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$.*

Факторизацией по модулю квадрата $(\dot{\mathbf{A}})^2$ идеала $\dot{\mathbf{A}}$ вышеописанная конструкция распространяется на случай многообразий над произвольной локальной алгеброй Вейля $\mathbf{A}$, что приводит к когомологическим классам, являющимся препятствиями к $\mathbf{A}$-диффеоморфности $\mathbf{A}$-гладкого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ некоторому расслоению Вейля $T^{\mathbf{A}}W_n$.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00308).

ЛИТЕРАТУРА

1. Shurygin V. V. *Smooth connections and horizontal distributions on manifolds over local algebras.* Proceedings of the Conference on

Differential Geometry and Applications. Aug. 28 – Sept. 1, 1995. Brno. Czech Republic. – Brno, 1996. – P. 309–319.

2. Goldman W., Hirsch M. W. *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 26. – No. 2. – P. 629–649.

3. Molino P. *Riemannian foliations.* Birkhäuser, 1988.

Е. П. Шустова (Казань)

ПОЛНЫЙ ЛИФТ СВЯЗНОСТИ И МЕТРИКИ В КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ ПОРЯДКА K

Под касательным расслоением k-го порядка T^kM_n пространства аффинной связности M_n [1] будем понимать множество k-струй гладких отображений $\gamma : R \longrightarrow M_n$, где R — вещественная прямая. Пусть отображение $\gamma : R \longrightarrow M_n$, k-струя $j_0^k\gamma$ которого служит элементом расслоения T^kM_n, задано в локальных координатах формулами $x^i = x^i(t)$, причем при $t = 0$ получается рассматриваемая точка $x \in M_n$. Тогда указанная k-струя отображения γ определяется точкой x и значениями первых k производных от функций $x^i(t)$ по t при $t = 0$. Пусть $(x^i; x^{n+i}; x^{2n+i}; \ldots; x^{kn+i})$ — локальная система координат в T^kM_n, где x^{mn+i} — производная порядка $m = \overline{1,k}$ от x^i по t, деленная на $m!$.

В локальных координатах $(x^\alpha)_{\alpha=\overline{1,n(k+1)}}$ получена явная формула для вычисления компонент $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, n(k+1)})$ полного лифта в T^kM_n связности Γ^i_{jk}, заданной на базе M_n. Эта формула имеет вид:

$$\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{an+i}_{bn+m\,cn+s} = D_{a-b-c}[\Gamma^i_{ms}], \quad b, c = \overline{0,a}, \quad a = \overline{0,k},$$

причем $(b + c) \leq a$. Остальные $\overset{c(k)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$.

$D_a[\Omega]$ — оператор, действующий на некоторый дифференциально–геометрический объект Ω, заданный на базе M_n, следующим образом:

$$D_a[\Omega] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{a} \frac{1}{i!}\partial_{p_1\ldots p_i}\Omega \sum\limits_{l_1,\ldots,l_i=1, l_1+\ldots+l_i=a}^{a} x^{l_1 n+p_1}\ldots x^{l_i n+p_i}, & a=\overline{1,k}, \\ \Omega, & a=0. \end{cases}$$

Используется правило суммирования Эйнштейна.

Пусть далее M_n — риманово пространство с метрикой g_{ij}. Показано, что компоненты $\overset{c(k)}{g}_{\beta\gamma}$ $(\beta,\gamma=\overline{1,n(k+1)})$ полного лифта в $T^k M_n$ метрики g_{ij}, заданной на базе M_n, вычисляются по формуле:

$$\overset{c(k)}{g}_{bn+i\ cn+j} = D_{k-b-c}[g_{ij}], \qquad b,c=\overline{0,k},$$

причем $(b+c)\le k$. Остальные $\overset{c(k)}{g}_{\beta\gamma}=0$.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00308).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 264 с.

Л. Д. Эскин (Казань)

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ РЕЙНЕРА-РИВЛИНА

С помощью методов группового анализа изучается уравнение

$$u_t = \left(u^2 f(v)\right)_x, \quad v = uu_x. \tag{1}$$

Уравнения вида (1) описывают динамику пленочных течений неньютоновской жидкости с реологией Рейнера-Ривлина [1], турбулентную фильтрацию газа в пористой среде [2], процессы гидроразрыва [3] и т.д. В приложениях для произвольной функции

f обычно выполнено условие $f(0) = 0$. В этом случае задачу полного группового анализа уравнения (1) (на уровне точечных преобразований) решает

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:* 1) *базу ядра основных алгебр* (*алгебры* L_3) *уравнения* (1) *составляют операторы* $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$, $X_3 = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u$; 2) *базу непрерывной группы преобразований эквивалентности уравнения* (1) *составляют операторы* X_i, $i = 1, 2, 3$, *и оператор* $3x\partial_x + 2u\partial_u + v\partial_v + f\partial_f$; 3) *уравнение* (1) *допускает расширение ядра* L_3 *лишь в следующих трех случаях:* а) $f = mv^n$, $n > 0$, *алгебра* L_3 *расширяется за счет оператора* $X_4^a = (n+1)t\partial_t + x\partial_x - v\partial_v$, б) $f = m\left(\frac{av}{av+b}\right)^{1/b}$, $b > 0$, *алгебра* L_3 *расширяется за счет оператора* $X_4^b = ((2+b)x - \frac{au^2}{2})\partial_x + (b+1)u\partial_u + v(av+b)\partial_v$; в) $f = m\exp(-\frac{1}{av})$, $av > 0$ *алгебра* L_3 *расширяется за счет оператора* $X_4^c = (2x - \frac{au^2}{2})\partial_x + u\partial_u + av^2\partial_v$.

Для всех допускаемых алгебр построены оптимальные системы подалгебр. Классифицированы и детально исследованы асимптотики наиболее интересных семейств инвариантных решений уравнений динамики неньютоновской жидкости с реологией Рейнера-Ривлина. Оператор X_4^a был ранее указан в [4].

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00128).

ЛИТЕРАТУРА

1. Астарита Дж., Маруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.* – М: Мир, 1978. – 309 с.

2. Баренблатт Г. И. *Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости*// ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 6. – С. 679–698.

3. Гордеев Ю. Н., Зазовский А. Ф. *Точные решения задачи о распространении вертикальной трещины гидроразрыва постоянной высоты и большой протяженности*// Изв. АН., Мех. твердого тела. – 1992. – No 1. – С. 94–104.

4. Чугунов В.А. *О групповых свойствах уравнения, описывающего течение ледников*// Изв. вузов. Математика. – 1982. – No 10. – С. 84–87.

В. А. Юрко (Саратов)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО СЛЕДУ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу Коши для волнового уравнения

$$\left.\begin{aligned} &u_{xx} - u_{tt} = \pm q_1(x)u_t - q_0(x)u, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ &u_{|t=0} = 0, \quad u_{t|t=0} = 2\delta(x), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $q_j(x)$ — комплекснозначные функции, $q_j(-x) = q_j(x)$, $q_j(x) \in W_1^j(0,\infty)$. Обозначим $r^{\pm}(t) := u^{\pm}(0,t)$, где $u^{\pm}(x,t)$ — решение (1). Исследуется следующая обратная задача восстановления коэффициентов уравнения (1) по следам решений $r^{\pm}(t)$: *по заданным* $r^{\pm}(t)$, $t \geq 0$, *найти* $q_1(x)$ и $q_0(x)$.

Отметим, что данная обратная задача равносильна обратной спектральной задаче восстановления коэффициентов несамосопряженного квадратичного пучка

$$y'' + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x))y = 0, \quad x > 0 \qquad (2)$$

по заданной функции Вейля $M(\rho) := \Phi(0,\rho)$, где $\Phi(x,\rho)$ — решение (2) при условиях $\Phi'(0,\rho) = 1$, $\Phi(x,\rho) = O(\exp(\pm i\rho x))$, $x \to \infty$, $\pm Im\,\rho > 0$. С использованием связей со спектральной теорией пучка (2), получены следующие результаты.

1) Доказана теорема единственности:

Теорема. *Задание следов* $r^{\pm}(t)$, $t \geq 0$, *однозначно определяет функции* $q_1(x)$ *и* $q_0(x)$, $x \geq 0$.

2) Получена конструктивная процедура построения глобальноио решения обратной задачи методом, изложенным в [1]. Центральным местом здесь является получение и исследование так называемого основного уравнения обратной задачи, которое является линейным уравнением в соответствующем банаховом пространстве. Исследована разрешимость основного уравнения и предложен алгоритм построения коэффициентов волнового уравнения с использованием решения основного уравнения.

3) Получены необходимые и достаточные условия глобальной разрешимости обратной задачи. Отметим, что в [2] получено локальное решение обратной задачи для уравнения (1) в окрестности начала координат.

Замечание. Задания только одного из следов r^+ (или r^-) недостаточно для однозначного определения функций q_1 и q_0. Однако задание r^+ (или r^-) однозначно определяет один из коэффициентов q_1 (или q_0) при условии, что второй априори известен.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00741).

ЛИТЕРАТУРА

1. Yurko V. A. *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and their Applications.* – New York: Gordon and Breach, 2000.

2. Romanov V. G. and Kabanikhin S. I. *Inverse Problems for Maxwell's Equations.* Inverse and Ill-posed Problems Series. – Utrecht: VSP, 1994.

D. A. Fokin (Kazan)

A FIELD-PANEL METHOD FOR TRANSONIC LIFTING WING CALCULATION

The development of fast numerical methods for calculating transonic flow over 3D lifting configurations is important for numerical optimization purposes. One efficient approach, namely field panel method, is based on the boundary- element methods solving full potential equations (see e.g. [1]). The algorithm incorporates panel method for calculating basic incompressible flow and compressible field calculations. The purpose of the present work to develop a mathematically well- based and efficient field panel method for the analysis of transonic flow over 3D lifting wings, that could be further used for design and optimization of transonic wings in a given range of free stream Mach numbers.

We consider a steady compressible flow over a wing at angle of attack and free stream Mach number. The wing surface is presented as a collection of quadrilaterial panels with piecewise with collocation points in the center of the panels where the flow impermeability conditions are satisfied. The piecewise constant source and doublet singularities are distributed on a sceleton surface inside the wing. A hard wake model is used to satisfy Zhukovskiy- Kutta condition on the trailing edge of the wing. To model the compressible effects a field mesh, containing the whole wing, is introduced. Intensity of the field sources are also assumed to be piecewise constant. The problem of calculating transonic flow over the wing is reduced to solving a nonlinear integral differential equations. Artificial viscosity concept is used to stabilize the solution in the transonic case.

Test calculations for the wings with NACA series profiles and ONERA swept wing are performed to confirm the validity of the method.

To reduce the transonic shock intensity a parametric optimization of the wing shape is performed. Namely, a local 3D bump [2] is introduced on the surface of the wing. Position and the height of the bump are optimized to improve thransonic characteristics of a wing for a given range of free stream Mach numbers.

I would like to thank Prof. S.Wagner for the help and cooperation and Alexander von Humbold foundation and RFFI (projects 99-01-00365 and 99-01-04029) for the financial support.

R E F E R E N C E S

1. Roettgermann A. *Eine Methode zur Berueksichtigung kompressibler und transonoscher Effekte in Randelementverfahren.* Ph.D. Thesis, Univeristy of Stuttgart, 1994. – 175 p.

2. Ashill P. R., Fulker J. L., Shires A. A. *A novel technique for controlling shock strength of laminar flow airfoils section.* Proc. of 1st European Forum on Laminar Flow Technolodgy, March 16-18, 1992, Hamburg, Germany, pp.175- 183, DGLR, AAAF, RAeS, 1992.

S. A. Grigorian, R. N. Gumerov (Kazan)

A CRITERION OF TRIVIALITY FOR FINITE-SHEETED COVERINGS OF COMPACT CONNECTED ABELIAN GROUPS

In the study of algebraic equations in complex function algebras, it is a standard technique to consider the functions as being defined on the maximal ideal space and to use coverings of the spectrum of the algebra. In particular, we have to do with finite-sheeted coverings of topological groups.

Let G be a connected compact abelian group and let $\hat{G}$ be its additive dual group. For each integer $m \in Z$ we have a homomorphism

$$\hat{G} \to \hat{G} : \chi \mapsto m\chi,$$

where $\chi \in \hat{G}$. We say that $\hat{G}$ *admits division by* m, if this homomorphism is an automorphism.

Let $p : X \to G$ be an n-fold covering of G by a topological space X. As usual, we say that this covering is trivial if the covering space X is homeomorphic to the topological space consisting of n disjoint copies of G. The following criterion of triviality of n-fold coverings of compact connected abelian groups is obtained.

Theorem. *An n-fold covering of a compact connected abelian group G by a connected Hausdorff topological space is trivial if and only if the dual group $\hat{G}$ admits division by $n!$.*

Now we consider an algebraic equation in the Banach algebra $C(G)$ of all continuous functions on the group G, namely,

$$x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_n = 0,$$

where $f_1, \ldots, f_n$ are arbitrary elements of $C(G)$. It is well-known that the discriminant of the polynomial $p(x) = x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_n$ corresponding to the considering equation is an element of $C(G)$. It is also called the discriminant of the equation. Let us denote by I_n a collection of all algebraic equations of degree n with coefficients in the Banach algebra $C(G)$ whose discriminants are invertible elements of $C(G)$.

Corollary (see [1]). *Each equation in I_n has n distinct continuous solutions if and only if the dual group $\hat{G}$ admits division by $n!$.*

The work is supported by RFFI (grant 99-01-00441) and by NIOKR of RT.

REFERENCES

1. Gorin E. A. and Lin V. Ya. *Algebraic equations with continuous coefficients and some problems of the algebraic theory of braids*, (in Russian)// Matem. Sbornik. – 1969.– V. 78(120). – No 4. – P. 579–610.

S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev (Kazan)

ON COVERING GROUPS OF COMPACT SOLENOIDS

The questions considered in this report arose in the study of algebraic equations with coefficients in Banach algebras of generalized analytic functions. In this case one deals with solenoidal groups (see, e.g., [1]) and their coverings. Throughout $p : X \to G$ is an n-fold covering of a compact solenoidal group G by a connected topological space X. It turns out that there exists a morphism in the category of topological groups which is transformed by the forgetful functor between the categories of topological groups and spaces into p.

The problem on the existence of a group structure in a covering space of a topological group is also motivated by the well-known theorem on covering groups in algebraic topology [3,§51]. But we assume neither arcwise connectedness nor local connectedness of considering spaces.

Recall that, by the definition of a solenoidal group, there is a continuous homomorphism τ from the additive group of the real numbers R into G such that an one-parameter subgroup $\tau(R) = \{g_t \in G/t \in R\}$ is dense in G. So that, for any element $g \in G$, there exists a dense curve $\{gg_t/t \in R\}$ in G. Using the lifting path lemma, for each $x \in X$ we obtain a curve $\{T_t(x)/t \in R\}$ in X such that $pT_t(x) = p(x)g_t$ and $T_0(x) = x$. We also have a homeomorphism

$$T_t : X \to X : x \mapsto T_t(x)$$

for each $t \in R$.

To introduce the desired multiplication in X we need to study certain properties of the homeomorphisms T_t's. (For details we refer to [2]). In proving the theorem on covering groups the following lemmas play a crucial role.

Lemma 1. *Let g be an element of G and let $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$ be a covering of G by evenly covered neighborhoods such that $g \in W_1 \setminus \bigcup_{k=2}^{m} W_k$. Let $p^{-1}(W_1) = \bigsqcup_{l=1}^{n} V_l$ and $p^{-1}(g) \cap V_1 = \{y_0\}$. Then there exists a neighborhood $V_0 \subset V_1$ of the point y_0 satisfying the following property: if $T_{t_0}(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$ for some $t_0 \in R$, then $T_{t_0}(V_0) \subset V_1$.*

Lemma 2. *An orbit $R_x = \{T_t(x) : t \in R\}$ of each point $x \in X$ is dense in the connected space X.*

Finally, we formulate the theorem on covering groups for compact solenoids.

Theorem. *Let $p : X \to G$ be an n-fold covering of compact solenoidal group G by a connected topological space X. Then there exists a group structure in X turning $p : X \to G$ into a homomorphism between compact abelian groups.*

The work is supported by RFFI (project 99-01-00441) and NIOKR of Ta- tarstan.

REFERENCES

1. Grigorian S. A. *Generalized analytic functions*, (in Russian)// Uspekhi Matem. Nauk. – 1996. – V. 49. – No 2. – P. 3–42.

2. Grigorian S. A., Gumerov R. N. and Kazantsev A. V. *Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups*, // Lobachevskii J. of Math., to appear.

3. Pontryagin L. S. *Continuous groups* (in Russian). – Moscow: Nauka, 1984.

A. R. Kacimov (Muskat, Oman)

EXTREME PROPERTIES OF THE TAYLOR-SAFFMAN CURVE

Since the seminal Taylor-Saffman experiments and theoretical investigations of viscous fingers in the Hele-Shaw apparatus many attempts have been done to explain the mechanisms of so-called "selection". Still, it is unclear why practically a half-channel finger appears though mathematically a whole family of interfaces is possible. We apply the method of inverse boundary-value problems [1] and arrive at the Taylor-Saffman shapes from solution of optimal shape design problems [2,3] illustrating that "selected" curves possess fascinating extreme properties. In particular, we show that:

a) The Taylor-Saffman bubble is a limiting case of the Taylor-Saffman finger.

b) The Taylor-Saffman bubble coincides with the Polubarinova-Kochina subsurface contour of a concrete dam of constant hydraulic gradient, which is a solution of an isoperimetric problem on maximum of the cross-sectional area of the dam.

c) The Taylor-Saffman half-channel finger coincides with the Morse-Feshbach [4] "extreme" boundary of a variable condenser. Hence, the finger is an equipotential line generated by a semi-infinite linear source.

d) The Taylor-Saffman finger coincides with an abrupt interface between seeping fresh and stagnant saline water in a polder-type system [5], i.e., the finger is a stream line of a vortex generated flow.

Obtained explicit analytic solutions of optimization problems are also used for estimations of integral and local flow characteristics (total flow rate and field intensity).

REFERENCES

1. Ilyinsky N. B., Kacimov A. R. *The estimation of integral seepage characteristics of hydraulic structures in terms of the theory of inverse boundary-value problems//* Zeitschr. angew. Math. Mech. – 1992. – B. 72. – No 2. – P. 103–112.

2. Kacimov A. R. *Optimization of the protrusion shape for a Couette type flow//* Optimal Control Applications and Methods. – 1994. – V. 15. – P. 193–203.

3. Kacimov A. R. *Optimal shape of a variable condenser//* Proc. Royal Soc. London A, in press.

4. Morse P. M. and Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics.* V. 2. – New York: McGraw-Hill, 1953.

5. Strack, J.D.L. *Groundwater Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.

I. I. Sakhaev (Kazan), C. Lomp (Porto), M. F. Nasrutdinov (Kasan)

ON PROJECTIVE MODULES OF FINITE DUAL GOLDI DIMENSION

Let R be an associative ring with unit, P will be a left unital R-module and $J(P)$ denote the Jacobson's radical of P.

A submodule N of P is said *small* in P if for every submodule U of P the equation $N + U = P$ involves $U = P$. A module P is said to be hollow if $P \neq 0$ and every proper submodule of P is small in P. A module P is said to have *finite hollow dimension* (or *finite dual Goldie dimension*) if there exists an exact sequence

$$P \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^{n} H_i \longrightarrow 0$$

where all H_i are hollow and the kernel of R−homomorphism g is small in P. Then n is called the hollow dimension of P and we write $hdim(P) = n$.

In the paper [1] it was formulated the question: *Is every projective R-module P with semilocal endomorphism ring $Hom_R(P, P)$ finitely generated?*

If P is projective R-module and $Hom_R(P, P)$ is semilocal ring then by the theorem 3.10 [1] we have $hdim_R(P) < \infty$. We have proved:

Theorem *Let P be a projective R-module and $Hom_R(P, P)$ is semilocal ring. Then the following conditions are equivalent:*
(a) P is finitely generated.
(b) $hdim_R(P) = hdim_R(P/J(P))$.

Research of I.I. Sakhaev and M.F. Nasrutdinov is supported by RFFI grant 99-01-00469.

REFERENCES

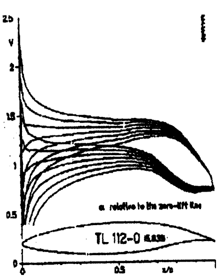
1. Lomp C. *On semilocal modules and rings*// Communication Algebra. – 1999. – V. 27. – P. 1921–1935.

Th. Lutz (Stuttgart, Germany)

SUBSONIC AND TRANSONIC AIRFOIL DESIGN APPLYING NUMERICAL OPTIMIZATION TECHNIQUES

The specific design of airfoils is one of the classical tasks of aerodynamics. Since the airfoil characteristics are directly dependent on the inviscid pressure distribution the application of inverse calculation methods is obvious. The numerical airfoil optimization offers an alternative to the inverse design and attracts increasing interest. With this approach an automated search for an optimal solution with respect to a user-specified objective function is performed. An overview about recent results on subsonic and transonic airfoil optimizations will be given.

The objective of the subsonic airfoil optimizations was to design natural laminar flow airfoils which show minimized drag for a specified range of the Reynolds number and the lift coefficient.



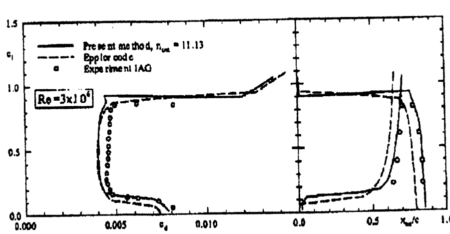


Fig.1 Fig.2

To this purpose an efficient aerodynamic model was coupled with a hybrid optimizer [2]. Contrary to the usual approach the airfoil is not parameterized by geometric shape functions. Instead, the inverse conformal mapping procedure according to Eppler [1] was applied to generate the airfoil shape and to evaluate the inviscid velocity distribution. The input parameters of this method are being used as design variables of the optimization process. The potential flow method is coupled with an improved intergal boundary-layer procedure and an e^n database method for transition prediction. A large number of 34 design variables was considered in order to enable a detailed representation of the airfoil pressure distribution. One optimization result is depicted in Figs. 1 and 2. The objective was to minimize the average drag coefficient for angles of attack $\alpha_{design} = [2°, 3°, ..., 8°]$ relative to the zero-lift line [5]. Two Reynolds numbers were considered, namely $Re_{design} = 3 \cdot 10^6$ and $9 \cdot 10^6$. In order to enhance the stall characteristics, the curvature of the lift curve was limited at off-design conditions. Wind-tunnel tests for the optimized airfoil showed very low drag coefficients inside the laminar bucket which exactly coincides with the design lift region, compare Fig. 2. Besides the design of minimum drag airfoil sections the optimization method has been applied to derive the shape of airfoils from prescribed drag polars or to design airfoils with minimized trailing-edge noise [3, 4].

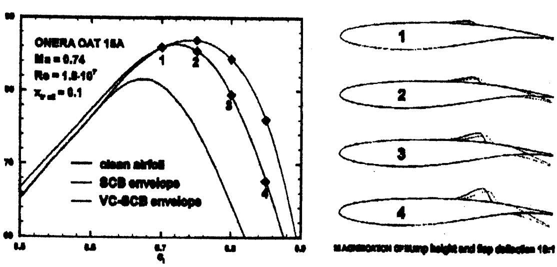


Fig.3

For the transonic flow regime numerical optimization techniques were applied to investigate the drag reduction potential of adaptive mechanisms for transonic airfoils at off-design conditions. Above the design Mach number transonic airfoils show a steep drag rise caused by shock waves and boundary-layer separation on the suction side. For specific onset flow conditions the wave drag can be reduced by an adaption of the airfoil camber plus local shape modifications. A feasible approach for the shape modification is the introduction of a Shock Control Bump (SCB) in the vicinity of the shock, whereas the camber can be altered by means of a trailing-edge flap. In order to maximize the aerodynamic efficiency over a broad c_l or $Mach$-range, the shape and position of a SCB as well as the flap setting has to be adapted permanently. To quantify the gain, different bump shapes were designed by means of numerical optimization. The optimization tool consists of a coupled Euler boundary-layer code in combination with a hybrid optimizer. Besides the bump designs, the gain due to an optimization of the flap deflection angle and finally the effect of a combined SCB plus flap optimization was investigated [6, 7]. The results show a dramatic improvement over the whole off-design regime of the basic airfoil, especially for the combination of the adaptive mechanisms, see Fig. 3.

REFERENCES

1. Eppler R. *Airfoil Design and Data.* Springer Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, ISBN 3-540-52505-X, 1990.

2. Lutz Th. *Berechnung und Optimierung subsonisch umströmter Profile und Rotationskörper.* Doctoral thesis. VDI Fortschritt-Berichte, Reihe 7: Strömungstechnik, Nr. 378, 2000, ISBN 3-18-337807-8.

3. Lutz Th. and Wagner S. *Numerical Optimization and Wind-Tunnel Testing of Low Reynolds-Number Airfoils.* Proc. Con. on Fixed, Flapping and Rotary Wing Vehicles at Very Low Reynolds Numbers, University of Notre Dame, June 5–7, 2000, Indiana, USA.

4. Lutz Th. *Airfoil Design and Optimization.* GAMM 2000 Conf., April 2-7, 2000, Göttingen, Germany. To be published.

5. Lutz Th. and Wagner S. *Numerical Shape Optimization of Subsonic Airfoil Sections.* Proc. ECCOMAS 2000: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, September 11–14, 2000, Barcelona, Spain, 2000. To be published.

6. Sommerer A., Lutz Th. and Wagner S. *Design of Adaptive Transonic Airfoils by Means of Numerical Optimisation.* Proc. ECCOMAS 2000: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, September 11–14, 2000, Barcelona, Spain. To be published.

7. Sommerer A., Lutz Th. and Wagner S. *Numerical Optimisation of Adaptive Transonic Airfoils with Variable Camber.* Proc. of the 22nd Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, August 27 – September 1, 2000, Harrogate, UK, no. ICAS Paper ICA2.111. To be published.

N. Virchenko (Kyiv, Ukraine)

ON SOME ASSOCIATED LEGENDRE-WRIGHT FUNCTIONS

Let us introduce the generalized associated Legendre-Wright functions in the following form:

$$P_{k,\lambda}^{m,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}} \times$$

$$\times R\Big(k - \frac{m-n}{2} + 1; -k - \frac{m-n}{2}; 1-m; \lambda; \frac{1-z}{2}\Big) =$$

$$\frac{(z+1)^{n/2}(z-1)^{-m/2}}{\Gamma\big(-k-\frac{m-n}{2}\big)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(k-\frac{m-n}{2}+1)\Gamma(-k-\frac{m-n}{2}+\lambda l)}{\Gamma(1-m+\lambda l)l!}\Big(\frac{1-z}{2}\Big)^{l},$$

$$k-(m-n)/2 \neq -1,-2,\dots,\ k+(m+n)/2+\lambda$$

$$l \neq -1,-2,\dots,\ 2k+\lambda l \neq 1,2,\dots,$$

$$|1-z|>2,\ |\arg(z+1)|<\pi.$$

$$Q_{k,\lambda}^{m,n}(z) = e^{m\pi i}2^{k-(m-n)/2}\frac{\Gamma\Big(k+\frac{m+n}{2}+1\Big)\Gamma\Big(k+\frac{m-n}{2}+1\Big)}{\Gamma(2k+2)}(z+1)^{n/2}$$

$$\times(z-1)^{-k-n/2-1}R\Big(k-\frac{m-n}{2}+1; k+\frac{m+n}{2}; 2k+2; \lambda; \frac{2}{1-z}\Big) =$$

$$= e^{m\pi i}2^{k-(m-n)/2}\Gamma\Big(k+\frac{m-n}{2}+1\Big)(z+1)^{n/2}(z-1)^{-k-n/2-1}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(k-\frac{m-n}{2}+1)_l\Gamma(k+\frac{m+n}{2}+\lambda l)}{\Gamma(2k+2+\lambda l)l!}\Big(\frac{2}{1-z}\Big)^{l},$$

$$k-(m-n)/2 \neq -1,-2,\dots,\ k+(m+n)/2+\lambda$$

$$l \neq -1,-2,\dots,\ 2k+\lambda l \neq 1,2,\dots,$$

$$|1-z|>2,\ |\arg(z+1)|<\pi.$$

Some properties, integral representations, formula of Mehler-Dirichle type are given.

Е. Ю. Савчиц (Краснодар)

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Исследуются свойства операторов вида $I-\widetilde{P}$, где $\widetilde{P}$ — линейный, локально компактный, нерерывный относительно локальной сходимости ω-периодический оператор, действующий в $BC^n(R^1)$ — пространстве непрерывных и ограниченных на R^1 комплекснозначных вектор-функций , $\|x\| = \sup\limits_t \|x(t)\|_{C^n}$. Показано, что такой оператор может быть представлен в виде
$\widetilde{P}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (d_sP(t,s))x(s)$, где $P(t,s) = \{p_{ij}(t,s)\}$ — комплекснозначная $n\times n$-матрица, имеющая при каждом t из R^1 ограниченную на R^1 вариацию и удовлетворяющая условиям:

1) $\lim\limits_{h\to 0}\mathop{V}\limits_{-\infty}^{\infty} [p_{ij}(t+h,s)-p_{ij}(t,s)] = 0,\ t\in R^1,\ i,j=\overline{1,n}$;

2) $\sup\limits_t \mathop{V}\limits_{-\infty}^{\infty} p_{ij}(t,s) < \infty,\ i,j=\overline{1,n}$; 3) $P(t+\omega,s+\omega) = P(t,s)$.

Для оператора $\widetilde{P}$ определим функцию $P(\xi)$, принимающую значения в $\mathcal{L}(C^n[0,\omega], C^n[0,\omega])$, полагая

$$P(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi^m \int\limits_0^{\omega}(d_sP(t,s-m\omega))x(s),\ \xi\in S^1 = \{\xi\in C^1 : |\xi| = 1\}.$$

Обозначим через $\rho(P)$ множество собственных чисел функции $P(\xi)$, то есть множество таких $\xi\in S^1$, для которых оператор $I-\widetilde{P}(\xi)$ необратим, и для $\xi\in\rho(P)$ положим $\alpha(\xi) = \dim\operatorname{Ker}(I-P(\xi))$.

Оказывается по каждому $\xi\in\rho(P)$ можно построить $\alpha(\xi)$ линено независимых элементов из $\operatorname{Ker}(I-\widetilde{P})$ вида
$\exp((-\omega^{-1}\ln\xi)t)b_j(t)$, $b_j(t+\omega) = b_j(t)$, $j=1,2,\dots,\alpha(\xi)$. Обозначим через $\widetilde{E}$ замыкание линейной оболочки множества
$\exp((-\omega^{-1}\ln\xi)t)b_j(t)$, $j=1,2,\dots,\alpha(\xi)$, $\xi\in\rho(P)$.

Теорема 1. *Пусть множество собственных чисел $\rho(P)$ функции $P(\xi)$ не более чем счетно. Тогда $Ker(I-\widetilde{P}) = \widetilde{E}$.*

Теорема 2. *Для того чтобы оператор $I-\widetilde{P}$ был обратим в $BC^n(R^1)$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(P) = \emptyset$.*

Ю. П. Артюхин, О. В. Чумарина (Казань)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОДА ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОНТАКТА КВАДРАТНОЙ МЕМБРАНЫ С ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДОЙ

Рассматривается изгиб квадратной мембраны с ограничением в виде четырехугольной пирамиды, проходящей через закрепленный контур Г мембраны. При заданных значениях натяжения T, геометрии мембраны, высоты пирамиды, интенсивности q равномерно распределенной нагрузки, под действием которой происходит изгиб, требуется найти границы контакта и форму изогнутой мембраны. Уравнение изгиба имеет вид:

$$\nabla^2 w = -q/T.$$

Применяется непрямой метод граничных элементов (НМГЭ) [1], согласно которому неизвестная функция прогиба представляется следующим образом:

$$W(x) = \Big(qf(x) - q\iint\limits_{S_1} G(x,\xi_1)dS_1(\xi_1) - q\iint\limits_{S_2} G(x,\xi_2)dS_2(\xi_2) - q\iint\limits_{S_3} G(x,\xi_3)dS_3(\xi_3) -$$

$$q\iint\limits_{S_4} G(x,\xi_4)dS_4(\xi_4) + \int\limits_{\Gamma} G(x,\zeta)\mu(\zeta)d\Gamma(\zeta)\Big)/T, \qquad (1)$$

где f(x) – частное решение, определяемое из соотношения $\nabla^2 w = -1$, $G(x,\xi) = -\ln(r(x,\xi))/2\pi$ - фундаментальное решение в точке x от единичного воздействия в точке ξ для двумерной задачи. Удовлетворяя (1) граничным и контактным условиям, получается разрешающая система нелинейных трансцендентных интегральных уравнений, из которой с учетом симметрии находятся компенсирующие нагрузки μ на контуре мембраны и координаты узловых точек границы одной области контакта S_1. Затем решение распространяется на другие области S_2, S_3, S_4. Определив граничные неизвестные с использованием (1), отыскиваются значения прогиба во внутренних точках свободно изгибающейся мембраны.

Контактные задачи с неизвестной границей представляют собой сложную нелинейную проблему, которая сопряжена с большими трудностями численного решения. Для подтверждения правильности построенного с помощью НМГЭ алгоритма, ввиду отсутствия аналитических результатов, решение получено также методом локальных вариаций (МЛВ) [2]. МЛВ неудобно использовать из-за плохой сходимости и в случаях сложных форм мембраны.

Полученные результаты можно применить к решению задачи упруго - пластического кручения стержня квадратного поперечного сечения при помощи аналогии с песчаной насыпью в сочетании с мембранной аналогией [3]. Найденные области контакта при заданных в соответствии с аналогией начальных данных определяют пластические зоны сечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов.* - М.: Мир. – 1987. – 524 с.

2. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. *Вариационные задачи механики и управления.* - М.: Наука. – 1973. – 236 с.

3. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести.* - М.: Машиностроение. – 1975. – 400 с.

А. Ф. Ахметова, Р. С. Якушев (Казань)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОГА ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ТЕКСТА

Одной из интересных задач компьютерной технологии по обработке информации является сканирование и оцифровка текстов, представленных на твердых носителях. При распознавании текстов, собственно слов, которые представляют совокупность букв, возникает необходимость в предварительной лингвистической обработке воспринимаемых и оцифровываемых знаков, которые подчиняются определенным грамматическим правилам языка.

Первые работы по теории распознавания имели практический характер. Одними из первых для распознавания печатных букв были предложены методы, основанные на следующей идее: изображение буквы сравнивается путем наложения на маски – трафареты, определенные для всех символов-знаков алфавита. По критериям, характеризующим степень совпадения изображения с маской, логическая схема вырабатывает решение о том, какая буква предъявлена для распознания. Дальнейшее развитие компьютерных технологий естественно привело исследователей к более гибким методам, использующим правила языка. Ведь тексты написаны по грамматическим правилам конкретного языка, поэтому было естественным разработан алгоритм поиска распознаваемого знака прежде всего среди букв, ожидаемых по правилам грамматики.

Мы в своей работе в качестве объекта исследования взяли слог. Была сформулирована задача построения модели слога, для распознавания текста. Слог – одно из основных понятий языка. Для определения слога и для разбиения слова на слоги в языкознании существуют много разных подходов. Суть нашей работы – математическое моделирование и изучение квантитативных характеристик слогов в контексте письменного текста.

Рассмотрим множество, состоящее из согласных и гласных звуков алфавита, из этих звуков будем строить слоги. Слог это совокупность гласных и согласных звуков, с единственным ограничением – слогообразующей фонемой является одна гласная фонема (т.е. слоги не могут образовываться без гласной фонемы). Учитывая данное ограничение определяем типы слогов. Например: Г, ГС, СГ, ГСС, ... и т.д.

В реальном языке при предположении существования слогов, например до k букв, можно предположить возможность образования k(k+1)/2 подмножеств слогов. Это только по двоичному признаку буквы делятся на гласные и согласные. На самом деле гласные и согласные в естественном языке в свою очередь различаются по разным признакам, поэтому реальных вариантов подмножеств слогов получается значительно больше.

Каждый язык характеризуется определенными типами слогов [1]. Количество этих типов в языке различно и зависит от числа элементов слога и существующих между ними отношений, что составляет структуру слога.

При изучении слоговых элементов текстов квантитативными методами возникает задача выявления количественных и качественных критериев отбора текстов для статистического анализа. При определении достаточного объема выборки для исследования текстов мы использовали методику, выработанную Р. Г. Пиотровским и К. Б. Бектаевым, с уточнениями, применительно к слогам [2].

По этой методике "объем выборки определяется исходя из требований к покрываемости наугад взятого текста наиболее частыми единицами составляемого списка" и вычисляется по формуле, предложенной Ципфом:

$$N = \frac{A^2 \cdot (1-f)}{g^2 \cdot f},$$

где N – объем текста;
A – постоянная, значение которой берется по заданному значению доверительной вероятности (надежности),
f – относительная частота лексической единицы, значение которой равно значению нижней границы достоверных частот F,
g – относительная (допустимая) ошибка.

Используя данную формулу и постоянные величины, которые выработаны в современной лингвостатистике (такие вычисления для случая слов проведены в работе [3]), мы определили необходимый объем выборки для статистического исследования текста на татарском языке. С этой целью был составлен частотный словарь слогов. Оказалось, что 70%-ное покрытие татарского текста дает начальная зона словаря в 24376 слогов, при этом нижним порогом этого массива является $f = 0.0011$.

Вычисления дают:

$$N = \frac{1{,}96^2 \cdot (1 - 0{,}0011)}{0{,}33^2 \cdot 0{,}0011} = 32034\,.$$

Итак, для статистического исследования достаточна выборка объемом в 32034 слога, при этом средняя длина слова в татарском языке три слога. Отсюда получаем с округлением, что достаточна выборка в 10000 слов.

В результате получены следующие основные результаты:

– предложен алгоритм построения слога;

– получены формулы для подсчета количества слогов той или иной модели слога;

– выявлен статистический закон распределения различных моделей слогов на базе русского и татарских языков.

Предложенная модель построения слога может быть использована для решения задач сканирования и распознавания текстов. Полученные результаты позволяют производить квантитативный анализ текстов различных стилей на базе реальных языков.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Сторчак Л.В. *Модели слоговых структур русского литературного языка*// Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата филологических наук. – Ростов на Дону: РГУ, 1991.

2. Пиотровский Р. Г., Бектаев К. Б., Пиотровская А. А. *Математическая лингвистика*. – М.: Высшая школа, 1977.

3. Ризванова Л.М., Якушев Р.С., Хадиев Р.М. *Использование АРМ «КЭЛИМЭ» в лингвистических исследованиях татарского текста*// Модели национальных языков. Труды научного семинара «Формально-логические и компьютерные модели языков» в рамках российской конференции по искусственному интеллекту «КИИ - 96»./ Казань: Фэн, 1996. – С. 88-94.

И. А. Байгушева (Астрахань)

РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами

$$A_0 y'(t)+\sum_{i=0}^{1} B_i y(t-\omega_i)=\bar{0}, \qquad 0=\omega_0<\omega_1, \tag{1}$$

$$A_0=\begin{pmatrix} a_{01} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{02} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{0n} \end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix} b_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{in} \end{pmatrix},\quad y(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\det A_0 \neq 0$ с начальным условием

$$y(t)=g(t),\ 0\le t\le \omega_1\,. \tag{2}$$

Характеристическая (матричная) функция системы (1) имеет вид

$$H(s)=A_0 s+\sum_{i=0}^{1} B_i e^{-\omega_i s}. \tag{3}$$

Свойства корней характеристического уравнения det H (s) =0 хорошо изучены (см. [1]). Ранее (см. [2]) было доказано существование решения системы (1), получена его формула и изучены свойства. Основным результатом настоящего доклада является следующая

Теорема. *Пусть $g(t) \in L_1(0;\omega_1)$ (т.е. каждая функция вектор-столбца $g_i(t)\in L_1(0;\omega_1)$), $y(t)$ – решение системы* (1), *удовлетворяющее* (2). *Тогда при $t>\omega_1$*

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=\lambda_n}\ e^{st}H^{-1}(s)\left(A_0 g(\omega_1)e^{-\omega_1 s}-B_1 e^{-\omega_1 s}\int_0^{\omega_1} g(t_1)e^{-st_1}\,dt_1\right),$$

где 1) $H(s)$ определена формулой (3);

2) $H(s)\cdot H^{-1}(s)=I$;

3) (λ_n) — последовательность корней характеристического уравнения.

Сходимость ряда равномерна по t на любом конечном отрезке, лежащем в области сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* — М.: Мир. — 1967.

2. Байгушева И.А. *О решении системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами//* Тез. Докл. итоговой науч. Конф. АГПУ. — Астрахань: Изд-во АГПУ. — 2000.

Н. А. Батнидзе, Э. С. Сибгатуллин (Набережны Челны)

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕХАНИКЕ ТРЕЩИН

Рассматривается квазихрупкое разрушение изотропных и анизотропных (композитных) тел, имеющих макротрещину. Учитываются только сингулярные составляющие напряжений. Композитное тело рассматривается как квазиоднородное анизотропное тело с усредненными механическими характеристиками. Принято, что эти характеристики не зависят от координаты z (ось z ортогональна, в частности, плоскости пластины со сквозной макротрещиной). Предполагается, что на линии процесса разрушения, являющейся границей зоны процесса разрушения в окрестности вершины трещины с окружающей эту зону упругой областью тела, компоненты напряжений неразрывны, что позволяет использовать известные формулы для определения сингулярных составляющих напряжений, полученных в результате решения задачи математической теории упругости. Определенные таким образом напряжения подставляются в условие предельного состояния для сплошного тела. Для определения предельного состояния тела с макротрещиной важным является информация о расстоянии $r_c(\theta)$ от вершины трещины до линии процесса разрушения в критическом состоянии трещины, когда она получает возможность роста. Здесь θ – произвольный угол, отчитываемый от первоначального направления трещины. Существует концепция, согласно которой $r_c(\theta) = r_* = \text{const}$ для материала (независимо от вида напряженного состояния в окрестности вершины трещины). В отличие от этого, в предлагаемом сообщении принято допущение, что $r_c(\theta_*) = r_*=\text{const}$ для материала, где угол θ_* определяет направление развития трещины. При допущении равенства r_* =const важным становится информация об угле θ_*. В настоящее время для изотропных тел задача определения θ_* решена с удовлетворительной для инженерной практики точностью. Отметим, что существующие критерии для определения θ_* для изотропных тел не выведены из фундаментальных положений механики, а следуют из гипотез, основанных на экспериментальных наблюдениях. Поэтому обобщение этих критериев для случая квазихрупкого разрушения анизотропных (композитных) тел в общем случае затруднительно. В предлагаемом сообщении угол θ_* определяется в результате исследования напряженно-деформированного состояния в точках, лежащих на линии процесса разрушения (для произвольного допустимого значения параметра нагружения). Приведены примеры расчетов, иллюстрирующие эффективность применяемого авторами сообщения подхода.

Н. В. Бочаров, А. В. Коровайцев (Москва)

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ

В работе приводится историческая справка об использовании квазистатического метода для решения нестационарных задач, а также приводятся новые результаты, полученные при исследовании поведения решения задачи динамики – при внезапном нагружении упругого конструктивного элемента.

Возможность расчета технических систем с выделением "статического" решения впервые была сформулирована А. Н. Крыловым [1]. Позднее другими авторами, с одной стороны, – для элементарных расчетных схем были получены аналитические решения с выделением "статической" составляющей по перемещениям при импульсном нагружении [2,3], с другой стороны, – проводились исследования использования квазистатики для улучшения сходимости численного решения в задачах динамического нагружения упругих систем [4,5].

В настоящей работе приведены результаты численного эксперимента, проведенного с использованием современных вычислительных средств. Для возможности проведения сравнительного анализа результатов расчета они были получены различными путями: аналитически и с помощью численного интегрирования. Для получения результатов численного интегрирования, в свою, очередь была разработана программа в математической системе «Mathcad», а также программа на алгоритмическом языке Fortran-90. Погрешность численных результатов расчета не превышала 1% по сравнению с аналитическими решениями. Проведенный анализ результатов расчета показывает эффективность разработанных численных алгоритмов, реализующих квазистатический метод решения задач динамики при импульсном нагружении упругих систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. - 368 с.

2. Биргер И.А. *Круглые пластинки и оболочки вращения.* - М.: Оборонгиз, 1961. - 367 с.

3. Кошляков Н.С. *Дифференциальные уравнения математической физики.* - М.: Физматгиз, 1962. - 767 с.

4. Лиходед А.И. *О сходимости метода разложения по собственным формам колебаний в задачах динамического нагружения.* // Изв. АН СССР, МТТ. – 1986. – No 1. – С. 180-188.

5. Биргер И.А. *Расчет на прочность деталей машин*: Справочник. - М.: Машиностроение, 1993. - 640 с.

О. К. Быстрова, В. Ф. Волкодавов (Самара)

ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ И ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМИ ПРИ ДРОБНО – ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Рассмотрим уравнение: $$U_{xy} = 0 \qquad (1)$$

на множестве $G = G_- \cup G_+$, где:

$$G_- = \{(x,y) | -x < y < h, -h < x < 0\},$$
$$G_+ = \{(x,y) | 0 < y < h - x,\ 0 < x < h\}.$$

Пусть $$V_-(x,y) = \int_{-y}^{x} (x-t)^{-\lambda_1} (-t)^{r_1} U(t,y)dt,$$

$$V_+(x,y) = \int_{x}^{h-y} (t-x)^{-\lambda_2} t^{r_2} U(t,y)dt,$$

где $0 < \lambda_i < r_i,\ i = 1,2.$

Задача I. Найти функцию $U(x,y)$ со свойствами

1) $U(x,y) \in C(\overline{G})$,

2) $U(x,y)$ – решение уравнения (1) в областях G_-, G_+,

3) $U(x,y)$ подчиняется условиям

$$\int_{-y}^{0} U(x,y)dx = \rho(y), \quad y \in [0,h],$$

$$U(x,0) = w(x), \; x \in [0,h],$$

4) выполнено условие сопряжения

$$\lim_{x\to -0} \frac{\partial}{\partial x} V_-(x,y) = \lim_{x\to +0} \frac{\partial}{\partial x} V_+(x,y).$$

Теорема 1. *Если* $w(x) \in C^2[0,h] \cap C^3(0,h), \rho(x) \in C^3[0,h] \cap C^4(0,h), \rho'(0) = 0, 0 < \lambda_1 < r_1$, $0 < \lambda_2 < r_2$, $r_i - \lambda_i = 1$, $i = 1,2$, *то существует единственное решение задачи I.*

Теорема 2. *Если* $w(x) \in C'[0,h] \cap C^2(0,h)$, $\rho(x) \in C^2[0,h] \cap C^3(0,h)$, $\rho'(0) = 0$, $0 < r_i - \lambda_i < 1, i = 1,2$, *то существует единственное решение задачи I.*

В. Я. Булыгин, Д. М. Клейдман (Казань)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ДЛЯ МНОГОПЛАСТОВЫХ НЕФТЯНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ

Предлагается способ расчета относительных фазовых проницаемостей по воде и нефти. Считается, что залежь состоит из нескольких пластов. В пластах проницаемость изменяется по линейному закону. Жидкости фильтруются по схеме струй [1,2]. Определим значения относительных фазовых проницаемостей.

Значение среднего параметра КН для всей пачки

$$\mathrm{KH} = \sum_{j=1}^{n} K_j h_j, \quad n - \text{число пластов в пачке.}$$

Среднее значение относительной фазовой проницаемости по воде

$$K_{в}^{м} = K_{в,о} \frac{1}{KH} \sum_{j=1}^{m} K_j h_j,$$

где $K_{в,о} = 1 - C_н - C_в$, $C_н, C_в$ – связная нефть и вода. Нетрудно видеть, что

$$K_{jср} = \frac{K_{j1} + K_{js}}{2}, \qquad h_{js} = h_j \frac{K_{j1} - K_{js}}{K_{j1} - K_{j2}}. \tag{1}$$

Таким образом, получим

$$K_в^м = \frac{K_{в,о}}{KH}\sum_{j=1}^{m}\frac{K_{j1}^2 - K_{js}^2}{2(K_{j1} - K_{j2})}h_j. \qquad (2)$$

Аналогичным образом получаем значение относительной фазовой проницаемости по нефти

$$K_н^м = \frac{K_{н.о}}{KH}\sum_{j=1}^{l}\frac{K_{js}^2 - K_{j2}^2}{2(K_{j1} - K_{j2})}h_j, \qquad (2')$$

где m, l – число пластов, частично занятых соответственно водой и нефтью.

В формулы (1), (2) и (2′) входит величина $K_{js} = K_s$, определяющая распределение водонасыщенности по пластам. Определим эту величину, воспользовавшись формулой (1), и положением, что вода продвигается по наиболее проницаемым пластам. Распределение подвижной воды удовлетворяет равенству

$$H\frac{\varepsilon_в}{\varepsilon} = \sum_{j=1}^{n}\frac{K_{j1} - K_{js}}{K_{j1} - K_{j2}}h_j, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_в$ – подвижность воды, ε – подвижность жидкости.

По рассчитанным значениям водонасыщенности s вычисляются значения $\varepsilon_в = s - c_в$, $\varepsilon = 1 - c_н - c_в$.

Следующая формула служит для расчета значения $K_{js} = K_s$ в процессе счета насыщенности

$$K_s = \frac{1}{A}\left(D - H\frac{\varepsilon_в}{\varepsilon}\right), \qquad (4)$$

где $A = \sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{K_{j1} - K_{j2}}$, $D = \sum_{j=1}^{n}\frac{K_{j1}h_j}{K_{j1} - K_{j2}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булыгин В.Я. *Гидромеханика нефтяного пласта.* – М.: Недра, 1974. – 232 с.

2. Булыгин Д.В., Булыгин В.Я. *Геология и имитация разработки залежей нефти.* – М.: Недра, 1996. – 382 с.

О. А. Васильева (Самара)

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ И ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДЕНИЕМ В ОДНОЙ ТОЧКЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

В настоящей работе для уравнения

$$L(U) \equiv U_{xy} + \frac{\beta}{x+y} U_x = 0, \quad 0 < \beta < 1 \tag{1}$$

на множестве $G = \{(x,y):\ 0 < x < y < h\}$ доказаны существование и единственность решения задачи в следующей постановке:

Задача 1. Найти функцию $U(x,y)$ со свойствами:

1) $U(x,y) \in C(\overline{G})$
2) $\exists\ U_x,\ U_y \in C(G)$
3) $L(U) \equiv 0$
4) $U(x,y)$ удовлетворяет условиям:

$$U(0,y) = \varphi(y) \tag{2}$$

$$\int_0^y \frac{\partial}{\partial y}\big(U(x,y) - U(y,y)\big)dx = w_1(y) \tag{3}$$

Подчиняя решение задачи Гурса для уравнения (1) в области G (см. [1]) условию (3), мы приходим к уравнению Вольтерра II рода.

$$g(y) - \frac{\beta 2^{\beta}}{y}\int_0^y g(t)\left(\frac{t}{t+y}\right)^{\beta+1} dt = f(y)\,,\ \ K(y,t) = \left(\frac{t}{t+y}\right)^{\beta+1},$$

$$f(y) = -\frac{2}{s} w_1(y)$$

Теории такого уравнения нет. Решая его методом последовательных приближений и накладывая соответствующие ограничения на краевые функции, а также используя условие (2), мы получаем решение поставленной задачи. Это решение выписано нами через резольвенту и имеет вид:

$$U(x,y) = \varphi(y) + 2^{\beta-1}\int_0^y \left[f(t) + \frac{a}{t}\int_0^t f(s)R(y,s,a)ds \right] t^{\beta}(t+y)^{-\beta} dt -$$

$$-2^{\beta-1}\int_x^y \left[f(t) + \frac{a}{t}\int_0^t f(s)R(y,s,a)ds \right] t^{\beta}(t+y)^{-\beta} dt,$$

где $\quad R(y,t,a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n K_n(y,t)$

$$K_n(y,t) = \int_t^y K(y,t)K_{n-1}(t,s)\frac{ds}{s^2},\ n = 1,2,3,\ldots, \qquad K_0(y,t) \equiv K(y,t),$$

$a = \beta \cdot 2^{\beta}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волкодавов В.Ф. *Единственность решения задачи Т для общего уравнения Трикоми*// Труды первой научной конференции математических кафедр пед. институтов Поволжья. – С. 47.

В. Ф. Волкодавов, И. Н. Родионова (Самара)

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ МС ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Для уравнения

$$L(u) = U_{xyz} + \frac{2\beta y}{(x-z)^2 - y^2} U_{xz} - \frac{2\alpha(x-z)}{(x-z)^2 - y^2} U_{yz} = 0 \qquad (1)$$

$$0 < \alpha, \beta < 1, \alpha + \beta < 1$$

на множестве $g = g^- \cup g^+$, где g^+ с границей $y = 0,\ z = x - y,\ z = 0,\ x = h$; $\bar{g}$ с границей $y = 0,\ z = x + y,\ z = 0,\ x = h,\ (h > 0)$ рассматривается.

Задача МС: На множестве найти решение уравнения (1) непрерывное в $\bar{g}$, принадлежащее классу ${}_1R$ в областях g^+, g^-, в веденных подобию тому, как это сделано в работе [1], подчиняющееся условиям:

$$U(x, y, x - y) = \tau_1(x, y), \qquad 0 \le y \le x \le h;$$
$$U(h, y, z) = \varphi_1(y, z), \qquad 0 \le y \le h - z,\ 0 \le z \le h\ ;$$
$$U(x, y, x + y) = \tau_2(x, y), \qquad 0 \le -y \le x \le h;$$
$$U(h, y, z) = \varphi_2(y, z), \qquad 0 \le z \le h.$$

На плоскости $y = 0$ выполняются условия сопряжения:

$$\lim_{y \to 0-0} (U_y - U_x) = \lim_{y \to 0+0} (U_x + U_y).$$

В работе указаны ограничения на краевые функции, при которых имеет место существование и единственность решения поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волкодавов В. Ф., Родионова И. Н., Салтуганов Н. М. *Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с параметрами и их приложения*. – Йошкар-Ола, 1997. – С. 46.

Е. В. Воскресенский (Саранск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x,u), \tag{1}$$

где $A(\cdot):[T,\infty)\to Hon(R^n,R^n)$, $f\in C^{(p,q,r)}\left([T,+\infty)\times R^n\times R^n\times R^n\right)$ $p\geq 0$, $q\geq 1$, $u\in K$,

K - класс допустимых управлений.

Теорема.

1) Существует фундаментальная матрица $Y(t)$ уравнения $\frac{dy}{dt}=A(t)y$ такая, что $\lim\limits_{t\to+\infty}Y(t)=E$, $Y(0)=E$ и $\int\limits_0^{+\infty}Y^{-1}(t)f(t,x(t),u(t))dt$ существует при любых $u\in K$ и $x\in B$;

2) уравнение $\int\limits_0^{+\infty}Y^{-1}(t)f(t,x,u)dt=c$ определяет u как неявную функцию $u=u(t,x)$ при любом $c\in R^n$;

3) $u=u(t,x(t))$ является допустимым управлением при любом $x\in B$.

Тогда уравнение (1) управляемо на бесконечности в классе $u\in K$.

Аналогично можно получить условие управляемости за конечное время.

Из полученной теоремы вытекает алгоритм нахождения программных движений, который в себе содержит как частный случай результат из работы [1, стр.36].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов В.И. *Лекции по теории управления.* – М.: Наука, 1975. – 495 с.

Н. С. Габбасов (Набережные Челны)

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается линейное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) вида

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{q}\left(t-t_j\right)^{m_j}+\sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1}K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds=y(t) \quad (-1\le t\le 1), \qquad (1)$$

где $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in N$ $\left(j=\overline{1,q}\right)$; K_j $\left(j=\overline{0,p}\right)$ и y — известные «гладкие» функции, а x — искомая функция. Исследование таких уравнений представляет интерес как с точки зрения теории (в частности, (1) является обобщением интегральных уравнений типа Фредгольма), так и приложений. К такого рода уравнениям приводит ряд важных задач теорий переноса, упругости, рассеяния, теории уравнений смешанного типа, а также теории некоторых нагруженных ИДУ. Поскольку изучаемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях, особенно актуальной является разработка эффективных методов их приближенного решения с соответствующим теоретическим обоснованием.

В сообщении предложены новые варианты сплайн-методов, специально приспособленные к приближенному решению уравнения (1). Дано их обоснование в смысле работы [1] и установлено, что построенные методы оптимальны по порядку точности на некотором классе типа H^r_ω среди всех проекционных методов решения рассматриваемых уравнений в некотором пространстве обобщенных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* — Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. —232 с.

С. В. Галаев (Саратов)

АЛГЕБРА ЛИ ОБОБЩЁННЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В работе [1] было определено симплектическое неголономное многообразие (С.Н.М) как пара $\left(X_n^{2m},\omega\right)$, где X_n^{2m}—неголономное многообразие в X_n, заданное вместе с интегрируемым оснащением X_n^{n-2m}, ω—замкнутая 2-форма ранга $2m$ на X_n такая, что $Ker\omega = X_n^{n-2m}$. Для С.Н.М. существует взаимнооднозначное соответствие между модулем допустимых векторных полей $F_0^1\left(X_n^{2m}\right)$ и модулем допустимых 1-форм $F_1^0\left(X_n^{2m}\right)$ [1]. Векторное поле $\overline{u} \in F_0^1\left(X_n^{2m}\right)$ назовём обобщённой гамильтоновой системой (о.г.с), если соответствующая ему форма является ковариантным дифференциалом ∂f гладкой функции f.

Теорема. *О.г.с. образуют подалгебру Ли алгебры Ли допустимых векторных полей.*

Пусть $S\,grad\,f$ —о.г.с., соответствующая функции f. Определим обобщённую скобку Пуассона функций f, g равенством $\{f,g\}=\omega$ $(S\,grad\,g,\ S\,grad\,f)$.

Теорема. *Функция f является первым интегралом системы $\dot{x}=S\,grad\,g$ тогда и только тогда, когда $\{f,g\}=0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Галаев С. В., Гохман А. В. *Гамильтонова система в неголономном случае.* – Деп. в ВИНИТИ РАН, – 1999. – No. 929. – В. 99. – 10 с.

Н. М. Галиев (Казань)

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ВОДНЫХ СРЕДАХ

Распределение концентрации в водной среде в общем случае описывается уравнением турбулентной диффузии. В работе рассматриваются конвективно-диффузионные процессы в речной среде с постоянной скоростью течения, в устье реки с учетом приливов и отливов, а также диффузионные явления в стоящей воде.

С целью использования эффективных методов математической физики проводится линеаризация поставленных задач и по возможности строятся аналитические зависимости между параметрами рассматриваемых процессов. Для исследования взаимовлияния между ними выполнены расчеты на Excel 7.0, которые иллюстрируются в виде графиков и таблиц.

Результаты расчетов показали, что влияние приливов и отливов на загрязнение речной среды более значительно, чем в стоящей или проточной воде. При этом максимальное вне источника загрязнение, как правило, имеет место в зонах смены приливно- отливных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. .Шаймуратов Р. В., Галиев Н. М., Галиуллин Д. К. *Моделирование смешивания и всплытия примеси в речной среде*// Труды девятой межвузовской конференции. Самара. – 1999. – С. 146-149.

Д. К. Галиуллин (Казань)

ВЛАГОПЕРЕНОС И МИГРАЦИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА ПО ПРОФИЛЮ ЗОНЫ АЭРАЦИИ

Поле влажности $\theta(z,t)$ по профилю зоны аэрации описывается уравнением [1]

$$\mu_0 \frac{\partial\theta}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\theta^n\left(H_k \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} - 1\right)\right),$$

где μ_0, k_0, H_k-постоянные характеристики процесса, n-показатель нелинейности распределения проницаемости среды, ось oz ориентирована вертикально вниз от поверхности почвы. Влажность при $z = 0$ и вблизи уровня грунтовых вод $(z = \ell)$ пропорциональна соответствующим величинам градиента, т.е. выполняются граничные условия третьего рода. В начальный момент процесса распределение влажности описывается зависимостью

$$\theta(z,0) = \left(u_0 + \frac{z}{2\ell}\right)e^{z\,2H_k}.$$

Используя замену $u(z,t) = e^{-(2z-\beta t)\,4H_k}\theta(z,t)$, $\beta = k_0/\mu_0$, а также интегральное преобразование, решение исходной начально-краевой задачи влагопереноса при $n = 1$

$$\theta(z,t) = e^{\frac{2z-\beta t}{4H_k}}\left(2u_0 + \frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} e^{-H_k\beta\left(\frac{\pi(2k+1)}{\ell}\right)^2 t}\cos\frac{(2k+1)}{\ell}\pi z\right)$$

используется при реализации уравнения диффузии загрязняющего вещества концентрации $C(z,t)$ [1]

$$\theta\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial C}{\partial z}\right) - V_0\frac{\partial C}{\partial z}$$

с учетом скорости конвективного переноса V_0 и дополнительных условий $C(z,0) = C_0$, $C(z,t)|_{z=0} = C_0$, $C(z,t)|_{z=\ell} = 0$. Решение последней задачи, полученное методом прямых, позволяет одновременно исследовать процессы влагопереноса и миграции в зоне аэрации, а также качественно и количественно оценить их взаимовлияние. Аналогичные исследования могут выполнены при других значениях n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаймуратов Р.В., Марченко Л.Н. *Дополнительные главы теории влагопереноса и миграции в почвогрунтах.* – ГГУ. – Гомель, – 1994. –40 с.

Р. Г. Галиуллин, Л. А. Тимохина (Казань)

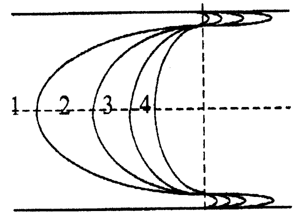
ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В УЗКИХ ТРУБАХ

Вторичные течения вызывают интерес тем, что могут быть эффективными в ускорении ряда процессов тепло- и массообмена. Они возникают как в стоячей, так и в бегущей волне. Вторичные потоки в бегущей волне вызываются силой, обусловленной поглощением в среде [1]. Течения, возникающие в интенсивных пучках ультразвуковой частоты, известны как течения Эккарта. В случае низких частот картина течения неизвестна.

В работе предлагается теория вторичных течений в случае, когда волна звуковой частоты распространяется в узкой цилиндрической трубе неограниченной длины.

Колебания в трубе, на одном конце которой ($x = 0$) расположен поршень, колеблющийся по гармоническому закону с амплитудой смещения l_0, характеризуются безразмерными параметрами $M_p = \omega l_0 / c_0$, $H = R\sqrt{\omega/\nu}$, $N = \omega R / c_0$. Первые два параметра рассматривались в [2], третий в силу $k_0 \sim \lambda^{-1}$ имеет смысл отношения радиуса трубы к длине волны, поэтому условие $N << 1$ относится к случаю узкой трубы. Тогда пусть $M_p << 1$, $H >> 1$, $N << 1$.

С использованием метода возмущений были получены выражения для осевой и радиальной компонент скорости стационарного течения $\langle u_2 \rangle$ и $\langle v_2 \rangle$. Анализ решений показал, что направление осевой компоненты скорости $\langle u_2 \rangle$ обратно направлению распространения волны. Это отличается от течений Эккарта, в которых направление пучка совпадает с направлением $\langle u_2 \rangle$. Другое отличие состоит в том. что течения Эккарта исчезают, если луч касается стенок трубы. Обнаружено влияние числа Прандтля на структуру потоков, характеризующейся величиной $\tilde{u}_{2p} = \langle u_2 \rangle / M_p^2 c_0$, где индекс "р" соответствует значению на поршне. Уменьшение числа Прандтля приводит к существенному росту (почти вдвое) абсолютного значения $\tilde{u}_{2p}$.



На рисунке показаны профили $\tilde{u}_2$, соответствующие различным расстояниям $\bar{x}$ до поршня для Pr=0.7, где $\bar{x} = x/\lambda$, λ – длина волны. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $\bar{x}$:0;1;2;3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ниборг В. *Акустические течения.* - В кн.: Физическая акустика/ Под ред. У. Мэзона. М.: Мир, 1966. – 520 С.

2. Tijdeman H. *On the propagation of sound waves in cylindrical tubes*// J. Sound and Vibration, 1975. – V. 39. – No.3. – P. 1-33.

Л. Р. Галяутдинова (Казань)

АСИММЕТРИЧНОЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЕ И ГИДРОДИНАМИКА ТЕЧЕНИЯ ПРИ ОТБОРЕ И ПОДАЧЕ ЭЛЕКТРОЛИТА ЧЕРЕЗ КАТОД-ИНСТРУМЕНТ.

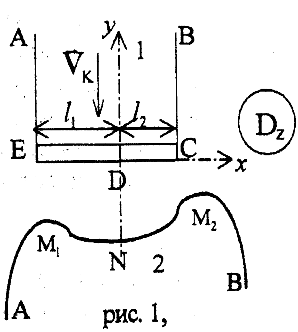


рис. 1,
1-катод-инструмент, 2-анод.

Важной проблемой электрохимической обработки (ЭХО) металлов – важного технологического процесса современного машиностроения – является исключение коротких замыканий в межэлектродном зазоре (МЭЗ). Одним из способов такого исключения является нанесение изоляции на торец катода-инструмента (КИ). Практический интерес представляет реализация оптимальной схемы подачи электролита в МЭЗ и отбор продуктов реакции (рис.1).

В данной работе решена задача расчета гидродинамики течения электролита в МЭЗ при ЭХО с учетом указанного положения. Катод-инструмент имеет форму пластины с изолированным торцом, в качестве которого может служить диэлектрическая сетка для подачи и отбора электролита.

В первой части работы разработан алгоритм расчета стационарной анодной границы указанным КИ при допущении ее асимметрии. При расчете этой границы использован аппарат теории функции комплексного переменного, возможность применения которого определена моделью идеального анодного формообразования.

Во второй части работы на основе гипотезы потенциальности электростатических и гидродинамических полей получены выражения комплексного потенциала течения жидкости. Разработан алгоритм расчета линий тока в МЭЗ. Примеры результатов расчета представлены на рис.2, где линии тока, оканчивающиеся и начинающиеся в точке D, соответствуют отбору и подаче электролита.

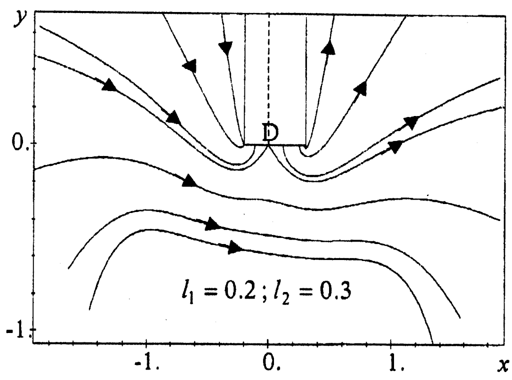


Рис.2

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов А. Х., Клоков В. В., Филатов Е. И. *Методы расчета электрохимического формообразования.* – Казань, изд-во Казан. ун-та, 1990.

2. Галяутдинова Л. Р., Клоков В. В. *Особенности стационарного электрохимического формообразования и течения электролита при изоляции рабочего торца катода-инструмента//* Тез. докл. II Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы химии и химической технологии» «Химия-99» и II Межд. на-

учно-практ. семин. «Современные электрохимические технологии в машиностроении». Иваново, 1999. – с. 16-17.

Б. И. Голубов (Москва)

О МОДИФИЦИРОВАННОМ СТРОГОМ ДВОИЧНОМ ИНТЕГРАЛЕ

В книге [1], с. 435, введено понятие строгого двоичного интеграла функции $f \in L(R_+)$. Напомним это определение. Пусть $\psi_y(x)$ - обобщенные функции Уолша, заданные для $(x,y) \in R_+ \times R_+$ (см. [1], с. 414). Определим последовательность ядер

$$W_n(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_{2^{-n}}^{2^k} \frac{1}{t}\psi_x(t)dt, \quad x \in R_+, \ n \in Z_+. \qquad (1)$$

Как показано в [1], с.435, предел (1) существует почти всюду на R_+ и по норме пространства $L(R_+)$.

Определение 1. Если для функции $f \in L(R_+)$ существует такая функция $g \in L(R_+)$, что $\lim_{n\to+\infty} \|f * W_n - g\|_{L(R_+)} = 0$, то эта функция $g \equiv I(f)$ называется сильным двоичным интегралом функции f.

Здесь

$$(f * W_n)(x) = \int_{R_+} f(t) W_n(x \oplus t)dt$$

двоичная свертка функции f и ядра W_n, где символом $\oplus$ обозначена операция поразрядного сложения по $(\mathrm{mod} 2)$ чисел $x,t \in R_+$ в двоичной системе счисления.

Преобразование Фурье - Уолша $F[f] \equiv \tilde{f}$ функции $f \in L(R_+)$ определяется равенством

$$F[f](x) \equiv \tilde{f}(x) = \int_{R_+} \psi_x(y) f(y)dy.$$

Теорема А. *Пусть* $f, g \in L(R_+)$. *Тогда* $g = I(f)$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{g}(0) = 0$ *и* $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)/x$ для $x > 0$ (*см.* [1], *с. 435*).

Определим последовательность модифицированных ядер $\{\overline{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\overline{W}_n(x) = \begin{cases} 0, \ x \ge 2^n; \\ k-1, \ 2^{n-k-1} \le x < 2^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots \end{cases}$$

Легко показать, что $\overline{W}_n \in L(R_+)$ и $\int_{R_+} \overline{W}_n(x)dx = 0, n \in Z_+$.

Определение 2. Если для функции $f \in L(R_+)$ существует такая функция $g \in L(R_+)$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| f * \overline{W}_n - g \right\|_{L(R_+)} = 0$, то эту функцию $g \equiv \bar{I}(f)$ назовем модифицированным сильным двоичным интегралом функции f.

Аналогом теоремы А является

Теорема. *Пусть* $f, g \in L(R_+)$. *Тогда* $g = \bar{I}(f)$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde{g}(0) = 0$ *и* $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x)h(x)$, *где* $h(x) = 2^{-n}$ *для* $2^n \le x < 2^{n+1}, n \in Z$.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00355).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series. Akademiai Kiado*, Budapest, 1990.

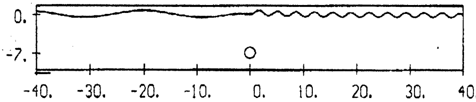
А. М. Елизаров, О. А. Спиридонов, С. И. Филиппов (Казань)

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПОДВОДНОГО КОНТУРА. ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ

Исследуется модельная для крылового профиля задача обтекания подводного кругового цилиндра установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости с учетом сил весомости и поверхностного натяжения на свободной поверхности. Решение проводится в рамках теории волн малой амплитуды при точном выполнении граничного условия на контуре. Влияние свободной поверхности моделируется слоем диполей неизвестной интенсивности, расположенных на невозмущенном уровне свободной поверхности. Комплексный потенциал течения строится на основании теоремы Милн-Томсона об окружности.

С использованием условия на свободной поверхности решение задачи с помощью специального приема сведено к решению линейного интегрального уравнения относительно плотности распределенных особенностей. Постоянные интегрирования находятся из условия излучения: гравитационно-капиллярные волны образуются вниз по потоку, а более короткие капиллярно-гравитационные волны – вверх по течению.

Для решения интегрального уравнения и вычисления гидродинамических характеристик потока разработан алгоритм и программа на Fortran PowerStation. Проведены систематические числовые расчеты. Пример расчета волн при бесциркуляционном обтекании цилиндра радиуса a=0.002 для глубины погружения h/a=7, числе Фруда $\mathrm{Fr} = V/\sqrt{ga}$ =2 и коэффициенте поверхностного натяжения α=0.074



представлен на рисунке, где линейные размеры отнесены к радиусу.

Работа поддержана РФФИ (проекты 99-01-00169, 99-01-173).

В. И. Жегалов, Е. А. Уткина (Казань)

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv \sum_{\alpha,\beta=0}^{2} \sum_{\gamma=0}^{1} a_{\alpha\beta\gamma}(x,y,z) D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma u = F(x,y,z), \qquad (1)$$

D_z^0 – единичный оператор; $D_z^i = \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^i$, $i = 1,2,\ldots$; $D_z^i = \int\limits_{z_0}^{z} \dfrac{(z-t)^{-i-1}}{(-i-1)!}$,

$i = -1,-2,\ldots$ $a_{221} \equiv 1, a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha+\beta+\gamma}(\overline{D})$, $F \in C^{2+2+1}(\overline{D})$, а $C^{\alpha+\beta+\gamma}$ есть класс непрерывных в $\overline{D}$ функций вместе с их производными $\partial^{r+s+t}/\partial x^r \partial y^s \partial z^t$ $(r = 0,\ldots,\alpha; s = 0,\ldots,\beta;\ t = 0,\ldots,\gamma)$.

Обозначим через X, Y, Z - грани D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно.

Задача (Гурса). *Найти в* D *решение уравнения* (1) *класса* C^{2+2+1}, *удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_X = \varphi(y,z),\ u|_Y = \psi(x,z),\ u|_Z = \theta(x,y), u_x|_X = \varphi_1(y,z),$$
$$u_y|_Y = \psi_1(x,z), \theta \in C^{2+2}(\overline{Z}),\ \varphi,\varphi_1 \in C^{2+1}(\overline{X}),\ \psi,\psi_1 \in C^{2+1}(\overline{Y}). \qquad (2)$$

На ребрах D предположим выполненными условия согласования

$$\varphi(y_0, z) = \psi(x_0, z),\ \varphi(y, z_0) = \theta(x_0, y),\ \psi(x, z_0) = \theta(x, y_0)$$

При решении задачи развивается метод из работы [1]. Функцией Римана $R(x, y, z, \xi, \eta, \varsigma)$ будем называть решение интегрального уравнения

$$V - \sum_{\substack{i=0 \\ i+j+k<5}}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{1} (-1)^{i+j+k} D_x^{i-2} D_y^{j-2} D_z^{k-1}\left(a_{ijk} V\right) = 1, \tag{3}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении тождества

$$D_x^2 D_y^2 D_z^1(uR) \equiv RL(u) + \sum_{\substack{i=0 \\ 5>i+j+k>0}}^{2} \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{1} (-1)^{i+j+k} D_x^i D_y^j D_z^k \Big[u\Big(D_x^{2-i} D_y^{2-j} D_z^{1-k} R -$$

$$- \sum_{\substack{\alpha=i \\ \alpha+\beta+\gamma<5}}^{2} \sum_{\beta=j}^{2} \sum_{\gamma=k}^{1} (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} D_x^{\alpha-i} D_y^{\beta-j} D_z^{\gamma-k}\left(a_{\alpha\beta\gamma} R\right)\Big)\Big] +$$

$$+ D_x^1 \left\{ \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} D_y^i D_z^j (u) D_x^1\left(a_{2ij} R\right) \right\} \tag{4}$$

Меняя в (4) ролями переменные x с ξ, y с η, z с ς и вычисляя затем от правой и левой части тройной интеграл в пределах $x_0 \le \xi \le x$, $y_0 \le \eta \le y$, $z_0 \le \varsigma \le z$ с учетом некоторых свойств, вытекающих (3), придем к формуле, дающей запись u_{xy} через граничные условия (2) и функцию R. Отсюда очевидным интегрированием определяется решение $u(x, y, z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка*// Изв. вузов. Математика, –1999 – No.10, – С.73-76.

Г. Н. Зайнуллина (Казань)

ЗАДАЧА Δ_2 ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА- ПУАССОНА- ДАРБУ С СИЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассмотрим уравнение

$$u_{\xi\eta} + \frac{n}{\xi-\eta} u_\xi - \frac{m}{\xi-\eta} u_\eta = 0, \tag{1}$$

где n,m∈N, в области Ω, ограниченной характеристиками AB: $\xi = 0$, BC: $\eta = 1$, AD: $\eta = 0$, CD: $\xi = 1$.

Обозначим $\Omega_1=\Omega \cap \{\xi < \eta\}$; $\Omega_2=\Omega \cap \{\xi > \eta\}$.

Задача Δ_2. *В области Ω найти функцию $u(\xi,\eta)$ со свойствами:*

1) $u(\xi,\eta) \in C(\overline{\Omega})$;
2) *$u(\xi,\eta)$ имеет непрерывные производные u_ξ, u_η, $u_{\xi\eta}$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$;*
3) *существуют пределы из областей Ω_i, $i = 1,2$,*

$$\nu_i(\xi) = \lim_{\eta\to\xi} \eta-\xi^{-n-m}\left[u_\xi - u_\eta - H(\xi,\eta,-n,-m;\tau)\right], \quad 0 < \xi < 1, \tag{2}$$

и на линии вырождения AC выполняется условие склеивания

$$\nu_1(\xi) = (-1)^{n+m}\nu_2(\xi), \quad 0 < \xi < 1; \tag{3}$$

4) *удовлетворяет краевым условиям*

$$u(0,\eta) = \varphi(\eta), \tag{4}$$

$$u(1,\eta) = \chi(\eta), \tag{5}$$

Здесь $\varphi(\eta)$, $\chi(\eta)$ – заданные функции.

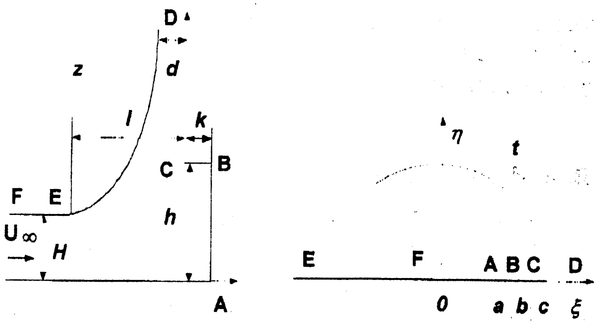
Задача решается методом интегральных уравнений. Используя решение задач типа Коши с заданными $\tau(\eta) = u(\eta,\eta), \nu_i(\eta)$ в ς_i, $i = 1,2$, получаем двухточечную задачу относительно $\tau^{(n+m+1)}(\eta)$. В результате доказывается

Теорема. *Задача Δ_2 имеет единственное решение при выполнении одного условия разрешимости.*

Ш. Х. Зарипов, Д. В. Маклаков (Казань), W. Hollander (Hannover)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ АЭРОЗОЛЯ В ИМПАКТОРЕ С УГЛУБЛЕНИЕМ

Предложена математическая модель течения аэрозоля в струйном импакторе, улавливающая поверхность которого содержит углубление прямоугольной формы. Подобные углубления могут использоваться для удержания от растекания жидкости, которой смазывают импактируемую плоскость с целью предотвращения отскока частиц. Наличие углубления канавок меняет картину течения в отдельной ступени импактора и, следовательно, влияет на процесс осаждения аэрозольных частиц. Струя, вытекающая из щелевого сопла с отрывом, растекается по бесконечной плоскости, содержащей прямоугольное углубление (см рис.). Наличие осевой симметрии позволяет рассмат-



ривать только верхнюю половину течения. Несущая среда моделируется потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости.

Обозначим скорость струи на свободной поверхности DE и скорость в бесконечно удаленной точке F через U_0 и U_∞, соответственно. Области течения жидкости в физической плоскости $z = x + iy$ соответствует область в параметрической плоскости $t = \xi + i\eta$, получаемая с помощью конформного отображения

$$\frac{dw}{dt} = \frac{U_\infty H}{\pi} \frac{t+1}{t(1-t)}.$$

Комплексно–сопряженная скорость записывается в виде

$$\frac{dw}{U_0 dz} = -i\sqrt{\frac{t-a}{1-at}}\sqrt{\frac{t-b}{1-bt}}\sqrt{\frac{1-ct}{t-c}} = u_x - iu_y.$$

Связь между геометрическими параметрами $l/H, h/H, k/H$ и величинами a, b, c получается из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\frac{l}{H}=\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{ab}{c}}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} ctg\frac{\sigma}{2}\sin\left[\frac{\sigma}{2}-\alpha(\sigma,c)+\alpha(\sigma,a)+\alpha(\sigma,b)\right]d\sigma$$

$$\frac{h}{H}=\sqrt{\frac{ab}{c}}\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{(\xi+1)}{\xi(1-\xi)}\frac{f(\xi,c)}{f(\xi,a)f(\xi,b)}d\xi$$

$$\frac{k}{H}=\sqrt{\frac{ab}{c}}\frac{1}{\pi}\int_b^c\frac{(\xi+1)}{\xi(1-\xi)}\frac{f(\xi,c)}{f(\xi,a)f(\xi,b)}d\xi$$

где $f(\xi,m)=\sqrt{|\xi-m|/(1-\xi\, m)}$. Для удобства интегрирования уравнения движения частиц преобразуются к переменным в параметрической плоскости t. Рассчитаны предельные траектории частиц, разделяющие поток импактируемых частиц от частиц, проходящих в следующую ступень импактора. Построены кривые эффективности осаждения частиц на дне и на боковой стороне углубления. Изучено влияние глубины выемки на процесс осаждения.

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00169).

В. А. Игошин, Е. К. Китаева (Нижний Новгород)

ОБ АФФИННЫХ СИММЕТРИЯХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

На базе результатов [1] и метода геометрического (геодезического, пульверизационного) моделирования [2,3] доказаны некоторые теоремы об аффинной подвижности квазигеодезических потоков (КП), стандартная связность которых является аффинной.

В частности, имеют место следующие теоремы, в формулировках которых используется терминология из [2,3].

Теорема 1. *Если сокращенный тензор кривизны $R_{\alpha\beta}$ КП (M,f) симметричен, то максимальная размерность алгебры Ли аффинных инфинитезимальных симметрий КП – (M,f) равна $r=m^2+m(3-k)+(k^2-3k+4)/2$, где $m=\dim M, k$ – ранг $R_{\alpha\beta}$.*

Теорема 2. *Максимальная размерность алгебры Ли аффинных инфинитезимальных движений КП (M,f) не превосходит числа m^2+m+3, если стандартная связность КП (M,f) не является эквиаффинной ($m=\dim M$).*

Теорема 3. *Любой максимально аффинно подвижный КП (M, f), стандартная связность которого не является эквиаффинной, локально проективно изоморфен тривиальному КП, т.е. геодезическому потоку евклидова пространства.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности*/ В кн.: Движения в пространствах аффинной связности. - Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 1965. – С.5-179.

2. Игошин В. А. *Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков* // Доклады АН СССР, 1991. – Т. 320. – No. 3. – С. 531-535.

3. Игошин В. А. *Пульверизационное моделирование.I,II,III* //Изв. вузов. Математика, 1992. – No. 6. – С. 63-70 (соотв.: 1994. – No. 10. – С. 26-32; 1995. – No. 5. – С. 39-50).

В. А. Игошин, Е. К. Китаева (Нижний Новгород)

О СИММЕТРИЯХ ПОЛНЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

С помощью геодезического (пульверизационного) моделирования [1, 2] получен ряд теорем о симметриях (траекторно) полных квазигеодезических потоков (КП).

В частности, справедливы следующие теоремы, в формулировках которых используется терминология из [1, 2].

Теорема 1. *КП (M, f) является полным тогда и только тогда, когда его стандартная связность является полной.*

Далее считаем, что стандартная связность КП (M, f) - аффинная.

Теорема 2. *Каждая инфинитезимальная аффинная симметрия полного КП (M, f) сама является полной, т.е. порождает глобальную 1-параметрическую группу аффинных движений КП (M, f).*

Следствие 1. *Всякая алгебра Ли инфинитезимальных аффинных симметрий полного КП (M, f) является алгеброй Ли некоторой группы Ли аффинных симметрий этого потока.*

Следствие 2. *Попарно эквивалентны следующие утверждения: 1) КП (M, f) аффинно изоморфен геодезическому потоку евклидова пространства; 2) тензор кривизны КП (M, f) тождественно равен нулю; 3) группа Ли всевозможных аффинных симметрий КП (M, f) имеет размерность* $r = m^2 + 4m + 3$, *где* $m = dim M$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В. А. *Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков* // Доклады АН СССР, 1991. – Т. 320. – No. 3. – С. 531-535.

2. Игошин В. А. *Пульверизационное моделирование.I,II,III* //Изв. вузов. Математика, 1992. – No. 6. – С. 63-70 (соотв.: 1994. – No. 10. – С. 26-32; 1995. – No. 5. – С. 39-50).

Н. Б. Ильинский (Казань)

ВОЗМОЖНОСТИ МЕТОДА ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ И НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Известно, что метод нахождения формы крыловых профилей, основанный на теории обратных краевых задач, позволяет строить крыловые профили самолетов, судов на подводных крыльях, экранопланов, решеток турбомашин, обладающие заданными аэродинамическими свойствами (см., напр., [1-4]). Такими свойствами могут быть безотрывность обтекания в рамках принятой математической модели, величина подъемной силы, аэродинамическое качество и другие. Последние достижения Казанской школы по обратным краевым задачам связаны с построением высоконесущих крыловых профилей с устройствами управления внешним потоком, примеры которых приводятся в докладе. Обобщения на случаи учета сжимаемости и вязкости потока приводят к сложным математическим проблемам, разрешить которые сравнительно просто удается по моделям газа Чаплыгина и теории пограничного слоя. Естественно, при решении таких задач существенными являются вопросы их разрешимости (существования, единственности, устойчивости) и однолистности решения. Определенные успехи в этом направлении достигнуты благодаря применению идеи квазирешения из теории некорректных задач математической физики. Однако проблемы получения условий замкнутости искомого контура профиля и однолистности решения, выражающиеся непосредственно через исходные функции, остаются открытыми. Особенно это относится к задачам, в которых задаваемое по искомому контуру распределение скорости выражается функцией дуговой абсциссы этого контура. С другой стороны, такая постановка задач позволяет наиболее полно отразить желаемые аэродинамические характеристики профиля. Приводятся примеры решения ряда задач.

Работа поддержана РФФИ (проекты 99-01-00365, 99-01-04029) и программой «Университеты России».

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М .Т. *Обратные краевые задачи и их приложения* (второе издание). – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333с.

2. Степанов Г.Ю. *Гидродинамика решеток турбомашин.* – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.

3. Eppler R. *Airfoil design and data.* – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 562 p.

4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Физмат ВО «Наука», 1994. – 440 с.

И. М. Крестинина (Пенза)

О СВЯЗНОСТИ, ПРИСОЕДИНЕННОЙ К СВЯЗНОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА РАССЛОЕНИЯ АФФИНОРОВ

Пусть M_n – дифференцируемое многообразие, $E(M_n)$ – его расслоение аффиноров. Предположим, что на базе задана линейная связность ∇ без кручения. Эта связность ∇ порождает на расслоении аффиноров $E(M_n)$ единственную линейную связность ∇^H, которая определяется условиями:

$$\nabla^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H,\ \nabla^H_{X^H} Q^V = (\nabla_X Q)^V,\ \nabla^H_{Q^V} X^H = 0,\ \nabla^H_{Q^V} S^V = 0,$$

где X^H означает горизонтальный лифт векторного поля X из M_n в $E(M_n)$, Q^V – вертикальный лифт тензорного поля Q типа (1,1), заданного на M_n.

Можно построить на базе M_n связность без кручения $\dot\nabla$, присоединенную к связности ∇. Связность $\dot\nabla$ удовлетворяет условию

$$\dot\nabla_X Y = \nabla_X Y - \tfrac{1}{2} T(X,Y),$$

где T – тензор кручения связности ∇.

На основании этого определения с учетом того, что тензор кручения T^H связности ∇^{H} удовлетворяет условиям

$$T^H(X^H, Y^H) = (R(X,Y))^{V_1^0} - (R(X,Y))^{V_0^1},$$

$$T^H(X^H, Q^V) = 0, \quad T^H(Q^V, X^H) = 0, \quad T^H(Q^V, K^V) = 0,$$

где R – тензор кривизны связности ∇, заданной на базе M_n, $(R(X,Y))^{V_1^0}$ и $(R(X,Y))^{V_0^1}$ – вертикальные лифты тензоров типа (1,1) с базы M_n в его расслоение аффиноров [1], на $E(M_n)$ сопутствующая линейная связность без кручения $\dot{\nabla}^H$ определяется следующими условиями

$$\dot{\nabla}^H_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H + \tfrac{1}{2}((R(X,Y))^{V_0^1} - (R(X,Y))^{V_1^0}),$$

$$\dot{\nabla}^H_{X^H} Q^V = (\nabla_X Q)^V, \ \dot{\nabla}^H_{Q^V} X^H = 0, \ \dot{\nabla}^H_{Q^V} K^V = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Крестинина И.М. *Продолжения тензорных полей и линейных связностей с базы M_n в его расслоение аффиноров $E(M_n)$*. Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сбор. – Пенза: ПГПУ. – 1999. – С. 50-60.

С. А. Кузнецов (Казань), О. В. Старожилова (Самара)

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ НЕОДНОРОДНЫХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Одной из актуальных проблем механики оболочек является разработка надежных и эффективных методов расчета тонкостенных элементов конструкций, условия эксплуатации которых требуют решения задач упругопластических, причем физическая нелинейность значительно осложняется нелинейностью геометрической.

Алгоритм решения дважды нелинейных задач разработан [1] на основе теории малых упругопластических деформаций А.А.Ильюшина [2] в виде двухступенчатого итерационного метода с использованием метода переменных направлений и оптимизации итерационного процесса, базирующейся на спектральных свойствах одномерных разностных операторов. Дискретизация нелинейных операторов осуществлена методом конечных разностей [3].

Результаты исследования зависимости прогибов, напряжений и деформаций от размерности применяемых в расчетах конечно-разностных сеток приведены в [4].

Решен широкий класс нелинейных задач для одно-, двух- и трехслойных неоднородных оболочек и пластин. Выявлены особенности напряженно-деформированного состояния; исследовано влияние различных видов нагружения, граничных условий, переменности толщины, вида диаграммы деформирования материала на упругопластическое поведение объектов, включая развитие зон пластичности, разгрузки и вторичных пластических деформаций по всем трем координатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Столяров Н. Н., Райков Е. А., Старожилова О. В. *Упругопластическое деформирование гибких пологих оболочек переменной толщины при несимметричном нагружении*// Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XIII-й Межреспубликанской конф., Новосибирск, 22-24 июня 1993 г. / Под ред. В.М.Фомина. – Новосибирск, 1995. – С. 166–170.

2. Ильюшин А. А. *Пластичность*. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

3. Дьяконов Е. Г. *Разностные методы решения краевых задач*. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 242 с.

4. Кузнецов С. А., Старожилова О. В. *Упругопластическое деформирование пологих оболочек при локальном нагружении*. I // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. межд. конф., посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А. В.Саченкова (Казань, 9 – 11 сентября 1998 г.). – Казань: Изд-во «Казанское математическое общество», Изд-во «Унипресс», 1998. – С. 135–141.

Р. Х. Латыпов (Казань)

ЛЕГКОТЕСТИРУЕМАЯ СХЕМА НА БАЗЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЫХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Одним из решений проблемы тестирования цифровых схем является придание свойств тестируемости на ранней стадии построения схемы (синтез легко тестируемых схем). Легко тестируемые схемы в тестовом режиме преобразуются таким образом, чтобы неисправности из заданного класса обнаруживались с помощью заранее известного короткого теста. Это позволяет избежать трудоемкой процедуры синтеза тестовой последовательности [1].

Схемы, реализованные на основе полиномиальных разложений выходных функций, легко тестируемы [2,3]. Редди показал, что необходимо только четыре тестовых вектора для тестирования многовходного сумматора по модулю два, построенного на основе каскадного соединения двухвходных двоичных сумматоров. Используя это результат, он показал, что для тестирования схемы, реализованной на основе полинома Жегалкина, требуется n+4 тестовых вектора, где n – число входных вершин схемы.

Основным препятствием для использования полиномиальных разложений при синтезе цифровых схем было мнение многих исследователей о большой сложности их реализации по сравнению с другими разложениями. Однако недавние исследования показали, что некоторые классы схем (среди них арифметические устройства) имеют более простую реализацию именно в классе полиномов [4,5].

При оценке методов синтеза легко тестируемых полиномиальных форм используются следующие параметры: класс полиномов – чем шире класс, тем больше возможностей для минимизации; класс обнаруживаемых неисправностей; как реализуется линейная часть – в виде каскада (что увеличивает задержку сигнала) или в виде дерева; длина теста; зависимость или независимость теста от выходных функций.

В данной работе предлагается новая реализация легко тестируемой многовыходной схемы. Она имеет следующие особенности:

- схема содержит литеральную часть - входы и входные инверторы, & - подсхему, состоящую из конъюнкций, $\oplus$ – подсхему, состоящую из двоичных сумматоров, и управляющие входы;
- $\oplus$ – часть может быть реализована в виде дерева вместо каскадного соединения;

- для реализации схемы используется произвольное полиномиальное разложение выходных функций;
- тест является универсальным, то есть не зависит от выходных функций исходной схемы и обнаруживает все одиночные неисправности на входах и выходах элементов схемы; тест состоит из $n+1$ вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горяшко А.П. *Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств.* М.: Наука, 1987.
2. Reddy S.M.. *Easily Testable Realization for Logic Functions//* IEEE Trans.Comput., 1972, vol. C-21, P.1183-1188.
3. Debnath D., Sasao T.. GRMIN: *A Heuristic Simplification Algorithm for Generalized Reed-Muller Expressions//* IEE Proc. Computer Digital Technology, 1996, vol.143, no.6, P.376-384.
4. Sasao T., Fujiwara H.. *A Design Method of AND-EXOR PLA's with Universal Test Sets//* Technical Report IECE J.FTS86-25, 1987.
5. Sasao T.. *Easily Testable Realizations for Generalized Reed-Muller Expressions//* IEEE Trans.Comput., 1997, vol.46, P.709-716.
6. Latypov R.. *Self-Testable Circuits with Single Fault Detection//* Proc. Reed-Muller Workshop, Chiba,Japan, Aug.27-29., 1995, P.203-205.

Р. М. Мавлявиев (Казань)

РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_p^+-полупространство $x_p>0$ p – мерного евклидова пространства точек $x=(x', x_p)$, $x'=(x_1,...,x_{p-1})$, D_i^+ – конечная область, ограниченная гиперповерхностью Γ^+ класса $\Lambda_{\text{чёт.}\,2}$ в E_p^+ и частью $\Gamma^{(0)}$ гиперплоскости $x_p=0$.

В данной работе рассматривается краевая задача: найти чётное по x_p решение уравнения

$$\Delta_B^2 u + 2\sum_{i=1}^{p-1} k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_B u = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\alpha}{x_p}\frac{\partial}{\partial x_p}, \alpha > 0,$$ в области D_i^+, непрерывно дифференцируемое в замкнутой области $\overline{D_p^+}$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_\Gamma = f_0,\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Gamma = f_1. \tag{2}$$

Установлено, что фундаментальными решениями уравнения (1) являются функции

$$w(x,\xi) = C_1(\alpha)\int_0^\pi \left(\sum_{i=1}^{p-1} \left| x' - \xi' \right|^2 + x_p^2 + \xi_p^2 - 2x_p\xi_p \cos\varphi \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sin^{\alpha-1}\varphi d\varphi,$$

$$u(x) = \iint_{E_p^+} W(x,\xi)F(x)x_p^\alpha dx_p d\xi_p,$$

где $F(x) = C_2(\alpha)e^{-(k.x')}K_{\frac{\alpha}{2}}(kr)$, $r = |MP|$, $K_\lambda(x)$ – функция Макдональда.

По схеме, предложенной в работе [2], построены потенциалы

$$W_1(M,\mu) = \frac{2}{\pi}\int_{\Gamma^+} \mu(P)\left((x_p\xi_p)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\cos^2\theta}{r_{MP}} + \gamma_1 \right)\xi_p^\alpha d\Gamma,$$

$$W_2(M,\nu) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma^+} \nu(P)\left((x_p\xi_p)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\cos^3\theta}{r_{MP}^2} + \gamma_2 \right)\xi_p^\alpha d\Gamma, \alpha > 0,$$

где θ - угол между внешней нормалью n_p гиперповерхности Γ^+ в т. P и радиус-вектором т. $P(\xi,\eta)$ относительно т. M (x, y)$\in$D, γ_1 и γ_2 - вполне определённые регулярные функции. Вычислены предельные значения этих потенциалов.

Решение задачи (1), (2) ищется в виде

$$u = W_1(M,\mu) + W_2(M,\eta) \tag{3}$$

Функция u, определяемая формулой (3), является решением уравнения (1) в области D, один раз непрерывно дифференцируема в $\bar{D}$. Неизвестные плотности μ и η находим из требования, чтобы функция (3) удовлетворяла граничным условиям (2). Подставляя её в эти граничные условия и учитывая предельные значения потенциалов, получаем

$$\nu(P_0)=f_1(P_0)-\frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial n_{P_0}}(P_0,\nu)-\frac{\partial \tilde{W}_2}{\partial n_{P_0}}(P_0,\nu).$$

$$\mu(P_0)=f_0(P_0)-\tilde{W}_1(P_0,\mu)-\tilde{W}_2(P_0,\mu),$$

Доказано, что эта система интегральных уравнений и вместе с ней и задача (1), (2) однозначно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухлисов Ф.Г., Мавлявиев Р.М. *Фундаментальное решение одного B-эллиптического уравнения четвёртого порядка*// Труды IX межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи» – Самара, 1999. – С.95-97.

2. Панич О. И. *О потенциалах для полигармонического уравнения четвёртого порядка*// Мат. сборник. – 1960. – Т.50(92). No 3. – С.335-368.

В. И. Макеев (Пенза)

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ В ОБЩИХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОТНОСИТЕЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

В работе [1] введено понятие относительной изометрии в финслеровом пространстве. Это понятие можно расширить на случай общего метрического пространства векторных элементов с относительной метрикой $g_{n,y}$.

Пусть M – гладкое *n*-мерное многообразие, TM – его касательное расслоение. Пространство $g_{n,y}$ определяется как пара $g_{n,y}$ = (M,g(x,y)), $y \in T_xM$, $x \in M$, где g(x,y) – невырожденное симметрическое M – тензорное поле типа (0,2), компоненты которого обладают весом w и являются однородными фиксированной степени k по слоевым координатам. Относительной изометрией веса w, короче w-изометрией, в $g_{n,y}$ называется дифференцируемое преобразование в M, естественное продолжение в TM которого сохраняет метрику g(x,y).

В настоящей работе получены все трёхмерные пространства $g_{3,y}$, допускающие неразрешимые группы **w**-изометрий G_r размерности $r \geq 6$. В случае r=6 для этого строятся неподобные алгебры Ли векторных полей, исходя из известной классификации вещественных алгебр Ли. Пространства большей подвижности и соответствующие алгебры Ли инфинитезимальных **w**-изометрий находятся исследованием на полноту. Установлено, что пространства $g_{3,y}$ второго рода (допускающие пропорциональные операторы) обладают бесконечномерными полными группами w-изометрий G_∞, а $g_{3,y}$ первого рода – конечномерными: G_6, G_7 и G_{10}. Доказана, в частности,

Теорема. *Максимальная размерность полных неразрешимых групп w-изометрий пространств $g_{3,y}$ первого рода равна десяти.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Matsumoto M. *A relative theory of Finsler spaces* // J. Math. Kyoto Univ. – 1983. – V. 23. – P. 25 – 37.

Т. Ф. Мамедова (Саранск)

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОНВЕРГЕНЦИИ

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t,x) + f(t,x) \tag{1}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t,y), \tag{2}$$

где

$\varphi \in C^{(p,q)}\left([T,+\infty)\times R^n, R^n\right),\ p \ge 0, q \ge 1,$

$f \in C^{(p_0,q_0)}\left([T,+\infty)\times R^n, R^n\right),\ p_0 \ge 0, q_0 \ge 0.$

Теорема 1. *Если* $\left\|\frac{\partial y(t:s,y(s))}{\partial \gamma}\right\| \le K exp\left(\int\limits_s^t \psi(\tau)d\tau\right),\ t \ge s \ge T,\ \gamma = y(s),$ *то решения* $x(t) = x(t:s,x(s))$ *и* $z(t) = z(t:s,z(s))$ *на общем интервале существования связаны неравенством*

$$\|x(t:s,x(s))\| \le exp\left(\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right) z(t:s,z(s)),\ где$$

$$K\|x(s)\| \le exp\left(\int\limits_0^s \psi(\tau)d\tau\right) z(s),$$

$$\frac{dz}{dt} = K exp\left(-\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right) F\left(t, z exp\left(\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right)\right),\ t \ge T,\ \|f(t,x)\| \le F(t,\|x\|).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\varphi(t,0)=f(t,0)=F(t,0)\equiv 0$. *Тогда, если* $z=0$ *является* ψ_0*- устойчивым,* $\psi_0=\exp\left(\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)$, *то* $x=0$ *устойчиво.*

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $T=-\infty$, $q\ge 1$, $\varphi(t+\omega,x)\equiv\varphi(t,x)$, $f(t+\omega,x)\equiv f(t,x)$ *и*

$exp\left(\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)z(\omega:0,z(0))\le R_0$, $z_0\ge KR_0$, $z_0\ge K\|x(0)\|$. *Тогда на множестве* $\Omega_{R_0}=\{x:\|x\|\le R_0, x\in R^n\}$ *уравнение* (1) *имеет хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теорем* 1 *и* 2, *а также:*

а) $z=0$ *является* ψ_0*-устойчивым решение уравнения*

$\frac{dz}{dt}=K exp\left(-\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)\lambda\left(t, z exp\left(\int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)\right)$, $t\ge T$ *и* $\psi_0(t)z(t)\to 0$ *при* $t\to+\infty$ *для всех решений* $z(t)=z(t:s,z(s))$;

б)

$$\left\|\frac{\partial y(t:\tau,x(\tau))}{\partial \gamma}f(\tau,x(\tau))-\frac{\partial y(t:\tau,x_0(\tau))}{\partial \gamma}f(\tau,x(\tau))\right\|\le K\exp\left(\int_s^t \psi(s)ds\right)\lambda(\tau,\|x(\tau)-x_0(\tau)\|),$$

$\lambda(t,u_1)\le\lambda(t,u_2)$ *при* $u_1\le u_2$, $t\ge T$, $\lambda(t,0)\equiv 0$.

Тогда уравнение (1) *имеет конвергенцию.*

О. В. Матвеев (Екатеринбург)

МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ, ОСНОВАННЫЕ НА ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМАМИ

Рассматривается задача приближенного восстановления функции f: $\Omega\to\mathbf{R}$ (где Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющая сильному условию конуса) по известным значениям функции f в точках произвольного конечного множества Δ. В работе [1] предложены следующие методы интерполирования, основанные на локальной аппроксимации полиномами: локальная модификация метода Шепарда; метод, основанный на использовании булевых сумм операторов; метод, основанный на разложении единицы; конечно-элементные конструкции; метод, использующий свертку с гладкой функцией. Эти методы приводят к построению гладких кусочно-полиномиальных функций φ, интерполирующих f. В [1] показано, что вычислительная сложность этих методов есть $O(\underline{h}^{-n} |\ln \underline{h}|)$, где $\underline{h} = \min\limits_{\substack{x,y\in\Delta \\ x\neq y}}|x-y|$. В настоящем докладе продолжается изучение аппроксимативных свойств данных методов интерполирования.

Обозначим через φ функцию класса C^m (m – произвльно заданное натуральное число), интерполирующую заданную функцию $f\in W_p^k(\Omega)$ в точках сетки Δ (φ строится по одному из указанных методов), где W_p^k – пространство Соболева. Пусть $\bar{h} = \sup\limits_{x\in\Omega}\inf\limits_{y\in\Delta}|x-y|$ и выполняются вложения $W_p^k(\Omega)\to C(\Omega)$, $W_p^k(\Omega)\to W_q^l(\Omega)$.

Теорема. *При $k\le m$, $\bar{h}<C_1$ выполняется неравенство*

$$\left\|D^l(f-\varphi)\right\|_{L_q(\Omega)} \le C_2\bar{h}^{\theta}\omega_{m-k}(D^k f,\bar{h})_{L_p(\Omega)},$$

где $\theta = \min\{k-l,\ k-l-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}\}$, *$\omega$ – модуль гладкости, C_i – некоторые положительные константы, зависящие только от Ω, m, p, q, а в случае $l>0$, кроме того,* от $\bar{h}/\underline{h}$.

Работа подержана РФФИ (проект No 98-01-00047).

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев О.В. *Методы приближенного восстановления функций, заданных на хаотических сетках* //Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т.60. – No5. – С. 111-156.

Л. А. Онегов, В. Л. Онегов (Казань)

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ АРХИТЕКТУРНЫХ ОБОЛОЧЕК

В настоящее время в архитектуре применяется большое количество различных оболочек. Самыми интересными среди них являются оболочки отрицательной кривизны. Однако проектирование их форм представляется трудным из-за неразработанности математического аппарата.

Данный доклад посвящен решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа когда основания имеет форму круга. По заданным значениям функции (рассматриваемой поверхности) на границе круга находят значения функции (т. е. точки поверхности) внутри круга.

Решение уравнения Лапласа с граничными условиями сводится к вычислению интеграла Пуассона. Для вычисления интеграла Пуассона получены приближенные формулы, основанные на тригонометрической интерполяции подынтегральной функции. При этом используется интерполяция как с нечетным, так и с четным числом узлов, а коэффициенты полученных квадратурных формул вычисляются в явном виде. Устанавливаются оценки погрешности приближенных формул на классах дифференцируемых функций. Полученные приближенные формулы использованы для построения конкретных архитектурных оболочек, основанием которых является круг.

Л. А. Онегов (Казань)

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ЕЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассматриваются вопросы, связанные с оптимальным восстановлением особых интегралов по заданной (возможно неточной) информации о плотности интеграла, которые в случае регулярных интегралов достаточно хорошо изучены (см. [1]-[3]).

В данном докладе решена задача построения оптимального алгоритма восстановления интегралов общего вида с неточно заданной информацией о значениях подынтегральной функции и ее производных в фиксированной особой точке. Устанавливаются точные оценки остатка на классах дифференцируемых функций $W^r L_p$ ($1 \le p \le \infty$). При этом эти значения зависят:

1) от рассматриваемого класса функций;
2) от оценки точности задания информации;
3) от принадлежности интеграла к определенному типу.

Как частные случаи получены результаты по оптимальному восстановлению определенных интегралов, интегралов со слабой особенностью, интегралов в смысле главного значения по Коши и конечной части по Адамару. Как частный случай, решается задача оптимального восстановления интегралов по точной информации о подынтегральной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. *Квадратурные формулы.* – М.: Наука, 1988. – 254с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* – Казань: Изд-во Канск. ун-та, 1980 – 232 с.

3. Micchelli C. A., Riwlin T.J. *A survey of optimal recovery* // Optim. Estimat. Approximat. Theory. – New York–London, 1977. – P.1-54.

Б. Е. Победря (Москва)

ПОСТУЛАТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

Механика сплошной среды (МСС) – наука феноменологическая. Она основана на введении гипотетического континуума (сплошной среды), в которой вводятся постулаты – набор аксиом, из которых выводятся логические следствия. В отличие от классической (теоретической) механики число объектов, участвующих в геометрическом пространстве (чаще всего это евклидово пространство R^3), не конечное и даже не счётное, а «континуальное». Каждый такой объект называется частицей, которая идентифицируется «лагранжевыми» координатами, и занимают положение радиуса-вектора $\vec{r}$ в R^3 в некоторый момент времени t. Скорость такой частицы: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Каждая частица называется материальной, если ей приписан скаляр ρ, называемый плотностью вещества.

Постулаты МСС справедливы для любого объёма V, содержащегося в R^3, который ограничивается замкнутой поверхностью Σ. Первый постулат называется законом сохранения масс:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0. \tag{1}$$

Второй постулат – это закон изменения количества движения

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}dV = \int_V \rho\vec{F}dV + \int_\Sigma \vec{S}^{(n)}d\Sigma . \tag{2}$$

Здесь $\vec{v}$ – вектор скорости, $\vec{F}$ – плотность массовых сил, $\vec{S}^{(n)}$ – поверхностная нагрузка, действующая на площадке с единичным вектором нормали $\vec{n}$: $\vec{S}^{(n)} = \vec{S}_i n_i$, $\vec{S}_i = \sigma_{ij}\vec{e}_j$, где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Для простоты будем рассматривать малые деформации, так что эйлеровы координаты совпадают с лагранжевыми. Постулат об изменении момента количества движения или кинетического момента можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{r}\times\rho\vec{v}dV=\int_V \vec{r}\times\rho\vec{F}dV+\int_\Sigma \vec{r}\times\vec{S}^{(n)}d\Sigma. \tag{3}$$

Если рассматриваются неизотермические процессы, то следует привлечь законы термодинамики.

Первый закон термодинамики (закон сохранения энергии) может быть сформулирован в виде

$$dE+dK=\delta Q+\delta A^{(e)}, \tag{4}$$

где E - внутренняя энергия среды, которая связана с плотностью внутренней энергии e соотношением $E=\int_V \rho e\,dV$. Здесь K - кинетическая энергия: $K=\frac{1}{2}\int_V \rho\vec{v}\cdot\vec{v}\,dV$, δQ – изменение внешнего притока тепла: $\delta Q\equiv dt\left[\int_V \rho q dV-\int_\Sigma q^{(n)}d\Sigma\right]$, где q – массовый источник тепла, $q^{(n)}$- приток тепла через поверхность с единичным вектором нормали $\vec{n}=n_i\vec{e}_i$: $q^{(n)}=q_i n_i$, $\delta A^{(e)}$- изменение работы внешних сил $\delta A=dt\left[\int_V \rho\vec{F}\cdot\vec{v}\,dV-\int_\Sigma \vec{S}^{(n)}\cdot\vec{v}\,d\Sigma\right]$. С использованием теоремы живых сил $dK=\delta A^{(e)}+\delta A^{(i)}$, где $\delta A^{(i)}$ – изменение работы внутренних сил $\delta A^{(i)}\equiv dt\int_V \sigma_{ij}v_{ij}dV$, а v_{ij}- компоненты тензора скоростей деформации, равные $v_{ij}=\left(v_{i,j}+v_{j,i}\right)/2$, первый закон термодинамики (4) можно записать в виде

$$dE=\delta Q-\delta A^{(i)}. \tag{5}$$

Внутренняя энергия E и её плотность e являются функциями термодинамических параметров состояния, задание которых и определяет математическую модель среды. Второй закон термодинамики

$$TdS=\delta Q+W^{*}dt \tag{6}$$

гарантирует существование ещё одной функции термодинамических параметров состояния – энтропии S или её плотности s: $S \equiv \int\limits_V \rho s\, dV$.

В формулировку второго закона термодинамики входит так же функция рассеивания (диссипации) W^* или её плотность w^*: $W^* \equiv \int w^* dV$. При этом для обратимых сред $W^* = 0$, а для необратимых $W^* > 0$. При построении математической модели сплошной среды задают конкретное выражение функции рассеивания.

Первый закон термодинамики (4) или (5) может быть сформулирован в интегральном виде соответственно

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(e + \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\right)dV = \int\limits_V \rho\left(q + \vec{F}\cdot\vec{v}\right)dV + \int\limits_\Sigma \left(\vec{S}^{(n)}\cdot\vec{v} - q^{(n)}\right)d\Sigma, \qquad (7)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho e\, dV = \int\limits_V \left(\rho q + \sigma_{ij} v_{ij}\right)dV - \int\limits_\Sigma q^{(n)} d\Sigma. \qquad (8)$$

Точно также на основании (6) может быть дана интегральная формулировка второго закона термодинамики

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho s\, dV = \int\limits_V \frac{\rho q}{T} dV - \int\limits_\Sigma \frac{q^{(n)}}{T} d\Sigma + \int\limits_V \left(\frac{w^*}{T} - \frac{q_i T_{,i}}{T^2}\right)dV. \qquad (9)$$

Можно дать дифференциальные следствия из интегральных формулировок основных постулатов механики сплошной среды. Так из закона сохранения масс (1) следует уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right) = 0 \qquad (10)$$

Из закона об изменении количества движения (2) следуют уравнения движения сплошной среды: $\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ji,j}$. Из закона об изменении кинетического момента (3) следует симметричность тензора напряжений $\underset{\sim}{\sigma}$: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Дифференциальным следствием первого закона термодинамики (интегральной формы (7)) является уравнение $\rho\frac{de}{dt} + \frac{\rho}{2}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \sigma_{ij}\cdot v_{ij} + \rho\vec{F}\cdot\vec{v} + \rho q - q_{i,i}$, а интегральной формы (8) уравнение $\rho\frac{de}{dt} = \sigma_{ij}v_{ij} + \rho q - q_{i,i}$. Дифференциальным следствием второго закона термодинамики (9) является уравнение

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \rho q - q_{i,i} + w^* \tag{11}$$

Уравнение (11) называется уравнением притока тепла. Обычно полагают справедливым классический закон теплопроводности Фурье $q_i = -\Lambda_{ij} T_{,j}$, где $\underset{\sim}{\Lambda}$ – тензор теплопроводности. Для изотропной среды $\Lambda_{ij} = \Lambda \delta_{ij}$. Таким образом, для однородной изотропной среды уравнение притока тепла (11) имеет вид $\rho T \dfrac{ds}{dt} = \Lambda \Delta T + \rho q + w^*$.

Для многокомпонентной среды некоторые постулаты приходится изменить. В связи с этим изменяются и основные уравнения. Пусть каждая частица сплошной среды содержит m подчастиц (компонентов). Каждый компонент имеет плотность $\rho^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Суммарная плотность частицы вещества равна ρ:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{m} \rho^{(\alpha)}. \tag{12}$$

Скорость каждого компонента обозначим через $\vec{v}^{(\alpha)}$. Тогда скорость каждой частицы сплошной среды $\vec{v}$ можно представить как центр масс подчастиц:

$$\vec{v} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\rho^{(\alpha)} \vec{v}^{(\alpha)}}{\rho}. \tag{13}$$

Определим диффузионный поток $\vec{j}^{(\alpha)}$ формулой

$$\vec{j}^{(\alpha)} = \rho^{(\alpha)} \left(\vec{v}^{(\alpha)} - \vec{v} \right) \tag{14}$$

Из (12) - (14) следует, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} \vec{j}^{(\alpha)} = 0$. Введём величину массовой концентрации компонента α:

$$\bar{j}^{(\alpha)} \equiv \rho^{(\alpha)} / \rho \tag{15}$$

Из (12) и (15) следует, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{m} c^{(\alpha)} = 1$.

В многокомпонентной среде могут происходить химические реакции со скоростями J_I, $I = 1, 2, \ldots, N$. Пусть $\nu_{\alpha I}$ – коэффициенты, пропорциональные стехиометрическим коэффициентам $\alpha = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда для каждого компонента будет изменяться и постулат (1), который для каждого компонента может быть записан в виде $\frac{d}{dt}\int_V \rho^{(\alpha)} dV = \int_V R_\alpha dV$. Соответствующее уравнение неразрывности для компонента α имеет вид

$$\frac{\partial \rho^{(\alpha)}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho^{(\alpha)} \bar{v}^{(\alpha)}\right) = R_\alpha, \tag{16}$$

где $R_\alpha \equiv \sum_{l=1}^{N} \nu_{\alpha l} J_l$. Просуммировав уравнения (16) по всем компонентам, получим на основании (12) и (13) уравнение неразрывности (10) для всей частицы. При этом очевидно $\sum_{\alpha=1}^{m} R_\alpha = 0$. Уравнения (16) можно записать в другом виде: $\rho \frac{dc^{(\alpha)}}{dt} + \operatorname{div} \bar{j}^{(\alpha)} = R_\alpha$. Тогда они называются уравнениями диффузии. Для построения конкретных моделей МСС вводятся определяющие соотношения, как связь между «основными» параметрами (деформации, температура, градиент температуры, концентрации) и их «потоками» (напряжения, энтропия, вектор теплового потока, векторы диффузионных потоков).

Наряду с классическими моделями идеальной и вязкой жидкости, упругого, вязкоупругого и пластического тела, рассматриваются и другие: магнитная жидкость, пьезоупругое тело, композит и т.п. Для введения новых моделей в МСС достаточно воспользоваться основными её постулатами (иногда несколько изменёнными) и теорией определяющих соотношений.

М. В. Селина (Самара)

ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

1. Для уравнения

$$u_{xy} + \frac{\alpha}{y-x} u_y = 0, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, в области $G=G^{+}\cup G^{-}$, $G^{+}=\{(x,y):0<x<y<h\}$, $G^{-}=\{(x,y):-a<x<0,0<y<h\}$, решена задача:

доказать существование и единственность функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению (1), условиям:

$$u(x,y)\in C(\overline{G}),\ u_x(x,y),u_y(x,y)\in C(G), \tag{2}$$

$$u^{-}(x,h)=g_1(x),x\in[-a;0], \tag{3}$$

$$u^{+}(x,h)=g_2(x),x\in[0;h], \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}u^{-}(t,y)dt = \lim_{x\to 0+0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{x}^{y}(t-x)^{-\lambda_2}t^{r_2}u^{+}(t,y)dt, \tag{5}$$

где $0<\lambda_i<1$, $0<r_i<1$, $r_i>\lambda_i$, $i=1,2$.

При решении поставленной задачи $u^{-}(x,y)$ выражено через $g_1(x)$ и $\varphi(y)$; $u^{+}(x,y)$ – через $g_2(x)$ и $\varphi(y)$, где $\varphi(y)=u(0,y),y\in[0,h]$. Функция $\varphi(y)$ определена из интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром, имеющим интегрируемую особенность.

2. Доказаны также существование и единственность решения $u(x,y)$ уравнения

$$u_{xy}-\frac{\beta}{y-x}u_x=0, \tag{6}$$

$0<\beta<1$, в области G при выполнении требований (2)-(5).

В. Ф. Снигирев (Казань)

КВАДРАТИЧНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Область определения обобщенной производной С. Л. Соболева [1] представляет собой открытое множество, и поэтому граница исключается из рассмотрения. В работе [2] на основе такого определения производной введены понятия обобщенного градиента функции, обобщенной дивергенции и обобщенного ротора для вектора.

В статье [3] автором получены квадратичные функционалы, из условий минимума которых можно вычислять приближенную обобщенную частную производную С. Л. Соболева методом Ритца. Квадратичный функционал, соответствующий обобщенной частной производной $p_{k0} = v_{k0} + u$ с неоднородными краевыми условиями Дирихле ($p_{k0}(x) = \partial f(x)/\partial x_k \ \forall x \in \partial\Omega$), имеет вид

$$F_2(v_k) = (v_k, v_k) + 2(\partial v_k/\partial x_k, f) + 2(v_k, u), \qquad (1)$$

где v_{k0} – функция, доставляющая минимум функционалу F_2; $v_k \in H_0^1(\Omega)$; u - заданная квадратично интегрируемая функция ($u(x) = \partial f(x)/\partial x_k \ \forall x \in \partial\Omega$); f – дифференцируемая функция; Ω – область, ограниченная в R^m, с липшицевой границей $\partial\Omega$.

В статье [4] автором получены линейные функционалы (интегральные тождества), позволяющие определить обобщенную производную С. Л. Соболева на области $\overline{\Omega}$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Эти интегральные тождества позволяют вычислять приближенную обобщенную частную производную функции методами Галеркина-Петрова. Линейный функционал, соответствующий обобщенной частной производной $p_{k0} = v_{k0} + u$ с неоднородными краевыми условиями Дирихле ($p_{k0}(x) = \partial f(x)/\partial x_k \ \forall x \in \partial\Omega$), имеет вид

$$(v_k, v) = -(u, v) - (\partial v/\partial x_k, f) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad (2)$$

где $v_k \in L_2(\Omega)$ – финитная функция ($v_k(x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega$); v_{k0} – функция, удовлетворяющая выражению (2); f – дифференцируемая функция; u - заданная квадратично интегрируемая функция ($u(x) = \partial f(x)/\partial x_k \ \forall x \in \partial\Omega$). В силу равенства $v_k + u = p_k$ выражение (2) преобразуется к виду: $(p_k, v) = -(\partial v/\partial x_k, f) \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$, где $p_k(x) = \partial f(x)/\partial x_k \ \forall x \in \partial\Omega$.

Предлагаемый вариант определения обобщенной производной С. Л. Соболева является конструктивным, т.к. на основе выражений (1) или (2) можно вычислять приближенную обобщенную частную производную функции основными методами математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.

2. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. *Усреднение дифференциальных операторов.* – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

3. Снигирев В. Ф. *Приложение обобщенного численного дифференцирования для решения задачи математического моделирования про-*

извольных аэродинамических поверхностей // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2000. – No. 2. – С. 3-9.

4. Снигирев В. Ф. *Численное получение производной функции на основе интегрального тождества для обобщенной слабой производной*// *Информационные технологии*. – 2000. – No 4. – С. 24-29.

С. Е. Степанов (Владимир)

НОВАЯ ТЕОРЕМА О ДВОЙСТВЕННОСТИ

Пусть (M, g) – компактное ориентированное n-мерное риманово многообразие и $T^r(M, \mathbf{R})$ – векторное пространство конформно киллинговых r-форм (см. [1]), тогда имеет место

Теорема. $\dim T^r(M, \mathbf{R}) = t_r < \infty$ *и* $t_r = t_{n-r}$ *для* $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Этот факт, установленный нами в [2] только в случае риманова многообразия постоянной кривизны, является аналогом известной теоремы двойственности Пуанкаре $b_r = b_{n-r}$ для чисел Бетти b_r, каждое из которых служат размерностью соответствующего векторного пространства $H^r(M, \mathbf{R})$ гармонических r-форм.

Обозначим через $K^r(M, \mathbf{R})$ и $P^{n-r}(M, \mathbf{R})$ векторные пространства козамкнутых (киллинговых) и замкнутых (плоских) конформно киллинговых r- и (n – r)-форм соответственно. На основании изоморфизма этих пространств (см. {2]) и приведенного выше утверждения сформулируем

Следствие (см. [2]). $\dim K^r(M, \mathbf{R}) = k_r < \infty$ *и* $\dim P^{n-r}(M, \mathbf{R}) = p_{n-r} < \infty$ *для* $k_r = p_{n-r}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kashiwada T. *On conformal Killing tensor* // Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. – 1968. – Vol. 19, no. 2. – P. 67-74.

2. Stepanov S.E. *On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field.* – 2000. – Vol. 33, no. 3-4. – P. 191-209.

С. Н. Тимергалиев (Набережные Челны)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач геометрически и физически нелинейной теории тонких оболочек. Предполагается, что срединная поверхность оболочки гомеоморфна ограниченной односвязной плоской области Ω. В основе предложенного метода исследования лежит идея выражения компонент перемещения, удовлетворяющих заданным граничным условиям, через вспомогательные функции, что позволил исследовать задачу в некотором гильбертовом пространстве $H(\overline{\Omega})$, отличном от пространств перемещений и усилий.

Проведенные исследования можно разбить на два основных этапа: 1) построение математической модели задачи и 2) доказательство разрешимости задачи в рамках этой модели. Первый этап включает в себя: а) получение интегральных представлений для компонент перемещений с использованием задачи Гильберта для аналитических функций в односвязной области; б) построение гильбертова пространства $H(\overline{\Omega})$, которое основано на предположении о положительной определенности квадратичной формы, связанной с плотностью потенциальной энергии деформации оболочки; изучение свойств элементов $H(\overline{\Omega})$ (в частности, доказана теорема вложения для $H(\overline{\Omega})$); в) введение понятия обобщенного решения задачи в $H(\overline{\Omega})$ при помощи вариационного принципа Лагранжа; г) сведение задачи к нелинейному операторному уравнению

$$(1-t_0)\varepsilon - G_c(\varepsilon;t_0) - G_*(\varepsilon;t_0) = 0, \qquad (1)$$

где G_c – вполне непрерывный, G_* – ограниченный нелинейные операторы в $H(\overline{\Omega})$, $t_0 \in [0,1)$ – произвольно фиксированный параметр.

Второй этап посвящен доказательству существования решения уравнения (1). Для этого используется топологический метод, основанный на вычислении вращения вполне непрерывного векторного поля $(1-t_0)\varepsilon - G_c(\varepsilon;t_0)$. Показано, что на сферах достаточно большого радиуса пространства $H(\overline{\Omega})$ вращение этого поля равно +1 и при некотором $t_0 \in [0,1)$ оператор $G_*(\varepsilon;t_0)$ имеет достаточно малую норму. Тогда, как известно [1,с.162-163], уравнение (1) внутри таких сфер имеет по крайней мере одно решение $\varepsilon \in H(\overline{\Omega})$, которое является обобщенным решением задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 С.

А. С. Тихонов (Казань)

ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ НА ЭХО ВЫСТУПА ПРОФИЛЯ ДЕТАЛИ

Размерное электрохимическое формообразование выступа профиля детали при необходимости получения строго определенной при проектировании формы осуществляется профилированным катодом-инструментом. Когда же такой необходимости нет, то возможно использование непрофилированного катода-инструмента или, как рассматривается в данной работе, плоского катода-инструмента с нагревом частей катода и теплоизоляцией этих частей от ненагретой части над выступом профиля детали.

Рассмотрено решение задачи учета влияния тепловых полей на обработку выступа профиля детали при двумерном стационарном электрохимическом формообразовании по идеальной модели ЭХО. Течение рабочей среды в межэлектродном промежутке предполагается установившимся, прокачка электролита, моделируемого идеальной несжимаемой жидкостью осуществляется перпендикулярно плоскости сечения межэлектродного промежутка, джоулево тепловыделение и диссипация не учитываются, коэффициент теплопроводности принят постоянным. Поле температур в этом случае в каждом сечении удовлетворяет уравнению Лапласа. Связь двух потенциальных полей - теплового и электрического – исследуется при граничном условии стационарности анодной границы, учитывающем влияние теплового поля, аналогично рассмотренному в [1] для поля скоростей течения электролита. При указанных предположениях распределение температур внутри межэлектродного промежутка полностью определяется распределением температур на стенках канала и их теплоизолированностью.

Задача сведена к смешанной краевой задаче для аналитической функции и решена по формуле Синьорини. Найдена форма анодной границы, распределение на ней температуры.

Приведены расчеты для вариантов значений разности температуры на участках катода, длины теплоизоляции. Показана возможность получения различных анодных границ в зависимости от выбранных физических параметров процесса ЭХО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клоков В. В. *Стационарное электрохимическое формообразование с учетом движения электролита*// Электрофизические и электрохимические методы обработки материалов в авиастроении. Казань, 1989.

П. Л. Федорова (Томск)

РАСЩЕПЛЯЕМОСТЬ ОКРУЖНОСТИ НАД ПРЯМОЙ

Понятие расщепляемости над топологическим пространством является сравнительно новым [1].

Определение. Пусть X, Y – топологические пространства, A – подмножество X. Говорят, что пространство X расщепляемо над Y вдоль множества A, если существует непрерывное отображение $f: X \to Y$, такое, что $f(A) \cap f(X \setminus A) = \varnothing$. Если X расщепляемо над Y вдоль любого подмножества A, то говорят, что X расщепляемо над Y.

В [2] была поставлена

Задача. Даны два множества X и Y. Описать те подмножества X, вдоль которых X расщепляемо над Y.

Эта задача была расссмотрена и частично решена для случая, если $X = S^1$ – окружность и $Y = R$ – вещественная прямая.

Пример. Окружность не расщепляема над прямой вдоль полуинтервала $[a;b)$.

Теорема 1. *Окружность расщепляема над вещественной прямой вдоль любого открытого (а, следовательно, и вокруг любого замкнутого) подмножества.*

Верна и более сильная

Теорема 2. *Окружность расщепляема над вещественной прямой вдоль объединения непересекающихся открытого и замкнутого множества, удовлетворяющих условию: существует интервал, содержащий замкнутое множество и не пересекающийся с открытым множеством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А. В., Шахматов Д. Б. *Расщепляемые пространства и вопросы приближения функций*// V Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев: Штиинца. – 1985. – С. 10-12.

2. Arhangel'skii A. V. *Survey of clevability*// Topology and its applications, – 1993. – 54. – P. 141-163.

Е. И. Филатов (Казань)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОЛИТА НА СЪЕМ МЕТАЛЛА ПРИ ЭХО

Электрохимическая обработка металла (ЭХО) является одним из наиболее прогрессивных методов технологии машиностроения. Съем металла происходит при прокачке электролита сквозь узкий зазор между катодом- инструментом и анодом- деталью. Распределение съема металла по поверхности детали, а значит, и точность обработки существенно зависит от характера течения в этом зазоре.

Для исследования влияния динамики электролита на съем металла была использована математическая модель процесса ЭХО, описанная в [1].

Были проделаны расчеты для рабочей области, первоначально заключенной между двумя плоскими прямоугольниками 20мм × 40мм отстоящими друг от друга на h = 0.25мм. Электролит втекал между короткими сторонами прямоугольников и вытекал в остальные три щели.

Исследовалось влияние различия скоростей жидкой и газовой фаз электролита на распределение других гидродинамических параметров, а также на съем металла с поверхности детали. Предполагалось, что разность скоростей фаз может быть задана двумя постоянными коэффициентами:

$$\beta_x = (v_x - w_x)/v_x; \ \beta_y = (v_y - w_y)/v_y$$

где v_x и v_y-компоненты скорости жидкости, w_x and w_y - компоненты скорости газа. На рис.1 представлено распределение съема металла в случае, когда скорость жидкой фазы вдвое больше скорости пузырьков газа, на рис. 2 -когда скорость газа в полтора раза больше скорости жидкости.

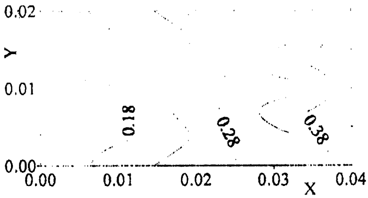


Рис.1 $\beta = -0.5$

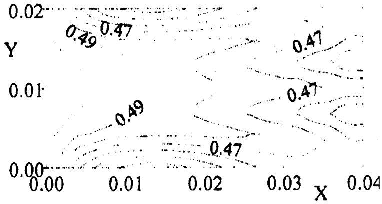


Рис.2 $\beta = -0.5$

Результаты вычислений показывают, что различие в скоростях фаз оказывает существенное влияние на точность обработки и, следовательно, для аккуратного моделирования процесса ЭХО желательно использовать многоскоростную модель течения электролита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klokov V. V., Filatov E. I., Firsov A. G., Tikhonov A. S.: *The complex computer simulation of the ECM blades shaping*. In the Proceedings of the 15th International conference on Computer-aided Production Engineering «CAPE'99», Durham, UK, 1999, pp. 451-456.

Р. З. Хисамов, Н. М. Якупов (Казань)

УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА В ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ

Создание новых конструкции всегда ограничивается наличием конструкционных материалов, имеющихся в распоряжении конструктора. В связи с этим, постоянно актуальной проблемой является создание новых материалов, изучение их свойств и создание расчетных моделей и методов расчета конструкций из таких материалов.

Подражая природным конструкциям, большое внимание в настоящее время уделяют разработке конструкций из материалов неоднородной структуры. Наличие различных неоднородностей позволяет удовлетворять многосторонним функциональным требованиям, предъявляемых к конструкциям.

Одним из направлений создания материалов неоднородной структуры является разработка анизотропных и многослойных материалов-конструкций. Особый интерес представляют конструкции, материал которых пронизан сплошными и прерывистыми волокнами. Наличие «внутреннего» подкрепления с различными жесткостными характеристиками могут значительно усилить, например, наиболее опасные зоны конструкций.

В работе предлагается алгоритм учета волокон, имеющих различные геометрические и физико-механические характеристики.

Рассматривается трехмерный элемент сложной геометрии, который пронизан волокнами. Используется процедура сплайнового варианта МКЭ [1]. Решается задача параметризации заданной искривленной области параметрами единичного куба. Решение в параметризованном элементе представляется в виде интерполяционного эрмитового кубического сплайна трех переменных. Зная поле перемещений и деформаций, выраженные через узловые значения соответствующих компонент перемещений и их производных, составляем вариацию потенциальной энергии для каждого волокна. При этом индивидуально учитываются геометрические и физико-механические свойства каждого волокна. Суммируя вклад волокон в вариационное уравнение Лагранжа для трехмерного элемента, выводятся необходимые уравнения равновесия сложной системы. В итоге задача сводится к системе алгебраических уравнений. Алгоритм учета волокон реализован в виде программы для ПЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якупов Н.М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. - ИММ КНЦ РАН. Казань, 1994. - 124 с.

И. И. Черанева (Пенза)

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

В работе получены полные лифты векторных полей, определяющих инфинитезимальные аффинные преобразования в касательном расслоении над двумерными пространствами аффинной связности, допускающих аффинные движения. Эти пространства A_2 и их группы движений были выделены И.П.Егоровым [1].

В данной работе ограничимся рассмотрением пространства A_2 с объектом аффинной связности

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 2\alpha(x^1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(x^1) \\ \alpha(x^1) & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

заданным в локальных координатах $\{x^1, x^2\}$ (случай I(d) в [1] к которому сводятся также I(b) и I(c)).

Установлено, что если $\alpha(x^1)$ такова, что $3(2\alpha\alpha' - \alpha'')^2 - 2(\alpha^2 - \alpha')(6\alpha'^2 - \alpha''') = \lambda \neq 0$, то пространство (1) допускает трехпараметрическую полную группу движений с операторами

$$X_1 = x^1\partial_2, \quad X_2 = x^2\partial_2, \quad X_3 = \partial_2. \tag{2}$$

Если $\lambda=0$, то $\alpha(x^1)$ имеет вид $\alpha = \dfrac{t - ax^1}{a{x^1}^2 + bx^1 + c}$ $(a, b, c, t\text{ - const})$, и полная группа движений в A_2 – четырехпараметрическая, три оператора которой совпадают с (2), а четвертый имеет вид $X_4 = (a{x^1}^2 + bx^1 + c)\partial_1 + ax^1x^2\partial_2$.

Для линейной связности (1) в локальных координатах $\{x^1, x^2, x^{\bar 1}, x^{\bar 2}\}$ установлено, что полный лифт векторного поля X, порождающего в $T(A_2)$ инфинитезимальное аффиное преобразование, определяет в $T(A_2)$ семипараметрическую полную группу движений с операторами

$$\begin{gathered} X_1 = x^1\partial_2 + x^{\bar 1}\partial_{\bar 2}; \quad X_2 = x^2\partial_2 + x^{\bar 2}\partial_{\bar 2}; \quad X_3 = \partial_2; \\ X_4 = x^1\partial_{\bar 2} \quad X_5 = x^2\partial_{\bar 2}; \quad X_6 = \partial_{\bar 2}; \quad X_7 = x^{\bar 1}\partial_1 + x^{\bar 2}\partial_{\bar 2} \end{gathered} \tag{3}$$

в случае, если $\lambda \neq 0$. Если $\lambda=0$, то полная группа движений в $T(A_2)$ - девятипараметрическая, семь операторов которой совпадает с (3), а X_8, X_9 имеют вид:

$$X_8 = \left(a{x^1}^2 + bx^1 + c\right)\partial_1 + ax^1x^2\partial_2 + (2ax^1 + b)x^{\bar 1}\partial_{\bar 1} + (ax^2x^{\bar 1} + ax^1x^{\bar 2})\partial_{\bar 2};$$

$$X_9 = \left(a{x^1}^2 + bx^1 + c\right)\partial_{\bar 1} + ax^1x^2\partial_{\bar 2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности*. – Казань: Изд-во. Казанск. ун-та , – 1965, – С.1 - 179.

Ю. И. Шевченко (Калининград)

СПЕЦИАЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ И ПРОЕКТИВНЫЙ АНАЛИТИЧЕСКИЕ АППАРАТЫ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{I'}\}(I',J',K'=0,...,n)$. Деривационные формулы имеют вид: $dA_{I'}=\omega_{I'}^{J'}A_{J'}$, где d – знак обычного дифференцирования. Продифференцируем эти формулы внешним образом, используя полноту дифференциалов $dA_{I'}$: $D(dA_{I'})=0$, где D – символ внешнего дифференцирования. Получим структурные уравнения $D\omega_{I'}^{J'}=\omega_{I'}^{K'}\wedge\omega_{K'}^{J'}$ линейной группы GL(n+1), действующей неэффективно в пространстве P_n. Из группы GL(n+1) выделяется эффективно действующая специальная линейная группа SGL(n+1) с помощью равенства $\omega_{I'}^{I'}=0$, называемого условием эквипроективности (по существу, условием проективности). Этот специальный линейный аппарат не всегда удобен: а) проективное пространство P_n является обобщением аффинного пространства A_n, но структурные уравнения действующей в пространстве A_n аффинной группы GA(n) непосредственно не вытекают из уравнений группы SGL(n+1); б) при ограничении специального линейного аппарата пространства P_n на подпространство P_m получается общий линейный аппарат, иначе говоря, когда в пространстве P_n действует группа SGL(n+1), в подпространстве P_m действует группа GL(m+1). Проективный аналитический аппарат, лишенный указанных недостатков, строится с помощью базисных форм $\theta_{J'}^{I'}=\omega_{J'}^{I'}-\delta_{J'}^{I'}\omega_0^0$ проективной группы GP(n), изоморфной группе SGL(n+1). Выделяя значение 0 индекса $I'=\{0,I\}$ (I,J,K=1,...,n) и опуская его у форм θ_0^I,θ_J^0, из структурных уравнений группы GL(n+1) найдем уравнения группы GP(n) $D\theta^I=\theta^J\wedge\theta_J^I$, $D\theta_J^I=\theta_J^K\wedge\theta_K^I+\theta^K\wedge(-\delta_J^I\theta_K-\delta_K^I\theta_J)$, $D\theta_I=\theta_I^J\wedge\theta_J$. Этот аппарат подходит для описания расслоений над пространством P_n, например, справедлива

Теорема. *Проективное пространство P_n, рассматриваемое как: 1) пространство точек, является голономным гладким (точнее, центропроективным или коаффинным многообразием); 2) пространство гиперплоскостей, является голономным гладким (точнее, аффинным) многообразием.*

О. А. Широкова (Казань)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ В ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Процесс сорбции – это поглощение твердым телом или жидкостью жидкого вещества или газа из окружающей среды. Прямая задача динамики сорбции заключается в том, чтобы, зная исходные концентрации веществ в смеси, найти функции распределения веществ в сорбирующей среде для любого момента времени. Решение же обратной задачи идентификации изотермы сорбции при фильтрации примеси в пористой среде заключается в том, чтобы найти исходный состав смеси и концентрации, определив экспериментально распределение веществ в сорбирующей среде. Изотерма сорбции – это функция пространственно-временного распределения сорбируемых веществ в сорбирующей среде, она является функцией концентрации примеси.

Работа посвящена численному решению задачи идентификации изотермы сорбции при фильтрации примеси в пористой среде в вариационной постановке. В ней рассматривается равновесная динамика сорбции одного вещества. Перенос примеси потоком фильтрующейся жидкости с сорбцией примеси в пористой среде описывается уравнением в безразмерных координатах с соответствующими начальными и граничными условиями [1]. Вариационная постановка задачи идентификации изотермы сорбции f(C) формулируется как задача оптимального управления. Функция цели имеет вид

$$J = \int_0^T (C(l,t) - \varphi(t))^2\,dt,$$

где C(l,t) – вычисленное зачение функции концентрации примеси на границе сорбционной колонки x=l, φ(t) – ее замеренное значение. Уравнение динамики сорбции выступает в качестве связи при построении Лагранжиана. Формулируется сопряженная краевая задача. При решении задачи идентификации изотерма сорбции представляется в параметрическом виде через базисные функции-крышки. Градиент функционала J минимизируется на решениях сопряженной краевой задачи.

В данной работе исследована и решена модельная задача идентификации изотермы сорбции f(C). Функция f(C) задается в параметрическом виде: f(C)=Г·C. Функционал цели J минимизируется на решениях прямой краевой задачи. Решение прямой краевой задачи при различных параметрах Г и получение значений функции C(x,t) в заданной области проводятся численно и аналитически. Аналитическое решение получено методом характеристик. При численной реализации применяется метод конечных разностей и итерационный метод Зейделя верхней релаксации. Программа, реализующая численные алгоритмы, составлена на языке Turbo Pascal 7.0. Представлены графики функций f(C) и C(l,t) при различных значениях параметра Г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рачинский В.В. *Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии.* – М.: Наука, 1964.

А. Ю. Шкарбан (Казань)

ГИДРОДИНАМИКА ТЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОЛИТА ПРИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОМ ХОНИНГОВАНИИ С УЧЕТОМ ЗОНЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Решена задача по расчету анодной границы и гидродинамики течения электролита в межэлектродном промежутке при стационарной электрохимической обработки специальным хоном-инструментом. При расчете анодной границы учитывалось наличие зоны локализации анодного растворения металла. Математическое решение задачи по ее расчету осуществлено методом годографа [1].

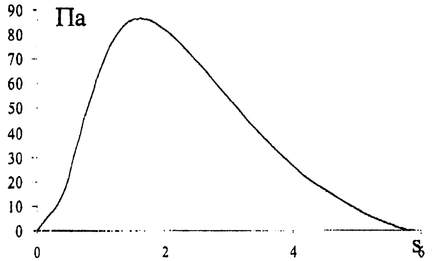
Выполнен расчет гидродинамических линий тока и поля давления при моделировании течения электролита идеальной несжимаемой жидкостью. Для этого использовано следующее выражение функции, обратной к функции комплексного потенциала

$$x+iy=c\int_{1}^{\varphi+i\psi}\frac{1}{\sqrt{v-1}}\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{v-a_i}}\int_{0}^{v}\frac{(u-a_7)}{\sqrt{u(u-1)}}\prod_{j=1}^{4}(u-b_j)\prod_{i=3}^{6}\frac{1}{\sqrt{u-a_i}}du\,dv$$

где a_i – математические параметры задачи связанные с геометрией хона-инструмента, b_j и c – находятся из условии соответствия точек областей.

Также выполнен расчет вязких напряжений на анодной границе. Результаты расчета вязких напряжений представлены на рисунке

Производится расчет траектории движения продуктов реакции в межэлектродном промежутке из области подтравливания под изоляцию. Проведенные расчеты показали, что в указанной области торможения скорость потока мала, и расчет можно выполнить в так называемом акустическом приближении. Продукты реакции моделируется круговыми цилиндрами. Влияние этих продуктов на поток электроли-



та полагается малым. Проведены расчеты траекторий движения частиц различных плотностей и размеров для различных размеров хона-инструмента.

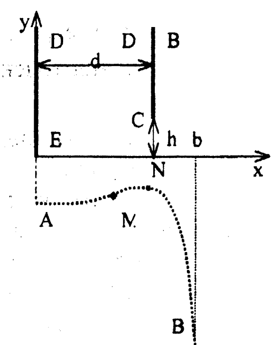
ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов А. Х., Клоков В. В., Филатов Е. И. *Методы расчета электрохимического формообразования.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. – 388 С.

В. В. Клоков (Казань)

УПРАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫМ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИМ ФОРМООБРАЗОВАНИЕМ АНОДОМ-ЭКРАНОМ

Решена задача о расчете стационарного электрохимического формообразования катодом-пластинкой при наличии в межэлектродном зазоре пластинок-экранов. Экран выполнен из материала, поляризованного также как анод-деталь, но нерастворимого при режиме обработки детали. Положение экрана оказывает влияние на характер стационарного электрического поля в зазоре и на распределение плотности тока на анодной поверхности. На рисунке представлена схема правой симметричной части зазора. В полученном решении толщиной пластины-экрана, также как и электрода-



инструмента пренебрегаем. Расположение параллельно катоду-инструменту d и смещение h относительно кромки катода рассматриваются как управляющие формообразованием параметры. Последние определяются из условия достижения экстремальных свойств поверхности обработки (требуемой протяженности пологого участка границы детали, минимального припуска на обработку при прошивочных операциях, заданных размеров резца и радиуса скругления при заточке инструмента др.). Математическое решение задачи осуществлено методом годографа [1]. Параметрические уравнения анодной границы имеют вид

$$x = -\frac{\delta^2 - 1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\frac{1}{t}} \frac{du}{1 - \delta \sin u},$$

$$y = y_A + \frac{2\,\delta^2 - 1}{\pi^2 (1 + 2\delta\mu)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin\frac{1}{t}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{u} \frac{(1 - \delta \sin s)(1 - \mu \sin s)\,ds}{(\sin s)^3} \frac{du}{1 - \delta \sin u.}, \quad t \geq 1.$$

где y_A – торцевой зазор, выражающийся через математические параметры δ, μ

Представлены примеры решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов А. Х., Клоков В. В., Филатов Е. И. *Методы расчета электрохимического формообразования.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990 . – 388 С.

А. И. Егоров

ДВИЖЕНИЕ В ОБОБЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В докладе рассматриваются движения дифференциально-геометрических пространств с точки зрения групп движения максимальных порядков, ими допускаемых. Справедливы утверждения:

Теорема А. *Если обобщенное риманово пространство* $B_n = (M_n, \text{ g}, \Omega)$ *допускает группу движения* $G_r(r > (n-1)(n-2)/2 + 5)$, *то тензор кручения метрики* $\Omega_{jk} = b_{(jk)}$ *равен нулю и само пространство* $B_n(x)$ *необходимо является обыч-*

ным римановым пространством V_n *первой* $\left(r = n(n+1)/2\right)$ *или второй* $\left(r = n(n-1)/2 + \varepsilon,\ \ \varepsilon = 0,1\right)$ *лакунарности. Максимальный порядок групп движения* G_r *в пространствах* $B_n(\Omega \neq 0)$ *равен в точности* $r = (n-1)(n-2)/2 + 5$.

Теорема Б. *Для того, чтобы обобщенное финслерово пространство* $B_{n,y} = (M_n,\ g,\ \Omega)$ *допускало группу движения* G_r *порядка* r, *необходимо:*

А) если $r = (n-1)(n-2)/2 + 5$, *то* $\Omega_{jk} = y_j \Omega_k - y_k \Omega_j$, $y_k = g_{kp} y^p$, $y^p = dx^p/dt$.

Б) если $r = n(n-1)/2 + 2$, *то* $\Omega = 0$.

Максимальный порядок групп движения G_r *в пространствах* $B_n(\Omega \neq 0)$ *равен в точности* $r = n(n-1)/2 + 2$, *и эти пространства необходимо* Ω*-сводимые. Если пространства* $B_{n,y}$ *не являются* Ω*-сводимыми, то максимальный порядок групп движения* G_r *равен в точности* $r = (n-1)(n-2)/2 + 5$.

Теорема В. *Если финслерово пространство* $F_{n,y}$ *допускает группу движения* G_r *порядка* $r = (n-1)(n-2)/2 + 5$, *то тензор* G^i_{jk} *необходимо имеет следующую структуру:*

$$C^i_{jk} = \delta^i_j A_k + \delta^i_k A_j + y^i B_{jk} + E^i D_{jk},$$

где $B_{jk} = B_{kj}$, $D_{jk} = D_{kj}$, $A_k(x, \lambda y) = \lambda^{-1} A_k(x, y)$, $B_{jk}(x, \lambda y) = \lambda^{-2} B_{jk}(x, y)$