

Werk

Verlag: Izd. Kazanskogo universiteta; Совет казанского университета

Ort: Kazan

Kollektion: RusDML; Mathematica

Werk Id: PPN509860087_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN509860087_0017 | LOG_0004

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ТРУДЫ
СЕМИНАРА
ПО
краевым
задачам

издательство
казанского
университета

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Выпуск 17



ИЗДАТЕЛЬСТВО КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1980

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского Совета
Казанского университета

Научные редакторы:

*проф. Аксентьев Л. А., проф. Ильинский Н. Б., проф. Нужин М. Т.,
проф. Гумашев Г. Г., проф. Чибрикова Л. И.*

Сборник содержит исследования краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения в механике жидкости.

Изучаются краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа и для аналитических функций; последние применяются при исследовании некоторых классов интегральных уравнений.

Изучаются вопросы корректности и однолиственности решений обратных и обратных смешанных краевых задач. Дано обобщение некоторых признаков однолистной разрешимости обратных краевых задач на функции многих комплексных переменных и на многолистное изменение многоугольных областей.

В импульсно-гидродинамической постановке решаются краевые задачи взрыва на выброс. Разрабатываются аналитический и аналогово-аналитический методы решения задач теории фильтрации. Изучаются задачи течения тяжелой жидкости, электрохимической размерной обработки металлов, определения температурного поля при бурении плавлением.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся перечисленными вопросами.



Т 20203—063
44—80 1702050000
075(02)—80

УДК 517.54

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МНОГОЛИСТНОСТИ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Л. А. Аксентьев

В статье исследуются геометрические вопросы, которые относятся к простым интегральным представлениям.

В § 1 дается дополнение к решению обратной задачи для интегралов Кристоффеля—Шварца [1, с. 179—181; 2]. Рассматриваются случаи, когда показатели степеней у подынтегральной функции меняются на всей действительной оси. Приводятся условия, при выполнении которых возмущающая функция $\varphi(z)$ не увеличивает количество листов в образе.

В § 2 доказываются факты о многолистности интегралов типа Коши.

В § 3 анализируется решение смешанной краевой задачи. Показывается, что класс решений задачи Гильберта с разрывными коэффициентами, выпуклых в n направлениях, совпадает с соответствующим представлением из статьи [3] Д. В. Прохорова и Б. Н. Рахманова.

§ 1. Многолистное изменение многоугольных областей

Рассмотрим интеграл Кристоффеля—Шварца при $\text{Im } z \geq 0$

$$f(z) = \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz, \quad (1)$$

для которого $-\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \infty$, в предположении, что α_k могут быть любыми действительными числами.

Так как функция $f(z) - f(a_k)$ в полукрестности точки a_k ведет себя как $(z - a_k)^{\alpha_k}$, то $\arg [f(z) - f(a_k)]$ будет меняться в интервале длины $\pi\alpha_k$, значит, окрестность точки $f(a_k)$ будет покрыта значениями функции $f(z)$ многократно:

$(1 + \lfloor |\alpha_k|/2 \rfloor)$ раз, если $|\alpha_k| \neq 2p$, и $|\alpha_k|/2$ раз, если $|\alpha_k| = 2p$, причем $\lfloor \cdot \rfloor$ — знак целой части. Поэтому при условии, что $2(p-1) < |\alpha_k| \leq 2p$, функция $f(z)$ будет не менее чем p -листной в смысле следующего определения.

Под m -листной будем понимать такую область на многолистной римановой поверхности, накрывающей плоскость, что $q \leq m$ точек этой области имеют совпадающие проекции на плоскость, причем число m достигается хотя бы на некоторых подобластях. Функции, имеющие в качестве образов m -листные области, будем называть m -листными.

При $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2$ получим с помощью таких же рассуждений, как в [1, с. 179—181], что функция (1) будет отображать полуплоскость $\text{Im } z > 0$ на однолиственный или многолиственный n -угольник. Если же $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n - 2$, то получится $(n+1)$ -угольник с дополнительной угловой точкой $f(\infty)$ и с углом $\alpha(\infty)\pi$ при ней, $\alpha(\infty) = n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 1$. Значит, порядок листности в полукрестности бесконечно удаленной точки будет $\lfloor |\alpha(\infty)|/2 \rfloor + 1$, если $|\alpha(\infty)| \neq 2q$, и $|\alpha(\infty)|/2$, если $|\alpha(\infty)| = 2q$.

Если допустить, что в образе верхней полуплоскости появляется точка ветвления, то представление (1) для функции изменится и запишется в виде

$$f(z) = \int_{z_0}^z (z-a)^{p-1} (z-\bar{a})^{p-1} \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{\alpha_k-1} dz, \quad (1')$$

причем точка a , $\text{Im } a > 0$, является прообразом точки ветвления. Докажем справедливость такого утверждения.

Если $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2p$, то в качестве образа полуплоскости $\text{Im } z > 0$ при отображении функцией (1') окажется m -лиственный n -угольник с $m \geq \max \{ |p|, \lfloor |\alpha_k|/2 \rfloor + \delta(|\alpha_k|/2) \}$, где

$$\delta(\beta) = \{0, \beta = q, q - \text{целое число}; 1, \beta \neq q\}. \quad (2)$$

Если же $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq n - 2p$, то образом будет $(n+1)$ -угольник с количеством листов

$$m \geq \max \{ |p|, \lfloor |\alpha_k|/2 \rfloor + \delta(|\alpha_k|/2),$$

$$\lfloor |\alpha(\infty)|/2 \rfloor + \delta(|\alpha(\infty)|/2) \}, \quad \alpha(\infty) = n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2p + 1.$$

Доказательство проводится с учетом рассуждений относительно функции (1) и на основе поведения функции (1') в окрестности ∞ :

$$f(z) \sim z^\omega, \quad \omega = -\left(n - \sum_{k=1}^n \alpha_k - 2p + 1\right).$$

В окрестности прообраза точки ветвления функция (1') имеет представление $(z - a)^p$, и поэтому порядок листности в окрестности этой точки будет равен $|p|$ при целом p .

Дополнительно отметим, что если p будет нецелым, то в полуплоскости нужно провести разрез по отрезку $[a, \operatorname{Re} a]$, и порядок листности функции (1') будет равен $[|p|] + \delta(|p|)$, где $\delta(\beta)$ имеет вид (2).

Функция (1') отображит полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внешность многоугольника при $p = -1$. Можно описать геометрически, как постепенно меняются образы при изменении p от положительных значений к отрицательным. Именно, образы переходят от внутренности многоугольника к его внешности. При этом важную роль играют образы берегов разреза $[a, \operatorname{Re} a]$, когда p меняется от 0 до -1 .

Аналогичные факты получаются для комплексных показателей $\alpha_k + i\beta_k$. При таком обобщении нужно в оценках порядка листности понимать под $\alpha_k = \operatorname{Re}(\alpha_k + i\beta_k)$ вещественную часть соответствующего показателя. В самом деле, $(z - a_k)^{\alpha_k + i\beta_k} = \exp[(\alpha_k + i\beta_k) \ln(z - a_k)] = \exp[\alpha_k \ln|z - a_k| - \beta_k \arg(z - a_k)] \exp[i\alpha_k \arg(z - a_k) + i\beta_k \ln|z - a_k|]$ и при $\beta_k \neq 0$

$$\text{изм } \arg(z - a_k) = \pi \Rightarrow \text{изм } \arg(z - a_k)^{\alpha_k + i\beta_k} = \alpha_k \pi.$$

Большим разнообразием в образах отличается аналог представления (1')

$$f'(z) = z^{p-1} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} \quad (3)$$

в круге $|z| < 1$, причем $|a_k| = 1$, $k = 1, \overline{n}$. Проведя вычисления, как в [2], получим, что производная угла $\gamma(\theta)$ (составленного касательной в точке $f(e^{i\theta})$ к границе образа круга с положительным направлением действительной оси) выражается по формуле

$$\gamma'(\theta) = 2^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k - (n - 2p) \right\}, \quad \theta \neq \varphi_k = \arg a_k.$$

Это значит, что стороны многоугольника, в который переходит граничная окружность, будут прямолинейными, если $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2p$. Действительно, в этом случае $\gamma'(\theta) = 0$ на дугах окружности между соседними точками a_k . В случае $\sum_{k=1}^n \alpha_k > n - 2p$ получим $\gamma'(\theta) > 0$, что приводит к выпуклости

дуг, соединяющих угловые точки. При $\sum_{k=1}^n \alpha_k < n - 2p$ имеем $\gamma'(\theta) < 0$, а это обеспечивает вогнутость дуг, соединяющих угловые точки. Детальное обоснование фактов для функции (3) провел Э. А. Илюхин в дипломной работе 1976 года.

Вопросы, связанные с построением и оценками функционалов для функций вида (3) с условием $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2p$, исследовал Гудман [4].

Теперь рассмотрим $F(z)$ — „возмущение“ той функции $f(z)$, производная которой определена формулой (3), т. е.

$$F(z) = \int z^{p-1} \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\alpha_k - 1} e^{\varphi(z)} dz. \quad (4)$$

Обозначим $\varphi(e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$ и $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k - (n - 2p)\}/2 = \frac{p}{\alpha}$.

Докажем утверждение, в котором используется понятие каркасного многоугольника, введенное в [2].

Теорема 1. *Функция (4) будет p -листной, если выполняется одно из следующих условий:*

$$1^\circ. 0 < \alpha_k < 1, k = \overline{1, n}, \text{ и } v'(\theta) \geq -\frac{p}{\alpha}, \frac{p}{\alpha} > 0;$$

$$2^\circ. \text{ Каркасный многоугольник с вершинами в точках } F(a_k), k = \overline{1, n}, \text{ является } p\text{-листным и } v'(\theta) \leq -\frac{p}{\alpha}, \frac{p}{\alpha} < 0.$$

Доказательство. 1° . Для угла, составленного касательной к образу окружности $|z|=1$ при отображении функцией $F(z)$ с положительным направлением действительной оси, получим из (4)

$$\Gamma(\theta) = \pi/2 + p\theta + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{2} [\theta - \varphi_k - \pi \operatorname{sign}(\theta - \varphi_k)] + v(\theta),$$

где $\varphi_k = \arg a_k$. Поэтому при $\theta \neq \varphi_k$ будем иметь

$$\Gamma'(\theta) = p + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k - 1}{2} + v'(\theta) = \alpha + v'(\theta), \quad (5)$$

откуда в силу условия теоремы $\Gamma'(\theta) \geq 0$. Это означает выпуклость каждой дуги на границе с концами в точках $F(a_k), F(a_{k+1})$. Так как $0 < \alpha_k < 1$, то многоугольник, который получается из круга при отображении функцией $F(z)$, будет выпуклым и p -листным с учетом поведения около $0: F(z) \sim z^p$. Этот образ можно представить возникающим с помощью „раздувания“ прямолинейного многоугольника с вершинами в $F(a_k), k = \overline{1, n}$.

2°. На основании (5) получим, что $\Gamma'(\theta) \leq 0$ при $\theta \neq \varphi_k$, т. е. дуги, соединяющие угловые точки, будут вогнутыми. При условии p -листности прямолинейного каркасного многоугольника искомый образ получится „втягиванием“ сторон внутрь многоугольника. При этом количество точек, имеющих одну проекцию, может только уменьшиться. Однако, в силу поведения $F(z) \sim z^p$ в окрестности начала координат, малая окрестность образа начала координат будет покрыта точно p раз. Это и дает возможность утверждать p -листность функции $F(z)$. Теорема 1 доказана.

Пункт 1° теоремы 1 можно распространить на случай $0 < \alpha_k < 2$ с требованием почти выпуклости p -листного каркасного многоугольника с вершинами $F(a_k), k = \overline{1, n}$, как в [2, с. 34]. При p -листном и почти выпуклом каркасном многоугольнике можно построить такие ограничения на $\int_{\theta_1}^{\theta_2} v'(\theta) d\theta$ и на $\int_{-\pi}^{\pi} |v'(\theta)| d\theta$, при которых функция $F(z)$ будет отображать круг на p -листную и почти выпуклую многоугольную область. Эти ограничения имеют своим аналогом неравенства 3; 4 из теоремы 3 статьи [5].

Для случая $p=1$ теорема 1 переходит в теорему 1 из [2]. Легко формулируется и доказывается соответствующее обобщение для теоремы 2 из [2], когда рассматривается образ внешности круга.

Аналог теоремы 1 для функции

$$F(z) = \int (z-a)^{p-1} (z-\bar{a})^{p-1} \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{\alpha_k-1} e^{\varphi(z)} dz -$$

„возмущения“ функции (1') в полуплоскости $\text{Im } z > 0$, формулируется и доказывается просто. Так неравенства в условиях 1° и 2° заменятся на $v'(x) \geq 0, v'(x) \leq 0$ соответственно, где $v(x) = \lim_{z \rightarrow x} \text{Im } \varphi(z)$.

Для формулировки теоремы 1 в применении к обратным краевым задачам [6] нужно учесть соображения § 4 из [2] и обеспечить ограничения для $v(\theta)$ с помощью условий, наложенных на функцию $u(\theta) = \operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta})$.

§ 2. Многолистность интеграла типа Коши

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (6)$$

будет n -листной в $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$, $a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$,

если для каждого $k=1, n$ неотрицательная вещественная функция $y_k(\tau)$ не убывает на интервале (a_k, c_k) и не возрастает на интервале (c_k, b_k) действительной оси, $a_k \leq c_k \leq b_k$, причем $y_k(a_k) \neq 0$, $y_k(b_k) \neq 0$.

Доказательство. Приближим каждую функцию $y_k(\tau)$ функциями $y_k(l, \tau)$, $l=1, 2, \dots$, удовлетворяющими условию Гельдера, которые будут строго возрастать на интервале (a_k, c_k) и строго убывать на интервале (c_k, b_k) , и дополнительно потребуем, чтобы $y_k(l, a_k) = y_k(l, b_k) = 0$.

Применим к функции

$$f_l(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(l, \tau) d\tau}{\tau - z}$$

формулу Сохоцкого на каждом интервале (a_k, b_k) . Тогда будем иметь

$$\lim_{z \rightarrow x \pm} f_l(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{\infty} \frac{y_k(l, \tau) d\tau}{\tau - x} \pm iy_k(l, x). \quad (7)$$

Функция

$$\omega_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{b_m} \frac{y_m(l, \tau) d\tau}{\tau - x} \pm iy_m(l, x), \quad a_m \leq x \leq b_m,$$

входящая в правую часть (7), определяет простой контур на основании теоремы 7 из [7]. Простота контура сохранится, если добавить

$$\tilde{w}_m(x) = \lim_{z \rightarrow x^\pm} f_l(z) - w_m(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1, k \neq m}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(l, \tau) d\tau}{\tau - x},$$

так как

$$\tilde{w}'_m(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1, k \neq m}^n \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(l, \tau) d\tau}{(\tau - x)^2} \geq 0$$

при $x \in (a_m, b_m)$. Отсюда получаем, что образом двубережного отрезка $[a_m, b_m]$ будет простой контур, состоящий из двух дуг с монотонными ординатами и с концевыми точками $f_l(c_m^+)$, $f_l(c_m^-)$.

В целом образом внешности разрезов $[a_k, b_k]$ при отображении функцией $f_l(z)$ будет совокупность однолистных областей (овалов), зацепленных с помощью точек ветвления. Порядок листности этой области может меняться в таком промежутке: $2 \leq p \leq n$.

Однако в случае, когда на образе каждого отрезка $[a_k, b_k]$ появляется ∞ с двух сторон, то $p = n$. Так получится для функции $f(z) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(z)$, потому что в концевых точках каждого отрезка функция $f(z)$ будет иметь логарифмическую особенность [8, с. 67]: ведь по условию теоремы $y_k(a_k)$ и $y_k(b_k)$ в нуль не обращаются. Теорема доказана.

При $n=1$ имеем однолистную функцию $f(z)$ в виде интеграла типа Коши по одному отрезку оси $\text{Im } z = 0$, [7]. В этом случае любая прямая, параллельная действительной оси, будет пересекать границу образа не более чем в двух точках или будет иметь с границей не более двух общих отрезков. Аналогичную достижимость границы образа по семейству прямых, параллельных вещественной оси, получим при любом n , только прямые нужно брать на каждом листе соответствующей римановой поверхности.

Частными случаями функции (6) являются

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\pi} \ln \frac{a_k - z}{b_k - z} \quad (8)$$

при постоянных $y_k(\tau) \equiv c_k$ и

$$f(z) = \frac{c}{\pi} \ln \prod_{k=1}^n \frac{a_k - z}{b_k - z} \quad (9)$$

при $c_k = c$, $k = 1, n$.

Функция (8) будет отображать внешность разрезов на n -листную область, каждый лист которой представляет собой полосу $-c_k < \text{Im } w < c_k$. В случае функции (9) все полосы, расположенные в образе, являются одинаковыми. Функция (9) применялась ранее Н. В. Говоровым и С. П. Грушевским [9] в решении интересной экстремальной задачи.

Отметим, что если потребовать только положительности функции $y_k(\tau)$ на (a_k, b_k) , то функция (6) будет иметь порядок листности $2 \leq p \leq n$ (при $n \geq 2$) при дополнительных условиях

$$d \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(\tau) d\tau}{\tau - x} \geq 0, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Можно проследить движение образов при последовательной „стыковке“ отрезков $[a_k, b_k]$, когда количество интервалов интегрирования уменьшается. При $n = 1$ условие

$$d \int_a^b \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - x} \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

гарантирует однолиственность функции $f(z)$, т. е. однолиственность решения задачи

$$f^+(x) - f^-(x) = i2y(x), \quad x \in (a, b). \quad (10)$$

Контур с уравнением

$$w = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - x} \pm iy(x)$$

может существенно отличаться от графика функции $\zeta = x \pm iy(x)$, причем из простоты этого графика не следует простота контура и наоборот. Совпадение контура и графика случится лишь для функции $y(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}$, решающей уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - x} = x.$$

Вообще, геометрическое истолкование решений краевых задач вида (10) — довольно интересная проблема. Получение решений этих задач разными путями приводит к любопытным геометрическим эффектам. Отметим их в следующем параграфе.

§ 3. Геометрический анализ решения задачи Гильберта с разрывными коэффициентами

Докажем вначале один факт о решении смешанной краевой задачи в полуплоскости.

Теорема 3. *Функция*

$$f(z) = \frac{R(z)}{\pi i} \sum_{k=1}^n \left(\int_{a_k}^{b_k} \frac{\alpha_k d\tau}{R(\tau)(\tau-z)} + i \int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{\beta_k d\tau}{R(\tau)(\tau-z)} \right), \quad f(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (11)$$

$a_{n+1} = a_1$, $\infty \in (b_n, a_1)$, α_k и β_k — постоянные, причем ветвь

$$R(z) = \prod_{k=1}^n \sqrt{(z - a_k)(z - b_k)} \quad (12)$$

выбирается из условия $R(x) > 0$ при $x > b_n$, будет однолистной в полуплоскости $\text{Im } z > 0$, если выполняется одно из требований:

1) последовательность вещественных постоянных $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ возрастает при $1 \leq k \leq q$ и убывает при $q \leq k \leq n$,

2) последовательность вещественных постоянных $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ возрастает при $1 \leq k \leq r$ и убывает при $r \leq k \leq n$.

Однолистность функции $f(z)$ в замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ получится при условии, что $f'(z) \neq 0$ на оси x (за исключением точек $\{a_k, b_k\}_{k=1}^n$).

Доказательство. Формула (11) дает решение смешанной краевой задачи в полуплоскости с постоянными крайевыми значениями. При этом предполагается ограниченность функции $f(z)$ в точках стыка крайевых значений и должно выполняться $n - 1$ условий разрешимости [8, с. 473]. Эти условия разрешимости приводят к поведению $f(z) = O\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности ∞ , записанному в (11).

Предположим вначале, что нет нулей производной функции $f(z)$ на отрезках, которые высекаются из вещественной оси точками $\{a_k, b_k\}_{k=1}^n$, и рассмотрим случай 1). Полуосям $(-\infty, a_1)$, (b_q, ∞) , на которых расположены отрезки $[a_{q+1}, b_{q+1}]$, ..., $[a_n, b_n]$ с заданными на них убывающими значениями α_k , $k = q + 1, n$, будет соответствовать ломаная ступенчатая линия, выпуклая в направлении мнимой оси, т. е. простая линия (без пересечений). В точках прообраза этой линии будет выполняться неравенство $d \text{Re } f(x) \leq 0$.

На оставшейся части вещественной оси справедливо неравенство $d \operatorname{Re} f(x) \geq 0$. Поэтому образом оставшейся части будет тоже простая, кривая, выпуклая в направлении мнимой оси, — также ступенчатая ломаная линия. Достаточно высокая Π -образная кривая, концы которой будут совпадать с точками стыка этих ломаных, будет удовлетворять условиям теоремы 1 из [7], которая утверждает однолиственность $f(z)$ в замкнутой полуплоскости на основании принципа аргумента.

Нули производной будут переходить в концы разрезов, и эти разрезы не дадут возможность утверждать однолиственность $f(z)$ в замкнутой полуплоскости.

Случай 2) сводится к случаю 1) умножением $f(z)$ на i . Теорема доказана полностью.

Из-за наличия разрезов в образе однолиственность функции $f(z)$ оказывается неустойчивой. Поэтому замена постоянных α_k и β_k на функции, мало отличающиеся от этих постоянных, приводит, вообще говоря, к потере однолиственности. Условия однолиственности функции (11) в случае, когда α_k и β_k зависят от x , удается найти лишь при $n = 1, 2$ [5].

Итак, функция (11) при выполнении $n - 1$ условий, связывающих параметры α_k и β_k , $k = 1, n$, отображает полуплоскость на $2n$ -угольник с углами $\pi/2$ и $3\pi/2$, причем возможны внутренние прямолинейные разрезы в этом многоугольнике. Дадим доказательство существования разрезов сопоставлением с формулой Кристоффеля—Шварца.

Пусть задан $2n$ -угольник, на который отображается полуплоскость с $2n$ фиксированными прообразами вершин на вещественной оси. Формула Кристоффеля—Шварца определит отображающую функцию лишь при выполнении $2n - 3$ условий разрешимости, так как на основании теоремы Римана можно фиксировать только 3 прообраза вершин. Полученная разность в числе условий разрешимости по формуле Кристоффеля—Шварца и по формуле (11)

$$2n - 3 - (n - 1) = n - 2$$

вызовет противоречие, если считать, что в многоугольнике нет разрезов. На самом же деле разрезы должны появиться и число их будет $\leq n - 2$. При $n = 1$ и 2 разрезы не появятся и соответствующая однолиственность будет устойчивой (ср. с [5, с. 43]).

Если $n - 1$ условий разрешимости, связанных с формулой (11), не выполняются совсем или выполняются частично, то функция $f(z)$ может потерять однолиственность в ∞ .

Отметим, что убедиться в однолистности функции (11) можно путем решения смешанной краевой задачи для $f'(z)$ с нулевыми граничными условиями, т. е. с помощью нового интегрального представления, эквивалентного (11).

Рассмотрим теперь случаи, когда функция $R(z)$ в (12) заменяется на

$$\left[\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k) \right]^{-1/2} \text{ и } \left[\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k)^{-1} \right]^{1/2}.$$

При $R(z) = \left[\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k) \right]^{-1/2}$ все точки стыка граничных условий будут переходить в ∞ . Поэтому функция вида (11) окажется неоднолистной. Действительно, каждая прямая $\operatorname{Re} f = \alpha_k$ или $\operatorname{Im} f = \beta_k$ определяет полуплоскость, которая будет принадлежать образу. Поскольку две прямые $\operatorname{Re} f = \alpha_k$ и $\operatorname{Re} f = \alpha_m$ определяют две неперекрывающиеся или две перекрывающиеся полуплоскости, то порядок листности от этих двух полуплоскостей увеличивается на 1 или на 2. Значит, общий порядок листности будет меняться в промежутке $[n, 2n]$: При $n = 1$ порядок листности равен 2.

Наконец, если $R(z) = \left[\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k)^{-1} \right]^{1/2}$, то функция

вида (11) переводит точки a_k в конечные точки, а точки b_k — в ∞ . Простой геометрический анализ показывает, что функция $f(z)$ будет однолистной при $n = 1$ и может сохранить однолистность при $n \leq 4$. Может случиться, что образы четырех полуокрестностей точек b_k будут лежать на одном и том же или на четырех различных листах. Поэтому порядок листности всего образа меняется в промежутке $[[n/4] + \delta(n/4), n]$, причем $\delta(\beta)$ имеет вид (2).

Из полученных фактов, касающихся функции $f(z)$ с тремя вариантами функций $R(z)$, видно, что геометрическая картина в случае решения одной и той же краевой задачи в разных классах существенно меняется.

Рассмотренная смешанная краевая задача является частным случаем задачи Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами. Факты об однолистной разрешимости такой задачи оказываются более содержательными. Именно, справедлива

Теорема 4. Любое решение задачи Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\operatorname{Im} [e^{-i\tau_k} f(e^{i\theta})] = c_k(\theta), \quad \theta \in (\varphi_k, \varphi_{k+1}), \quad k = \overline{1, n}, \quad (13)$$

$0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$, в классе функций, ограниченных в точках стыка или имеющих там особенности с порядками $\leq (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi$, будет однолиственным в замкнутом круге $\{z = re^{i\theta}, r \leq 1\}$, если $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < 2\pi$, а $c_k(\theta)$ представляют собой неубывающие функции.

Доказательство. Для решения задачи (13), ограниченного в точках стыка, теорема по существу доказана в [5] (теорема 1).

Дадим доказательство теоремы 4 для функций, имеющих в точках стыка особенности. Это доказательство даст новый способ обоснования однолиственности $f(z)$ и в случае ограниченности $f(z)$ в точках стыка.

Именно, докажем эквивалентность этих двух классов решений задачи Гильберта классу $B_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ однолистных функций, который введен Д. В. Прохоровым и Б. Н. Рахмановым [3, с. 45]. Для удобства введем переобозначенный класс

$$B(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \equiv B_2(\gamma_n/\pi - 1, \gamma_{n-1}/\pi - 1, \dots, \gamma_1/\pi - 1),$$

$0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < 2\pi$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad z \in E = \{z : |z| < 1\},$$

обладающих следующим свойством. Для любой точки $w_0 \notin e^{i\beta} f(E)$ по крайней мере один из лучей, образующих с положительным направлением вещественной оси углы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, не пересекает область $e^{i\beta} f(E)$ при некоторой действительной постоянной β , не зависящей от w_0 . Класс $B(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ имеет структурную формулу [3, с. 46]

$$f(z) = \int_0^z \prod_{k=1}^n (1 - \zeta e^{-i\varphi_k})^{-\lambda_k} p(\zeta) d\zeta, \quad (14)$$

где $\lambda_k = (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi$, $k = \overline{1, n}$, $\gamma_0 = \gamma_n - 2\pi$, функция $p(z)$, $p(0) = 1$ регулярна в E и удовлетворяет там условию $\operatorname{Re}(e^{i\sigma} p(z)) > 0$ с вещественной постоянной σ .

Доказательство эквивалентности (13) \Leftrightarrow (14) (при дополнительных условиях на γ_k и $c_k(\theta)$; $k = \overline{1, n}$) проведем в предположении, что функция $p(z)$ является непрерывной в замкнутом круге, за исключением $e^{i\varphi_k}$, $k = \overline{1, n}$. Это будет соответствовать непрерывной дифференцируемости функции $c_k(\theta)$ в интервале $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$, $k = \overline{1, n}$.

(14) \Rightarrow (13). С учетом обозначения $a_m(\varepsilon) = \exp i(\varphi_m + \varepsilon)$, ε — малое положительное число, получим

$$f(z) - f(a_m(\varepsilon)) = \int_{a_m(\varepsilon)}^z \prod_{k=1}^n (1 - \zeta e^{-i\varphi_k})^{-\lambda_k} p(\zeta) d\zeta.$$

Отсюда, используя формулу $1 - \exp(i\gamma) = 2|\sin(\gamma/2)| \times \exp[i(\gamma - \pi \operatorname{sign} \gamma)/2]$ при $-2\pi < \gamma < 2\pi$ и интегрируя вдоль окружности $z = e^{i\theta}$, будем иметь

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) - f(a_m(\varepsilon)) &= \int_{\varphi_m + \varepsilon}^{\theta} \prod_{k=1}^n \left\{ 2 \left| \sin \frac{\theta - \varphi_k}{2} \right| \times \right. \\ &\times \left. \exp i[\theta - \varphi_k - \pi \operatorname{sign}(\theta - \varphi_k)]/2 \right\}^{-\lambda_k} p(e^{i\theta}) e^{i\theta} i d\theta = \\ &= e^{i\alpha} \int_{\varphi_m + \varepsilon}^{\theta} \prod_{k=1}^n \left| 2 \sin \frac{\theta - \varphi_k}{2} \right|^{-\lambda_k} \exp \left[i \frac{\pi \lambda_k}{2} \operatorname{sign}(\theta - \varphi_k) \right] p(e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

поскольку $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 2$ и постоянная величина $\sum_{k=1}^n \lambda_k \varphi_k / 2$ обозначена через α . На интервале $(\varphi_m + \varepsilon, \varphi_{m+1} - \varepsilon)$ запишем

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) - f(a_m(\varepsilon)) &= \exp i \left[\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \right) \pi/2 + \alpha - \sigma \right] \times \\ &\times \int_{\varphi_m + \varepsilon}^{\theta} \prod_{k=1}^n \left| 2 \sin \frac{\theta - \varphi_k}{2} \right|^{-\lambda_k} p(e^{i\theta}) e^{i\sigma} d\theta, \\ \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k - \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \right) / 2 &= \gamma_m - (\gamma_0 + \gamma_n) / 2. \end{aligned}$$

Теперь, обозначив $-(\gamma_0 + \gamma_n)/2 + \alpha - \sigma - \pi/2 = -\beta$, получим

$$\begin{aligned} -ie^{-i\gamma_m} e^{i\beta} f(e^{i\theta}) &= -ie^{-i\gamma_m} e^{i\beta} f(a_m(\varepsilon)) + \\ &+ \int_{\varphi_m + \varepsilon}^{\theta} \prod_{k=1}^n \left| 2 \sin \frac{\theta - \varphi_k}{2} \right|^{-\lambda_k} e^{i\sigma} p(e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$\operatorname{Re} [-ie^{-i\gamma_m} e^{i\beta} f(e^{i\theta})] = \operatorname{Im} [e^{-i\gamma_m} e^{i\beta} f(e^{i\theta})]$$

ведет себя как зависимость

$$\operatorname{Re} [-ie^{-i\tau_m} e^{i\beta} f(a_m(\varepsilon))] + \int_{\varphi_m + \varepsilon}^{\theta} \prod_{k=1}^n \left| 2 \sin \frac{\theta - \varphi_k}{2} \right|^{-\lambda_k} \operatorname{Re} [e^{i\sigma} p(e^{i\theta})] d\theta, \quad (15)$$

которая является дифференцируемой и неубывающей функцией в интервале $(\varphi_m + \varepsilon, \varphi_{m+1} - \varepsilon)$ и, значит, в интервале $(\varphi_m, \varphi_{m+1})$, так как ε можно устремить к нулю.

(13) \Rightarrow (14). Доказательство начинается с сопоставления условия (13) для функции $e^{i\beta} f(z)$ с выражением (15). После дифференцирования полученного равенства в интервале $(\varphi_m, \varphi_{m+1})$ имеем

$$\operatorname{Re} [e^{i\sigma} p(e^{i\theta})] = c'_m(\theta) \prod_{k=1}^n \left| 2 \sin \frac{\theta - \varphi_k}{2} \right|^{\lambda_k}. \quad (16)$$

Если взять совокупность всех интервалов $(\varphi_m, \varphi_{m+1})$, то условия вида (16) зададут граничное значение вещественной части функции $e^{i\sigma} p(z)$, которая определится единственным образом при нормировке $p(0) = 1$ и при задании поведения $p(z)$ в окрестности точек $e^{i\varphi_k}$ — ограниченности или наличия особенности порядка ≤ 1 .

Дальнейшие выкладки будут повторять то, что сделано выше формулы (15) снизу вверх.

К доказанной эквивалентности можно прийти также с помощью дифференцирования по θ краевого условия (13) и решения задачи Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами для функции $zf'(z)$

$$\operatorname{Im} [e^{-i\tau_k} izf'(z)] \Big|_{z=e^{i\theta}} = c'_k(\theta).$$

Итак, доказана эквивалентность решений задачи (13) и представления (14) со сглаженными функциями $c_k(\theta)$ и $p(e^{i\theta})$. Совершая предельный переход от сглаженных функций к исходным, получим эквивалентность в общем случае.

Собственно, для обоснования теоремы 4 достаточно доказать эквивалентность (13) \Leftrightarrow (14) для сглаженных функций. В таком случае мы получим, что решение $f_l(z)$ задачи (13) в случае гладких функций $c_k(l, \theta)$ будет однолиственным в E . Так как из сходимости $\lim_{l \rightarrow \infty} c_k(l, \theta) = c_k(\theta)$ почти всюду будет следовать равномерная сходимость $f(z) = \lim_{l \rightarrow \infty} f_l(z)$ в любом замкнутом круге $|z| \leq R < 1$ (ср. с доказательством теоремы 7 из [7]), то функция $f(z)$ будет тоже однолистной в открытом единичном круге.

В дополнение к доказанной теореме отметим следующее. Если при $c_k(\varphi_{k+1}) > c_k(\varphi_k)$ функции $c_k(\theta)$ имеют участки убывания, количество которых равно m_k , то порядок листности образа круга с помощью функции $f(z)$ с условиями (13)

оценивается так: $1 \leq p \leq 1 + \sum_{k=1}^n m_k$.

По-видимому, порядок листности $f(z)$ можно оценить и через величину p_0 в неравенстве $|\arg p(z) - \delta| \leq p_0 > \pi/2$, $|z| < 1$. При этом функция $p(z)$ берется из представления вида (14), являющегося возмущенным интегралом Кристоффеля—Шварца и эквивалентного решению задачи Гильберта (13) в случае немонотонных $c_k(\theta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1973.
2. Аксентьев Л. А. Однолистное изменение многоугольных областей.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 13. Изд-во Казанского ун-та, 1976, с. 30—39.
3. Прохоров Д. В., Рахманов Б. Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций.—Математические заметки, т. 19, № 1, 1976, с. 41—48.
4. Goodman A. W. On the Schwarz—Christoffel transformation and p -valent functions.—Transactions of Amer. Math. Soc., v. 68, № 2, 1950, p. 204—223.
5. Аксентьев Л. А., Губайдуллина Н. А. Применение каркасных многоугольников для однолистной разрешимости краевых задач.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 13. Изд-во Казанского ун-та, 1976, с. 40—48.
6. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1965.
7. Аксентьев Л. А. Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности, I.—„Изв. вузов. Математика“, 1968, № 12, с. 3—15.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977.
9. Говоров Н. В., Грушевский С. П. О некоторых метрических свойствах граничных значений функций, аналитических в полуплоскости.—ДАН СССР, т. 242, № 1, 1978, с. 21—24.

Доложено на семинаре 27 января 1978 г

УДК 532.546.001.57

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

А. А. Винниченко

Метод электрогидродинамической аналогии (ЭГДА) был применен к решению обратных краевых задач (ОКЗ) теории фильтрации в работе [1]. Авторы этой работы физическую область течения заменяли электрической моделью из сплошной среды (электролитическая ванна), а искомый участок границы находили путем последовательного изменения подвижного участка границы, пока снимаемая с него фильтрационная характеристика не совпадала с требуемой. Визуальное наблюдение на экране электронно-индикаторной приставки заданной и снимаемой характеристик позволяло упростить процесс этого подбора.

В то же время построение аналитического решения ОКЗ [2] сводится, как правило, к решению обычных (прямых) краевых задач во вспомогательных плоскостях для областей, определяемых исходными граничными условиями. При этом часто возникают трудности как в построении аналитического решения, так и в его численной реализации, что требует высококвалифицированного математического труда.

Учитывая сказанное, в настоящей работе, в отличие от [1], предлагается искать решение ОКЗ моделированием не в физической плоскости, где область неизвестна, а во вспомогательной, где область полностью определяется исходными условиями задачи [2, 3]. Такой подход при решении многих задач исключает какой-либо подбор, при этом моделирование можно проводить как на сплошных, так и на дискретных средах (сеточная модель). Первые исследования в этом направлении были выполнены совместно с М. Г. Пашковым.

Ниже решен ряд ОКЗ теории фильтрации предлагаемым методом. Для оценки погрешности приведены сравнения с теоретическими решениями.

Во всех задачах фильтрация считается плоской, установившейся, подчиняющейся закону Дарси; грунт предполагается однородным, изотропным.

§ 1. Обратная задача фильтрации из канала в дренирующий слой

Аналитический метод решения названной задачи предложен в работе [4].

Постановка задачи. Требуется построить профиль канала и найти форму депрессионных кривых по заданной вдоль ширины канала функции расхода

$$\psi = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (1.1)$$

где $f(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая функция с непрерывно дифференцируемой обратной функцией

$$x = f^{-1}(\psi) \quad (0 \leq \psi \leq Q). \quad (1.2)$$

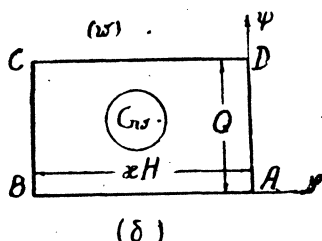
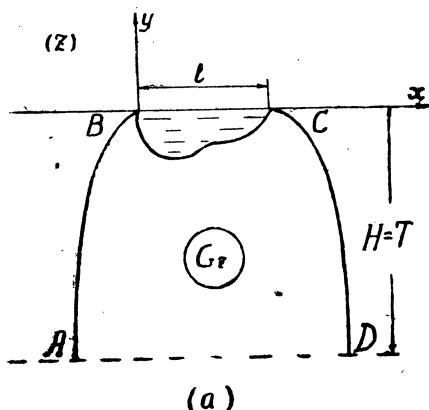


Рис. 1.

Область фильтрации G_z (рис. 1 а) на глубине T подстилается дренирующим основанием. Согласно (1.1) задаются фильтрационный расход Q и ширина канала l , причем $\psi(l) = Q$. Напор $H = T$ и коэффициент фильтрации κ считаются известными.

Фильтрация жидкости в физической области описывается системой уравнений: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, где $\varphi = -\kappa h$ — потенциал скорости, ψ — функция тока. На линии депрессии выполняется известное условие $\varphi + \kappa y = \text{const}$ (инфильтрация или испарение отсутствуют).

Введем в рассмотрение аналитическую функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, действительная и мнимая части которой на границе G_z удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi &= -x(y + H) \text{ на } AB \text{ и } CD; \\ \varphi &= -xH \quad \text{на } BC; \quad \varphi = 0 \text{ на } AD; \\ \psi &= 0 \quad \text{на } AB; \quad \psi = Q \text{ на } CD. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда в плоскости комплексного потенциала $w(z)$ области G_w , согласно (1.3), будет соответствовать прямоугольник G_w со сторонами xH и Q (рис. 1 б). В G_w функция $z(w) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial x}{\partial \psi}. \quad (1.4)$$

Гармоническая функция $y(\varphi, \psi)$ ищется в G_w по следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} y &= -(\varphi + xH)/x \text{ на } AB \text{ и } CD; \\ y &= -T \quad \text{на } AD; \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial x}{\partial \psi} = F(\psi) \text{ на } BC, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $F(\psi)$ — известная функция, определяемая по (1.2) и (1.4).

Решив смешанную краевую задачу для $y(\varphi, \psi)$, на участке BC определим $y(\psi)$, а зная из (1.2) $x(\psi)$, получим параметрические уравнения профиля канала

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(\psi), \\ y &= f_0(\psi), \quad (0 \leq \psi \leq Q). \end{aligned}$$

Определив на CD и AB $\frac{\partial y}{\partial \psi} = F_1(\varphi)$ и используя первое равенство системы (1.4), найдем

$$x(\varphi) = \int_{-xH}^0 \frac{\partial y}{\partial \psi} d\varphi + x_0, \quad (1.6)$$

где $x_0 = 0$ для участка AB и $x_0 = l$ для CD . Соотношение (1.6) и первое из (1.5) являются параметрическими уравнениями депрессионных кривых.

Переходя к моделированию изложенной задачи для функции $y(\varphi, \psi)$, определим размеры модели выбором масштабных коэффициентов для φ и ψ

$$\frac{\psi}{\psi_{\text{мод.}}} = \frac{\varphi}{\varphi_{\text{мод.}}} = M. \quad (1.7)$$

Вводится константа подобия

$$c = \frac{u}{y} = -\frac{u_{\max}}{T}, \quad (1.8)$$

где u — электрический потенциал модели. Тогда согласно (1.8) на границах AB , AD и CD прямоугольника G_w требуется выполнение краевого условия 1-го рода

$$\begin{aligned} u &= -cT && \text{на } AD, \\ u &= -c(\varphi/x + H) && \text{на } AB \text{ и } CD. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Задание краевого условия 2-го рода (1.5) на участке BC осуществляется дискретным образом. Для этого граница BC разбивается на N участков. С учетом соотношения для плотности тока через контур [5] $\delta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n}$, в середину каждого участка подается ток

$$I^{(k)} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^{(k)} \Delta\psi^{(k)} = -\frac{c}{\rho} F^{(k)}(\psi) \Delta\psi^{(k)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.10)$$

где ρ — удельное сопротивление электропроводной среды. $F^{(k)}(\psi)$ — значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ в середине участка $\Delta\psi^{(k)}$.

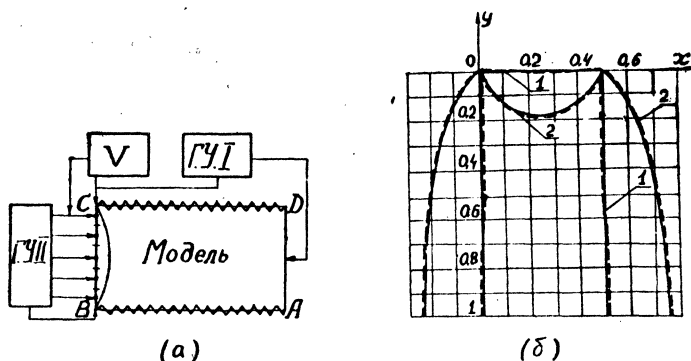


Рис. 2.

Блок-схема аналогового решения представлена на рис. 2а. Для реализации линейного изменения электрического потенциала в G_w вдоль CD и AB устанавливаются низкоомные линейные шины. С помощью блока граничных условий 1-го рода на AB , CD и AD согласно (1.9) подаются соответствующие потенциалы. Граничное условие 2-го рода осуществляется путем задания токов, определяемых по (1.10), через контакты гребенки, установленной на BC . Задав на участках

границы модели области G_w все краевые условия, определим $u(\varphi, \psi)$ или, используя (1.8), $u(\varphi, \psi)$. Тогда, сняв значения потенциалов вдоль BC и определив тем самым $u(\psi)$ с учетом (1.2), построим участок границы G_2 , соответствующий профилю канала. Определив обычным способом [6, 7] распределение производной $\frac{\partial u}{\partial \psi} = F_2(\varphi)$ вдоль AB и CD и приняв во внимание (1.8) и (1.6), найдем $x(\varphi)$, а зная (1.5), — форму депрессионных кривых.

На рис. 2 б изображены профили каналов и соответствующие им депрессионные кривые, которые получены в результате моделирования (штриховые линии) и теоретически (сплошные линии) при условиях:

1. $H = T = 1, l = 0,5, \kappa = 1, Q = 0,5$ и $\psi = x$;
2. $H = T = 1, l = 0,5, \kappa = 1, Q = 1$ и $\psi = 2x$.

Относительная погрешность моделирования не превысила 2%.

§ 2. Построение водопроницаемого подземного контура по заданным эпюрам напоров и расходов

Аналитический метод решения этой задачи дан в работе [8].

Постановка задачи. Требуется построить водопроницаемый подземный контур бетонной плотины по заданным вдоль ширины флютбета эпюрам напоров

$$h = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1)$$

и расходов

$$\psi = g_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — монотонно убывающие функции. Обратные функции $f_1^{-1}(h)$ и $g_1^{-1}(\psi)$ удовлетворяют условию Гельдера, причем

$$f_1(0) = H, \quad f_1(l) = 0, \quad g_1(0) = 0, \quad g_1(l) = -Q_0,$$

где Q_0 — количество жидкости, проникающее через бетонное тело в нижний бьеф. Физическая область течения изображена на рис. 3 а. Задаются действующий напор H , ширина плотины l , общий фильтрационный расход Q . Глубина залегания водоупора T и коэффициент фильтрации κ считаются известными.

Пусть на границе верхнего бьефа AB пьезометрический напор $h = H$; на границе нижнего бьефа $h = 0$; на водоупоре $\psi = -Q$. Тогда области фильтрации G_2 , согласно (2.1) и (2.2), в плоскости w будет соответствовать область G_w (рис. 3 б). Функция $u(\varphi, \psi)$ в G_w удовлетворяет уравнению Лапласа и следующим граничным условиям:

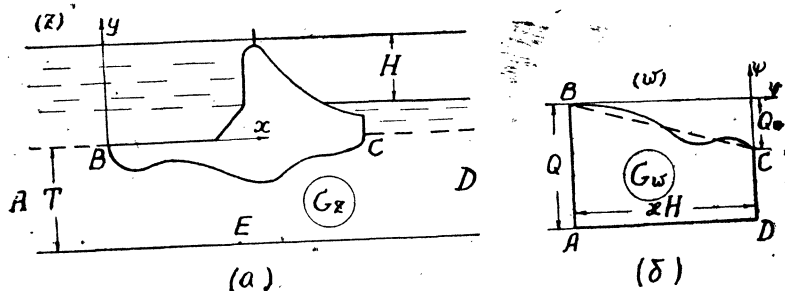


Рис. 3.

$$y = 0 \text{ на } AB; \quad y = 0 \text{ на } CD; \quad y = -T \text{ на } AD;$$

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dx/ds}{d\varphi/d\varphi} = F_3(\varphi) \text{ на } BC, \quad (2.3)$$

где $F_3(\varphi)$ — известная функция, s и n — дуговая координата и нормаль к кривой.

Решив в G_w краевую задачу для $y(\varphi, \psi)$, определим на BC $y = F_4(\varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq xH$, $0 \leq \psi \leq -Q_0$). Знание функции, обратной (2.1), и $F_4(\varphi)$ позволяет построить форму подземного контура.

Переход к моделированию осуществляется введением масштабных коэффициентов для φ и ψ (1.7) и коэффициент подобия (1.8). С учетом (2.3) на границе области G_w требуется выполнение краевых условий 1-го рода:

$$u = 0 \text{ на } AB; \quad u = 0 \text{ на } CD; \quad u = -cT \text{ на } AD, \quad (2.4)$$

а на границе BC краевое условие 2-го рода (2.3), которое осуществляется дискретным образом, путем задания токов

$$I^{(k)} = -\frac{c}{\rho} \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right)^{(k)} \Delta s^{(k)} = -\frac{c}{\rho} F_3^{(k)}(\varphi) \Delta s^{(k)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (2.5)$$

Задав краевые условия (2.4) и (2.5) определим $u(\varphi, \psi)$, а, следовательно, $y = F_4(\varphi)$ на BC , которое совместно с функцией, обратной (2.1), дает параметрическое уравнение искомого контура.

Сравнение с аналитическим решением при $h = \frac{H}{\pi} \arccos(x-1)$,

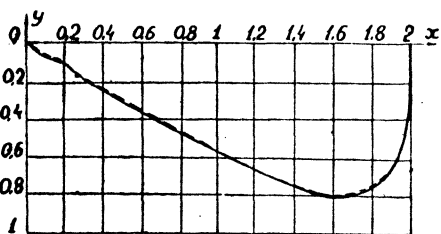


Рис. 4.

$$\psi = Q_0 \left[\frac{1}{\pi} \arccos(x-1) - 1 \right], \quad 0 \leq x \leq 2, \quad l=2, \quad \kappa=H=1,$$

$T=2,5$, $Q_0=0,3$, $Q=0,6$ показало, что общая относительная погрешность моделирования не превышает 2% (рис. 4).

§ 3. Построение подземного контура по эпюре противодавления

Постановка задачи. Требуется построить подземный контур по заданному вдоль него распределению давления

$$p = f_2(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (3.1)$$

когда область фильтрации рис. (3а) подстилается слоем большой проницаемости. Задача в такой постановке была рассмотрена в работе [9]. Функция $f_2(x)$ — непрерывная с непрерывно дифференцируемой обратной функцией $x = f_2^{-1}(p)$. Задаются действующий напор H , ширина флюتبета l , величина напора в дренирующем слое h_d . Коэффициент фильтрации κ и глубина залегания сильно дренирующего слоя T известны.

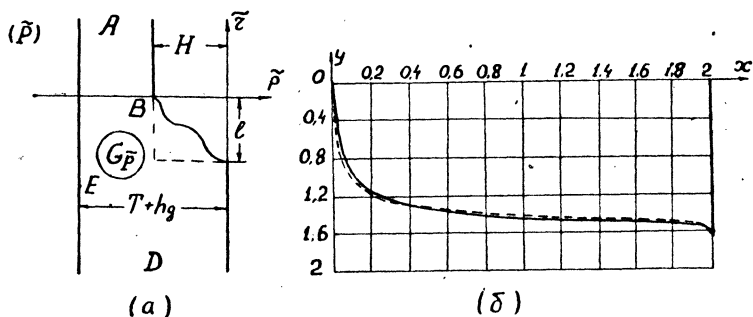


Рис. 5.

Введем в рассмотрение функцию Н. Е. Жуковского в виде $P = \gamma w/x - i\gamma z$. Положив удельный вес жидкости $\gamma = 1$ и обозначив $\tilde{w} = w/x$, получим

$$\tilde{P} = \tilde{w} - iz = (\tilde{\varphi} + y) + i(\tilde{\psi} - x) = \tilde{p} + i\tilde{r}, \quad (3.2)$$

где $\tilde{p} = -p$. На границе области G_2 для функций \tilde{P} выполняются условия: $\tilde{p} = -H$ на AB , $\tilde{p} = -(T + h_d)$ на AD , $\tilde{p} = 0$ на CD , $\tilde{r} = 0$ в точке B и $\tilde{r} = -l$ в точке C . Согласно (3.1) и (3.2) $\tilde{r} = F_5(\tilde{p})$ на BC . Поэтому физической области течения G_2 в плоскости функции \tilde{P} будет соответствовать полностью определенная область $G_{\tilde{P}}$ (рис. 5 а), где гармоническая

функция $y(\tilde{p}, \tilde{r})$ удовлетворяет следующим граничным условиям: $y = -T$ на AD , $y = 0$ на AB и CD . На образе подземного контура известна нормальная производная

$$\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{dx}{d\tilde{p}} / \frac{ds}{d\tilde{p}} = F_6(\tilde{p}).$$

Решение краевой задачи для $y(\tilde{p}, \tilde{r})$ осуществляется аналогично отысканию $y(\varphi, \psi)$ § 2. Определив значение $y(\tilde{p})$ вдоль BC , с учетом (3.1) найдем искомый контур.

Для определения расхода жидкости Q из верхнего бьефа в нижний находим такую точку E на CD , в которой $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{r}} = 0$.

Взяв производную от $\tilde{r} = \tilde{\psi} - x$ по \tilde{r} , получим, что в точке E $\frac{\partial y}{\partial \tilde{p}} = -\frac{\partial x}{\partial \tilde{r}} = 1$. Интегрируя $\frac{\partial y}{\partial \tilde{r}}$ вдоль $\tilde{r} = \tilde{r}_B$ до $\tilde{r} = \tilde{r}_E$, определим ψ в точке E , а тем самым и расход.

Сравнение с теоретическим решением при $l = T = H = 2$; $h = 0,5$ дало максимальную относительную погрешность 1,5% (рис. 5 б). Расход $Q = 0,05$.

Следует отметить, что аналитическое решение задач, рассмотренных в § 2 и 3, было получено только для зависимостей $\psi(\varphi)$ и $\tilde{r}(\tilde{p})$, показанных штриховыми линиями на рис. 3 а и 5 а соответственно. Для предлагаемого метода вид этих функций существенной роли не играет. Кроме того, автоматизация задания граничных условий и снятие искомого распределений потенциалов модели приводят к незначительной затрате времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б., Корнильцев Ю. А., Пашков М. Г. Прибор ЭГДА для решения прямых и обратных задач теории фильтрации.—Аналоговые методы и средства решения краевых задач. Киев, „Наукова думка“, 1964.
2. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Изд-во Казанского ун-та, 1965.
3. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Изд-во Казанского ун-та, 1963.
4. Ильинский Н. Б., Хайруллин З. Э. Некоторые обратные задачи фильтрации из канала.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 13. Изд-во Казанского ун-та, 1976.
5. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959.

6. Фильчаков П. Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями. Т. 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1960.

7. Козлов Э. С., Сергеев Н. П., Николаев Н. С. Автоматизация процессов решения краевых задач с помощью сеточных АЦВМ. М., "Энергия", 1974.

8. Ильинский Н. Б. Обратная задача напорной фильтрации в неоднородном анизотропном грунте под водопроницаемым контуром.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 5. Изд-во Казанского ун-та, 1968.

9. Глущенко А. А. Об одном методе решения обратных задач теории фильтрации.— Прикладная механика. Т. 1. Вып. 10. Киев, "Наукова думка", 1965.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.

УДК 517.544

К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО КОНТУРА

Ф. Н. Гарифьянов

1. Рассмотрим гомотопное семейство простых разомкнутых гладких кривых l_λ , заполняющих на плоскости криволинейный угол D , с концами в точках $z=0$ и $z=\infty$. Пусть кривая l_λ задана уравнением $y=f(x, \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Кривые l_0 и $l_{2\pi}$, соответствующие значениям $\lambda=0$ и $\lambda=2\pi$, являются границами угла D .

Понимая, как обычно, под порядком функции $w=F(z)$, аналитической внутри угла D и непрерывной на его границе, неотрицательную величину

$$\rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_F(r)}{\ln r}, \quad M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|, \quad (1)$$

назовем индикатором функции $F(z)$ функцию

$$h(\lambda) = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |F(z)|}{[S(z)]^\rho}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi, \quad (2)$$

где [через $S(z)$ обозначена длина части кривой l_λ , соединяющей начало координат с точкой z .

Всюду в дальнейшем будем считать, что существует непрерывная монотонно возрастающая функция

$$\tilde{\lambda} = \varphi(\lambda) = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \arg z. \quad (3)$$

Изучим некоторые свойства индикатора $h(\lambda)$. Прежде всего найдем аналог свойства тригонометрической выпуклости индикатора целой функции. Заметим, что в силу нашего определения (2) индикатор функции $E(z) = \exp[(a-bi)z^p]$ имеет вид

$$H(\lambda) = c(\lambda) (a \cos \tilde{\rho}\lambda + b \sin \tilde{\rho}\lambda), \quad (4)$$

где функция

$$c(\lambda) = \begin{cases} \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} c(z, \lambda), & a \cos \tilde{\rho}\lambda + b \sin \tilde{\rho}\lambda > 0, \\ \underline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} c(z, \lambda), & a \cos \tilde{\rho}\lambda + b \sin \tilde{\rho}\lambda < 0, \end{cases}$$

$$c(z, \lambda) = |z|^\rho / [S(z)]^\rho.$$

В дальнейшем нам придется различать следующие случаи:

$$I. \quad \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} c(z, \lambda) = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} c(z, \lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi.$$

Пусть индикатор $h(\lambda)$ принимает на кривых l_{λ_1} и l_{λ_2} значения $h(\lambda_1)$ и $h(\lambda_2)$ соответственно. Построим функцию $E(z) = \exp[(a - bi)z^\rho]$, индикатор которой $H(\lambda)$ на кривых l_{λ_1} и l_{λ_2} принимает значения $h(\lambda_1) + \delta$ и $h(\lambda_2) + \delta$. Для этого достаточно найти a и b из системы

$$\begin{cases} c(\lambda_1) (a \cos \tilde{\rho}\lambda_1 + b \sin \tilde{\rho}\lambda_1) = h(\lambda_1) + \delta, \\ c(\lambda_2) (a \cos \tilde{\rho}\lambda_2 + b \sin \tilde{\rho}\lambda_2) = h(\lambda_2) + \delta. \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) будет разрешимой, если ее определитель $\Delta = c(\lambda_1) c(\lambda_2) \sin \rho(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1) \neq 0$. Выберем λ_1 и λ_2 на столько близкими друг к другу, чтобы выполнялось неравенство $\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 < \pi/2\rho$. Имеет место

Лемма 1. Если выполнены условия (3) и I, то функция $c(\lambda)$ нигде не обращается в нуль.

В самом деле, пусть сначала λ выбрано так, что $\text{tg} \tilde{\lambda}$ есть конечное число. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/\varphi(x) = 1$, то условимся в дальнейшем писать, что $f(x) \sim \varphi(x)$. Тогда в силу (3)

$|z| \sim x \sqrt{1 + \text{tg}^2 \tilde{\lambda}}$, и по теореме о среднем для определенного интеграла

$$S(z) = \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(t, \lambda)} dt = x \sqrt{1 + f'^2(a_x, \lambda)}, \quad a_x \in [0, x].$$

Отсюда вытекает, что если $c(\lambda_0) = 0$, то в силу условия I выполнено равенство $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x, \lambda_0) = \infty$. Но тогда в силу правила Лопиталья

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x, \lambda_0)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x, \lambda_0) = \infty,$$

а это противоречит нашему предположению, что существует $\operatorname{tg} \tilde{\lambda}_0$. Если же λ выбрано так, что $\operatorname{tg} \tilde{\lambda}$ не существует, то можно получить аналогичный результат на основании оценки $|z| \sim f(x, \lambda)$, $z \in l_\lambda$.

В силу разрешимости системы (5) можно, считая $\delta > 0$, построить функцию $\Phi(z) = F(z)/E(z)$, индикатор которой представим в виде $\tilde{H}(\lambda) = h(\lambda) - H(\lambda)$, $\tilde{H}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$. Лучи $\tilde{\lambda}_1 - \epsilon$ и $\tilde{\lambda}_2 + \epsilon$ при любом $\epsilon > 0$ не могут пересекать кривые l_{λ_1} и l_{λ_2} в бесконечном множестве точек, имеющем точку сгущения на бесконечности, поскольку выполнено (3). Следовательно, справедливы условия теоремы Фрагмена—Линделёфа [1, с. 357], откуда $\tilde{H}(\lambda) = h(\lambda) - H(\lambda) \leq 0$, $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $\delta \rightarrow 0$, по аналогии со случаем целых функций [2, с. 74] получим неравенство

$$k(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{c(\lambda)} \leq \frac{k(\lambda_1) \sin \rho(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}) + k(\lambda_2) \sin \rho(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_1)}{\sin \rho(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)}. \quad (6)$$

Отсюда также, как в теории целых функций, можно сделать вывод о непрерывности функций $k(\lambda)$.

II. Пусть не выполнено условие I, но функция $F(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |F(z)|}{[S(z)]^p} = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |F(z)|}{[S(z)]^p},$$

$0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Тогда индикатор функции $\Phi(z) = F(z)/E(z)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\lambda) &= \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |F(z)| - \ln |E(z)|}{[S(z)]^p} = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |F(z)|}{[S(z)]^p} + \\ &+ \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \left\{ -\frac{\ln |E(z)|}{[S(z)]^p} \right\} = h(\lambda) - \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |E(z)|}{[S(z)]^p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку в данном случае

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |E(z)|}{[S(z)]^p} = \tilde{c}(\lambda) (a \cos \tilde{\rho}\lambda + b \sin \tilde{\rho}\lambda),$$

где функция

$$\tilde{c}(\lambda) = \begin{cases} \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} c(z, \lambda), & a \cos \tilde{\lambda} + b \sin \tilde{\lambda} < 0, \\ \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} c(z, \lambda), & a \cos \tilde{\lambda} + b \sin \tilde{\lambda} > 0, \end{cases}$$

то величины a и b , входящие в выражение функции $E(z)$, найдем из системы

$$\begin{cases} \tilde{c}(\lambda_1) [a \cos \tilde{\rho}\lambda_1 + b \sin \tilde{\rho}\lambda_1] = h(\lambda_1) + \delta, \\ \tilde{c}(\lambda_2) [a \cos \tilde{\rho}\lambda_2 + b \sin \tilde{\rho}\lambda_2] = h(\lambda_2) + \delta. \end{cases} \quad (8)$$

Считая, что $\tilde{c}(\lambda_1)\tilde{c}(\lambda_2) \neq 0$, и рассуждая аналогично случаю I, можно показать, что система (8) будет разрешимой и получить для функции $\tilde{k}(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{\tilde{c}(\lambda)}$ все результаты, полученные

для функции $k(\lambda)$.

III. Пусть не выполнены ни I ни II. Тогда вместо равенств (7) будем иметь неравенство

$$\tilde{H}(\lambda) \leq h(\lambda) - \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} \frac{\ln |E(z)|}{[S(z)]^\rho}.$$

Величины a и b найдем из системы (8). Тогда $\tilde{H}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$, и, применяя теорему Фрагмена—Линделёфа, получим неравенство

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} \frac{\ln |F(z)| - \ln |E(z)|}{[S(z)]^\rho} \leq 0, \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2,$$

откуда

$$\overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} \frac{\ln |F(z)|}{[S(z)]^\rho} \leq \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} \frac{\ln |E(z)|}{[S(z)]^\rho}$$

или, переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta \rightarrow 0$,

$$k(\lambda) \leq \frac{\tilde{k}(\lambda_1) \sin \rho(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}) + \tilde{k}(\lambda_2) \sin \rho(\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_1)}{\sin \rho(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1)}. \quad (9)$$

Рассуждая аналогично тому, как это сделано в теории целых функций, можно показать, что если функции $c_1(\lambda) = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in I_\lambda}} c(z, \lambda)$

и $c_2(\lambda) = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} c(z, \lambda)$ непрерывны, то из (9) можно сделать

вывод о том, что нули индикатора являются его точками непрерывности.

Функция $h^*(\lambda) = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |F(z)|}{|z|^\rho}$ непрерывна, поскольку инди-

катор функции $E(z)$

$$H^*(\lambda) = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |E(z)|}{|z|^\rho} = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |E(z)|}{|z|^\rho} = a \cos \tilde{\rho\lambda} + b \sin \tilde{\rho\lambda}$$

можно взять в качестве аналога тригонометрического индикатора и, считая $c(\lambda) \equiv 1$, провести те же рассуждения, что и в случае I. В силу неравенств $h(\lambda) \leq h^*(\lambda)$, если $h(\lambda) > 0$, $h(\lambda) \geq h^*(\lambda)$, если $h(\lambda) < 0$, можно сделать вывод об ограниченности индикатора $h(\lambda)$ в смысле определения (2).

2. Применим некоторые из полученных результатов к решению краевой задачи Римана. Пусть теперь семейство кривых $y = f(x, \lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, заполняет всю комплексную плоскость, при этом параметр λ выбран так, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \arg z = \lambda. \quad (10)$$

Через D обозначим плоскость с разрезом по кривой $l_0 \equiv l_{2\pi}$. Кроме того, предполагаем выполненным неравенство

$$|f'_x(x, \lambda)| < A(\lambda), \quad x > x_0. \quad (11)$$

Будем искать аналитическую в D функцию $\Phi(z)$, граничные значения которой в каждой точке $t \in l_0$ связаны соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \quad t \in l_0, \quad t \neq 0, \infty, \quad (12)$$

где $G(t)$ — заданная функция, не обращающаяся в нуль в конечных точках, причем одна из фиксированных ветвей ее логарифма удовлетворяет условию

$$\ln G(t) = 2\pi i G_*(t) t^\rho, \quad (13)$$

где $G_*(t)$ непрерывна по Гёльдеру всюду на l_0 , включая концы, при этом $G_*(\infty) = R_0 e^{i\theta_0} \neq 0$, число $\rho > 0$ — нецелое. Функция $\Phi(z)$ должна иметь заданный индикатор $h(\lambda)$ относительно порядка ρ .

При решении задачи прежде всего отметим, что функция $\chi(z) = \exp \Gamma(z)$, где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} \left(\frac{z - z_0}{\tau - z_0} \right)^{|\rho|+1} d\tau, \quad z_0 \notin l_0,$$

удовлетворяет условию (12), если под $\ln G(t)$ понимать ветвь (13). Как показано в статье [3], для всех z , не лежащих на l_0 , справедливо представление

$$\Gamma(z) = - \frac{\pi e^{i\pi(|\rho|-\rho)} G_*(\infty)}{\sin \pi(\rho - [\rho])} z^\rho + \Phi_0(z),$$

при этом поведение $\Gamma(z)$ вблизи $z = \infty$ целиком определяется первым слагаемым. На основании этой формулы

$$\begin{aligned} h_x(\lambda) &= \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |\chi(z)|}{[S(z)]^\rho} = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\operatorname{Re} \Gamma(z)}{[S(z)]^\rho} = \\ &= \frac{(-1)^{|\rho|+1} c(\lambda) \pi R_0}{\sin \pi(\rho - [\rho])} \cos \rho(\lambda - \pi + \theta_0/\rho), \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi, \end{aligned}$$

причем она дает значения индикатора $h_x(\lambda)$ в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = 2\pi$ в силу непрерывности функции $h(\lambda)$. Возьмем в качестве канонической функции однородной задачи (12) функцию

$$\chi_1(z) = \chi(z)/P(z),$$

где $P(z)$ — некоторая целая функция порядка ρ , представляющая собой каноническое произведение правильно распределенного множества $A = \{a_m\}$ точек a_m , не лежащих на кривой l_0 . Обозначим индикатор функции $P(z)$ через $H(\lambda)$.

Лемма 2. Если множество нулей целой функции правильно распределено, то она почти регулярного роста на каждой кривой l_λ .

Прежде всего отметим, что в общем случае функция не будет почти регулярного роста на всем множестве кривых. Обозначим через x_1 и x_2 абсциссы точек пересечения кривой l_λ с некоторым особым кружком из множества E^0 нулевой линейной плотности [2, с. 120]. Тогда в силу (11)

$$S(z) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f_t'^2(t, \lambda)} dt \leq \sqrt{1 + A^2} (x_2 - x_1) \leq 2\sqrt{1 + A^2} r,$$

где r — радиус особого кружка. Но сумма радиусов особых кружков, лежащих внутри круга $|z| < R$, равна $R\delta(R)$, где $\lim_{R \rightarrow \infty} \delta(R) = 0$. Это означает, что множество точек кривой, лежащее внутри особых кружков, является множеством нулевой относительной меры, что завершает доказательство.

Воспользовавшись теоремой Бернштейна для функций, аналитических в прямолинейных углах [2, с. 99], легко доказать ее аналог для индикатора $h(\lambda)$ определенного формулой (2). Имеет место

Теорема. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и порядка ρ внутри некоторого криволинейного угла. Произвольным числом $\varepsilon > 0$, $0 < \omega < 1$ и фиксированной кривой l_λ , лежащей внутри этого угла, отвечает число $\delta > 0$ и последовательность интервалов $S(z_n) < S < S(z_n)(1 + \delta)$, $z_n \in l_\lambda$, $z_n \rightarrow \infty$, на каждом из которых неравенство

$$\ln |f(z)| > [h(\lambda) - \varepsilon] S^\rho$$

выполняется всюду, кроме, быть может, некоторого множества, мера которого не превосходит $\omega \delta S(z_n)$.

В силу этой теоремы и леммы 2 индикатор произведения двух функций на кривой l_λ равен сумме индикаторов, если одна из функций почти регулярного роста на этой кривой [2, с. 207].

Назовем функцию $h(\lambda)$ индикатором единственности правильного множества N с индикатором $H_N(\lambda)$, если не существует неравной тождественной нулю целой функции $F(z)$ порядка ρ , с индикатором $h(\lambda)$, обращающейся в нуль во всех точках множества N [2, с. 249].

Лемма 3. Функция $h(\lambda)$ не является индикатором единственности тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$h(\lambda) = H_N(\lambda) + h_1(\lambda), \quad (14)$$

где функция $\frac{h(\lambda)}{c(\lambda)}$ — тригонометрически выпуклая, с периодом 2π .

Доказательство. Пусть $\Phi_N(z)$ — каноническая функция правильно распределенного множества N . Тогда функция $\psi(z) = F(z)/\Phi_N(z)$ — целая и ее индикатор $h_\psi(\lambda) = h(\lambda) - H_N(\lambda)$ в силу леммы 2. Наоборот, если выполнено (14), то построим целую функцию $\psi(z)$, индикатор которой на луче λ принимает значение $h_1(\lambda)/c(\lambda)$, причем множество нулей функции $\psi(z)$

можно считать правильно распределенным [2, с. 124]. Тогда функция $\Phi(z) = \Phi_N(z)\psi(z)$ обращается в нуль на множестве N и имеет индикатор $h(\lambda) = H_N(\lambda) + h_1(\lambda)$, поскольку на основании почти регулярности роста

$$h_\psi(\lambda) = \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{\ln |\psi(z)|}{[S(z)]^\rho} = \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in l_\lambda}} \frac{|z|^\rho h_1(\lambda)}{c(\lambda) [S(z)]^\rho} = h_1(\lambda).$$

В силу леммы 3 дальнейшее исследование задачи можно провести по схеме, предложенной Л. И. Чибриковой в статье [3]. Так как всюду на l_0 граничные значения $\chi_1^+(t)$ и $\chi_1^-(t)$ непрерывны и отличны от нуля, то краевое условие (12) можно записать в таком виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_1^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_1^-(t)}, \quad t \in l_0.$$

Отсюда следует, что функция $\Omega(z) = \Phi(z)/\chi_1(z)$ является целой и так как множество ее нулей правильно распределено, то она имеет вполне регулярный рост на каждой кривой l_λ . Тогда индикатор функции $\Phi(z) = \Omega(z)\chi_1(z)$

$$h(\lambda) = H(\lambda) + h_1(\lambda) + h_x(\lambda) - H(\lambda) = h_1(\lambda) + h_x(\lambda).$$

Итогом наших рассуждений будет следующий результат: *однородная задача (12) имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда $\frac{h(\lambda) - h_x(\lambda)}{c(\lambda)}$ есть тригонометрически выпуклая функция с периодом 2π при показателе ρ . При выполнении этого условия общее решение однородной задачи определяется формулой*

$$\Phi(z) = \chi_1(z)\Omega(z) = \chi(z)\Omega_1(z),$$

где $\Omega_1(z)$ есть целая функция порядка ρ с индикатором $h(\lambda) - h_x(\lambda)$.

Автор благодарит профессора Л. И. Чибрикову за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., „Наука“, 1968.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Чибрикова Л. И. Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре. II.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979, с. 185—201.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.

УДК 517.95

О СТРУКТУРНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА

А. В. Глазов, А. В. Костерин

Рассмотрим задачу Гильберта для системы уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(y) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N(y) \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Функции M , N положительны, отграничены от нуля и бесконечности и обладают непрерывными первыми производными. Область Ω , в которой ищется решение уравнений (1), односвязна и ограничена, а кривизна ее границы Γ — непрерывная функция дуги s . На Γ выполняется краевое условие

$$a\varphi - b\psi = f, \quad (2)$$

где $a, b \in C^1(\Gamma)$. Введем функцию $u(x, y)$ соотношениями

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \psi = -\frac{1}{N} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

При этом система (1) сводится к уравнению

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (4)$$

а граничное условие (2) преобразуется к виду

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{N} \frac{\partial u}{\partial y} = f. \quad (5)$$

Далее, будем предполагать, что функции $a(s)$ и $b(s)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a^2 + b^2 \neq 0, \quad an_1 + \frac{bn_2}{N} > 0, \quad (6)$$

где (n_1, n_2) — единичный вектор внешней к Ω нормали. В силу (6) соответствующая однородная краевая задача (4), (5) не может иметь отличного от постоянной решения [1, с. 134]. Таким образом, задача Гильберта (1), (2) эквивалентна задаче о косої производной (4), (5).

Покажем, что приближенное решение последней может быть найдено методом наименьших квадратов [2, с. 453—459] с использованием аппарата R -функций [3]. Для этого сначала сведем задачу (4), (5) к случаю однородных граничных условий. Обычным образом [3, с. 183—189] введем определенные в Ω операторы

$$D = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad T = \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$K = \alpha D + \beta T,$$

где ω — нормализованное до первого порядка уравнение границы Γ ; α и β — определенные в $\bar{\Omega}$ функции, совпадающие на Γ с $\left(-a \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{b}{N} \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$ и $\left(-\frac{b}{N} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a \frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$ соответственно, причем $\alpha \neq 0$ в Ω .

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$v = u - \frac{\omega F}{\alpha},$$

где $F(x, y) \in C^2(\Omega)$, $F|_{\Gamma} = f$, есть решение краевой задачи

$$Lv = -L\left(\frac{\omega F}{\alpha}\right) = g, \quad Kv|_{\Gamma} = 0. \quad (7)$$

Структуру решения задачи (7) [3, с. 204] запишем в виде

$$S(c, \Phi, \Psi) = c + \Phi + \frac{\omega}{K(\omega) + \omega} (\omega \Psi - K\Phi) = c + S_0,$$

где $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ — произвольные функции из $C^2(\bar{\Omega})$. Постоянная c определяется из соотношения

$$\iint_{\Omega} S(x, y) dx dy = (S, 1) = 0, \quad (8)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Для построения приближенного решения задачи (7) можно взять полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и найти их коэффициенты методом наименьших квадратов [2, с. 453—459], то есть из условия минимума квадрата невязки

$$\epsilon = \iint_{\Omega} [LS(c, P, Q) - g]^2 dx dy.$$

Для сходимости метода наименьших квадратов необходимо, чтобы линейное множество $LS(c, P, Q)$, $\forall P, Q$ было всюду плотно в $L_2(\Omega)$, иными словами, необходима L — полнота структуры решения задачи (7).

Теорема. Множество $LS(c, PQ)$, $\forall P, Q$ всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку множество M финитных в Ω функций плотно в $L_2(\Omega)$ [2, с. 44], то достаточно показать, что из равенства $(LS, \xi) = 0$, $\forall P, Q$ следует $\xi = 0$, $\xi \in M$. По третьей формуле Грина [2, с. 69] имеем

$$(LS, \xi) = (S_0, L\xi) = (S_0, \eta) = 0, \forall P, Q.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле $L\xi = \eta$, $\xi|_{\Gamma} = 0$, достаточно показать, что $\eta = 0$.

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\begin{aligned} (S_0, \eta) &= \left(P + \lambda Q + \mu \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial P}{\partial y}, \eta \right) = \\ &= (Q, \lambda\eta) + (P, R\eta) = 0, \forall P, Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega^2}{K(\omega) + \omega}, \quad \mu = \frac{\lambda}{\omega} \left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x} - \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad \nu = \frac{\lambda}{\omega} \left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial y} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial x} \right), \\ R\eta &= \eta - \frac{\partial(\mu\eta)}{\partial x} - \frac{\partial(\nu\eta)}{\partial y}, \end{aligned}$$

Вследствие (9) и теоремы Вейерштрасса о полноте множества многочленов в $C(\bar{\Omega})$ имеем $\eta = 0$.

Доказанная теорема позволяет построить методом наименьших квадратов последовательность приближенных решений (v_n) задачи (7) такую, что $\|Lv_n - g\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. При этом возникает вопрос, сходится ли последовательность (v_n) к v , и если да, то в каком смысле. Положительный ответ на этот вопрос следует из теории общих краевых задач для эллиптических уравнений [4, с. 226, лемма 6.3].

Действительно, в силу (8) в нашем случае имеет место оценка

$$\|v_n - v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \gamma \|Lv_n - g\|_{L_2(\Omega)},$$

$\gamma > 0$ — постоянная.

Соотношения (3) показывают, что соответствующие (v_n) последовательности функций (φ_n) и (ψ_n) сходятся к точному решению задачи (1), (2) по норме пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., „Наука“, 1966.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., „Наука“, 1970.
3. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. Киев, „Наукова думка“, 1974.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, „Наукова думка“, 1965.

Доложено на семинаре 26 января 1979 г.

УДК 532.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О РАСТЕКАНИИ СТРУИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

И. Л. Гуревич

Рассматривается плоская струя тяжелой идеальной нежимаемой жидкости, вытекающая из щели, образованной полуплоскостями BA и $B'A$, на горизонтальную плоскость CC' . Предполагается, что течение симметрично относительно оси y , и известны расход $2Q$, ускорение силы тяжести g , скорость v_0 в точках B, B' , и параметры $\alpha, L = -y(D)$ (рис. 1).

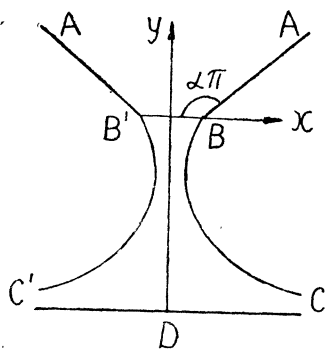


Рис. 1.

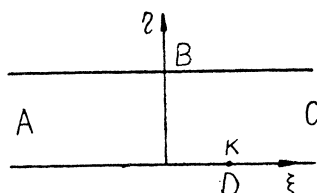


Рис. 2.

Во всех известных работах, где исследуется разрешимость задач со свободными границами бесконечной протяженности, имеющими горизонтальные асимптоты, условием существования решения является то, что местное число Фруда достаточно велико на всей свободной границе (см., например, [1—3]). Мы будем использовать лишь то, что число Фруда достаточно велико в точках C, C' , что равносильно достаточной малости $1/L$.

Пусть правой половине течения соответствует полоса $0 \leq \eta \leq \pi$ в плоскости параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2), а w — комплексный потенциал, $z = x + iy$. Тогда справедливы соотношения

$$w = \frac{Q}{\pi} \zeta, \quad \frac{dw}{dz} = v_0 f(k, \zeta) e^{w(\zeta)},$$

$$f(k, \zeta) = \left(\frac{v(\zeta) - 1}{v(\zeta) + 1} \right)^{\alpha - 1/2} \left(\frac{v(\zeta) - v(k)}{v(\zeta) + v(k)} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $v(\zeta) = (e^\zeta + 1)^{1/2}$. Введем обозначения

$$\tau = \operatorname{Re} w, \quad \mu = \operatorname{Im} w, \quad r(k, \zeta) = -\operatorname{arg} f(k, \zeta),$$

$$\varphi(k, \zeta) = r(k, \zeta) + \mu(k, \zeta), \quad u(\xi) = d\tau(\xi + i\pi)/d\xi \quad (\xi \geq 0), \quad (2)$$

$$p(k, \zeta) = |f(k, \zeta)|^{-1} e^{-\tau(\zeta)}, \quad \varepsilon = Qg\pi^{-1}v_0^{-3}, \quad \lambda = Lv_0\pi Q^{-1}.$$

Используя представление для dw/dz и производя интегрирование по частям в формуле Келдыша — Седова для полосы, получим

$$\tau(\xi + i\pi) = \int_0^\xi u(t) dt, \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u(t) \ln \frac{x(t) - iv(\zeta)}{x(t) + iv(\zeta)} dt,$$

$$\mu(\xi + i\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty u(t) \ln \left| \frac{x(t) + x(\xi)}{x(t) - x(\xi)} \right| dt, \quad (3)$$

где $x(\zeta) = (e^\zeta - 1)^{1/2}$.

Из уравнения Бернулли, равенства $y(D) = -L$ и (1), (2) вытекает

$$u(\xi) = \varepsilon \exp[-3\tau(\xi + i\pi)] \sin \varphi(k, \xi + i\pi), \quad (4)$$

$$\lambda = \int_0^k p(k, \xi) d\xi + \int_0^\pi p(k, i\eta) \cos \varphi(k, i\eta) d\eta. \quad (5)$$

Перепишем (5) в виде

$$k = \left[\int_0^1 p(k, kt) dt \right]^{-1} \left[\lambda - \int_0^\pi p(k, i\eta) \cos \varphi(k, i\eta) d\eta \right]. \quad (6)$$

Соотношения (4), (6) с учетом (1) — (3) образуют систему уравнений относительно функции $u(\xi)$ и параметра k .

Введем следующие обозначения:

$$F(\varphi) = \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi), \quad F(\varphi) = 0 \quad (\varphi < 0, \varphi > \pi), \quad k^* = \max(0, k),$$

$$\Phi(\varphi, \xi, N, C, \beta) = F(\varphi) \quad (0 \leq \xi \leq N), \quad \Phi(\varphi, \xi, N, C, \beta) =$$

$$= \inf [F(\varphi), Ce^{-\beta\xi}] \quad (\xi > N, C > 0, 0 < \beta < 1/2).$$

Заменяем Σ системой Σ^* :

$$u(\xi) = \varepsilon \exp[-3\tau(\xi + i\pi)] \Phi[\varphi(k, \xi + i\pi), \xi, N, C, \beta], \quad (7)$$

$$k = \left[\int_0^1 p(k, kt) dt \right]^{-1} \left[\lambda - \int_0^\pi p(k^*, i\eta) \cos \varphi(k, i\eta) d\eta \right]. \quad (8)$$

Пусть H — пространство функций, кусочно-непрерывных на $[0, +\infty]$, допускающих конечный разрыв при $\xi = N$, R — числовая ось. Пусть T — преобразование $H \times R$ в себя, действующее следующим образом. Берем $\{u_1(\xi), k_1\} \in H \times R$; используя (1) — (3) с $u = u_1$, $k = k_1$, находим u_2 из (7); затем, используя (1) — (3) с $u = u_2$, $k = k_1$, находим k_2 из (8). Оператор T вполне непрерывен в $H \times R$ (это показывается аналогично [1]).

Пусть $\{u(\xi), k\}$ — решение системы Σ^* , $1/2 \leq \alpha \leq 1$. Из (7) и определения Φ , φ вытекает, что $u(\xi) = d\varphi/d\eta \geq 0$, и с помощью принципа максимума легко показать (см. [4]), что $0 \leq \varphi(\xi + i\pi) \leq \pi$ при $\xi \geq 0$. Поэтому $F(\varphi) = \sin \varphi$. Из $u(\xi) \geq 0$ и принципа максимума получаем

$$0 \leq \tau(\zeta) \leq \tau(+\infty). \quad (9)$$

В силу (7), (9)

$$u(\xi) \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Используя (9), получим при $\xi \geq 0$

$$|d(k, \xi)| \leq 4\sqrt{6}, \quad (11)$$

где

$$d(k, \xi) = \int_0^\pi p(k^*, \xi + i\eta) \cos \varphi(k, \xi + i\eta) d\eta.$$

Пусть $\lambda \geq 4\sqrt{6}$; тогда из (8), (11) вытекает $k \geq 0$, то есть $k^* = k$, и уравнение (6) удовлетворяется. Поэтому рассматриваемое решение Σ^* соответствует течению со свободной границей, отличающемуся от исследуемого лишь краевым условием при $\eta = \pi$, $\xi > N$. Пусть этому течению соответствует функция $z^*(\zeta) = x^* + iy^*$. Тогда $y^*(+\infty) = -L$, а из неравенства $\Phi(\varphi) \leq \sin \varphi$ и уравнения (7) вытекает

$$v_0^2 \exp[2\tau(\xi + i\pi)] \leq v_0^2 - 2gy^*(\xi + i\pi),$$

причем при $\xi \leq N$ имеет место строгое равенство. В частности, $v_0^2 \exp[2\tau(+\infty)] \leq v_0^2 + 2gL$, откуда с помощью (9) получим $\exp[\tau(\zeta)] \leq (1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}$. Отсюда и из (8), (11) найдем

$$0 \leq k \leq (\lambda + 4\sqrt{6})(1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}. \quad (12)$$

Неравенства (10), (12) — априорные оценки решений системы Σ^* . Соответствующее Σ^* преобразование T соединим гомотопно с тождественным преобразованием следующим

образом. Сначала заменим ε на $t\varepsilon$ ($0 \leq t \leq 1$), что соответствует переходу к течению невесомой жидкости. Затем заменим $f(k, \zeta)$ на $f^\gamma e^{-i\gamma\pi}$ ($0 \leq \gamma \leq 1$), что соответствует дальнейшему переходу к течению невесомой жидкости, у которого все известные участки границы вертикальны. Легко проверить, что оценки (10), (12) остаются справедливыми для неподвижных точек обоих семейств преобразований, а при $t = \gamma = 0$ имеем тождественное преобразование $u = 0$, $k = \lambda$. Из теоремы Лере — Шаудера вытекает, что система Σ^* имеет хотя бы одно решение.

Выясним, при каких условиях оно будет и решением системы Σ . Положим $N = (\lambda + 4\sqrt{6})(1 + 2\varepsilon\lambda)^{1/2}$. В силу (12) $N \geq k$, поэтому $y^*(N) = -L$. Так как ввиду (11) $y^*(N + i\pi) - y^*(N) = Qd(k, N)/(v_0\pi) \leq 4\sqrt{6}/(v_0\pi)$, то отсюда $y^*(N + i\pi) \leq -L + 4\sqrt{6}Q/(v_0\pi)$. Учитывая, что при $\xi \leq N$ будет

$$v_0^2 \exp[2\tau(\xi + i\pi)] = v_0^2 - 2gy^*(\xi + i\pi),$$

а $\tau(\xi + i\pi)$ — неубывающая функция, получим при $\xi \geq N$ $\exp[\tau(\xi + i\pi)] \geq [1 + 2\varepsilon(\lambda - 4\sqrt{6})]^{1/2}$. Отсюда и из (7) будем иметь при достаточно большом C

$$u(\xi) < \varepsilon C [1 + 2\varepsilon(\lambda + 4\sqrt{6})]^{-3/2} e^{-\beta\xi}. \quad (13)$$

Справедливы следующие соотношения.

а) $r(k, \xi + i\pi) < Me^{-\xi}$ ($M > 0$);

б) если $u(\xi) < Ae^{-\beta\xi}$ ($0 < \beta < 1/2$), то $\mu(\xi + i\pi)$ из (3) удовлетворяет неравенству $\mu(\xi + i\pi) < 8\sqrt{2}A\pi^{-1}(1 - 4\beta^2)^{-1}e^{-\beta\xi}$ (его доказательство основано на использовании леммы 1 из [2]).

Учитывая, что $\varphi = r + \mu$, получим из а), б), (13)

$$\varphi(\xi + i\pi) < [M + 8\sqrt{2}\varepsilon C(1 + 2\varepsilon(\lambda - 4\sqrt{6}))^{-3/2}(1 - 4\beta^2)^{-1}]e^{-\beta\xi}. \quad (14)$$

Пусть выполняется неравенство

$$\lambda \geq 4\sqrt{6} + [(8\sqrt{2}\varepsilon)^{2/3} - 1](2\varepsilon)^{-1}.$$

Тогда, как видно из (14), можно так подобрать достаточно малое $\beta > 0$ и достаточно большое $C > 0$, что будет $\varphi(\xi + i\pi) < Ce^{-\beta\xi}$, то есть $\Phi = \sin \varphi$, и уравнение (4) удовлетворяется (а $u(\xi)$ непрерывна). Замечая, что правая часть неравенства относительно λ не превышает $44\sqrt{6}/9 \approx 11,98$, придем к следующему утверждению.

Теорема. При выполнении условий $1/2 \leq \alpha \leq 1$, $\varepsilon \geq 0$, $\lambda \geq 12$ существует хотя бы одно течение рассматриваемого типа с понижающейся свободной границей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gerber R. Sur les solutions des equations du mouvement avec surface libre d'un liquide pesant, — J. Math. pures et appl., v. 34, № 3, 1955.
2. Киселев О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. — ПММ, т. 40, вып. 4, 1976.
3. Keady G., Norbury J. The jet from a horizontal slot under gravity. Proc. Royal Society of London, ser. A., v. 344, 1975.
4. Гуревич И. Л. О существовании и единственности одного течения тяжелой жидкости. — „Изв. вузов. Математика“, 1978, № 5.

Доложено на семинаре 5 февраля 1979 г

УДК 517.544

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ КОРРЕКТНОСТИ
ВНЕШНИХ СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ****А. М. Елизаров**

Введение

В работе рассматриваются внешние смешанные обратные краевые задачи нахождения односвязной области D_z , содержащей бесконечно удаленную точку, и регулярной или мероморфной функции $w(z)$, $z \in D_z$, по заданным граничным условиям (во втором случае дополнительно задается значение $w_0 = w(\infty)$), причем считается известной часть границы искомой области.

В краевых условиях исследуемых задач фигурируют только действительная и мнимая части искомой функции $w(z)$, одно условие задается в зависимости от полярного угла единичного круга $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, конформно эквивалентного искомой области, а другое — в зависимости от параметра $\alpha = \arg z$.

Так как в граничных условиях используется параметризация по кругу E , то функция $z = z(\zeta)$ предполагается нормированной, причем задается положение простого полюса и соответствие одной граничной точки на ∂E и на ∂D_z . Для сравнения заметим, что в теории обратных краевых задач по полярным координатам в качестве параметров [1, § 6] полюс не фиксируется и в решении есть произвол в виде двух вещественных постоянных.

В § 1 и 2 доказывается, что поставленные задачи однозначно разрешимы, в § 3 исследуется устойчивость решения смешанной задачи для регулярной функции в смысле близости границ найденных областей при малом изменении начальных данных и описывается класс областей, для которых устойчивость имеет место.

§ 1. Внешняя смешанная обратная краевая задача для регулярной функции

1. Постановка задачи

Пусть заданная простая гладкая дуга Γ_z^1 с концами $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$ и $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$, $2\pi > \alpha_0 > \alpha_1 \geq 0$, является известной частью границы искомой односвязной области D_z (с границей Γ_z), содержащей бесконечно удаленную точку и не содержащей начало координат. Отыскивается область D_z и регулярная в ней функция $w(z)$, непрерывная в замкнутой области, по следующим краевым условиям:

$$u = \operatorname{Re} w(z) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad f(0) = f(2\pi), \quad \text{на } \Gamma_z; \quad (1)$$

$$v = \operatorname{Im} w(z) = f_1(\alpha) \quad \text{на } \Gamma_z^2 = \Gamma_z - \Gamma_z^1. \quad (2)$$

Граничное условие (1) задано в зависимости от полярного угла θ вспомогательной плоскости ζ (т. е. в форме Демченкѳ [2], см. также [3]), причем, как и в [2], будем считать, что значения θ снимаются с границы круга E , отображаемого на D_z функцией $z = z(\zeta)$. Для полного определения этого отображения вводим нормировку

$$z(0) = \infty, \quad z(1) = z_0. \quad (3)$$

Кроме того, в (1) предполагается, что f — элемент пространства $C^{(1)}$ непрерывно дифференцируемых функций.

Граничное условие (2) задано в зависимости от параметра $\alpha = \arg z$, причем дуга Γ_z^2 предполагается разделенной на участки, где полярный угол изменяется монотонно. На каждом таком участке f_1 представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию, при этом функции, определяющие f_1 на соседних участках, непрерывно продолжают друг друга и $f_1^{-1} \in C^{(1)}$, где f_1^{-1} — обратная к f_1 функция. Так как $0 \notin D_z$, то после полного обхода Γ_z приращение угла α должно быть равно 2π . Поэтому считаем, что в (2) α изменяется в интервале $[\alpha_0 - 2\pi, \alpha_1]$.

Прежде всего определим функцию $\alpha(\theta)$ на интервале, соответствующем дуге Γ_z^2 .

Так как $w(z)$ регулярна, то с использованием (1), (2) по формулам обращения Гильберта (см. например, [4, с. 59]) можно записать

$$f_1(\alpha(\varphi)) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} d\theta + c = T(\varphi) + c, \quad c - \text{const.}$$

Из нормировки (3) следует, что $c = f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(2\pi)$. Теперь функция $\alpha(\varphi)$ на интервале $[\varphi_0, 2\pi]$, соответствующем Γ_z^2 , находится в виде

$$\alpha(\varphi) = f_1^{-1} [T(\varphi) + f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(2\pi)] = h(\varphi),$$

а φ_0 определяем из условия $f_1(\alpha_1) = T(\varphi_0) + f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(2\pi)$.

2. Теорема существования и единственности решения

Рассмотрим функцию $z = z(\zeta)$. Так как она имеет простой полюс при $\zeta = 0$, то функция $\tilde{z}(\zeta) = \zeta z(\zeta)$ регулярна в E , а на границе

$$\ln |\tilde{z}(e^{i\varphi})| = \ln |z(e^{i\varphi})|; \quad \arg \tilde{z}(e^{i\varphi}) = \alpha(\varphi) + \varphi.$$

Докажем теорему существования решения поставленной задачи, используя метод конечномерной полигональной аппроксимации [5]. Для этого впишем в дугу Γ_z^1 полигон с n звеньями. Для задачи с полигональной известной частью границы решение выписывается в явном виде, а решение для криволинейной дуги получается как предел решений для полигонов при неограниченном увеличении числа их сторон.

Пусть уравнения сторон полигона имеют вид

$$k_i x - y = b_i, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad \pi\alpha_i = \operatorname{arctg} k_i \geq 0. \quad (4)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$x = \tilde{x} \cos \varphi + \tilde{y} \sin \varphi, \quad y = \tilde{y} \cos \varphi - \tilde{x} \sin \varphi.$$

В п. 1 была определена функция h . Тогда на интервале $[\varphi_0, 2\pi]$ будем иметь

$$x \sin h(\varphi) - y \cos h(\varphi) = 0.$$

Переходя в (4) и последнем равенстве к функциям \tilde{x} , \tilde{y} и отображая E на верхнюю полуплоскость $\xi = t + it'$ с помощью дробно-линейной функции, приходим к краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами

$$\tilde{x} \sin [\pi\alpha_i + g(t)] - \tilde{y} \cos [\pi\alpha_i + g(t)] = b_i \cos \pi\alpha_i,$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\tilde{x} \sin [h(g(t)) + g(t)] - \tilde{y} \cos [h(g(t)) + g(t)] = 0,$$

$$t \in (-\infty, t_1] \cup [t_n, \infty) \quad (5)$$

(здесь $g(t)$ — упомянутая выше дробно-линейная функция, $-\infty < t_1 < t_n < \infty$ соответствуют концам Γ_z^1 , а t_i , $i = 2, \dots, n-1$, — вершинам полигона). Решим однородную задачу, соответствующую (5). Она имеет вид

$$\arg X = \alpha_i \pi + g(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\arg X = h_0(t) = h(g(t)) + g(t), \quad t \in (-\infty, t_1] \cup [t_n, \infty).$$

Восстанавливая функцию X по формуле Шварца, получаем

$$X(\xi) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{(-\infty, t_1] \cup [t_n, \infty)} \frac{h_0(t) dt}{t - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{g(t) dt}{t - \xi} + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \ln \frac{t_{i+1} - \xi}{t_i - \xi} \right\}.$$

Так как X должна быть ограничена в точках t_k , то можно добиться этого, умножая X на любой вещественный полином. Положим, как и в [5, с. 142], $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1} + 1$, $i = 2, \dots, n-2$; $\beta_1 = 2 - \alpha_1$, $\beta_{n-1} = \alpha_{n-1}$ и возьмем каноническую функцию X в виде

$$X(\xi) = \prod_{i=1}^{n-1} (\xi - t_i)^{\beta_i} M_n,$$

$$M_n = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{(-\infty, t_1] \cup [t_n, \infty)} \frac{h_0(t) dt}{t - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{g(t) dt}{t - \xi} \right\}.$$

Теперь можем записать решение неоднородной задачи

$$\tilde{z} = F_n(\tilde{z}) = \frac{X(\xi)}{\pi i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_j \cos \pi \alpha_j}{i e^{-i \alpha_j \pi}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{dt}{X^+(t) e^{-i g(t)} (t - \xi)}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k = n - 1$, т. е. индекс задачи равен $1 - n$, то для ограниченности решения на бесконечности должны выполняться $n - 2$ дополнительных условия, служащие в данном случае для определения t_k , $k = 2, \dots, n - 1$. Эти условия имеют вид системы (11) из [5, с. 142], которая сводится к системе

$$b_i = b_i(b_{n-1}, t_2, \dots, t_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n - 2.$$

Если варьировать постоянные t_k и считать $\delta b_i = 0$, то аналогично [5] получим для функции \tilde{z} краевую задачу

$$\arg \delta \tilde{z} = \pi \alpha_i + \delta g(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}];$$

$$\arg \delta \tilde{z} = h_0(t), \quad t \in (-\infty, t_1] \cup [t_n, \infty);$$

$$\delta g(t) = g \left[\frac{t(t_{k+1} - t_k + \delta t_{k+1} - \delta t_k) + t_{k+1} \delta t_k - t_k \delta t_{k+1}}{t_{k+1} - t_k} \right] - g(t),$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Решая эту задачу и записывая выражение для $\delta\xi = \delta\tilde{z} \frac{d\xi}{dz}$

полностью аналогично [5, с. 143], будем иметь, что функция $\delta\xi$ мероморфна с полюсом 2 порядка на бесконечности, чего быть не может. Тогда $\delta\xi \equiv 0$, т. е. неизвестные постоянные определяются единственным образом. При увеличении числа n получаем решение для криволинейной дуги [см. 5, гл. 3, § 4].

Для доказательства единственности решения задачи достаточно показать, что функция $\alpha(\varphi)$ определяется однозначно. Совершим автоморфизм круга E так, чтобы дуга $\{e^{i\varphi}, \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ перешла в дугу $\{e^{i\gamma}, \pi \leq \gamma \leq 2\pi\}$. Пусть $\varphi = g_1(\gamma)$ — соответствие полярных углов, $r = \exp \Phi(\alpha)$, $\Phi \in C^{(1)}$ — уравнение кривой Γ_z^1 . Тогда на интервале $[0, \pi]$ $\ln|\tilde{z}| = \Phi(\alpha(\gamma))$, а на $[\pi, 2\pi]$ — $\arg \tilde{z} = h(\gamma) + g_2(\gamma)$. Восстанавливая регулярную и ограниченную функцию z по формуле Сильвестра [6], пересчитанной для круга (см. также [3]), и переходя к предельным значениям на интервал $[0, \pi]$, получим

$$\alpha(\omega) = \frac{\sqrt{\sin \omega}}{2\pi} \left[- \int_0^\pi \frac{\Phi(\alpha(\gamma)) d\gamma}{\sqrt{\sin \gamma} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} - \int_\pi^{3\pi/2} \frac{h(\gamma) + g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin \gamma|} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} d\gamma + \right. \\ \left. + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{h(\gamma) + g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin \gamma|} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} d\gamma \right] - g_1(\omega), \quad 0 \leq \omega \leq \pi. \quad (6)$$

Так как существование решения задачи доказано, то найдется функция $\alpha(\omega)$, обращающая (6) в тождество.

Предположим теперь, что существуют две функции $\alpha_1(\omega)$ и $\alpha_2(\omega)$, удовлетворяющие (6). Докажем, что это невозможно, используя рассуждения работы [7].

Нетрудно получить для тех значений ω , при которых $\alpha_1 \neq \alpha_2$,

$$\alpha_1(\omega) - \alpha_2(\omega) = - \frac{\sqrt{\sin \omega}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(\alpha_1(\gamma)) - \Phi(\alpha_2(\gamma))}{\sqrt{\sin \gamma} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} d\gamma. \quad (7)$$

Далее, пусть

$$\Omega_1(\gamma) = \Phi(\alpha_1(\gamma)) - \Phi(\alpha_2(\gamma)) = \int_0^1 \Phi'[\alpha_2(\gamma) + (\alpha_1(\gamma) - \alpha_2(\gamma))t] dt \times \\ \times [\alpha_1(\gamma) - \alpha_2(\gamma)] = \operatorname{ctg} \beta(\gamma) [\alpha_1(\gamma) - \alpha_2(\gamma)].$$

Теперь из (7) выводим, что

$$\Omega_1(\omega) = -\frac{\sqrt{\sin \omega}}{2\pi} \operatorname{ctg} \beta(\omega) \int_0^{\pi} \frac{\Omega_1(\gamma) d\gamma}{\sqrt{\sin \gamma} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} = \operatorname{ctg} \beta(\omega) I(\omega). \quad (8)$$

Так как $I(\omega)$ представляет собой предельные значения на верхней полуокружности мнимой части регулярной в полукруге функции, вещественной на вещественном диаметре, то продолжая эту функцию по симметрии, получим, что регулярная в круге $|t| < 1$ функция $\Omega_2(t)$, $\Omega_2(e^{i\omega}) = \Omega_1(\omega) + iI(\omega)$, удовлетворяет краевому условию

$$\sin \beta(\omega) \Omega_1(\omega) + \cos \beta(\omega) I(\omega) = 0$$

для тех точек ω , где $\alpha_1 \neq \alpha_2$, и условию $\Omega_2(e^{i\omega}) = 0$ для тех точек ω , где значения α_1 и α_2 совпадают.

Итак, мы оказались в ситуации, подробно рассмотренной в [7, с. 190]. Следовательно, $\Omega_2(e^{i\omega}) \equiv 0$, т. е. $\alpha_1(\omega) \equiv \alpha_2(\omega)$, что и требовалось получить. Сформулируем доказанные результаты:

Теорема 1. *Внешняя смешанная обратная краевая задача по параметру $\alpha = \arg z$ для регулярной функции всегда однозначно разрешима.*

Замечание 1. Выбор положения полюса в начале координат произведен для удобства. Если полюс находится в точке $\zeta_0 \in E$, то $\arg \tilde{z}(e^{i\varphi}) = \alpha(\varphi) + H(\varphi)$, где

$$H(\varphi) = \arg [(e^{i\varphi} - \zeta_0)/(1 - \bar{\zeta}_0 e^{i\varphi})],$$

и необходимо лишь в выражении величины M_n заменить $h_0(t)$ и $g(t)$ на $h(g(t)) + H(\gamma(t))$ и $H(g(t))$ соответственно.

§ 2. Внешняя смешанная обратная краевая задача для функции с простым полюсом

Постановка внешней смешанной задачи для мероморфной функции отличается от постановки задачи п. 1 лишь тем, что образ искомой области D_z при отображении искомой мероморфной функцией $w(z)$ содержит бесконечно удаленную точку и считается известным значение $w_0 = w(\infty)$. Так как по условию $w(z_0) = f(0) + if_1(z_0 - 2\pi)$, то можно сделать вывод, что ищем нормированную функцию $w(z)$.

Решение поставленной задачи может быть проведено по схеме § 1, если будет определена функция $\alpha(\varphi)$ на интервале, соответствующем Γ_z^2 . Найдем эту функцию.

С использованием граничного условия (1) можем записать

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + C \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} - \bar{C} \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0} + iB_0,$$

$$C = A + iB,$$

где $\zeta_0 = r_0 e^{i\gamma_0}$ — пока неизвестное положение полюса функции $\omega(\zeta)$. Из нормировки функций $z(\zeta)$, $\omega(z)$ следует, что

$$\begin{cases} \omega|_{\zeta=0} = \omega_0 = u_0 + iv_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta - C\zeta_0 - \bar{C}/\zeta_0 + iB_0, \\ f_1(\alpha_0 - 2\pi) = T(0) + 2A \sin H(0) + 2B \cos H(0) + B_0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $f_1(\alpha_0 - 2\pi)$ — значение в точке $\alpha_0 - 2\pi$ первой однозначной ветви функции f_1 .

Отделяя действительную и мнимую части в первом соотношении из (9) и используя второе равенство, приходим к системе условий вида

$$\begin{cases} v_0 - f_1(\alpha_0 - 2\pi) - T(0) = \left[-\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \sin \gamma_0 + 2 \sin H(0) \right] A + \\ + \left[-\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right) \cos \gamma_0 + 2 \cos H(0) \right] B, \\ u_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right) (-A \cos \gamma_0 + B \sin \gamma_0). \end{cases} \quad (10)$$

Рассматривая систему (10) как линейную относительно A , B и предполагая, что левые части в (10) одновременно не обращаются в нуль, легко находим ее определитель

$$d = (r_0 - 1/r_0) \{2 \cos [H(0) - \gamma_0] - (r_0 + 1/r_0)\}.$$

Так как $r_0 + 1/r_0 > 2$ при $0 \leq r_0 < 1$, то $d \neq 0$ и система однозначно разрешима относительно A и B . Таким образом, можно определить постоянные A , B , B_0 в зависимости от r_0 и γ_0 .

Для определения величин r_0 и γ_0 необходимо получить еще два равенства. Для этого прежде всего определим значение $\varphi_0 = \varphi_0(r_0, \gamma_0)$, соответствующее точке z_1 , из соотношения

$$f_1(\alpha_1) = T(\varphi_0) + 2A \sin H(\varphi_0) + 2B \cos H(\varphi_0) + B_0 = T_1(\varphi_0).$$

Так как функция $T_1 = T_1(\varphi, r_0, \gamma_0)$ известна, то можно найти все точки ее локальных экстремумов. Пусть первая из однозначных ветвей функции f_1 имеет по крайней мере два экстремума и $\alpha_0 - 2\pi \leq \alpha_*$, $\alpha^* \leq \alpha_1$ — точки соседних экстремумов, причем в точке α_* находится самый первый из всех ее экстремумов.

Теперь для определения r_0 и γ_0 достаточно приравнять значения $f_1(\alpha_*)$, $f_1(\alpha^*)$ соответственно значениям $T_1(\varphi_*)$, $T_1(\varphi^*)$, где φ_* , φ^* — точки соседних и ближайших к $\varphi = 2\pi$ экстремумов функции T_1 . Решая полученную систему, определим значения r_0 , γ_0 и значение φ_0 . Если первая однозначная ветвь имеет лишь один экстремум, то нужно рассматривать наряду с ним первый экстремум второй однозначной ветви. Если же все ветви монотонны или имеется всего один экстремум, то может, вообще говоря, не найтись соотношений для определения неизвестных параметров, т. е. функция $\alpha(\varphi)$ может определяться неоднозначно и будет зависеть от одной или от обеих величин r_0 и γ_0 .

Все приведенные рассуждения особенно просто проводятся в случае, когда $\omega_0 = \infty$. Тогда $\zeta_0 = 0$ и для определения A и B необходимо записать значения функции $T_2(\varphi) = T(\varphi) - T(0) + f_1(\alpha_0 - 2\pi) + 2A \sin \varphi + 2B(\cos \varphi - 1)$ в двух точках φ_* , φ^* экстремума, ближайших к $\varphi = 2\pi$, и приравнять их значениям f_1 в соответствующих точках. В качестве иллюстрации всего вышесказанного рассмотрим следующий

Пример: определить функцию $\alpha(\varphi)$ во внешней смешанной задаче для функции с полюсом в бесконечности, если

$$f(\theta) = \cos \theta, \quad f_1(\alpha) = \sin \alpha, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq 0.$$

Имеем

$$f_1(\alpha(\varphi)) \equiv \sin \alpha(\varphi) = (2A + 1) \sin \varphi + 2B \cos \varphi + B_0, \quad B_0 = -1 - 2B$$

Следовательно,

$$\sin \alpha(\varphi) = (2A + 1) \sin \varphi + 2B(\cos \varphi - 1) - 1.$$

Так как f_1 имеет экстремум при $\alpha = -\pi/2$, то должно быть

$$(2A + 1) \cos \varphi - 2B \sin \varphi = 0 \quad \text{при } \varphi = 2\pi, \quad \text{т. е. } A = -1/2.$$

Другой точкой экстремума функции $T_2(\varphi)$ является точка $\varphi = \pi$. Так как f_1 монотонна, то $\varphi = \pi$ соответствует $\alpha = 0$. Теперь легко определить величину B : $f_1(0) = 2B(\cos \pi - 1) - 1$, $B = -1/4$. Окончательно, $\alpha(\varphi) = -\arcsin\left(\cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)$, $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$.

После определения $\alpha(\varphi)$ на $[\varphi_0, 2\pi]$ применяется метод конечномерной аппроксимации аналогично тому, как это было сделано в § 1.

§ 3. Об устойчивости решения смешанной краевой задачи для регулярной функции

Так как в поставленных в § 1, 2 смешанных задачах отыскивается область в плоскости z , то естественно ограничиться такими классами M областей, чтобы:

1) по начальным данным область D_z определялась однозначно;

2) близким (в некотором смысле) значениям начальных данных соответствовали близкие области (устойчивость).

Как и в обратных задачах логарифмического потенциала (см., например, [8, 9]), назовем функции, описывающие границы искомым областей, определяющими и рассмотрим класс областей M как метрическое пространство, точками которого являются области D_z . Метрика в M есть метрика некоторого функционального пространства, которому принадлежат определяющие функции (например, метрика пространства C , если считать определяющие функции непрерывными).

Если на M есть устойчивость, то M называется классом устойчивости или классом корректности.

В данном случае в качестве определяющих функций и метрики будем использовать граничные значения функции $z(\zeta): E \rightarrow D_z$ и метрику пространства C , т. е. устойчивость будем понимать как малость модуля разности граничных значений двух решений при близких начальных данных независимо от величины полярного угла.

Пусть решаются задачи с начальными данными $f, \{f_{1m}\}, \{\Phi_m\}$ такими, что f_{1m} заданы на интервале

$$[\alpha_0 - 2\pi, \alpha_1], f_{1m}(\alpha_1) = f_1(\alpha_1), f_{1m}(\alpha_0 - 2\pi) = f_1(\alpha_0 - 2\pi),$$

$$\max |\Phi'_m| \leq \max |\Phi'| \leq b, \quad \max |f_{1m}^{-1}| \leq \max |f_1^{-1}| \leq a,$$

и

$$\|f_{1m}^{-1} - f_1^{-1}\|_{C(I)} \rightarrow 0, \quad \|\Phi_m - \Phi\|_{C(I)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где a, b — фиксированные постоянные.

Так как функция $T(\varphi)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем, сколь угодно близким к единице [4], то из результатов п. 1 § 1 будет следовать, что $h_m(\varphi) \rightarrow h(\varphi)$, $m \rightarrow \infty$, $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi]$, по норме пространства C , гельдеровых функций с ν сколь угодно близким к 1 (всюду в дальнейшем будем обозначать индексом m функции, соответствующие m -ым начальным данным). Заметим, что норма в C , определяется в виде

$$\|h\|_\nu = \max |h(\varphi)| + \sup_{\substack{\varphi_0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 2\pi, \\ \varphi_1 \neq \varphi_2}} \frac{|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)|}{|\varphi_1 - \varphi_2|^\nu}.$$

Далее, из (11) выводим, что коэффициенты A_0, A_m функций h и h_m равномерно ограничены. Кроме того, из представления функции \tilde{z} (см. п. 2 § 1) и (11) следует, что функции $\alpha(\varphi)$ и $\alpha_m(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi_0]$, равномерно ограничены по норме C_λ с некоторым $0 < \lambda < 1$, т. е. лежат в некотором шаре в C_λ .

С другой стороны, $\alpha(\omega)$ является решением уравнения (6), а $\alpha_m(\omega)$ — решением уравнения, полученного из (6) заменой Φ и h на Φ_m и h_m соответственно. Перепишем (6) в следующем виде:

$$(\mathcal{A}\alpha)(\omega) = P(\omega), (\mathcal{A}\alpha)(\omega) = \alpha(\omega) + \frac{\sqrt{\sin \omega}}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(\alpha(\gamma)) d\gamma}{\sqrt{\sin \gamma} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}},$$

$$P(\omega) = \frac{\sqrt{\sin \omega}}{2\pi} \left[\int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{h(\gamma) + g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin \gamma|} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} d\gamma - \int_\pi^{3\pi/2} \frac{h(\gamma) + g_1(\gamma)}{\sqrt{|\sin \gamma|} \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} d\gamma \right].$$

Через \mathcal{A}_m и P_m обозначим оператор и функцию, соответствующие α_m .

Обратимся к функции $P(\omega)$ и изучим ее свойства. Осуществляя замену

$$\begin{aligned} \gamma &= 3\pi/2 - 2 \operatorname{arccotg} [2 \cos \mu / (1 + \cos^2 \mu)], \quad 0 \leq \mu \leq \pi, \\ \omega &= 3\pi/2 - 2 \operatorname{arccotg} [2\delta / (1 + \delta^2)], \quad -1 \leq \delta \leq 1, \end{aligned} \quad (12)$$

и оценивая $|dP/d\delta|$, получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{dP}{d\delta} \right| &\leq \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|h(\gamma(\mu)) + g_1(\gamma(\mu)) - h(\gamma(0)) - g_1(\gamma(0))| d\mu}{1 - \cos \mu} + \\ &+ \frac{2}{\pi} |h(\gamma(0)) - h(\gamma(\pi)) + g_1(\gamma(0)) - g_1(\gamma(\pi))|. \end{aligned}$$

По определению функции $h + g_1$

$$\begin{aligned} |h(\gamma(\mu)) + g_1(\gamma(\mu)) - h(\gamma(0)) - g_1(\gamma(0))| &\leq \\ &\leq (A_0 + \max |g'_1|) |\gamma(\mu) - \gamma(0)|^\nu \leq (A_0 + \max |g'_1|) |\cos \mu - 1|^\nu. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left| \frac{dP}{d\delta} \right| \leq \frac{2}{\pi} (A_0 + \max |g'_1|) \left[\frac{\pi}{2^\nu (2^\nu - 1)} + 2^\nu \right].$$

Но из (12) следует, что

$$\begin{aligned} |\delta(\omega_1) - \delta(\omega_2)| &= \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \delta'(\omega) d\omega \right| \leq |\omega_1 - \omega_2| + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d \sin \omega}{[(1 - \sin \omega) \sin \omega]^{1/(2(1-\Delta))}} \right|^{1-\Delta} |\sin \omega_2 - \sin \omega_1|^\Delta \leq \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ 1 + 2^{\frac{1-2\Delta}{2}} \left[B \left(\frac{1-2\Delta}{2(1-\Delta)}, \frac{1-2\Delta}{2(1-\Delta)} \right) \right]^{1-\Delta} \right\} |\omega_1 - \omega_2|^\Delta, \quad 0 < \Delta < 1/2$$

(здесь B — бета-функция Эйлера).

Из полученных оценок выводим, что P — ограниченная функция из C_Δ . Покажем теперь, что имеет место условие

$$\|\alpha_m(\omega) - \alpha(\omega)\|_{\lambda-\varepsilon} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \varepsilon - \text{сколь угодно мало.}$$

Для доказательства используем частный случай следствия 7 из [10]:

Лемма. Пусть X, Y — банаховы пространства, $\mathcal{A}, \mathcal{A}_m: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения, N — компакт из X , на котором однозначно разрешимы уравнения $\mathcal{A}_m x = y_m$, $\mathcal{A} x = y$ и $y_m, y \in Y$ — точки. Если $y_m \rightarrow y, \|\Delta_m\| = \|\mathcal{A}_m - \mathcal{A}\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, то $q_m \rightarrow q$, где q, q_m — решения уравнений.

Нам известно, что $\alpha_m(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ лежат в шаре из C_λ , т. е. в компактном множестве из $C_{\lambda-\varepsilon}$. Далее, из проведенных оценок для функции P следует, что $\|P_m(\omega) - P(\omega)\|_\Delta \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\|\Delta_m\| = \sup_{\|\alpha\|_{\lambda-\varepsilon} \leq 1} \left\| \frac{V \sin \omega}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi_m(\alpha(\gamma)) - \Phi(\alpha(\gamma))}{V \sin \gamma \sin \frac{\gamma - \omega}{2}} d\gamma \right\|_{\lambda-\varepsilon} \leq$$

$$\leq \|\Phi_m(x) - \Phi(x)\|_{C(1)} 2^{\lambda-\varepsilon} \left[M(\lambda - \varepsilon) + \frac{1}{\pi} B \left(\frac{\lambda - \varepsilon}{2}, \frac{1 - \lambda + \varepsilon}{2} \right) \right] \rightarrow 0,$$

$$m \rightarrow \infty.$$

Здесь

$$M(\lambda - \varepsilon) = \frac{2^{\lambda-\varepsilon}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{t^{\lambda-\varepsilon} dt}{\sin t},$$

B — бета-функция и оценка получена аналогично [3].

Таким образом, уравнения $(\mathcal{A}\alpha)(\omega) = P(\omega), (\mathcal{A}_m\alpha)(\omega) = P_m(\omega)$ с непрерывными операторами, действующими на функции $\alpha(\omega), \alpha_m(\omega)$ из $C_{\lambda-\varepsilon}$, однозначно разрешимы на одном и том же компакте из $C_{\lambda-\varepsilon}$, причем $P_m \rightarrow P$. По лемме $\|\alpha_m(\omega) - \alpha(\omega)\|_{\lambda-\varepsilon} \rightarrow 0$.

Из последнего условия и непрерывности оператора Шварца в гильбертовских пространствах вытекает, что $|\tilde{z}(e^{i\varphi}) - \tilde{z}_m(e^{i\varphi})| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$, при любых φ , а следовательно, и $|z(e^{i\varphi}) - z_m(e^{i\varphi})| \rightarrow 0$. Устойчивость решения задачи доказана. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. Пусть начальные данные удовлетворяют условию (11). Тогда множество областей со свойствами:

- а) известная часть Γ_z^1 границы описывается функцией $r = \exp \Phi(\alpha)$, $\Phi \in C^{(1)}$ и является простой гладкой дугой;
- б) концы Γ_z^1 находятся в точках $z_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$, $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$;
- в) области не содержат начало координат — есть класс корректности внешней смешанной обратной краевой задачи для регулярной функции.

Замечание 2. Отметим, что в рассмотренной выше смешанной задаче для регулярной функции устойчивость решения полностью определяется начальными данными. Это свойство является характерным для обратных краевых задач теории аналитических функций и позволяет добиться корректности задачи только за счет улучшения начальных данных.

В заключение автор благодарит проф. Л. А. Аксентьева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
2. Demtchenko V. Problemes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits. Paris, 1933.
3. Елизаров А. М. Об обратной смешанной краевой задаче Демченко. Деп. № 164-78.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977.
5. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, „Наука“, 1977.
6. Signorini A. Sopra un problema al contorno nella teoria della funzioni di variabile complessa — Ann. di Math., 25, 1916, p. 253—273.
7. Салимов Н. Б. Обратная задача напорной фильтрации в области с криволинейным водоупором. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 5. Изд-во Казанск. ун-та, 1968, с. 187—196.
8. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач. — ДАН СССР, 39, № 5, 1943, с. 195—198.
9. Иванов В. К. Об устойчивости обратной задачи логарифмического потенциала. — Изв. вузов. Математика, 1958, № 4, с. 96—99.
10. Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квази-решений. — Сибирский математический журнал, 10, № 2, 1969, с. 373—386.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г

УДК 517.54

О СМЕШАННОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

А. М. Елизаров

В работе рассматривается задача обтекания неизвестного профиля, расположенного над криволинейным дном, в случае, когда на искомом профиле задается распределение скорости в зависимости от дуговой абсциссы s .

Разрешимость подобной задачи в случае, когда скорость задана в зависимости от декартовой координаты x , доказана ранее в [1]. Задача нахождения формы профиля в случае прямолинейного дна и при наличии свободной поверхности рассмотрена в работе [2]. Подробное описание приложений обратных и смешанных обратных краевых задач в гидроаэромеханике и теории фильтрации можно найти в [3].

1. Постановка задачи

Пусть искомый профиль Γ_z обтекается потоком несжимаемой невесомой жидкости, ограниченным снизу криволинейным гладким дном, состоящим из двух прямолинейных

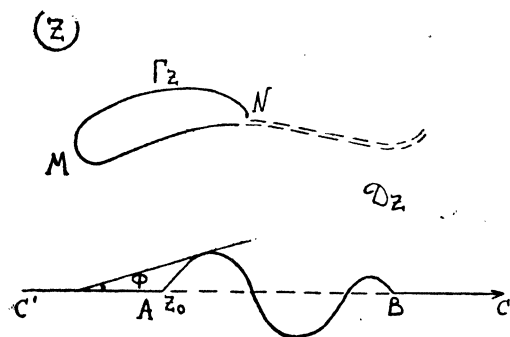


Рис. 1.

участков CA и BC , расположенных на оси абсцисс, и дуги AB класса Ляпунова с фиксированным началом z_0 (точка A) (рис. 1). Предполагается, что эта дуга задается с точностью до подобия с коэффициентом λ относительно некоторой точки хорды AB , так что длина ее неизвестна; угол наклона касательной к дуге задан в виде

$\Phi(\bar{s})$, \bar{s} — приведенная абсцисса, $0 \leq \bar{s} \leq s_0$, s_0 — длина исходной дуги. Пусть выполнено условие ограниченности колебания Φ на AB :

$$\max \Phi - \min \Phi \leq p\pi, \quad 0 \leq p < 1. \quad (1)$$

На профиле Γ_z известно распределение скорости в функции дуговой абсциссы: $v = v(s)$, $0 \leq s \leq l$, где $v(s)$ — неотрицательная однозначная функция, удовлетворяющая условию Гельдера и обращающаяся в нуль не более чем в двух точках. Считаем, что в точке M разветвления потока $s = 0$, в точке N схода потока $s = s_N$, а потенциал скорости $\varphi = 0$ при $s = 0$. Расход жидкости в струе равен Q , потенциалы скорости в точках A и B считаются известными. Задача заключается в определении формы профиля Γ_z .

Как обычно, для циркуляции Γ будем иметь

$$\Gamma = \varphi_B - \varphi_H, \quad \varphi_B = \int_0^{s_N} v(s) ds, \quad \varphi_H = \int_{s_N}^l v(s) ds.$$

Пусть на линии дна функция тока $\psi = 0$. Проведем в физической плоскости разрез до бесконечности по линии тока, начиная от точки N . Тогда в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ области течения с разрезом будет соответствовать верхняя полуплоскость с разрезом, параллельным вещественной оси и проходящим через точку iQ (рис. 2).

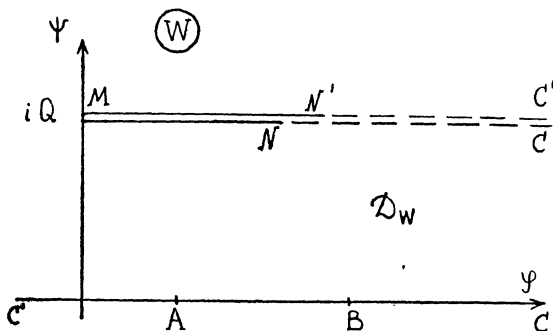


Рис. 2.

Как и в [3, с. 293], отобразим область D_w на внутренность прямоугольника $NN'C'C$ вспомогательной плоскости t так, чтобы верхнему основанию соответствовала ось φ , а нижнему — участку берегов разреза, отвечающие исконому профилю (рис. 3). Это отображение осуществляется с помощью функции $w = a\zeta(t - i\omega_2/2) + bt + c_1 + ic_2$, где $\zeta(t)$ —

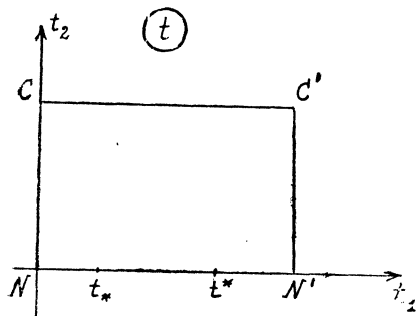


Рис. 3.

функция Вейерштрасса с периодами $\omega_1, i\omega_2$ [4, с. 54], а постоянные a, b, c_1, c_2, ω_2 пока не определены (ω_1 можно задавать произвольно). Используя соответствие точек в плоскостях t и w и тот факт, что в точке схода потока dw/dt обращается в нуль, можем записать соотношения, связывающие неизвестные постоянные. Это делается полностью аналогично [3, с. 293]. Таким образом,

отображение $w = w(t)$ полностью определено.

2. Вывод уравнения задачи

Уравнение рассматриваемой задачи вытекает из общего решения смешанной краевой задачи для функции $F(t) = \ln \frac{dw}{dz}(t)$.

После определения функции $w(t)$ обычным образом находится соответствие $s = g(t)$, $t = t_1 \in [0, \omega_1]$, на искомом профиле. На лучах CA и BC $\text{Im} F(t) = 0$. Если бы была известна функция $\bar{s}(t)$ на интервале, соответствующем дуге AB , то можно было бы записать

$$\text{Im} F(t) = \Phi(\bar{s}(t)).$$

Так как положения точек A и B на ∂D_w заданы, то определяются значения t_* , t^* , $0 < t_* < t^* < \omega_1$, такие, что $t_* + i\omega_2/2$ и $t^* + i\omega_2/2$ на верхнем основании прямоугольника соответствуют A и B на ∂D_z . Теперь можем записать условия краевой задачи для функции $F(t)$:

$$\begin{aligned} \text{Re} F(t) &= \ln g'(t) = g_1(t), \quad t = t_1 \in [0, \omega_1]; \\ \text{Im} F(t) &= \Phi_0(t), \quad t = t_1 + i\omega_2/2, \quad t_1 \in [0, \omega_1], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0, & t_1 \in [0, t_*) \cup (t^*, \omega_1]; \\ \Phi(\bar{s}(t)), & t_1 \in [t_*, t^*]. \end{cases}$$

Решая краевую задачу (2) по формуле Вилля (см., например, [5, с. 179]), получаем

$$F(t) = \frac{1}{\pi \sigma(\omega_1/2)} \left\{ \int_{t_*}^{t^*} \frac{\Phi(\bar{s}(\tau)) \sigma[\tau - t + (\omega_1 + i\omega_2)/2] e^{-\eta_1(\tau - t + i\omega_2/2)^2} d\tau}{\sigma(\tau - t + i\omega_2/2)} + \right. \\ \left. + i \int_0^{\omega_1} \frac{g_1(\tau) \sigma(\tau - t + \omega_1/2) e^{-\eta_1(\tau - t)^2} dt}{\sigma(\tau - t)} \right\}, \quad (3)$$

где σ — сигма-функция Вейерштрасса [4], а $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2)$. Переходя к предельным значениям при $t \rightarrow t' + i\omega_2/2$, $t' \in [t_*, t^*]$ и отделяя действительные части, получаем из (3) соотношение

$$\ln |(d\omega/dz)(t')| = I(\bar{s}, t') + I_1(t'),$$

где через I и I_1 обозначены соответственно предельные значения действительных частей первого и второго интегралов в (3). Окончательно, уравнение задачи имеет вид

$$\bar{s}(t') = \frac{1}{\alpha} \left(\exp \{ -I(\bar{s}, t') - I_1(t') \} | a \mathfrak{F}(t' - i\omega_2/2) + b | dt', \right. \\ \left. \mathfrak{F}(t) = -\zeta'(t). \right) \quad (4)$$

3. Доказательство разрешимости уравнения

Продолжим непрерывно функцию Φ на всю ось $-\infty < \bar{s} < \infty$ с сохранением наложенных ограничений. Теперь (4) определяет непрерывный оператор \mathfrak{A} , действующий в пространстве C_ν , $0 < \nu < 1$, гельдеровых функций $\bar{s}(t')$, $t' \in [t_*, t^*]$, с нормой

$$\|\bar{s}\|_\nu = \max_{t' \in [t_*, t^*]} |\bar{s}(t')| + \sup_{\substack{t'_1 \neq t'_2 \\ t'_1, t'_2 \in [t_*, t^*]}} \frac{|\bar{s}(t'_1) - \bar{s}(t'_2)|}{|t'_1 - t'_2|^\nu}.$$

Для доказательства разрешимости уравнения $\bar{s}(t') = (\mathfrak{A}\bar{s})(t')$ используем принцип неподвижной точки Шаудера [6, с. 605]. Для этого необходимо доказать компактность оператора \mathfrak{A} и найти такой шар из C_ν , который переводится в себя при действии оператора. Как и при доказательстве компактности оператора из [7], достаточно показать, что \mathfrak{A} переводит любое ограниченное множество из C_ν в множество из $C_{\nu+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$.

По схеме доказательства леммы 1 [8, с. 200] нами получен результат:

Лемма. Пусть функция Φ удовлетворяет (1). Тогда верна оценка

$$\int_{t_*}^{t^*} \exp \{[-I(\bar{s}, t') - I_1(t')]/p\} dt' \leq R_0, \quad (5)$$

где R_0 — постоянная, не зависящая от \bar{s} .

С использованием леммы докажем разрешимость уравнения (4). Прежде всего, по условию задачи

$$x_{s_0} = \int_{t_*}^{t^*} \exp \{-I(\bar{s}, t') - I_1(t')\} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b| dt'.$$

Так как функция $-\Phi$ удовлетворяет (1), то (5) остается справедливой после замены Φ на $-\Phi$. Отсюда и из обратного неравенства Гельдера выводим t

$$x \geq \frac{1}{s_0} \left\{ \int_{t_*}^{t^*} \exp \left\{ \frac{I(\bar{s}, t') + I_1(t')}{p} \right\} dt' \right\}^{-p} \times$$

$$\times \left[\int_{t_*}^{t^*} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b|^{1/(p+1)} dt' \right]^{p+1} \geq c_0 R_0^{-p} > 0, \quad c_0 - \text{const.}$$

Кроме того,

$$x \leq \tilde{c}_1 \left\{ \int_{t_*}^{t^*} \exp \{[-I(\bar{s}, t') - I_1(t')]/p\} dt' \right\}^p |t^* - t_*|^{1-p}, \quad \tilde{c}_1 - \text{const}$$

и, следовательно, величина x ограничена и отграничена от нуля независимо от \bar{s} . Пусть $0 < \nu < 1 - p$. С учетом (5) будем иметь

$$|(\mathfrak{A}\bar{s})(t'_1) - (\mathfrak{A}\bar{s})(t'_2)| =$$

$$= \frac{1}{x} \left| \int_{t'_1}^{t'_2} \exp \{-I(\bar{s}, t') - I_1(t')\} |a\mathfrak{P}(t' - i\omega_2/2) + b| dt' \right| \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{c}_1}{x} \left| \int_{t'_1}^{t'_2} \exp \{[-I(\bar{s}, t') - I_1(t')]/(1 - \nu - \varepsilon)\} dt' \right|^{1-\nu-\varepsilon} \times$$

$$\times |t'_1 - t'_2|^{\nu+\varepsilon} \leq \frac{\tilde{c}_1}{x} R_0^{1-\nu-\varepsilon} |t'_1 - t'_2|^{\nu+\varepsilon},$$

если $\varepsilon > 0$ таково, что $\nu < 1 - p - \varepsilon$. Отсюда и из ограниченности κ следует компактность \mathfrak{A} . Далее, из полученной оценки при $\varepsilon = 0$ вытекает, что оператор \mathfrak{A} переводит все пространство C в некоторый шар из C_ν , радиус которого не зависит от искомой функции \bar{s} . Таким образом, уравнение (4) разрешимо. Функция, отображающая внутренность прямоугольника на область D_z , может быть записана в виде

$$z(t) = \int_{t_* + i\omega_2/2}^t \frac{dw}{dt} / \frac{dw}{dz} (t) dt + c = \\ = \int_{t_* + i\omega_2/2}^t e^{-F(t)} [a\mathfrak{P}(t - i\omega_2/2) + b] dt + c,$$

где $F(t)$ определяется формулой (3), а постоянная интегрирования c находится из соответствия $t = t_* + i\omega_2/2 \leftrightarrow z = z_0$. Условие замкнутости профиля требует выполнения условия

$$\int_0^{m_1} e^{-F(t)} [a\mathfrak{P}(t - i\omega_2/2) + b] dt = 0, \quad (6)$$

которое является условием разрешимости и может быть проверено только после решения уравнения задачи. Сформулируем окончательный результат:

Теорема. Пусть выполняется условие (1). Тогда смешанная обратная краевая задача нахождения формы профиля, расположенного над криволинейным дном, разрешима при выполнении условия (6).

Заметим, что с помощью предложенного метода может быть рассмотрена смешанная задача нахождения формы профиля, обтекаемого ограниченным потоком, имеющим свободную поверхность. В этом случае область D_w представляет собой полосу с разрезом. Отображение этой области на прямоугольник строится аналогично [3, с. 176—178].

В заключение автор благодарит проф. Л. А. Аксентьева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С. Н. О некоторых задачах газовой динамики со свободными границами в двусвязных областях. — Динамика сплошной среды. Вып. 1. Новосибирск, „Наука“, 1969, с. 134—153.
2. Чебарев А. И. Обратная задача обтекания произвольного профиля ограниченным потоком. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 10. Изд-во Казанск. ун-та, 1973, с. 163—170.
3. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.

4. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука“, 1970.
5. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., „Наука“, 1966.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., „Наука“, 1977.
7. Хайкин М. И. Теоремы существования для одного класса обратных смешанных краевых задач теории аналитических функций. — Труды Казанск. авиационного ин-та. Вып. 64, 1961, с. 3—24.
8. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир“, 1964.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.

УДК 517.956.6

К ЗАДАЧАМ СО СМЕЩЕНИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

В. И. Жегалов

Многие работы последних лет, начиная со статей [1 и 2], посвящаются исследованию таких задач для уравнений смешанного типа, когда краевое условие на части границы области, лежащей в гиперболической полуплоскости, содержит сдвиги. В данной статье предлагается еще одна задача подобного рода.

Пусть D_- — внутренность треугольника с вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, а D_+ — односвязная область в полуплоскости $y > 0$, ограниченная отрезком AB и простой дугой σ .

Задача. Найти в области $D = D_+ \cup D_-$ решение $u(x, y)$ уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} u u_{yy} = 0, \quad (1)$$

непрерывное в \bar{D}_+ и \bar{D}_- , непрерывно дифференцируемое внутри этих областей, за возможным исключением точек A , B и характеристик уравнения (1) при $y \leq 0$, проходящих через точку $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, где u_x , u_y могут обращаться в бесконечность интегрируемого порядка. Производная u_y непрерывно продолжима из D_+ и D_- на ось x , кроме, может быть, точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, причем

$$u(x, -0) = \alpha_0(x)u(x, +0) + \gamma_0(x), \quad (2)$$

$$u_y(x, -0) = \alpha_1 u_y(x, +0) + \gamma_1(x).$$

На линии σ и границе области D_- должны выполняться условия

$$u = \varphi(t), \quad t \in \sigma, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& a_k(y)u\left(\frac{1}{2}, y\right) + b_k(y)u\left(\frac{1}{2} + y, 0\right) + \\
& + c_k(y)u\left(\frac{1}{4} + \frac{y}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{y}{2}\right) + d_k(y)u\left(\frac{1}{2} - y, 0\right) + \\
& + e_k(y)u\left(\frac{1}{4} - \frac{y}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{y}{2}\right) + f_k(y)u\left(\frac{3}{4} - \frac{y}{2}, -\frac{1}{4} - \frac{y}{2}\right) + \\
& + g_k(y)u\left(\frac{3}{4} + \frac{y}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{y}{2}\right) = h_k(y), \quad (4) \\
& y \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_0, \gamma_0, \gamma_1$ — дважды непрерывно дифференцируемы на отрезках $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ оси x , $\varphi(t) \in H(\sigma)$, $a_k, b_k, c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, h_k \in C^2\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, причем вторые производные удовлетворяют условию H (Гельдера). Заметим, что условия (2) впервые встречаются для уравнения (1) в работе автора [1], а затем в статье Г. Д. Каратопраклиева [3], причем в последней работе α_1 считается функцией x . Сама же идея обобщенных условий склеивания восходит к статье Ф. И. Карамышева [6].

Используя, например, решение задачи Трикоми для уравнения (1), можно добиться, чтобы

$$\varphi(t) \equiv 0. \quad (5)$$

В дальнейшем это предполагается сделанным.

Если ввести в D_+ гармонически сопряженную с $u(x, y)$ функцию $v(x, y)$ с условием $v(0, 0) = 0$, то на основании формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны, а также условий Коши — Римана и соотношений (2), найдем в области D_-

$$\begin{aligned}
2u(x, y) = & \alpha_0(x + y)u(x + y, +0) + \alpha_0(x - y)u(x - y, +0) - \\
& - \alpha_1v(x + y, +0) + \alpha_1v(x - y, +0) + \gamma_0(x + y) + \\
& + \gamma_0(x - y) + \int_{x-y}^{x+y} \gamma_1(t) dt. \quad (6)
\end{aligned}$$

Подставляя это значение в (4), получим на $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

$$\begin{aligned}
& m_k(x)u\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) + n_k(x)v\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) - \\
& - p_k(x)u\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) - q_k(x)v\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) = \\
& = \omega_k(x) - \alpha_1[f_k(x) + g_k(x)]v(1, 0), \quad (k = 1, 2), \quad (7)
\end{aligned}$$

$$m_k(x) = \alpha_0 \left(\frac{1}{2} + x \right) [a_k(x) + 2b_k(x) + c_k(x) + g_k(x)],$$

$$n_k(x) = -\alpha_1 [a_k(x) - c_k(x) + g_k(x)],$$

$$p_k(x) = -\alpha_0 \left(\frac{1}{2} - x \right) [a_k(x) + 2d_k(x) + e_k(x) + f_k(x)], \quad (8)$$

$$q_k(x) = -\alpha_1 [a_k(x) + e_k(x) - f_k(x)],$$

$$\omega_k(x) = 2h_k(x) - \gamma_0 \left(\frac{1}{2} + x \right) \frac{m_k(x)}{\alpha_0 \left(\frac{1}{2} + x \right)} +$$

$$+ \gamma_0 \left(\frac{1}{2} - x \right) \frac{p_k(x)}{\alpha_0 \left(\frac{1}{2} - x \right)} - \gamma_0(0) [c_k(x) + e_k(x)] -$$

$$- \gamma_0(1) [f_k(x) + g_k(x)] + \alpha_1^{-1} n_k(x) \int_0^{\frac{1}{2} + x} \gamma_1(t) dt - \quad (9)$$

$$- \alpha_1^{-1} q_k(x) \int_0^{\frac{1}{2} - x} \gamma_1(t) dt + [f_k(x) + g_k(x)] \int_0^1 \gamma_1(t) dt.$$

Положив в (7) $x = \pm \frac{1}{2}$, с помощью (8) — (9) находим

$$\alpha_1 (a_k + e_k + g_k)_{x = -\frac{1}{2}} v(1, 0) = \omega_k \left(-\frac{1}{2} \right), \quad (10)$$

$$\alpha_1 (a_k - c_k - f_k)_{x = \frac{1}{2}} v(1, 0) = -\omega_k \left(\frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, от исходных данных необходимо потребовать

$$(a_k + e_k + g_k)_{x = -\frac{1}{2}} \omega_k \left(\frac{1}{2} \right) =$$

$$= (c_k + f_k - a_k)_{x = \frac{1}{2}} \omega_k \left(-\frac{1}{2} \right), \quad k = 1, 2.$$

Будем еще предполагать, что хотя бы одно из четырех чисел $\omega_k \left(\pm \frac{1}{2} \right)$, $k = 1, 2$, отлично от нуля. Тогда из (10) следует

$$\alpha_1 \neq 0 \quad (11)$$

и отличие от нуля хотя бы одной из скобок в левых частях (10). Поэтому $v(1, 0)$ определяется, и в правых частях соотношений (7) стоят полностью известные функции (в дальнейшем их обозначаем $\omega_k^*(x)$). Итак, мы пришли к задаче об отыскании аналитической в области D_+ функции $f = u + iv$ по условиям (3), (5), (7).

Рассмотрим сначала некоторые частные случаи.

а) Выполняются равенства

$$m_1 n_2 = n_1 m_2, \quad p_1 q_2 = q_1 p_2. \quad (12)$$

Тогда существуют функции λ, μ , с помощью которых второе условие (7) записывается в форме

$$\lambda(x) \left[m_1(x) u \left(\frac{1}{2} + x, 0 \right) + n_1(x) v \left(\frac{1}{2} + x, 0 \right) \right] - \\ - \mu(x) \left[p_1(x) u \left(\frac{1}{2} - x, 0 \right) + q_1(x) v \left(\frac{1}{2} - x, 0 \right) \right] = \omega_2^*(x). \quad (13)$$

Это соотношение вместе с первым условием (7) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно функций, стоящих в квадратных скобках формулы (13). Указанная система однозначно разрешима, если $\lambda(x) \neq \mu(x)$ (нетрудно выразить это условие через коэффициенты соотношений (7)). Таким образом, мы приходим к задаче Гильберта с разрывными коэффициентами для области D_+ . Путем конформного отображения можно преобразовать область D_+ в полукруг с условием, что отрезок $[0, 1]$ перейдет в себя [4] (см. также [5, с. 11]). Полное исследование вопросов разрешимости такой задачи для полукруга дается в статье Ф. И. Карамышева [6]. Определив $u(x, y)$ в D_+ , мы затем с помощью условий (2) получим в области D_- хорошо известную задачу Коши для уравнения колебаний струны.

Отметим, что равенства (12) в исходных данных имеют вид

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} g_1 & g_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| = 0, \quad (14)$$

$$\left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ f_1 & f_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ f_1 & f_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \\ d_1 & d_2 \end{array} \right| = 0.$$

б) Пусть теперь

$$m_1 n_2 \neq n_1 m_2,$$

$$p_1 n_2 - n_1 p_2 = m_1 q_2' - q_1 m_2, \quad m_1 p_2 - p_1 m_2 = n_1 q_2 - q_1 n_2. \quad (15)$$

Из (7) найдем

$$u\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) + iv\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) = \quad (16)$$

$$= G(x) \left[u\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) + iv\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) \right] + g(x),$$

$$G(x) = \frac{p_1 n_2 - n_1 p_2 + i(m_1 p_2 - p_1 m_2)}{m_1 n_2 - n_1 m_2},$$

$$g(x) = \frac{n_2 \omega_1^* - n_1 \omega_2^* + i(m_1 \omega_2^* - m_2 \omega_1^*)}{m_1 n_2 - n_1 m_2}.$$

Сделав преобразование $z_1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2$, мы придем к задаче

Гильберта для кусочно-аналитической функции, решение которой может быть найдено методом, изложенным в книге Ф. Д. Гахова [7, с. 462]. Аналогично можно рассуждать в случае, если первое условие в (15) заменено на

$$p_1 q_2 \neq q_1 p_2, \quad (17)$$

а остальные два сохраняются.

в) Если одновременно имеют место условия (17) и первое из (15), то при выполнении равенств

$$p_1 m_2 = m_1 p_2, \quad q_1 m_2 = m_1 q_2, \quad (18)$$

$$p_1 n_2 = n_1 p_2, \quad q_1 n_2 = n_1 q_2$$

мы можем найти

$$u(x, 0) = r(x), \quad v(x, 0) = s(x), \quad x \in [0, 1], \quad (19)$$

где r, s — вполне определенные функции, непрерывные на отрезках $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Следовательно, мы приходим к задаче для аналитической функции $f = u + iv$ с условиями (3), (5), (19). Считая опять σ полуокружностью, продолжим $f(z)$ на всю верхнюю полуплоскость по принципу симметрии (это возможно в силу (5)). При этом получим, что

$$v(x, 0) = s\left(\frac{x}{2x-1}\right), \quad x \notin [0, 1].$$

Задача с этим условием и первым условием (19) есть фактически задача (1.28) — (1.29) из работы [5, с. 12]. Поэтому с помощью формулы (1.30) из указанной работы найдем

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left[\frac{r(t)}{t-z} - \frac{s(t)}{t+z-2tz} \right] dt.$$

Вещественная часть этой функции и дает решение (единственное) нашей задачи в D_+ . Второе соотношение (19) превращается в условие разрешимости:

$$s(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x(1-x)}{t(1-t)}} \left[\frac{s(t)}{t+x-2tx} - \frac{r(t)}{t-x} \right] dt.$$

Вернемся к общему случаю. Будем пока считать σ полукругностью. Вводя новую искомую функцию

$$f_1(z) = f\left(z + \frac{1}{2}\right) = u\left(x + \frac{1}{2}, y\right) + iv\left(x + \frac{1}{2}, y\right) = u_1(x, y) + iv_1(x, y),$$

получим из (7)

$$m_k(x) u_1(x, 0) + n_k(x) v_1(x, 0) - p_k(x) u_1(-x, 0) - q_k(x) v_1(-x, 0) = \omega_k^*(x), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

Очевидно, функцию $f_1(z)$ следует отыскивать внутри полукругности, ограниченной дугой $\sigma_1: |z| = \frac{1}{2}; \operatorname{Im} z \geq 0$ и отрезком $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ оси x , причем $u_1 = 0$ на σ_1 . Продолжая $f_1(z)$ по принципу симметрии, имеем

$$-m_k\left(\frac{1}{4x}\right) u_1(x, 0) + n_k\left(\frac{1}{4x}\right) v_1(x, 0) + p_k\left(\frac{1}{4x}\right) u_1(-x, 0) - q_k\left(\frac{1}{4x}\right) v_1(-x, 0) = \omega_k^*\left(\frac{1}{4x}\right), \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию $W = \xi + i\eta = z^2$, отображающую полуплоскость $\operatorname{Im} z \geq 0$ на плоскость с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси. Если через $F^+(\xi)$ ($F^-(\xi)$) обозначим граничное значение функции $F(W) = f_1(\sqrt{W})$ сверху (снизу) от вещественной полуоси $\xi \geq 0$, то условия (20) — (21) запишутся в форме

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ [m_k(-\sqrt{\xi}) - in_k(-\sqrt{\xi})] F^-(\xi) \} - \\ & - \operatorname{Re} \{ [p_k(-\sqrt{\xi}) - iq_k(-\sqrt{\xi})] F^+(\xi) \} = \omega_k^*(-\sqrt{\xi}), \quad (22) \\ & \xi \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \left[m_k \left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}} \right) + in_k \left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}} \right) \right] F^- (\xi) \right\} - \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \left[p_k \left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}} \right) + iq_k \left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}} \right) \right] F^+ (\xi) \right\} = -\omega_k^* \left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}} \right), \\ & \xi = \left[\frac{1}{4}, \infty \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Итак, мы пришли к некоторой задаче для разомкнутого контура. Будем искать функцию $F(W)$ в виде интеграла типа Коши с неизвестной плотностью

$$F(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\rho(t) + i\delta(t)}{t-W} dt, \quad (24)$$

где $\rho(\xi)$, $\delta(\xi)$ — вещественны. Вычислив по формулам Сохоцкого граничные значения функции $F(W)$ и подставив их в (22) — (23), придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} A_0(-\sqrt{\xi})\psi(\xi) + \frac{B_0(-\sqrt{\xi})}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\psi(t) dt}{t-\xi} = -\Omega(-\sqrt{\xi}), \\ \xi \in \left[0, \frac{1}{4} \right]; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} A_1\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right)\psi(\xi) + \frac{1}{\pi} B_1\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right) \int_0^{\infty} \frac{\psi(t) dt}{t-\xi} = \Omega\left(-\frac{1}{4\sqrt{\xi}}\right), \\ \xi \in \left[\frac{1}{4}, \infty \right); \end{aligned}$$

$$A_k(\xi) = \left\| \begin{array}{l} m_1(\xi) + p_1(\xi), (-1)^k [n_1(\xi) + q_1(\xi)] \\ m_2(\xi) + p_2(\xi), (-1)^k [n_2(\xi) + q_2(\xi)] \end{array} \right\|,$$

$$B_k(\xi) = \left\| \begin{array}{l} (-1)^k [n_1(\xi) - q_1(\xi)], p_1(\xi) - m_1(\xi) \\ (-1)^k [n_2(\xi) - q_2(\xi)], p_2(\xi) - m_2(\xi) \end{array} \right\|, \quad (k=0, 1) \quad (26)$$

$$\psi(\xi) = \begin{bmatrix} \rho(\xi) \\ \delta(\xi) \end{bmatrix}, \quad \Omega(\xi) = \begin{bmatrix} 2\omega_1^*(\xi) \\ 2\omega_2^*(\xi) \end{bmatrix}.$$

Такая система изучается в книге Н. П. Векуа [8] при условиях

$$\det(A_k \pm iB_k) \neq 0, \quad k=0, 1. \quad (27)$$

С помощью (26) убеждаемся, что эквивалентом этих условий является невозможность одновременного выполнения равенств

$$\begin{aligned} m_1 q_2 + p_1 n_2 &= q_1 m_2 + n_1 p_2, \\ m_1 p_2 + n_1 q_2 &= p_1 m_2 + q_1 n_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Как известно, системы уравнений вида (25) в явном виде решаются лишь в частных случаях. Простейшим из них является случай выполнения одной из следующих четырех пар условий:

$$m_k \pm p_k \equiv 0, \quad n_k \mp q_k \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad (29)$$

ибо тогда матрицы A_k , B_k оказываются треугольными. При

$$\alpha_0(x) \neq 0 \quad (30)$$

это будет иметь место, если хотя бы для одного значения $k = 1, 2$ удовлетворяются соотношения

$$b_k + d_k \equiv e_k - g_k \equiv f_k - c_k \quad (31)$$

или

$$-b_k - d_k \equiv c_k + f_k \equiv 2a_k + e_k + g_k. \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что условия (14), вообще говоря, не зависят от выполнения (31) — (32). Действительно, например, при

$$a_k \equiv b_k \equiv d_k \neq 0, \quad c_k \equiv e_k \equiv g_k \equiv f_k \equiv 0$$

первые выполнены, а вторые — нет.

Отметим также, что одновременная невозможность равенств (28) не является необходимым условием разрешимости задачи. В самом деле, при условиях (18) оба соотношения (28) имеют место, но задача, как мы видели, может быть разрешима.

При сведении задачи к системе (25) мы предполагали, что D_+ является полукругом. В общем случае после получения условия (20) нужно перейти в плоскость $z_1 = z^2$. Линия σ при этом перейдет в замкнутый контур, ограничивающий некоторую область. По теореме Римана существует функция $W = \omega(z_1)$, отображающая конформно эту область на круг Γ . Разрез $0 \leq \operatorname{Re} z_1 \leq \frac{1}{4}$ перейдет в линию l . Пусть $\gamma(W)$ — функция, обратная к $\omega(z^2)$. Тогда для функции $F(W) = f_1[\gamma(W)]$ мы получим из (20) условие вида

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \{ [m_k^*(\tau) - in_k^*(\tau)] F^-(\tau) \} - \\ &- \operatorname{Re} \{ [p_k^*(\tau) - iq_k^*(\tau)] F^+(\tau) \} = \omega_k^*[\gamma(\tau)], \\ &\tau \in l, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

причем F^+ (F^-) есть предельное значение F слева (справа), если идти вдоль l от конца, являющегося образом точки

$z_1 = 0$, а коэффициенты в левой части вычислены по правилу $\Phi^*(\tau) = \Phi[\gamma(\tau)]$. Пользуясь условием $\text{Re } F(W) = 0$ на Γ , мы по принципу симметрии продолжим $F(W)$ на всю плоскость и получим на линии l^* , симметричной относительно Γ с кривой l , соотношение, играющее роль (23). Отыскивая затем $F(W)$ в виде

$$F(W) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l \cup l^*} \frac{\rho(\tau) + i\delta(\tau)}{\tau - W} d\tau,$$

мы опять приходим к системе сингулярных интегральных уравнений. В случае симметричности σ относительно прямой $\text{Re } z = \frac{1}{2}$ всегда можно добиться, чтобы линия $l \cup l^*$ была частью вещественной оси, то есть система уравнений будет иметь вид (25) с интегралом, взятым в соответствующих пределах.

В наших рассуждениях мы также предполагали выполнение условий (11) и (30). Но из (2) видно, что в случае $\alpha_1 = \alpha_0 \neq 0$ условия (4) являются лишними. Если же $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$, то в формуле (6) отсутствует функция v и при выполнении условия $m_1 p_2 \neq p_1 m_2$ дело сведется к обычной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами. При $\alpha_0 \equiv 0$, $\alpha_1 \neq 0$ и условии $n_1 q_2 \neq q_1 n_2$ тоже получается задача Гильберта.

Укажем еще некоторые задачи, допускающие исследование изложенным выше способом.

В качестве первой из них возьмем задачу, отличающуюся от нашей тем, что второе условие (4) заменено следующей комбинацией производных по нормальям к линиям $y = 0$ и $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & a_2 \frac{\partial u\left(\frac{1}{2}, y\right)}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u\left(\frac{1}{2} + y, 0\right)}{\partial y} + \\ & + d_2 \frac{\partial u\left(\frac{1}{2} - y, 0\right)}{\partial y} = h_2(y), \quad y \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]. \end{aligned} \quad (33)$$

При этом предполагается, что α_0 , a_2 , b_2 , d_2 являются постоянными. Мы не включаем в это условие нормальные производные на линиях AC и CB , потому что они, как нетрудно видеть, оказываются постоянными. Если подставить в (33) значение функции $u(x, y)$ из формулы (6), а затем проинтегрировать полученное равенство в пределах от $-\frac{1}{2}$ до x , то найдем

$$\begin{aligned} & \alpha_0 a_2 u\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) - \alpha_1 (a_2 + 2b_2) v\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) - \\ & - \alpha_0 a_2 u\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) - \alpha_1 (a_2 - 2d_2) v\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) = h^*(x), \\ & x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \end{aligned}$$

где $h^*(x)$ — вполне определенная функция; при этом еще предполагается $a_2 \neq 0$, что позволяет с помощью (10) найти $v(1, 0)$. Последняя формула заменяет второе из условий (7), а все дальнейшие рассуждения можно провести по изложенной выше схеме.

Наконец, пусть рассматривается задача, изучавшаяся в статье автора [9]. Она была сведена к задаче об отыскании аналитической функции $F = u + iv$ в области D_+ по условиям (см. [9], формулы (3), (9)):

$$u|_{\sigma} = 0,$$

$$\begin{aligned} & m(x)u(x, 0) + n(x)v(x, 0) + p(x)u(1-x, 0) + \\ & + q(x)v(1-x, 0) = g(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Взяв последнее условие сначала на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, а затем на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и заменив в первом случае x на $\frac{1}{2} + x$, а во втором — x на $\frac{1}{2} - x$, найдем

$$\begin{aligned} & m\left(x + \frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) + n\left(x + \frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) + \\ & p\left(x + \frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) + q\left(x + \frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) = \\ & = g\left(x + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & p\left(\frac{1}{2} - x\right)u\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) + q\left(\frac{1}{2} - x\right)v\left(\frac{1}{2} + x, 0\right) + \\ & + m\left(\frac{1}{2} - x\right)u\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) + n\left(\frac{1}{2} - x\right)v\left(\frac{1}{2} - x, 0\right) = \\ & = g\left(\frac{1}{2} - x\right), \end{aligned}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Получили соотношения вида (7), к которым можно применить рассуждения настоящей статьи. Например, условия (12) приобретают вид

$$\begin{aligned}m\left(\frac{1}{2} + x\right)q\left(\frac{1}{2} - x\right) &= n\left(\frac{1}{2} + x\right)p\left(\frac{1}{2} - x\right), \\p\left(\frac{1}{2} + x\right)n\left(\frac{1}{2} - x\right) &= q\left(\frac{1}{2} + x\right)m\left(\frac{1}{2} - x\right), \\x &\in \left[-\frac{1}{2}, 0\right].\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии. — Ученые записки КГУ. Т. 122, кн. 3, 1962, с. 3—16.
2. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. — Дифференциальные уравнения. Т. 5, № 1, 1969, с. 44—59.
3. Каратоprakлиев Г. Об одном обобщении задачи T для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} u u_{yy} = 0$. — ДАН СССР. Т. 151, № 6, 1963, с. 1271—1273.
4. Каратеодори К. Конформное отображение. Пер. с англ. М. — Л., 1934.
5. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа — Труды математического ин-та АН СССР. Т. 41, 1953.
6. Карамышев Ф. И. Об одной краевой задаче для системы смешанного типа. — Труды Новочеркасского политехнического ин-та. Т. 109, 1960, с. 25—35.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., «Наука», 1977.
8. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М. — Л., ГИТТЛ, 1950.
9. Жегалов В. И. Задача типа Трикоми с пятью смещениями в гиперболической части области. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 15. Изд-во Казанского ун-та, 1978, с. 61—65.

Доложено на семинаре 9 декабря 1978 г.

УДК 517.54

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ s В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Л. Н. Журбенко

Фундаментальное решение обратной краевой задачи об отыскании конечной m -связной области со спрямляемой границей по заданным граничным значениям аналитической в ней функции [см. 1, с. 75] получено в работах [18, 19]. В данной работе рассматривается задача, когда исходные функции от дуговой абсциссы удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование общего решения задачи [2]. Показана устойчивость решения задачи, принадлежащего определенному классу, на паре пространств $(C^{(1)}, \tilde{C})$, (\tilde{C}, \tilde{C}) , где \tilde{C} — пространство абсолютно непрерывных функций, причем во втором случае необходимо дополнительное ограничение на исходные функции. Переход от односвязного случая, исследовавшегося в [3], к многосвязному приводит к дополнительным трудностям при выделении классов корректности и доказательстве теорем.

Пусть на интервалах $[0, l_k]$ заданы непрерывно дифференцируемые функции $w = f_k(s_k) = u_k(s_k) + iv_k(s_k)$, $k = \overline{1, m}$, $(f_k(s_k) \in C^{(1)})$, для которых выполняются следующие условия:

$a_1)$ уравнения $w = f_k(s_k)$ при $k = \overline{1, m}$ задают в плоскости w m простых замкнутых непересекающихся между собой контуров L_{wk} , причем контур L_{w1} схватывает остальные;

$b_1)$ обход $L_w = \bigcup_{k=1}^m L_{wk}$ при возрастании s_k совершается так, чтобы конечная область D_w с границей L_w оставалась слева;

$b_1) f'(s_k) \neq 0$ на $[0, l_k]$, $k = \overline{1, m}$.

Задача 1 [ср. 1, 2]. Найти конечную m -связную область D_z , ограниченную спрямляемыми контурами L_{zk} ,

$k = \overline{1, m}$, так, чтобы аналитическая функция $w(z)$, непрерывная вплоть до границы $L_z = \bigcup_{k=1}^m L_{zk}$, конформно отображала D_z на область D_w плоскости w и

$$w(z)|_{L_{zk}} = f_k(s_k) = u_k(s_k) + i v_k(s_k), \quad k = \overline{1, m}, \quad 0 \leq s_k \leq l_k,$$

где s_k — дуговая абсцисса контура L_{zk} .

В односвязном случае условия, подобные $a_1) - \sigma_1)$ на исходную непрерывно дифференцируемую функцию, обеспечивали при разбиении множества решений на классы единственности устойчивость решения на паре пространств $(C^{(1)}, \tilde{C})$. В многосвязном случае картина усложняется.

Решение поставленной задачи не является единственным [2]. Оно находится с помощью однолистного отображения функцией $w = \omega(\zeta)$ области D_w на круговую область D_ζ — круг $|\zeta| < 1$ с $m - 1$ круговыми вырезами $|\zeta - a_k| < R_k$, $k = \overline{2, m}$, такого, что контур L_{w1} переходит в $|\zeta| = 1$ и

$$a_m = 0, \quad f_1(0) = \omega(1). \quad (1)$$

Обозначим $|\zeta - a_k| = R_k$ через $L_{\zeta k}$, $L_\zeta = \bigcup_{k=1}^m L_{\zeta k}$.

Под решением при этом понимаем регулярную функцию $z(\zeta)$, конформно отображающую круговую область D_ζ на искомую область D_z . Обозначим через $s_k(\theta_k)$ непрерывную монотонную функцию [ср. 3], определяемую зависимостью

$$f_k(s_k) = \omega(a_k + R_k e^{i\theta}), \quad k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$s_k(\beta_k) = 0, \quad s_k(\beta_k + 2\pi) = l_k, \quad \beta_1 = 0.$$

По [2] функция $s_k(\theta_k)$ имеет суммируемую производную и $\ln s'_k(\theta_k)$ является также функцией суммируемой. [Хотя накладываемые на функции $f_k(s_k)$ требования являются более узкими, чем в [2], непрерывности $\ln s'_k(\theta_k)$ они не обеспечивают ($\omega'(\zeta)$ может обращаться в нуль на границе).

Пусть $F_k(\zeta, \zeta_k)$, $\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}$, $k = \overline{1, m}$ — функции из [5], однолистно отображающие D_ζ на области D_{tk} — полуплоскость $\operatorname{Re} t > 0$ с $m - 1$ конечными прямолинейными разрезами, параллельными $\operatorname{Re} t = 0$ так, что $L_{\zeta k}$ переходит в $\operatorname{Re} t = 0$. Кроме того, в области $(1 - \varepsilon)^{-q+1} R_k < |\zeta - a_k| < R_k (1 + \varepsilon)^q$ с $q = 0$ при $k = 1$, $q = 1$ при $k = \overline{2, m}$ и достаточно малом ε имеем разложение [5]:

$$F_k(\zeta, a_k + R_k e^{i\theta}) = (-1)^q \frac{\zeta + R_k e^{i\theta} - a_k}{R_k e^{i\theta} - \zeta + a_k} + \psi_k(\zeta, a_k + R_k e^{i\theta}). \quad (3)$$

Здесь $\psi_k(\zeta, \zeta_k)$, $\zeta_k = a_k + R_k e^{i\theta}$ — однозначная функция, непрерывная по ζ_k и регулярная в кольце $R_k(1 - \varepsilon) < |\zeta - a_k| < R_k(1 + \varepsilon)$, причем при $\zeta \in (|\zeta - a_k| = R_k)$ она принимает чисто мнимые значения и нормирована разложением [6]:

$$\psi_k(\zeta, \zeta_k) = \dots + \frac{c_{-1}(\zeta_k)}{\zeta - a_k} + c_1(\zeta_k)(\zeta - a_k) + \dots \quad (4)$$

Тогда решение $z(\zeta)$ записывается [2] в виде

$$z(\zeta) = e^{i\alpha} \int_0^\zeta \exp \chi(\zeta) d\zeta + c \quad (5)$$

(α — действительная, c — комплексная постоянные),

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) = & \lambda \ln \zeta + \sum_{k=2}^m \alpha_k \ln [\Theta_k(\zeta)] + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} \ln (|\zeta_k|^{-\lambda} s'_k(\theta_k) q_k^{-\alpha_k}) F_k(\zeta, \zeta_k) d\theta_k - \\ & - \mu + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} F_k(\zeta, \zeta_k) d\psi_k(\theta_k) - \tilde{\mu}. \end{aligned} \quad (6)$$

В формулу входят следующие дополнительные функции и постоянные. Неоднозначные аналитические функции $\Theta_k(\zeta)$ не обращаются в нуль в D_ζ , причем $|\Theta_k(\zeta_j)| = 1$, $|\Theta_k(\zeta_k)| = q_k$, $0 < q_k < 1$, и при обходе k -ой окружности в положительном направлении $\arg \Theta_k(\zeta)$ изменяется монотонно и получает приращение 2π [7]. Целые положительные числа λ и α_k ($k = \overline{2, m}$) должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \mu = & \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} \ln (|\zeta_k|^{-\lambda} s'_k(\theta_k) q_k^{-\alpha_k}) \operatorname{Re} F_k(\zeta_j, \zeta_k) d\theta_k = \\ = & \sum_{k=2}^m \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_k}^{\beta_k + 2\pi} \ln (|\zeta_k|^{-\lambda} s'_k(\theta_k) q_k^{-\alpha_k}) \operatorname{Re} F_k(\zeta_1, \zeta_k) d\theta_k, \quad j = \overline{2, m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Это необходимое условие разрешимости поставленной задачи [2]. Постоянная $\tilde{\mu}$ определяется как

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} \operatorname{Re} F_k(\zeta_j, \zeta_k) d\psi_k(\theta_k) = \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{2\pi} \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} \operatorname{Re} F_k(\zeta_1, \zeta_k) d\psi_k(\theta_k), \quad j = \overline{2, m}; \end{aligned} \quad (8)$$

$\psi_k(\theta_k)$, $k = \overline{1, m}$ — невозрастающие функции с производной, почти всюду равной нулю.

Для замкнутости контуров L_{zk} , $k = \overline{1, m}$, необходимо, кроме того, выполнение условий

$$\int_{L_{zk}} \exp \chi(\zeta_k) d\zeta_k = 0, \quad k = \overline{2, m}. \quad (9)$$

Таким образом, в отличие от односвязного случая имеем условия разрешимости (7), (9), которые явно не выражаются через исходные функции $f_k(s_k)$, $k = \overline{1, m}$, поэтому можно говорить даже в случае обеспечения единственности решения задачи только о его условной корректности [8, с. 18].

Видоизменив задачу 1, можно избавиться от условий (7), но условия разрешимости (9) останутся, в отличие от задачи с параметром $x = \operatorname{Re} z$ [4, 9]. Предположим, что задали функции $f_k^*(s_k^*) \in C^{(1)}$, $0 \leq s_k^* \leq l_k^*$, $k = \overline{1, m}$, причем дуговая абсцисса s_k связана с s_k^* равенством $s_k = s_k^* c_k$, где c_k — некоторые постоянные, $k = \overline{1, m}$, $c_1 = 1$. Функции $f_k^*(s_k^*)$ удовлетворяют условиям $a_1) - v_1)$.

Задача 2. Найти конечную m -связную область D_z со свойствами, указанными в задаче 1, если для обратной к $w(z)$ функции $z = g(w)$ предполагается однозначность $\ln g'(w)$ и

$$w(z) |_{L_{zk}} = f_k^*(s_k^*) = u_k^*(s_k^*) + i v_k^*(s_k^*), \quad k = \overline{1, m}, \quad 0 \leq s_k^* \leq l_k^*.$$

Функции $s_k^*(\theta_k)$ определяются тогда из равенств

$$f_k^*(s_k^*) = \omega(\alpha_k + R_k k^{i\theta}), \quad k = \overline{1, m}, \quad (10)$$

и решение имеет вид (5), (6), где

$$\ln s_k'(\theta_k) = \ln s_k^{*'}(\theta_k) + \ln c_k, \quad \lambda = \alpha_k = 0, \quad k_k^* = \overline{1, m},$$

а постоянные c_k являются решениями системы (7).

Вместо предположения однозначности $\ln g'(w)$, обеспечивающего равенство нулю λ , α_k , в условии задачи 2 можно задать постоянные q_k , λ , α_k , $k = \overline{1, m}$.

Для исследования устойчивости решений задач 1, 2 введем при выполнении условий разрешимости (7), (9) для задачи 1 и (9) для задачи 2 класс решений $\mathfrak{R}(\psi)$, $\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$. Для него функции $\psi_k(\theta_k)$, $k = \overline{1, m}$, удовлетворяющие (8), отличаются лишь на постоянную, q_k, λ, α_k фиксированы. В классе $\mathfrak{R}(\psi)$ решение задач 1, 2 единственно. При $\psi_k(\theta_k) \equiv \text{const}$, $k = \overline{1, m}$, назовем решение фундаментальным, аналогично односвязному случаю [10, 11]. И именно такое решение получится при постановке задачи, обеспечивающей единственность решения [1].

Кроме того, по [2] имеем, что $z'(\zeta) \in H_1$:

$$\lim_{\rho \rightarrow R_k} \int_{-\pi}^{\pi} |z'(a_k + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq H(z') < \infty, k = \overline{1, m},$$

а $z(\zeta)$ является функцией абсолютно непрерывной при $\zeta \in L_\zeta$.

Соответствующий класс функций $f_k(s_k)$, $0 \leq s_k \leq l_k$, $k = \overline{1, m}$, из пространства $C^{(1)}$ с условиями $a_1) - \delta_1)$, для которых решение задач 1, 2 существует и принадлежит $\mathfrak{R}(\psi)$, обозначим через $C^{(1)}(\psi)$.

Определение 1. Решение $z(\zeta) \in \mathfrak{R}(\psi)$ задач 1, 2 называется устойчивым, если из равенств

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{kn}(s_k) - f_k(s_k)\|_{C^{(1)}} = 0, s_k \in [0, l_k], k = \overline{1, m}, \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\omega_0) = g(\omega_0), \lim_{n \rightarrow \infty} \arg g'_n(\omega_0) = \arg g'(\omega_0), \omega_0 \in D_\omega, \quad (12)$$

следуют равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n[h_{kn}(e^{i\theta})] - z[h_k(e^{i\theta})]\|_C = 0, \theta \in [0, 2\pi], \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n(\zeta) - z(\zeta)\|_C = 0, \zeta \in \overline{D_\zeta^*} \subset D_\zeta. \quad (14)$$

Условие (14) и функции $\zeta = h_{kn}(\tau)$, $\zeta = h_k(\tau)$ ($k = \overline{1, m}$; $n = 1, 2, \dots$) необходимо ввести в определение (ср. с определением для односвязного случая из [3, 15]) вследствие несовпадения областей $D_{\zeta n}$, $n = 1, 2, \dots$, D_ζ . Эти функции однолистно отображают области $D_{\zeta n}$, D_ζ на $D_{\tau kn}$, $D_{\tau k}$, которые представляют из себя круг $|\tau| < 1$ с $m - 1$ круговыми вырезами, причем $|\zeta - a_{kn}| = R_{kn}$, $|\zeta - a_k| = R_k$ переходят в $|\tau| = 1$, a_{j^n} , $a_j \rightarrow 0$ ($j \neq k$), $f_{kn}(0) = \omega_n[h_{kn}(1)]$, $f_k(0) = \omega[h_k(1)]$.

Теорема 1. Решение $z(\zeta) \in \mathfrak{R}(\psi)$ задач 1, 2 устойчиво в смысле определения 1, если $f_k(s_k) \in C^{(1)}(\psi)$.

Доказательство. Рассмотрим решение задачи 1 из класса $\mathfrak{R}(\psi)$. Пусть σ_k — дуговая абсцисса контура $L_{\omega k}$. Тогда

$$\ln s'_k(\theta_k) = \ln \varphi'_k[\sigma_k(\theta_k)] + \ln \sigma'_k(\theta_k), \quad \theta_k \in [\beta_k, \beta_k + 2\pi], \quad (15)$$

где $s_k = \varphi_k(\sigma_k)$ — зависимость между дуговыми абсциссами s_k и σ_k , $\sigma'_k(\theta_k) = |\omega'(\zeta)|_{\zeta \in L_{\zeta k}}$. Аналогично имеем при исходных функциях $f_{kn}(s_k)$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\ln s'_{kn}(\theta_{kn}) = \ln \varphi'_{kn}[\sigma_{kn}(\theta_{kn})] + \ln \sigma'_{kn}(\theta_{kn}), \quad (16)$$

$$\theta_{kn} \in [\beta_{kn}, \beta_{kn} + 2\pi], \quad s_{kn}(\beta_{kn}) = 0, \quad s'_{kn}(\beta_{kn} + 2\pi) = l.$$

При условии (11) и свойстве a_1 получаем [см. 3, 4], что на $[\beta_k, \beta_k + 2\pi]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\ln \varphi'_{kn}[\sigma_{kn}(\gamma_{1kn}\theta_k + \gamma_{2kn})] - \ln \varphi'_k[\sigma_k(\theta_k)]\|_C = 0, \quad (17)$$

где $\gamma_{1kn}\theta_k + \gamma_{2kn}$ — линейная функция, переводящая β_{kn} в β_k , $\beta_{kn} + 2\pi$ в $\beta_k + 2\pi$.

Для функций $f_{kn}(s_k)$, $f_k(s_k)$ из класса $C^{(1)}(\psi)$ имеем принадлежность областей D_{wn} , D_w классу Смирнова [12], то есть справедливы формулы

$$\ln \omega'_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi} \ln \sigma'_{kn}(\theta_{kn}) F_{kn}(\zeta, \zeta_{kn}) d\theta_{kn} - \nu_n + i\tilde{\beta}_n, \quad (18)$$

$$\ln \omega'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} \ln \sigma'_k(\theta_k) F_k(\zeta, \zeta_k) d\theta_k - \nu + i\tilde{\beta} \quad (19)$$

с постоянными $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\beta}$ и

$$\nu_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi} \ln \sigma'_{kn}(\theta_{kn}) \operatorname{Re} F_{kn}(\zeta_{jn}, \zeta_{kn}) d\theta_{kn}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (20)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} \ln \sigma'_k(\theta_k) \operatorname{Re} F_k(\zeta_j, \zeta_k) d\theta_k, \quad j = \overline{1, m}. \quad (21)$$

Из равномерной сходимости внутри D_ζ функций $\omega_n(\zeta)$ к $\omega(\zeta)$ при $n \rightarrow \infty$ [4] следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\ln \omega'_n(\zeta) - \ln \omega'(\zeta)\|_C = 0, \quad \zeta \in \overline{D_\zeta} \subset D_\zeta. \quad (22)$$

Используя формулы (15), (16), (18), (19) и выражение (6) для функции $\chi(\zeta)$, имеем

$$\chi_n(\zeta) = \lambda \ln \zeta + \sum_{k=2}^m \alpha_k \ln \theta_{kn}(\zeta) + \quad (23)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi} \ln(|\zeta_{kn}|^{-\lambda} \varphi'_{kn}[\sigma_{kn}(\theta_{kn})] q_k^{-\alpha_k}) F_{kn}(\zeta, \zeta_{kn}) d\theta_{kn} -$$

$$- \mu_n + \nu_n + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi} F_{kn}(\zeta, \zeta_{kn}) d\psi_k(\theta_{kn}) - \tilde{\mu}_n + \ln \omega'_n(\zeta) - i\tilde{\beta}_n,$$

$$\chi(\zeta) = \lambda \ln \zeta + \sum_{k=2}^m \alpha_k \ln \theta_k(\zeta) + \quad (24)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} \ln(|\zeta_k|^{-\lambda} \varphi'_k[\sigma_k(\theta_k)] q_k^{-\alpha_k}) F_k(\zeta, \zeta_k) d\theta_k -$$

$$- \mu + \nu + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_k}^{\beta_k+2\pi} F_k(\zeta, \zeta_k) d\psi_k(\theta_k) - \tilde{\mu} + \ln \omega'(\zeta) - i\tilde{\beta}.$$

Для функций, представляющих собой третье слагаемое в (23), при условии (17), следуя доказательству основной теоремы в [4], получаем равномерную сходимость внутри D_ζ при $n \rightarrow \infty$ к третьему слагаемому в (24). Разность постоянных $\mu_n - \nu_n$ вследствие (20), (21) представляется формулой

$$\mu_n - \nu_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi} \ln(|\zeta_k|^{-\lambda} \varphi'_{kn}[\sigma_{kn}(\theta_{kn})] q_k^{-\alpha_k}) \operatorname{Re} F_{kn}(\zeta_{jn}, \zeta_{kn}) d\theta_{kn}$$

и также сходится к разности $\mu - \nu$, записанной аналогичной формулой. Изученные в [4] свойства функций $F_{kn}(\zeta, \zeta_{kn})$, $F_k(\zeta, \zeta_k)$ позволяют, кроме того, сделать вывод о равномер-

ной сходимости внутри D_ζ интеграла $(2\pi)^{-1} \int_{\beta_{kn}}^{\beta_{kn}+2\pi} F_{kn}(\zeta, \zeta_{kn}) \times$

$\times d\psi_k(\theta_{kn})$ к соответствующему интегралу в (24) и $\tilde{\mu}_n$ к $\tilde{\mu}$ (в случае фундаментального решения $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu} = 0$). Для функций $\theta_{kn}(\zeta)$, $\theta_k(\zeta)$, конформно отображающих области D_{ζ_n} , D_ζ соответственно на кольца $q_k < |\zeta| < 1$, $k = \overline{2, m}$, заключаем о равномерной сходимости внутри D_ζ путем отображения

кольца на круговую m -связную область и применения теоремы о ядерной сходимости [13, с. 226]. Если теперь учесть равенство (22), то из формул (23), (24) получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\exp \chi_n^*(\zeta) - \exp \chi^*(\zeta)\|_C = 0, \quad \zeta \in \overline{D}_\zeta \subset D_\zeta,$$

где

$$\chi_n^*(\zeta) = \chi_n(\zeta) + i\tilde{\beta}_n, \quad \chi^*(\zeta) = \chi(\zeta) + i\tilde{\beta}.$$

Вследствие формулы (5) можно записать, что

$$z'_n(\zeta) = e^{i(\alpha_n - \tilde{\beta}_n)} \exp \chi_n^*(\zeta), \quad z'(\zeta) = e^{i(\alpha - \tilde{\beta})} \exp \chi^*(\zeta),$$

поэтому условие (12) обеспечивает сходимость $\alpha_n - \tilde{\beta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha - \tilde{\beta}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z'_n(\zeta) - z'(\zeta)\|_C = 0, \quad \zeta \in \overline{D}_\zeta \subset D_\zeta$. Таким образом, условие (14) доказано.

Используя далее равенство на $|\zeta| = 1$

$$\int_0^{2\pi} |z'_n(e^{i\theta_1})| d\theta_1 = \int_0^{2\pi} |z'(e^{i\theta_1})| d\theta_1 = l_1$$

и принадлежность функций $z'_n(\zeta), z'(\zeta)$ классу H_1 , имеем по теореме 8 из [14], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z'_n(e^{i\theta_1}) - z'(e^{i\theta_1})\|_{L_1} = 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi]. \quad (25)$$

Теперь необходимо провести рассуждения, аналогичные [3], для круговой области $D_\zeta(\varepsilon_k)$, полученной из D_ζ путем выбрасывания колец $R_k < |\zeta - a_k| \leq R_k + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0$ — достаточно малые числа, $k = 2, m$, откуда получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n(e^{i\theta_1}) - z(e^{i\theta_1})\|_C = 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi]. \quad (26)$$

Условия (25), (26) равносильны выполнению (13) для $k = 1$. При $k = 2, m$ доказательство повторяется для функций $z_n[h_{kn}(\tau)], z[h_k(\tau)]$ [см. 4]. Теорема доказана для случая задачи 1. Устойчивость решения $z(\zeta) \in \mathfrak{R}(\psi)$ задачи 2 следует из вышеприведенных выводов и сходимости постоянных c_{kn} к c_k при $n \rightarrow \infty$, определяемых из систем вида (7) [см. 4].

Рассмотрим теперь несколько более широкий класс функций $f_k(s_k), s_k \in [0, l_k], k = 1, m$, также соответствующий классу решений $\mathfrak{R}(\psi)$. Это приведенный в [2] класс абсолютно непрерывных функций с условиями

$$\begin{aligned} a_2) &= a_1); \\ b_2) &= b_1); \end{aligned}$$

$v_2) f'_k(s_k) \neq 0$ почти всюду на $[0, l_k]$, $k = \overline{1, m}$;
 $z_2) |f'_k(s_k)| < M_k$ почти всюду на $[0, l_k]$, $k = \overline{1, m}$.

Определение 2. Решение $z(\zeta) \in \mathfrak{R}(\psi)$ задач 1, 2 называется устойчивым, если из равенств (12) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{kn}(s_k) - f_k(s_k)\|_C = 0, \quad s_k \in [0, l_k], \quad k = \overline{1, m}, \quad (28)$$

следует выполнение (13), (14).

Чтобы доказать устойчивость решения $z(\zeta) \in \mathfrak{R}(\psi)$, в смысле определения 2, приходится выбрать из указанного выше класса функций $f_k(s_k)$ подкласс $\tilde{C}(M)$, характеризующийся одной и той же для всего класса постоянной $M = \max M_k$, $k = \overline{1, m}$, и принадлежностью области D_w классу Смирнова [12]. Тогда справедлива

Теорема 2. Решение $z(\zeta) \in \mathfrak{R}(\psi)$ задач 1, 2 устойчиво в смысле определения 2 при $f_k(s_k) \in \tilde{C}(M)$.

Доказательство теоремы 2 будет полностью повторять доказательство теоремы 1, если установим:

1) из любой последовательности семейства

$$\left\{ \int_{\beta_k}^1 \ln \varphi'_{kn} [\sigma_{kn} (\eta_{kn}^1 \theta_k + \eta_{kn}^2)] d\theta_k \right\}$$

можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[\beta_k, \beta_k + 2\pi]$ к абсолютно непрерывной функции;

2) существует множество $E_k(\eta)$ с мерой $mE_k(\eta) > 2\pi - \eta$ (η — как угодно мало), на котором выполняется (17).

Действительно, этими условиями также будет обеспечена равномерная сходимости третьего слагаемого в (23) к соответствующему слагаемому в (24) внутри D_ζ при $n \rightarrow \infty$ благодаря применению схемы доказательства из [3].

Учитывая [3, 15], заключаем о справедливости свойства 1) в случае, если перенести на круговую многосвязную область частный случай теоремы 3 для единичного круга из [16], т. е. доказать следующую лемму.

Лемма. Пусть $\{u_n(\zeta)\}$ — последовательность гармонических в m -связной круговой области D_ζ функций с граничными значениями $\xi_{kn}(\theta)$, $k = \overline{1, m}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, представимых формулой Грина, причем $\sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} |\xi_{kn}(\theta)| d\theta < M = \text{const}$ и после-

довательность $\int_0^1 \xi_{kn}^+(\theta) d\theta$ равностепенно непрерывна ($\xi_{kn}^+(\theta) =$

$= \{\xi_{kn}(\theta), \xi_{kn}(\theta) > 0; 0, \xi_{kn}(\theta) \leq 0\}$). Если $u_n(\zeta)$ сходится равномерно внутри D_ζ при $n \rightarrow \infty$ к $u(\zeta)$, где $u(\zeta)$ с граничными значениями $\xi_k(\theta)$ представима формулой Грина, то в каждой точке $\gamma \in [0, 2\pi]$ имеем $\int_0^\gamma \xi_{kn}(\theta) d\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\gamma \xi_k(\theta) d\theta, k = \overline{1, m}$.

Справедливость леммы устанавливается методом, применяемым в [14, 17] и заключающемся в конформном отображении универсальной поверхности наложения области D_ζ на единичный круг $|t| < 1$ функцией $\zeta = x(t)$.

В [17] доказана формула

$$\int_0^{2\pi} u_n [x(e^{i\theta})] d\theta = \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} \xi_{kn}(\theta) \frac{\partial g(a_k + R_k e^{i\theta}, \zeta_0)}{\partial n} R_k d\theta,$$

где $g(\zeta, \zeta_0)$ — функция Грина области D_ζ с полюсом ζ_0 , n — внутренняя нормаль, и получена конформная инвариантность формулы Грина

$$u_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} \xi_{kn}(\theta) \frac{\partial g(a_k + R_k e^{i\theta}, \zeta)}{\partial n} R_k d\theta$$

и интеграла Пуассона — Лебега с плотностью $u_n [x(e^{i\theta})]$. Тогда требования леммы обеспечивают выполнение всех условий вышеупомянутой теоремы 3 из [16].

Лемма применяется к функциям $\ln |\omega'_n(\zeta)|, \ln |\omega'(\zeta)|$ в области $D_\zeta(\varepsilon_k)$ и $\ln |\omega'_n[h_{kn}(\tau)]|, \ln |\omega'[h_k(\tau)]|$, рассматриваемым в областях типа $D_\zeta(\varepsilon_k)$. Выполнение требований леммы доказывается подобно [3]. В результате делается вывод о сходимости $\int_{\beta_k}^{\gamma_k} \ln \sigma'_{kn}(\eta_{kn} \theta_k + \eta_{kn}) d\theta_k$ к $\int_{\beta_k}^{\gamma_k} \ln \sigma'_k(\theta_k) d\theta_k$, что используется при доказательстве свойства 1) [см. 3].

Доказательство свойства 2) повторяет доказательство аналогичного свойства из [3].

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. А. Аксентьеву за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казан. ун-та, 1965.
2. Авхадиев Ф. Г., Шабалин П. Л. Об отображениях на многосвязные области, не принадлежащие классу В. И. Смирнова. — Деп. № 2550 — 76.
3. Кузнецова Л. Н. Устойчивость решений внутренних обратных краевых задач. — „Изв. вузов. Математика“, 1976, № 5, с. 43—53.

4. Журбенко Л. Н. Об устойчивости решений обратных краевых задач для многосвязных областей в случае параметра x . — „Изв. вузов. Математика“, 1979, № 2, с. 31—41.

5. Зморевич В. А. Об обобщении интегральной формулы Шварца на n -связные круговые области. — ДАН УРСР, 1958, № 5, с. 489—492.

6. Дундученко Л. О Интеграл Шварца для одного класса функций, регулярных в счетно-связной круговой δ -области. — Математические заметки, т. 12, № 4, 1972, с. 349—354.

7. Дундученко Л. Е. О приведении к однозначному виду некоторых функций, аналитических в конечносвязных областях. — Математический сборник, т. 67, № 1, 1965, с. 3—15.

8. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., „Наука“, 1978.

9. Галимов Р. Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости. Казань, 1970.

10. Андрианов С. Н. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций. — Учен. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, с. 21—30.

11. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах. — Учен. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, с. 9—20.

12. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Аналитические функции в многосвязных областях класса В. Н. Смирнова (класса S). — Изв. АН СССР, сер. матем., 22, 1958, с. 379—386.

13. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1966.

14. Тумаркин Г. Ц. Локальные условия сходимости граничных значений последовательности аналитических функций. — Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., 1961.

15. Аксентьев Л. А., Журбенко Л. Н. Вопросы корректности в обратных краевых задачах. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979, с. 15—28.

16. Тумаркин Г. Ц. Условия равномерной сходимости и сходимости граничных значений аналитических и мероморфных функций с равномерно ограниченными характеристиками. — Сибирский математический журнал, т. V, № 2, 1964, с. 387—417.

17. Тумаркин Г. Ц., Хавинсон В. Я. Классы аналитических функций в многосвязных областях. — Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М., 1960.

18. Гахов Ф. Д. Об обратной краевой задаче для многосвязной области. — Учен. зап. Ростовского-на-Дону педагогического ин-та, вып. 3, 1955, с. 19—27.

19. Нужин М. Т. Об обратных краевых задачах для многосвязных областей. — „Изв. вузов, Математика“, 1964, № 5, с. 69—77.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г

УДК 517.958

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
ВЗРЫВА НА ВЫБРОС*Н. Б. Ильинский, А. Г. Лабуткин*

В работе [1] рассмотрена задача о нахождении формы выемки выброса при взрыве заглубленного шнурового заряда, моделируемого в плоскости перпендикулярной оси заряда гидродинамическим источником. При этом в известную твердо-жидкостную модель взрыва на выброс введено обобщение краевого условия на искомой границе с целью приближения формы расчетных выемок к экспериментальным.

Существенным моментом при решении названной задачи в прямой постановке (2 вариант в [1]) является определение параметра $d > 1$ из уравнения

$$h = \int_d^{\infty} \Omega(\xi, d) \exp[\mu(\xi, d)] d\xi, \quad (1)$$

где

$$\Omega(\xi, d) = (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^2 \left[\frac{V(\xi^2 - 1)(d^2 - 1) + \xi d - 1}{\xi - d} \right]^{1/2}, \quad (2)$$

$$\mu(\xi, d) = -\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\alpha(\tau, d) d\tau}{(\tau - \xi) \sqrt{1 - \tau^2}}, \quad (3)$$

$$\alpha(\tau, d) = \ln \{ \pi \sqrt{(1 - \tau)(d - \tau)} f[\varphi(\tau, d)] \}^{-1}, \quad (4)$$

$$\varphi(\tau, d) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \frac{d + 1 - 2\tau}{d - 1},$$

$\xi = \operatorname{Re} \zeta$ ($\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная переменная вспомогательной плоскости). Функция $f(\varphi)$ ($\varphi_0 \leq \varphi \leq 0$), характеризующая распределение скорости по границе выемки, в общем случае имеет вид

$$f(\varphi) = (\varphi - \varphi_0)^{1/2} (-\varphi)^{1-2\kappa} r(\varphi, \varphi_0), \quad (5)$$

$r(\varphi, \varphi_0)$ — ограниченная функция при $-\infty < \varphi_0 < 0$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq 0$, удовлетворяющая условию Гёльдера по переменной φ и отличная от нуля, $\pi\kappa$ — угол, под которым происходит выброс грунта на периферийном участке выемки, φ_0 — значение потенциала скорости на границе выемки непосредственно под зарядом; искомый параметр d связан с φ_0 соотношением

$$d = (\operatorname{ch} \pi\varphi_0 + 3)/(\operatorname{ch} \pi\varphi_0 - 1). \quad (6)$$

Обозначим правую часть уравнения (1) через $\Phi(d)$ и исследуем поведение $\Phi(d)$ при $d \rightarrow \infty$ и $d \rightarrow 1$. Покажем, что $\Phi(d) \rightarrow 0$ при $d \rightarrow \infty$ и $\Phi(d) \rightarrow \infty$ при $d \rightarrow 1$, откуда будет следовать разрешимость уравнения (1), а следовательно, и исходной задачи при любом h .

1°. Пусть $d \rightarrow \infty$. Введем обозначения: $\sqrt{\xi^2 - 1} = g(\xi)$, $\pi \sqrt{(1 - \tau)(d - \tau)} = a(\tau, d)$, $(\tau - \xi) \sqrt{1 - \tau^2} = b(\tau, \xi)$,

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]}{(\tau - \xi) \sqrt{1 - \tau^2}} d\tau = R(\xi, d), \quad (7)$$

где $\varphi_0(d)$ определяется по (6). Тогда, учитывая (3)–(5), представим

$$\begin{aligned} \Phi(d) = & \int_d^\infty \Omega(\xi, d) \exp \left\{ R(\xi, d) + \right. \\ & \left. + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln [a(\tau, d) |\varphi(\tau, d)|^p |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)|^q]}{b(\tau, \xi)} d\tau \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $p = 1 - 2\kappa$, $q = 0.5$.

Так как при $\xi \in (d, \infty)$

$$I_0 = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \xi) \sqrt{1 - \tau^2}} = -1,$$

то имеем оценку

$$-\ln M \leq R(\xi, d) \leq -\ln m, \quad (9)$$

где $m = \min r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$, $M = \max r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$.

Представив

$$|\varphi(\tau, d)| = 2 \int_{\tau}^1 \frac{dt}{a(t, d)}, \quad |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)| = 2 \int_{-1}^{\tau} \frac{dt}{a(t, d)},$$

нетрудно получить оценки

$$A_1 \sqrt{1-\tau} \leq |\varphi(\tau, d)| \leq A_2 \sqrt{1-\tau}, \quad (10)$$

$$\tilde{A}_1(1+\tau) \leq |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)| \leq \tilde{A}_2(1+\tau), \quad (11)$$

где

$$A_1 = \frac{4}{\pi \sqrt{d+1}}, \quad A_2 = \frac{4}{\pi \sqrt{d-1}}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{A_1}{2\sqrt{2}}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{A_2}{\sqrt{2}}. \quad (12)$$

Принимая во внимание (10), (11), перепишем выражение (8) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(d) = & \int_d^{\infty} \Omega(\xi, d) \exp \left\{ \tilde{R}(\xi, d) + \right. \\ & \left. + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln [a(\tau, d)(1-\tau)^{p/2}(1+\tau)^q]}{b(\tau, \xi)} d\tau \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\tilde{R}(\xi, d)$ определяется формулой (7), если вместо $r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)]$ подставить $\tilde{r}[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)] = r[\varphi(\tau, d), \varphi_0(d)] \cdot F(\tau, d)$,

$$F(\tau, d) = |\varphi(\tau, d)|^p |\varphi(\tau, d) - \varphi_0(d)|^q [(1-\tau)^{p/2}(1+\tau)^q]^{-1},$$

причем

$$A_1^p \tilde{A}_1^q \leq F(\tau, d) \leq A_2^p \tilde{A}_2^q. \quad (14)$$

С учетом (9) и (14) будем иметь

$$-\ln(MA_2^p \tilde{A}_2^q) \leq \tilde{R}(\xi, d) \leq -\ln(mA_1^p \tilde{A}_1^q)$$

или, подставляя в (12),

$$\frac{2^{q/2}}{M} \left(\frac{\pi \sqrt{d-1}}{4} \right)^{p+q} \leq \exp \tilde{R}(\xi, d) \leq \frac{2^{3q/2}}{m} \left(\frac{\pi \sqrt{d+1}}{4} \right)^{p+q}. \quad (15)$$

Обозначим второй внутренний интеграл выражения (13) через $I_1(\xi, d)$ и представим его в виде суммы двух интегралов

$$\begin{aligned} I_1(\xi, d) = & \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln [\pi(1+\tau)^q(1-\tau)^{\frac{1+p}{2}}]}{b(\tau, \xi)} d\tau + \\ & + \frac{g(\xi)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(d-\tau)^{1/2}}{b(\tau, \xi)} d\tau = I_2(\xi) + I_3(\xi, d). \end{aligned} \quad (16)$$

Интеграл $I_2(\xi)$ в (16) конечен. В интеграле $I_3(\xi, d)$ при больших d имеем $\ln(d - \tau)^{1/2} \sim \ln \sqrt{d}$ (\sim — знак эквивалентности) и потому $I_3(\xi, d) \sim I_0 \ln \sqrt{d} = -\ln \sqrt{d}$. Следовательно,

$$\exp I_1(\xi, d) = \exp [I_2(\xi) + I_3(\xi, d)] \sim 1/\sqrt{d}. \quad (17)$$

Таким образом, учитывая (15) и (17), находим

$$\Phi(d) \sim \frac{1}{m} \int_d^\infty \Omega(\xi, d) d^n d\xi, \quad (18)$$

где $n = (p + q - 1)/2$.

Из формулы (2) следует, что при больших d , а следовательно, и при больших ξ , выражение $\Omega(\xi, d) \sim \sqrt{\xi d} (\xi^2 \sqrt{\xi - d})^{-1}$. Тогда по (18)

$$\Phi(d) \sim \frac{d^n}{m} \int_d^\infty \frac{V \xi d d\xi}{\xi^2 V \xi - d} = \frac{d^{n-0.5}}{m} \int_1^\infty \frac{V t dt}{t^2 V t - 1}. \quad (19)$$

Так как интеграл в (19) конечен, то $\lim_{d \rightarrow \infty} \Phi(d) = 0$ при $p + q < 2$, т. е. при $\kappa > -1/4$.

2°. Пусть $d \rightarrow 1$. Функция $\Omega(\xi, d)$ имеет на бесконечности ноль второго порядка, выражение $\exp \tilde{R}(\xi, d)$ согласно (15) ограничено, поэтому поведение $\Phi(d)$ (13) в окрестности $d=1$ определяется интегралом $I_1(\xi, d)$. Можно показать [2, стр. 82], что интеграл $I_1(\xi, d)$ в окрестности $\xi=1$ представим в виде

$$I_1(\xi, 1) = -c(\xi) \ln(\xi - 1) + u(\xi),$$

где $c(\xi) = 2^{-3/2} (2 + p) \sqrt{\xi + 1}$, $u(\xi)$ — ограниченная при $\xi=1$ функция. Тогда

$$\exp I_1(\xi, 1) = (\xi - 1)^{-c(\xi)} \exp u(\xi).$$

Отсюда видно, что $\lim_{d \rightarrow 1} \Phi(d) = \infty$ при $2 + p \geq 2$, т. е. при $\kappa \leq 1/2$.

Таким образом, уравнение (1), а следовательно, и исходная задача разрешимы при любой глубине h заложения точечного заряда, так как для реальных выемок $0 < \kappa \leq 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский Н. Б. Об одном методе построения выемки выброса при взрыве шнуровых зарядов.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., ГИФМЛ, 1963.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.

О ЗАДАЧЕ РИМАНА С КОЭФФИЦИЕНТОМ, ДОПУСКАЮЩИМ ОСОБЕННОСТЬ ТИПА НУЛЬ-ПОЛЮС

Б. А. Кац

1°. Пусть L есть простой замкнутый контур Ляпунова, разбивающий плоскость C на содержащую 0 область D^+ и содержащую ∞ область D^- , а t_0 — фиксированная точка контура L . Рассмотрим задачу об отыскании регулярных в D^+ и D^- , ограниченных в \bar{D}^+ и \bar{D}^- и непрерывных в $\bar{D}^+ \setminus t_0$ и $\bar{D}^- \setminus t_0$ функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ соответственно по условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L \setminus t_0. \quad (1)$$

Коэффициент $G(t)$ будем считать гёльдеровым вне любой окрестности t_0 , а в точке t_0 допускающим такой разрыв, что $\lim_{t \rightarrow t_0} |G(t)| = 0$ или $\lim_{t \rightarrow t_0} |G(t)| = \infty$. Если выполняются оба эти равенства, то будем говорить, что в точке t_0 коэффициент G имеет нуль-полюс. Порядком функции $G(t)$ в точке t_0 мы будем называть величину

$$\nu = \overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\ln |G(t)|}{\ln |t - t_0|} \right|. \quad (2)$$

Задача Римана с коэффициентом, имеющим нули (т. е. $G(t_0) = 0$) или полюсы ($|G(t_0)| = \infty$), исследовалась при различных предположениях о структуре этих особенностей во многих работах (см. § 15 [1], § 4 гл. XI [2], § 12 [3], а также [4, 5, 6]). М. И. Хайкин [4] рассматривал и случаи, когда $\lim_{t \rightarrow t_0} |G(t)| \neq \lim_{t \rightarrow t_0} |G(t)|$ и один из этих пределов обращается в 0 или ∞ ; при этом ситуацию, когда в точке t_0 имеется нуль-полюс, он исключал из рассмотрения. При этих предположениях в [4] получены условия конечности числа линейно независимых решений однородной задачи (1) и оценки этого числа.

В данной статье задача (1) исследуется в предположении, что функция $\ln|G(t)|$ принадлежит классу, близкому к описанному автором в [7]. Во избежание громоздкости мы будем считать, что $G(t)/|G(t)|$ не имеет особенностей. Однако все построения этой заметки легко переносятся на случай, когда $\arg G$ имеет в точке t_0 разрыв первого рода, либо разрыв типа осцилляции [7]. Отметим также, что эти построения могут быть перенесены и на случай, когда $\arg G$ имеет несколько нулей-полюсов.

2°. Вначале мы опишем некоторые функции, возникающие в связи с измерением углов вблизи точки t_0 . В силу гладкости L существует такое число $r_0 \in (0, 1)$, что при $0 < r \leq r_0$ всякая окружность $|z - t_0| = r$ пересекает L в двух точках. Обозначим через E круг $|z - t_0| < r_0$, а через l_0 — дугу $L \cap E$. Точка t_0 разбивает дугу l_0 на две дуги l_0^+ , l_0^- так, что при положительном обходе L сначала проходится l_0^- . Положим $t_0^+(r) = l_0^+ \cap \{z: |z - t_0| = r\}$ и аналогично введем функцию $t_0^-(r)$.

Определим теперь в круге E функцию $A_+(z)$, положив ее равной углу, отсчитываемому от $t_0 t_0^+(|z - t_0|)$ к $t_0 z$ в положительном направлении; аналогично функция $A_-(z)$ равна углу, отсчитываемому в том же направлении от $t_0 t_0^-(|z - t_0|)$ к $t_0 z$. При $t \in l_0$ обозначим $A_\pm^+(t) = \lim_{z \in D^+, z \rightarrow t} A_\pm(z)$, $A_\pm^-(t) = \lim_{z \in D^-, z \rightarrow t} A_\pm(z)$. В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Лемма 1. При $z \in E$ имеют место следующие соотношения:

$$a) A_+(z) - A_-(z) = -\pi s(z) + O(|z - t_0|^\lambda), \lambda > 0,$$

где $s(z) = +1$ при $z \in D^+$ и $s(z) = -1$ при $z \in D^-$;

$$б) 2\pi - (A_+(z) + A_-(z)) = \pi \sigma(z) + O(|z - t_0|^\lambda),$$

где функция $\sigma(z)$ принимает в каждой из областей $D^+ \cap E$, $D^- \cap E$ все значения из интервала $(-1, 1)$, причем $\sigma^+(t) = 1$ при $t \in l_0^+$, $\sigma^+(t) = -1$ при $t \in l_0^-$, $\sigma^-(t) = -1$ при $t \in l_0^+$ и $\sigma^-(t) = 1$ при $t \in l_0^-$.

Доказательство. Обозначим $A_+(z) - A_-(z) = B(z)$. Очевидно, $B^+(t) = -A_-(t)$ при $t \in l_0^+$ и $B^+(t) = A_+(t) - 2\pi$ при $t \in l_0^-$. Отсюда следует, что $B(z)$ непрерывна в $D^+ \cap E$ и $B^+(t_0) = -\pi$. Аналогично показывается, что $B(z)$ непрерывна в $D^- \cap E$ и $B^-(t_0) = +\pi$. Таким образом, $\lim_{z \rightarrow t_0} (B(z) + \pi s(z)) = 0$, входящая в утверждение (а) оценка скорости

сходимости этого предела легко выводится из того, что L — контур Ляпунова. Аналогично доказывается и утверждение (б); приведем здесь один из способов построения входящей в это утверждение функции $\sigma(z)$. Выделим некоторую непрерывную в $D^+ \cap E$ ветвь $\arg(z - t_0)$ и положим $\gamma_\tau = \{z : \arg(z - t_0) = \tau \arg(t_0^- (|z - t_0|) - t_0) + (1 - \tau) \arg(t_0^+ (|z - t_0|) - t_0)\}$, $0 \leq \tau \leq 1$. Дуги γ_τ заметают $D^+ \cap E$. Легко видеть, что через каждую точку z из $D^+ \cap E$ проходит одна дуга этого семейства. Обозначим эту дугу $\gamma(z)$ и положим $\sigma(z) = \frac{1}{\pi} \lim_{w \in \gamma(z), w \rightarrow t_0} (2\pi - (A_+(z) + A_-(z)))$. В области $D^- \cap E$ эта функция определяется посредством такого же построения.

3°. Опишем теперь класс функций, которому принадлежит $\ln|G(t)|$.

Пусть функция $\varphi(t)$ задана на $L \setminus t_0$; ее доминантой будем называть любую определенную при $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$ положительную функцию $v(x, y)$, такую, что $v(x, y) = v(y, x)$, и для любых $t', t'' \in L \setminus t_0$, лежащих достаточно близко к t_0 , причем по одну сторону от t_0 , справедливо неравенство

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq v(|t' - t_0|, |t'' - t_0|).$$

Если функция φ удовлетворяет вне любой окрестности t_0 условию Гёльдера, и у нее есть доминанта $v_\varphi(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$v_\varphi(kx, ky) \leq v_\varphi(x, y), \quad 0 < k \leq 1,$$

то мы будем называть функцию φ квазиоднородной. Далее, фиксируем некоторую неотрицательную функцию $\rho(x)$. Будем относить квазиоднородную функцию $\varphi(t)$ к классу \mathcal{K}_ρ , если ее доминанта v_φ такова, что сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{v_\varphi(1, x) \rho(x)}{1 - x} dx < \infty.$$

Очевидно, класс \mathcal{K}_1 есть объединение классов $K_v(t_0)$, введенных в [7]. В него, в частности, входят функции, колеблющиеся в окрестности t_0 от $-\infty$ до $+\infty$.

Лемма 2. Если функция $\varphi(t)$ квазиоднородна, то при $t \in l_0$

$$|\varphi(t)| \leq B_\varphi \ln|t - t_0|^{-1}, \quad B_\varphi = \text{const}.$$

Доказательство.* Пусть $t \in l_0^+$ и $|t - t_0| = r$. Рассмотрим точки $t^{(k)} = t_0^+(re^k)$, $k = 0, 1, \dots, [\ln r_0/r]$. Имеем

* Идею этого доказательства автору указал проф. Н. В. Говоров.

$$|\varphi(t^{(k-1)}) - \varphi(t^{(k)})| \leq v_\varphi(re^{k-1}, re^k) \leq v_\varphi(1, e), \quad k = 1, \dots, [\ln r_0/r].$$

Сложив все эти неравенства, получим

$$|\varphi(t)| \leq v_\varphi(1, e) [\ln r_0/r] + |\varphi(t_0^+(r'))|,$$

где $r' = re^{\ln r_0/r} \in [r_0 e^{-1}, r_0]$. Теперь доказываемая оценка очевидна; так же она доказывается при $t \in I_0^-$.

Введем теперь обозначения $l_0(r) = l_0 \cap \{z : |z - t_0| \geq r\}$, $I_0^\pm(r) = l_0(r) \cap I_0^\pm$; кроме того, будем с каждой заданной на $l_0 \setminus t_0$ функцией $\varphi(t)$ связывать две функции вещественной переменной $\varphi_0^\pm(r) = \varphi[t_0^\pm(r)]$, $0 < r \leq r_0$.

Лемма 3. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_1^\infty$. Тогда функция

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - \int_{I_0(|z-t_0|)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - i(\varphi_0^+(|z-t_0|)(\pi - A_+(z)) - \varphi_0^-(|z-t_0|)(\pi - A_-(z)))$$

ограничена в $\overline{D^+ \cap E}$ и $\overline{D^- \cap E}$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать это утверждение для вещественной $\varphi \in \mathcal{H}_1^\infty$. Для такой функции φ в [7] была показана ограниченность функции

$$\int_{I_0^+} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - \int_{I_0^+(|z-t_0|)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - \varphi_0^+(|z-t_0|) \times \\ \times \left(\int_{I_0^+} \frac{dt}{t-z} - \int_{I_0^+(|z-t_0|)} \frac{dt}{t-t_0} \right).$$

Простые вычисления показывают

$$\left| \operatorname{Re} \varphi_0^+(|z-t_0|) \left(\int_{I_0^+} \frac{dt}{t-z} - \int_{I_0^+(|z-t_0|)} \frac{dt}{t-t_0} \right) \right| = \\ = \left| \varphi_0^+(|z-t_0|) \ln \left| \frac{t_0^+(r_0) - z}{t_0^+(r_0) - t_0} \cdot \frac{t_0^+(|z-t_0|) - t_0}{t_0 - z} \right| \right| \leq \\ \leq B_\varphi \ln |z-t_0|^{-1} \ln(1 + r_0^{-1}|z-t_0|) \leq B_\varphi r_0^{-1} e^{-1}.$$

В то же время

$$\operatorname{Im} \left(\int_{I_0^+} \frac{dt}{t-z} - \int_{I_0^+(|z-t_0|)} \frac{dt}{t-t_0} \right) = \pi - A_+(z) + O(|z-t_0|). \quad (3)$$

В этом нетрудно убедиться, рассмотрев расположение углов, разностью которых является левая часть (3). Согласно лемме 2, отсюда следует ограниченность функции

$$\int_{l_0^+} \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - \int_{l_0^+ (|z-t_0|)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - i\varphi_0^+ (|z-t_0|) (\pi - A_+(z)).$$

Аналогично исследуется интеграл по дуге l_0^- .

Далее, свяжем с функцией $\varphi(t)$ ее „четную“ и „нечетную“ компоненты $\varphi^e(r) = \frac{1}{2}(\varphi_0^-(r) + \varphi_0^+(r))$, $\varphi^o(r) = \frac{1}{2}(\varphi_0^-(r) - \varphi_0^+(r))$.

Из лемм 1, 2, 3 сразу получается такое утверждение.

Следствие 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{K}_1$. Тогда вблизи t_0 ограничена функция

$$\int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - \int_{l_0 (|z-t_0|)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} - i\pi (\varphi^e (|z-t_0|) s(z) - \varphi^o (|z-t_0|) \sigma(z)).$$

Отметим еще следующий простой факт.

Следствие 2. Пусть φ есть вещественная функция класса \mathcal{K}_1 . Тогда вблизи t_0 ограничены функции

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - (\varphi_0^+ (|z-t_0|) (\pi - A_+(z)) - \\ - \varphi_0^- (|z-t_0|) (\pi - A_-(z))), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} \int_L \frac{\varphi(t) dt}{t-z} - \pi (\varphi^e (|z-t_0|) s(z) - \varphi^o (|z-t_0|) \sigma(z)). \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим $\theta^\pm(r) = \arg(t_0^\pm(r) - t_0)$; тогда

$$\operatorname{Im} \int_{l_0 (|z-t_0|)} \frac{\varphi(t) dt}{t-t_0} = \int_{|z-t_0|}^{r_0} \left(\varphi_0^-(r) \frac{d\theta^-}{dr} - \varphi_0^+(r) \frac{d\theta^+}{dr} \right) dr. \quad (6)$$

Так как L есть контур Ляпунова, то $d\theta^\pm/dr = O(r^{\lambda-1})$, $\lambda > 0$, т. е. функции $\varphi_0^\pm(r) d\theta^\pm/dr$ абсолютно интегрируемы в нуле, и интеграл (6) ограничен. Теперь ограниченность функций (4) и (5) следует из леммы 3 и следствия 1.

Лемма 4: Пусть операторы S и Q определяются равенствами

$$(S\varphi)(t) = \int_L \frac{\varphi(\tau) dt}{\tau-t}, \quad (Q\varphi)(t) = \begin{cases} -\int_{|t-t_0|}^{r_0} 2\varphi_0^-(r) \frac{dr}{r} & \text{при } t \in l_0, \\ 0 & \text{при } t \in L \setminus l_0. \end{cases}$$

Если $\varphi \in \mathcal{N}_\rho$, где $\rho(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$, то $(S - Q)\varphi \in \mathcal{N}_1$.

Доказательство этой леммы сводится к выражению доминанты функции $(S - Q)\varphi$ через доминанту функции φ .

Следствие 3. Если $\varphi \in \mathcal{N}_\rho$, где $\rho(x)$ то же, что в лемме 4, а симметрическая разность $\varphi^0(r)$ ограничена, то $S\varphi \in \mathcal{N}_1$.

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned} |(Q\varphi)(t') - (Q\varphi)(t'')| &\leq 2 \sup |\varphi^0| \cdot \left| \int_{|t''-t_0|}^{|t'-t_0|} dr/r \right| = \\ &= 2 \sup |\varphi^0| \cdot \left| \ln \left| \frac{t' - t_0}{t'' - t_0} \right| \right|. \end{aligned}$$

Доминанта $v_Q(x, y) = 2 \sup |\varphi^0| \cdot |\ln x/y|$ удовлетворяет всем определяющим класс \mathcal{N}_1 условиям, т. е. $Q\varphi \in \mathcal{N}_1$. Но тогда согласно лемме 4 и $S\varphi \in \mathcal{N}_1$.

4°. Рассмотрим теперь однородную задачу (1), т. е. положим $g(t) = 0$. Как уже отмечалось, мы будем считать отношение $G(t) / |G(t)|$ свободным от особенностей. В этом случае величина $\frac{1}{2\pi} [\arg G]_L = x$ есть целое число, и коэффициент

представим в виде $G(t) = t^x \exp 2\pi i (\alpha(t) - i\beta(t))$, где функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Функцию $\beta(t) = \frac{1}{2\pi} \ln |G(t) t^{-x}|$ мы будем считать принадлежащей классу \mathcal{N}_1 ;

тогда этому же классу принадлежит $\ln |G(t)|$. Если $\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = \infty$,

а $\underline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = -\infty$, то $G(t)$ имеет в точке t_0 нуль-полюс. Со-

гласно лемме 2, определяемой формулой (2), порядок $G(t) t^{-x}$ в точке t_0 конечен. Очевидно, порядки функций $G(t)$ и $G(t) t^{-x}$ в точке t_0 совпадают.

Введем в рассмотрение функции

$$\Gamma(z) = \int_L \frac{\alpha(t) - i\beta(t)}{t-z} dt, \quad X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-x} e^{\Gamma^-(z)}.$$

Очевидно, $\operatorname{Re} \Gamma(z) = \operatorname{Re} \int_L \frac{\alpha(t) dt}{t-z} + \operatorname{Im} \int_L \frac{\beta(t) dt}{t-z}$. Первое слагаемое

здесь ограничено, а второе оценивается с помощью следствия 2. Таким образом, найдется такая постоянная $C_\Gamma > 0$, что

$$|\operatorname{Re} \Gamma(z) - \pi(\beta^e(|z - t_0|))s(z) - \beta^0(|z - t_0|)\sigma(z)| \leq C_\Gamma. \quad (7)$$

Для любого решения $\Phi(z)$ задачи (1) отношение $\Phi(z)/X(z)$ регулярно в $C \setminus t_0 \setminus \infty$. Согласно оценке (7) и лемме 2 в точке t_0 это отношение либо регулярно, либо имеет полюс. Следовательно, оно имеет вид $(z - t_0)^n P_{x-n}(z)$, где n целое число, а P_{x-n} — полином степени не выше $x - n$. Таким образом, любое решение однородной задачи (1) представимо в форме

$$\Phi(z) = (z - t_0)^n X(z) P_{x-n}(z). \quad (8)$$

Остается выяснить, при каких значениях n эта функция ограничена в окрестности t_0 , т. е. действительно является решением (1). Согласно (7) для этого необходимо и достаточно, чтоб функция

$$n \ln |z - t_0| + \pi (\beta^e(|z - t_0|) s(z) - \beta^0(|z - t_0|) \sigma(z)) \quad (9)$$

была ограничена сверху. Из данного в лемме 1 описания функций $s(z)$ и $\sigma(z)$ следует, что

$$\left. \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\}_{|z-t_0|=r} (\beta^e(r) s(z) - \beta^0(r) \sigma(z)) = \pm (|\beta^e(r)| + |\beta^0(r)|) = \\ = \pm \max \{ |\beta_0^+(r)|, |\beta_0^-(r)| \}. \quad (10)$$

Таким образом, для ограниченности функции (8) в окрестности t_0 необходимо, чтоб

$$n \geq \pi \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\max \{ |\beta_0^+(r)|, |\beta_0^-(r)| \}}{\ln r^{-1}} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{\ln |G(t)|}{\ln |t - t_0|} \right| = \frac{1}{2} \nu. \quad (11)$$

Покажем, что при нецелом $\frac{1}{2} \nu$ это условие является достаточным. Действительно, тогда $n > \frac{1}{2} \nu$. Для любого $\varepsilon > 0$ согласно (7), (10), (11) найдется такое $\delta > 0$, что при $|z - t_0| < \delta$

$$C_X^{-1} |z - t_0|^{\frac{1}{2} \nu + \varepsilon} \leq |X(z)| \leq C_X |z - t_0|^{-\frac{1}{2} \nu - \varepsilon}, \quad C_X = \text{const.} \quad (12)$$

Фиксируем ε так, чтобы $n - \frac{1}{2} \nu > \varepsilon > 0$. Тогда

$$|(z - t_0)^n X(z)| \leq C_X |z - t_0|^{n - \frac{1}{2} \nu - \varepsilon} \leq C_X,$$

т. е. функция (8) ограничена. Также доказывается ограниченность (8) в случае целого $\frac{1}{2} \nu$ при $n \geq \frac{1}{2} \nu + 1$. При $n = \frac{1}{2} \nu$ функция (9) может оказаться неограниченной.

Итак, доказан следующий результат.

Теорема 1. Пусть в задаче (1) $g(t) \equiv 0$, $G(t)/|G(t)|$ удовлетворяет условию Гёльдера на L , $\ln|G(t)| \in \mathcal{H}_1$, $\frac{1}{2\pi} [\arg G]_L = \kappa$, а порядок $G(t)$ в точке t_0 равен ν . Определим число $n = n(G)$ следующим образом: если число $\frac{1}{2} \nu$ целое и функция

$$(1 - \pi^{-1} A_+(z)) \ln |G_0^+(|z - t_0|)| - (1 - \pi^{-1} A_-(z)) \ln |G_0^-(|z - t_0|)| + \nu \ln |z - t_0| \quad (13)$$

ограничена сверху в E , то $n = \frac{1}{2} \nu$; во всех остальных случаях $n = \left[\frac{1}{2} \nu \right] + 1$. Тогда при $\kappa < n$ задача (1) не имеет нетривиальных решений. При $\kappa \geq n$ она имеет $\kappa - n + 1$ линейно независимых решений, а ее общее решение имеет вид (8).

Условиям теоремы 1 удовлетворяют и некоторые коэффициенты $G(t)$, имеющие в точке t_0 не нули-полюсы, а обычные нули или полюсы. Пусть, например, $L = \{t: |t| = 1\}$, $t_0 = 1$, $G(t) = t^m (t - 1)^k$, где m и k целые числа. Нетрудно убедиться, что при нечетном k функция $G(t)/|G(t)|$ имеет разрыв в точке t_0 ; поэтому, желая применить теорему 1, мы должны считать число k четным. Простые расчеты показывают, что

$$\ln |G(t)| = k \ln |t - 1| \in \mathcal{H}_1, \quad \kappa = m + \frac{1}{2} k, \quad \nu = |k|, \quad n = \frac{1}{2} |k|.$$

Таким образом, $\kappa - n = m + \frac{1}{2} (k - |k|)$, и если $k \geq 0$, то задача имеет $\max(0, m + 1)$ решений, если же $k < 0$, то число решений есть $\max(0, m + k + 1)$. Это вполне соответствует классическим теоремам об исключительном случае однородной задачи Римана (см., например, § 15 [1]).

Условие ограниченности функции (13) получается из (9) переходом от функций s и σ к функциям A_+ , A_- . Такой переход сделан ввиду большей наглядности этих последних функций.

5°. Перейдем теперь к исследованию неоднородной задачи (1). Для простоты будем здесь считать, что $\frac{1}{2} \nu$ является нецелым числом; тогда $n = \left[\frac{1}{2} \nu \right] + 1$. От свободного члена $g(t)$ будем требовать, чтоб на L он удовлетворял условию Гёльдера, а в точке t_0 был $2n$ раз дифференцируем по Тейлору, т. е. должен существовать такой полином $T_{2n}(z)$ (много-

член Тейлора), что функция $\hat{g}(t) = (g(t) - T_{2n}(t))(t - t_0)^{-2n}$ удовлетворяет на L условию Гёльдера (см., например, [5, 6]). Граничное сопряжение (1) можно записать в виде

$$\frac{\Phi^+(t) - T_{2n}(t)}{(t - t_0)^n X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{(t - t_0)^n X^-(t)} = \frac{\hat{g}(t)(t - t_0)^n}{X^+(t)}, \quad t \in L \setminus t_0. \quad (14)$$

Обозначим правую часть (14) через $f(t)$. Согласно (12) имеем

$$|f(t)| \leq C_f |t - t_0|^{n - \frac{1}{2} \nu - \varepsilon}. \quad \text{Положив здесь } \varepsilon = (n - \nu/2)/2, \text{ получаем вблизи } t_0 \text{ оценку}$$

$$|f(t)| \leq C_f |t - t_0|^\varepsilon, \quad C_f = \text{const}. \quad (15)$$

Таким образом, существует интеграл

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(t) - T_{2n}(t)}{(t - t_0)^n} \cdot \frac{dt}{t - z},$$

и если он ограничен в окрестности t_0 , то функция

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^+(z) &= T_{2n}(z) + (z - t_0)^n X^+(z) \Psi^+(z), \\ \hat{\Phi}^-(z) &= (z - t_0)^n X^-(z) \Psi^-(z) \end{aligned} \quad (16)$$

является частным решением задачи (1).

Потребуем теперь, чтоб $\beta \in \mathcal{N}_\rho$ и $Q\beta \in \mathcal{N}_1$; здесь ρ и Q те же, что в лемме 4. При этих условиях функция Ψ ограничена в окрестности t_0 . Действительно, по лемме 4 $S\beta \in \mathcal{N}_1$. Но тогда $\Gamma^+(t) = \pi i(\alpha - i\beta) + S(\alpha - i\beta) \in \mathcal{N}_1$ и $n \ln(t - t_0) - \Gamma^+(t) \in \mathcal{N}_1$ (здесь берется ветвь логарифма, полученная с помощью разреза, целиком лежащего в L^-). Согласно (12) действительная часть функции $n \ln(t - t_0) - \Gamma^+(t)$ ограничена сверху. Но если $\text{Re } \omega_{1,2} \leq A$, то $|e^{\omega_1} - e^{\omega_2}| \leq e^A |\omega_1 - \omega_2|$. Следовательно, $(t - t_0)^n / X^+(t) \in \mathcal{N}_1$. Нетрудно показать, что произведение функции класса \mathcal{N}_1 на функцию, удовлетворяющую условию Гёльдера, принадлежит \mathcal{N}_1 . Таким образом, $f \in \mathcal{N}_1$ и по лемме 3 ограничена функция

$$\begin{aligned} \Psi(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0(|z - t_0|)} \frac{f(t) dt}{t - t_0} - \frac{1}{2\pi} (f_0^+(|z - t_0|)(\pi - A_+(z)) - \\ - f_0^-(|z - t_0|)(\pi - A_-(z))). \end{aligned}$$

Но из оценки (15) следует ограниченность второго и третьего членов этого выражения. Итак, функция $\Psi(z)$ ограничена. Мы получили следующий результат.

Теорема 2. Пусть коэффициент и свободный член задачи (1) удовлетворяют следующим условиям:

1а) $G(t)/|G(t)|$ удовлетворяют условию Гёльдера на L , $\ln|G(t)| \in \mathcal{K}_\rho$, где $\rho(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$;

1б) $Q(\ln|G(t)|) \in \mathcal{K}_1$;

1в) порядок ν коэффициента G в точке t_0 таков, что число $\frac{1}{2}\nu$ нецелое;

2а) $g(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на L ;

2б) в точке t_0 функция $g(t)$ дифференцируема по Тейлору $2n = 2\left[\frac{1}{2}\nu\right] + 2$ раз.

Тогда при $\kappa \geq n$ общее решение этой задачи есть

$$\Phi(z) = \hat{\Phi}(z) + (z - t_0)^\kappa X(z) P_{\kappa-n}(z),$$

где $\hat{\Phi}(z)$ определяется формулой (16). При $\kappa < n$ задача (1) разрешима при выполнении условий

$$\int_L \frac{g(\tau) - T_{2n}(\tau)}{(\tau - t_0)^\kappa X^+(\tau)} \tau^{s-1} d\tau = 0, \quad s = 1, 2, \dots, |\kappa - n| - 1.$$

Если эти условия выполнены, то $\hat{\Phi}$ является единственным решением задачи (1).

Результат теоремы справедлив и для целого $\nu/2$, если при этом функция (13) ограничена.

Согласно следствию 3 условие (1б) выполняется автоматически, если симметрическая разность $\ln|G_0^+(r)| - \ln|G_0^-(r)|$ ограничена.

Условие (2б) может быть заменено на несколько более слабое условие дифференцируемости по Тейлору функции

$$g^-(t) = -\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t};$$

при этом в (14) и (16) полином $T_{2n}(z)$ следует заменить на функцию $g^+(z) + T_{2n}^-(z)$, где T_{2n}^- — многочлен Тейлора порядка $2n$ для функции $g^-(t)$.

Автор полагает, что в условии (2б) порядок дифференцируемости может быть уменьшен до $[\nu] + 1$.

Автор благодарен проф. Л. А. Аксентьеву за содействие в выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973.
3. Чибрикова Л. И. Основные краевые задачи для аналитических функций. Казань, 1977.
4. Хайкин М. И. Исключительный случай однородной задачи Римана с конечным индексом коэффициента.—Изв. вузов. Математика, 1972, № 5, с. 92—103.
5. Пресдорф З. Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращаемым в нуль в конечном числе точек.—Математические исследования, 1972, т. 7, вып. 1 (23), с. 116—132.
6. Радченко Т. Н. Сингулярное интегральное уравнение третьего рода в пространствах H_v , D_v^γ , F_v^γ и P_v^γ .—В сб.: Теория функций. Дифференциальные уравнения и их приложения. Элиста, 1976, с. 138—155.
7. Кац Б. А. Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 14. Казань, 1977, с. 110—120.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.

УДК 621.9.047.7

ПРЕДЕЛЬНОЕ АНОДНОЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ПРИ ИЗОЛЯЦИИ НА АНОДЕ

В. В. Клоков

В работе получено точное решение одной смешанной краевой задачи для аналитических функций, связанной с расчетом анодной границы при предельной [1] электрохимической обработке (ЭХО). В [2, 3] исследовался случай частичной изоляции катода, в настоящей работе — частичная изоляция на

аноде; оба случая применяются в практике ЭХО [4]. При местном покрытии диэлектриком анод-деталь обрабатывается не только с заглублением, но и с подтравливанием под изоляцию. Характерный вид получающейся границы показан на рис. 1. Результаты работы, связанные с расчетом анодной поверхности при ЭХО, могут быть использованы, например, при анализе питтингового травления под окисные пленки на аноде.

Рассмотрен случай плоскопараллельного анодного формообразования, толщина изоляции считается малой. Поверхность катода плоская, параллельная границе изоляции. Расстояние между изолированными участками анода велико.



Рис. 1. Сечение анодной поверхности с изоляцией на аноде.

Границу сечения ансда, получающуюся в результате ЭХО, будем называть монотонной (немонотонной), когда с ростом длины дуги координаты точек границы изменяются монотонно (немонотонно). На рис. 2 изображена схема сечения межэлектродного зазора (МЭЗ) для этих случаев.

Как выясняется ниже, монотонность границы зависит

от расстояния h между катодом и изоляцией. AD — граница катода, параллельная тонкому изоляционному слою CD на аноде. Изменение формы анода прекратилось с образованием искомой границы по линии AB_1 (или AB_2) в связи с достижением во всех ее точках предельной плотности тока $i_1 = i_{1\text{пр}}$. Граница анода и изоляция в рассматриваемом случае простирается соответственно влево и вправо до бесконечности. Примем за характерный размер длины величину $H = x(U - \varphi_a + \varphi_k) / i_{1\text{пр}}$. Обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работах [1, 2]. Размерные и безразмерные величины связаны соотношениями $x = x_1/H$, $y = y_1/H$, $\psi = u - U + \varphi_a / (-\varphi_k - U + \varphi_a)$. Здесь ψ — безразмерный потенциал электрического поля в МЭЗ. Сопряженная к нему φ — функция тока; образуем комплексный потенциал $W(z) = \varphi + i\psi$, $z = x + iy$. Отыскание границы AB (B или B_1 , или B_2) сводится к решению задачи: определить неизвестный участок границы области D_z существования аналитической функции W , удовлетворяющей граничным условиям

$$\begin{aligned} \text{Im } W|_{AD} = \psi|_{AD} = 1, \quad \psi|_{AB} = 0, \\ \text{Re } W|_{BCD} = \varphi|_{BCD} = 0, \quad (\partial\psi/\partial n)|_{AB} = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения задачи используем классическую вспомогательную функцию

$$\chi = (2/\pi) \ln(dW/dz). \quad (2)$$

Область D_χ изменения χ , соответствующая D_z , может быть построена (рис. 3 а1) — в случае монотонной, а2) — в случае немонотонной границы анода). Важно отметить, что углы при вершинах многоугольника, ограничивающего D_χ , в обоих случаях одинаковы. Область D_W изменения W , соответствующая D_z , также одинакова (рис. 3 б).

Отыскание искомой границы области D_z связано с нахождением из соответствия D_χ и D_W аналитической зависимости $\chi(W)$, а затем по (2) связи

$$dz = -\exp(\pi\chi/2) dW. \quad (3)$$

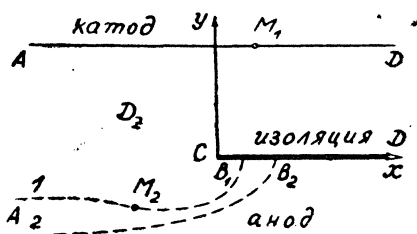


Рис. 2. Межэлектродный зазор.
1 — монотонная, 2 — немонотонная границы.

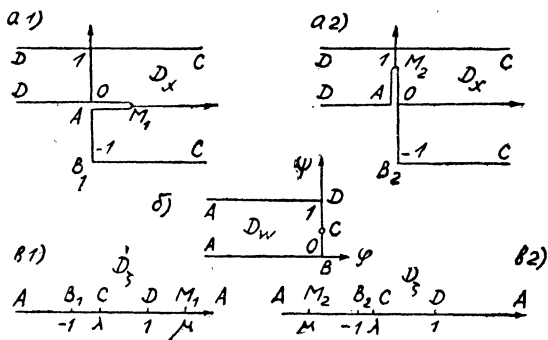


Рис. 3. Области изменения вспомогательных функций.

Для установления связи W и χ конформно отобразим D_w и D_χ на верхнюю полуплоскость D_ζ изменения вспомогательной комплексной переменной ζ (рис. 3в1), в2)). Нормировка (соответствие точек) указана на рис. 3. Отображение D_w на D_ζ осуществляется функцией $\zeta = -\cos \pi i W$, при этом справедливо соотношение

$$dW/d\zeta = -1/(\pi i \sqrt{1 - \zeta^2}). \quad (4)$$

Образы точек M_1 и M_2 (M_1 — точка максимума скорости на AD в случае монотонной границы, M_2 — точка перегиба границы в случае ее немонотонности) и точки C в плоскости ζ заранее неизвестны. Значения $\zeta_M = \mu$, M или M_1 , или M_2 , $\zeta_C = \lambda$ определяются в процессе решения задачи. Будем считать их временно известными. Тогда соответствие между χ и ζ записывается в форме интеграла Кристоффеля—Шварца в виде

$$\chi = c_1 \int_{-1}^{\zeta} \frac{(\zeta - \mu) d\zeta}{(\zeta + 1)^{1/2} (\zeta - \lambda) (\zeta - 1)} - i. \quad (5)$$

Пределы интегрирования взяты из условия $\zeta_B = -1, \chi_B = -i$. Из (5) следует, что переход с CD на DA в окрестности точки D , $\zeta_D = 1$, в плоскостях изменения χ и ζ приводит к соотношению

$$-i = -c_1 (1 - \lambda) i\pi / (\sqrt{2} (1 - \lambda)),$$

а переход с BC на CD в окрестности точки C , $\zeta_C = \lambda$, — к соотношению

$$2i = -c_1 (\lambda - \mu) i\pi / ((1 + \lambda)^{1/2} (\lambda - 1)).$$

Из них получаем выражение для коэффициента

$$c_1 = \sqrt{2} (1 - \lambda) / (\pi (1 - \mu)) \quad (6)$$

и связь

$$\mu = (\sqrt{2(1 + \lambda)} - \lambda) / (\sqrt{2(1 + \lambda)} - 1). \quad (7)$$

Из (7) замечаем, что при $-1/2 < \lambda \leq 1$, $\mu \geq 1$ (случай монотонной границы), при $-1 \leq \lambda < -1/2$, $\mu \leq -1$ (случай немонотонной границы), при $\lambda = -1/2$, $\mu = \infty$, точки M_1 , M_2 и A совпадают.

Выражение (5) можно проинтегрировать. Подставляя в (5) равенства (6) и (7), после интегрирования для функции χ получаем следующее выражение:

$$\chi = \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1+\zeta}}{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1+\zeta}} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\zeta}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+\zeta}} \right)^{1/2} e^{-i \frac{\pi}{2}} \right]. \quad (8)$$

Вследствие (3), (4), (8) имеет место важная связь дифференциалов в областях D_z и D_ζ , включая и их границы,

$$dz = \frac{\sqrt{1+\zeta} - \sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{1+\zeta} + \sqrt{1+\lambda}} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\zeta}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\zeta}} \right)^{1/2} \frac{d\zeta}{\pi \sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (9)$$

На различных участках изменения ζ берутся различные ветви квадратных корней.

После получения выражения (9) можно установить связь параметра λ с безразмерным расстоянием h между катодом и изоляцией. Переход в плоскости D_z с CD на DA в окрестности точки D равносильен обходу в D_ζ точки D , $\zeta_D = 1$, по полуокружности малого радиуса. Сомножитель $d\zeta$ в связи (9) имеет в окрестности точки разложение

$$\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\zeta - 1} + \dots$$

Сравнивая приращения z и ζ при указательном переходе с использованием этого разложения, получаем соотношение

$$ih = -i\pi \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{2}}.$$

Отсюда следует искомая связь

$$h = 2(\sqrt{2} - \sqrt{1+\lambda}) / (\sqrt{2} + \sqrt{1+\lambda}), \quad (10)$$

$$\lambda = 2((2 - h)/(2 + h))^2 - 1. \quad (11)$$

Из (10) устанавливается, что, когда λ изменяется в пределах от 1 до $-1/2$, h изменяется от 0 до $\frac{2}{3}$, когда $-1 \leq \lambda < -1/2$,

h изменяется от $\frac{2}{3}$ до 2. Следовательно, граница анода будет монотонной при $0 \leq h \leq 2/3$ и немонотонной при $2/3 < h < 2$. Случай $h > 2$ из рассмотрения исключается (отметим, что в практике электрохимической обработки анодной поверхности с ее частичной изоляцией получают углубления ниже изолятора, т. е. $h < 1$).

Определим подтравливание d под изоляцию, которое характеризуется абсциссой точки B , $d = x_B$. На линии BC границы $D_\zeta \zeta$ — вещественное, $-1 \leq \zeta \leq \lambda$, ветвь корня $\sqrt{1+\zeta}$ имеет действительное положительное значение. Разделяя в (9) вещественную и мнимую части и интегрируя, получаем, что

$$y_B = 0, \quad x_B = \int_{-1}^{\lambda} \frac{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1+\zeta}}{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1+\zeta}} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\zeta}}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\zeta}} \right)^{1/2} \frac{d\zeta}{\pi \sqrt{1-\zeta^2}}.$$

После использования подстановки $1 + \zeta = t^2$ интеграл вычисляется и выражается через элементарные функции в виде

$$x_B = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+\lambda}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{1+\lambda}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+\lambda}} \ln 2 \right).$$

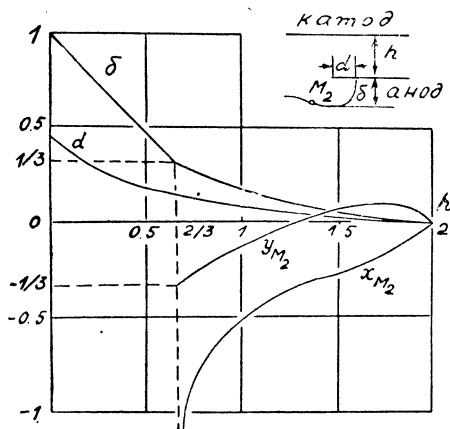


Рис. 4. Зависимости подтравливания d , заглубления δ , положения точек перегиба от расстояния h .

Отсюда, учитывая зависимость (11), получаем следующее выражение подтравливания через расстояние h :

$$d = (1/\pi) (2 \ln 2 - h \ln ((2+h)/h)). \quad (12).$$

При $h = 0$

$$d = (2/\pi) \ln 2,$$

при $h = 2/3$

$$d = (2/3\pi) \ln 2,$$

при $h = 2$ $d = 0$. Зависимость (12) представлена в таблице 1 и на рис. 4.

Таблица 1

Подтравливание в зависимости от h

h	0	0.2	0.4	2/3	0.8	1.0	1.2	1.6	2.0
d	0.4412	0.2886	0.2131	0.1470	0.1222	0.0915	0.0666	0.0282	0

С увеличением h от 0 до 2 подтравливание d монотонно уменьшается. Если заданной величиной является d , то на основе (12) строится быстро сходящийся итерационный процесс нахождения h :

$$h^{(n)} = (2 \ln 2 - \pi d) / \ln(1 + (2/h^{(n-1)})), \quad 2/3 < h < 2.$$

Например,

$$d = 0.08, \quad h = 1.0878; \quad d = 0.1, \quad h = 0.9404;$$

$$d = 0.12, \quad h = 0.8131; \quad d = 0.2, \quad h = 0.4448.$$

Определим координаты точек анодной границы.

Образы точек этой границы лежат на участке AB границы D_ζ , где $\zeta < -1$. Здесь ветвь квадратного корня $\sqrt{1 + \zeta}$ имеет представление $i\sqrt{-1 - \zeta}$, а формула (9) — вид

$$dz|_{AB} = -\frac{1}{i\pi\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \lambda - i\sqrt{-1 - \zeta}}}{\sqrt{1 + \lambda + i\sqrt{-1 - \zeta}}} \left(\frac{\sqrt{2 + i\sqrt{-1 - \zeta}}}{\sqrt{2 - i\sqrt{-1 - \zeta}}} \right)^{1/2} d\zeta.$$

Разделяя вещественные и мнимые части в последнем равенстве, колуцаем на AB следующую связь дифференциалов:

$$\left(\frac{dx}{dy} \right) = \left(\begin{matrix} -\sin \\ \cos \end{matrix} \right) \left(\arctg \sqrt{\frac{-1 - \zeta}{2}} - 2 \arctg \sqrt{\frac{-1 - \zeta}{1 + \lambda}} \right) \frac{d\zeta}{\pi\sqrt{\zeta^2 - 1}},$$

потоярая после преобразований приводится к виду

$$dx = \frac{2\sqrt{2(1 + \lambda)} - 2 - \lambda - \zeta}{\pi(\lambda - \zeta)(1 - \zeta)} d\zeta, \quad (13)$$

$$dy = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{2 + \lambda + \zeta - (1 + \zeta)\sqrt{2(1 + \lambda)}}{(\lambda - \zeta)(1 - \zeta)} d\zeta. \quad (14)$$

На основе (13), (14) можно действительно проверить, что при возрастании ζ на участке AB $dx > 0$, $dy > 0$ при $-1/2 < \lambda \leq 1$, $dy \geq 0$ при $-1 \leq \lambda < -1/2$ и $\zeta \geq \zeta_p$. Здесь

$$\zeta_p = (\sqrt{2(1 + \lambda)} - 2 - \lambda) / (1 - \sqrt{2(1 + \lambda)}) \quad (15)$$

образ точки P , максимально удаленной от катода. Величина $\delta = |y_p|$ характеризует заглубление. Точка M_1 перегиба немоотонной границы AB характеризуется параметром $\zeta_M = \mu$, де μ определено (7). Интегрируя выражения (13) и (14) и учитывая (11), (12), получаем параметрические уравнения границы анода в виде

$$x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{h - 2}{2} \ln \left(\frac{1}{4} - \frac{1 + \zeta}{8} \left(\frac{2 + h}{2 - h} \right)^2 \right) - \frac{h}{2} \ln \frac{(1 - \zeta)(2 + h)^2}{8h^2} \right], \quad (16)$$

$$y = \frac{2}{\pi} \left[\frac{h-2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-1-\zeta}{2} \left(\frac{2+h}{2-h} \right)^2} + \frac{h}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{-1-\zeta}{2}} \right]. \quad (17)$$

Придавая значения ζ при известной величине h , можно вычислить координаты точек анода. Из (17), (15), (11) находится выражение величины заглубления δ в зависимости от h в виде

$$\delta = \frac{1}{\pi} \left[(2-h) \operatorname{arctg} \frac{2+h}{\sqrt{(3h-2)(2+h)}} - h \operatorname{arctg} \frac{2-h}{\sqrt{(3h-2)(2+h)}} \right] \quad (18)$$

при $2/3 < h \leq 2$. При $0 \leq h \leq 2/3$ заглубление определяется величиной координаты y_A . Из (17) следует, что при $\zeta \rightarrow -\infty$ $y \rightarrow y_A = h - 1$, отсюда имеем

$$\delta = 1 - h \text{ при } 0 \leq h \leq 2/3. \quad (19)$$

Зависимости (18) и (19) представлены в таблице 2 и на рис. 4.

Таблица 2

Заглубление в зависимости от h

h	0	2/3	0.7	0.8	0.9	1.0	0.8	2
δ	1	1/3	0.3060	0.2460	0.2017	0.1666	0.0199	0

С увеличением h от 0 до 2 заглубление δ монотонно уменьшается. Выражения для координат точки перегиба M_2 немонотонной анодной границы, где $\zeta = \mu$, получаются из (16), (17) с учетом (7) и (11) в виде

$$x_{M_2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{h}{2} \ln \frac{2h^2}{4-h^2} - \ln \frac{4h}{(3h-2)(2-h)} \right],$$

$$y_{M_2} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{h-2}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(2+h)(3h+2)}{(2-h)(3h-2)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(2-h)(3h+2)}{(2+h)(3h-2)}} \right], \quad (20)$$

$2/3 < h < 2$.

Зависимость (20) представлена в таблице 3 и на рис. 4.

Таблица 3

Координаты точки перегиба в зависимости от h

h	2/3	0.7	0.8	0.9	1.0	1.4	1.6	1.8	2.0
x_{M_2}	$-\infty$	-1,1192	-0.7267	-0.5879	-0.5058	-0.3144	-0.2317	-0.1371	0
y_{M_2}	-1/3	-0.3046	-0.2354	-0.1786	-0.1293	0.0205	0.0708	0.0968	0

Координаты точек анодной границы для различных значений

$h = 0$	x	0.4412	0.2	0	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	-0.5199	-0.6666	-0.8281	-0.9337	-0.9862
$h = 0.2$	x	0.2886	0.2	0	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	-0.2716	-0.4602	-0.6313	-0.7356	-0.7866
$h = \frac{2}{3}$	x	0.1470	0.1	0	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	-0.1361	-0.2222	-0.3172	-0.3323	-0.3333
$h = 0.8$	x	0.1222	0.1	0	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	-0.0859	-0.1815	-0.2459	-0.2247	-0.2053
$h = 1$	x	0.0915	0.05	0	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	-0.0967	-0.1328	-0.1454	-0.0648	-0.0137
$h = 1.8$	x	0.0131	0	-0.1	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	-0.0160	0.0471	0.3745	0.6429	0.7676
$h = 2$	x	0	-0.05	-0.1	-0.4	-1.0	-2.0
	y	0	0.2488	0.3475	0.6417	0.8666	0.9724

При $h = 0$ уравнения (16), (17) принимают соответственно вид $x = -(1/\pi) \ln((1 - \zeta)/8)$, $y = -(2/\pi) \operatorname{arctg} \sqrt{(-1 - \zeta)/2}$; исключая из них ζ , получим выражение

$$y = (2/\pi) \ln(2 \cos((\pi/2)x)). \quad (21)$$

Выражение (21) при переобозначении осей совпадает с уравнением (19) [1] (см. там же табл. 1, 2) предельной анодной границы около полубесконечной пластинки-катада. Анодная граница в этом случае совпадает со свободной границей струи около полубесконечной пластинки [5, с. 335].

Полученные в работе результаты полезны для обоснования достоверности состояния предельной электрохимической обработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клоков В. В. Обратные задачи предельной электрохимической обработки.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 13. Изд-во Казанского ун-та, 1976, с. 151—162.
2. Клоков В. В. Анодное формообразование при изоляции на катоде.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 14. Изд-во Казанского ун-та, 1977, с. 129—136.
3. Клоков В. В. Одна смешанная краевая задача в случае предельного электрохимического формообразования.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 15. Изд-во Казанского ун-та, 1978, с. 77—85.
4. Смоленцев В. П., Садыков З. Б. Способ электрохимической обработки. Авт. свид. № 537782. Бюлл. изобр. и откр. № 45, 1976.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.

Доложено на семинаре 6 декабря 1978 г.

УДК 517.544

К ЗАДАЧЕ МАРКУШЕВИЧА
ДЛЯ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

А. А. Патрушев

1°. Требуется определить функции $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, аналитические соответственно в областях D^+ , D^- , если на контуре L , который разбивает плоскость S на эти области, их крайевые значения связаны соотношением

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \quad (1)$$

коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $g(t)$ принадлежат классу $H(L)$.

Первые эта задача была поставлена Маркушевичем А. И. [1]. Ее прикладной характер указал И. Н. Векуа [2]. Векуа Н. П. [3] обосновал ее нормальную разрешимость. Теоремы Нетера были доказаны Боярским Б. В. [4]. Михайлов Л. Г. [5, с. 141—164] дал приближенный метод решения задачи Маркушевича

$$\Phi^+(t) = a_1(t)\Phi^-(t) + b_1(t)\overline{\Phi^-(t)} + g_1(t)$$

в случае многосвязной области, когда коэффициенты $a_1(t)$, $b_1(t)$ связаны соотношением $|a_1(t)| > |b_1(t)|$. В случае $|a_1(t)| \equiv |b_1(t)|$ было получено решение в замкнутой форме. Сабитов И. Х. [6], [7] показал, что в случае круга число линейно независимых решений и число условий разрешимости задачи, если $|a_1(t)| < |b_1(t)|$ точно выражается через $x = \text{Ind } a_1(t)$ и номер n отрезка ряда Фурье, аппроксимирующего коэффициент $b_1(t)$. Салехов Л. Г. [8] дал решение задачи Маркушевича в замкнутой форме в случае аналитической продолжимости коэффициентов $a_1(t)$, $b_1(t)$ на внешность контура L , когда L является алгебраической замкнутой линией. Вопросы устойчивости решений задачи (1) рассмотрены в работе Литвинчука Г. С. [9].

В настоящей работе предлагается решение задачи Маркушевича (1) в замкнутой форме в случае единичного круга, когда коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию:

отношение $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо на внешность

единичного круга. Определены число решений и условий разрешимости в случае произвольного гладкого контура Ляпунова как в случае $|b(t)| < 1$, так и в случае $|b(t)| > 1$. Метод решения отличен от методов Л. Г. Михайлова и И. Х. Сабитова и заключается в приведении задачи (1) к сингулярному интегральному уравнению относительно $\text{Re } \Phi^+(t)$.

2°. Рассмотрим однородную задачу Маркушевича

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)}. \quad (2)$$

Решение ищем в классе функций, исчезающих на бесконечности и обладающих граничным значением $\Phi^+(t)$, нигде на контуре L не обращающемся в нуль. При решении задачи используем следующий факт: если функции $f(t)$, $g(t)$ непрерывны на границе области G , граница ∂G непрерывна и замкнута, и для всех $t \in \partial G$ выполняется неравенство $|f(t)| > |g(t)|$, то при надлежащем выборе аргументов имеем

$$\Delta_{\partial G} \arg [f(t) + g(t)] = \Delta_{\partial G} \arg f(t). \quad (3)$$

Перепишем соотношение (2) в виде

$$\Phi^+(t) [1 - b(t)e^{-2i \arg \Phi^+(t)}] = a(t)\Phi^-(t)$$

и заставим в полученном краевом условии точку t обойти один раз в положительном направлении контур L . Учитывая (3), подсчитаем полученное при этом приращение аргумента обеих частей равенства. Имеем две основные возможности:

1) $|b(t)| < 1$, тогда $n^+ = x - n^-$, откуда $n^+ + n^- = x$, где $x = \text{Ind } a(t)$, n^+ — число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+ , n^- — число нулей функции $\Phi^-(z)$ в D^- ;

2) $|b(t)| > 1$, тогда $n^+ + x_1 - 2n^+ = x - n^-$, откуда $x - x_1 + n^+ = n^-$, здесь $x_1 = \text{Ind } b(t)$.

То есть справедлива

Лемма 1. В случае $|b(t)| < 1$ условие $x \geq 0$ является необходимым для разрешимости однородной задачи Маркушевича. В случае же $|b(t)| > 1$ необходимое условие разрешимости запишется в виде $x - x_1 + n^+ \geq 0$, где $x_1 = \text{Ind } b(t)$, $x = \text{Ind } a(t)$, n^+ — число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+ .

Утверждение леммы при $|b(t)| < 1$ было получено Михайловым Л. Г. [5, с. 141—164].

Приступим к решению задачи (2), считая L единичной окружностью. Перепишем (2) в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1} \Phi^-(t) + \frac{2b(t)}{b(t)+1} \operatorname{Re} \Phi^+(t) \quad (4)$$

и, считая $\operatorname{Re} \Phi^+(t)$ известной, рассмотрим соотношение (4) как краевое условие задачи Римана. Обозначим через $\chi(z)$ каноническую функцию этой задачи. Тогда ее решение запишется в виде [10, с. 111—117] $\Phi(z) = \chi(z) [\Psi(z) + P_{x_0-1}(z)]$,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2b(\tau) \operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1] \chi^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau-z},$$

где

$$x_0 = \operatorname{Ind} \frac{a(t)}{b(t)+1} = \begin{cases} x, & \text{если } |b(t)| < 1, \\ x - x_1, & \text{если } |b(t)| > 1. \end{cases}$$

Обратим здесь внимание на то, что в силу леммы 1 в случае $|b(t)| < 1$ нас интересуют решения при $x \geq 0$, а в случае $|b(t)| > 1$ — при $x - x_1 + n^+ \geq 0$. В случае $-n^+ \leq x - x_1 < 0$ возникает $-(x - x_1)$ условий разрешимости

$$\int_L \frac{2b(\tau) \operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1] \chi^+(\tau)} \tau^k d\tau = 0, \quad k = 1, \overline{-(x-x_1)}.$$

На окружности L имеем

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) = \chi^+(t) & \left[\frac{b(t) \operatorname{Re} \Phi^+(t)}{[b(t)+1] \cdot \chi^+(t)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{[b(\tau)+1] \chi^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau-t} + P_{x_0-1}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, заметим, что функция $\Phi^+(z)$ определяется с точностью до мнимого постоянного через значение своей действительной части на контуре

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \Phi^+(\varphi) \frac{\tau+z}{\tau-z} d\varphi + iC, \quad \tau = e^{i\varphi},$$

откуда будем иметь на L

$$\Phi^+(t) = \operatorname{Re} \Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + iC. \quad (6)$$

Следовательно, из соотношений (5) и (6) получаем

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau-t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + iC =$$

$$= \frac{\chi^+(t)}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{[b(\tau) + 1] \cdot \chi^+(\tau)} \times \\ \times \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{b(t)}{b(t) + 1} \operatorname{Re} \Phi^+(t) + \chi^+(t) P_{x_0-1}(t),$$

или что все равно

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[\frac{b(t) + 1}{b(\tau) + 1} \cdot \frac{\chi^+(t)}{\chi^+(\tau)} \cdot b(\tau) - b(t) \right] \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau = \\ = \frac{b(t) + 1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + [b(t) + 1] \cdot [\chi^+(t) P_{x_0-1}(t) + iC].$$

Мы пришли к вырожденному сингулярному интегральному уравнению типа

$$\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi i} \int_L k(\tau, t) \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t).$$

Рассмотрим частный случай, когда в однородной задаче Маркушевича

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t) + 1} \Phi^-(t) + \frac{2b(t)}{b(t) + 1} \operatorname{Re} \Phi^+(t)$$

$\frac{a(t)}{b(t) + 1}$ аналитически продолжимо с контура L на внешность единичного круга. В этом случае получим вырожденное характеристическое уравнение

$$\frac{\operatorname{Re} \Phi^+(t)}{b(t) + 1} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{b(\tau) + 1} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + P_{x_0-1}(t) + C_0. \quad (7)$$

Введем кусочно-аналитическую функцию [11]

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{b(\tau) + 1} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Согласно формулам Сохоцкого уравнение (7) примет вид

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{2} [d + P_{x_0-1}(t)], \quad d = c_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Решение этой односторонней задачи запишется в виде

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2} [d + P_{x_0-1}(z)],$$

$$\Psi^-(z) = -\varphi_1^-(z) + \varphi_1(\infty),$$

$\varphi^-(z)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция. Условие аналитической продолжимости в область D^+ функции $\frac{1}{2} [d + P_{x_0-1}(t)]$, очевидно, выполняется, следовательно, на контуре L имеем

$$\frac{\operatorname{Re} \Phi^+(t)}{b(t)+1} = \frac{1}{2} [d + P_{x_0-1}(t)] - \varphi^-(t). \quad (8)$$

Отсюда, полагая $\Psi_1^-(z) = \frac{1}{2} [d + P_{x_0-1}(z)] - \varphi^-(z)$, получаем

$$\operatorname{Im} \{ [b(t)+1] \cdot \Psi_1^-(t) \} = 0. \quad (9)$$

Это задача Гильберта для функции $\Psi_1^-(z)$, аналитической в области D^- , всюду, исключая бесконечно удаленную точку, где у нее должен быть полюс порядка $x_0 - 1$. Индекс задачи (9)

$$2x'_1 = \operatorname{Ind} \left[\frac{b(t)+1}{\overline{b(t)+1}} \right] = \begin{cases} 2x_1, & \text{если } |b(t)| > 1, \\ 0, & \text{если } |b(t)| < 1 \end{cases}$$

и ее решением будет функция (12, с. 143—148)

$$\Psi_1^-(z) = \chi_1(z) [Q_{x_0+x'_1-1}(z) + \overline{Q_{x_0+x'_1-1}(z^*)}]. \quad (10)$$

Отсюда видно, что задача имеет отличные от нуля решения в случае $x_0 + x'_1 > 0$. Если $|b(t)| < 1$, то $x'_1 = 0$, $x_0 = x$ и задача имеет $2x$ линейно-независимых решений над полем R . Учитывая (8), (10), имеем на L

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t) = [b(t)+1] \cdot [\chi_1^-(t) \{ Q_{x_0+x'_1-1}(t) + \overline{Q_{x_0+x'_1-1}(t)} \}] \quad (11)$$

и соотношение (4) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{a(t)}{b(t)+1} \Phi^-(t) + 2b(t) \chi_1^-(t) \times \\ &\times \{ Q_{x_0+x'_1-1}(t) + \overline{Q_{x_0+x'_1-1}(t)} \}. \end{aligned}$$

Для функции

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+ \\ \frac{a(z)}{b(z)+1} \Phi^-(z), & z \in D^-, \end{cases}$$

имеем задачу о скачке. Ее решение запишется в виде

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2b(\tau) \chi_1^-(\tau) \{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\}}{\tau - z} d\tau + P_{x_0-1}(z)$$

и, следовательно, общее решение задачи Маркушевича определится формулами

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2b(\tau) \chi_1^-(\tau) \{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\}}{\tau - z} d\tau + \\ + P_{x_0-1}(z), & z \in D^+, \\ \frac{b(z)+1}{a(z)} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2b(\tau) \chi_1^-(\tau) \{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}\}}{\tau - z} d\tau + \right. \\ \left. + P_{x_0-1}(z) \right], & z \in D^-. \end{cases} \quad (12)$$

Обращаем здесь внимание на то, что, задавая постоянные в многочлене $P_{x_0-1}(z)$, мы тем самым задаем главную часть на бесконечности функции $\Psi_1^-(z)$, т. е. в общей сложности мы имеем $2x$ линейно-независимых решений над полем R .

Предполагая теперь, что в случае $|b(t)| > 1$ у нас $x_0 \geq 0$, имеем: однородная задача Маркушевича при $x > 0$ разрешима и имеет $2x$ линейно-независимое решение над полем R . При $x < 0$ однородная задача неразрешима. Пусть теперь при $|b(t)| > 1$ у нас $x_0 < 0$, т. е. $x - x_1 < 0$, тогда:

а) в случае $x_1 \leq 0$ однородная задача неразрешима.

б) при $x - x_1 < -n^+$, в силу леммы 1, задача также неразрешима, здесь n^+ — число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+ .

в) при $x_1 > 0$, $-n^+ \leq x - x_1 < 0$, в этом случае возникает $-(x - x_1)$ условий разрешимости

$$\int_L b(\tau) \chi_1^-(\tau) [Q_{x_1-1}(\tau) + \overline{Q_{x_1-1}(\tau)}] \tau^l d\tau = 0, \quad (13)$$

где $l = \overline{0, -(x - x_1)}$.

Исследуем подробнее последний случай. Учитывая, что

$$Q_{x_1-1}(\tau) + \overline{Q_{x_1-1}(\tau)} = 2\alpha_0 + \sum_{k=1}^{x_1-1} \alpha_k [\tau^k + \overline{\tau}^k] + \\ + i \sum_{k=1}^{x_1-1} \beta_k [\tau^k - \overline{\tau}^k], \quad \tau = e^{i\varphi}, \quad c_k = \alpha_k + i\beta_k,$$

перепишем (13) в виде

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2x_1-1} y_k d_k^l = 0, \\ \sum_{k=0}^{2x_1-1} y_k b_k^l = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где $y_k = \alpha_k$, $k = \overline{0, x_1 - 1}$; $y_{k+i} = \beta_i$, $i = \overline{1, x_1 - 1}$;

$$d_k^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi) \{ \cos(l+k+1)\varphi + \cos(l+1-k)\varphi \} -$$

$$- v(\varphi) \{ \sin(k+l+1)\varphi + \sin(l+1-k)\varphi \}] d\varphi, \quad k = \overline{0, x_1 - 1};$$

$$d_{k+i}^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi) \{ \sin(i+l+1)\varphi + \sin(l+1-i)\varphi \} -$$

$$- v(\varphi) \{ \cos(i+1+l)\varphi - \cos(l+1-i)\varphi \}] d\varphi, \quad i = \overline{1, x_1 - 1};$$

$$b_k^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi) \{ \sin(k+l+1)\varphi + \sin(l+1-k)\varphi \} +$$

$$+ v(\varphi) \{ \cos(k+l+1)\varphi + \cos(l+1-k)\varphi \}] d\varphi, \quad k = \overline{0, x_1 - 1};$$

$$b_{k+i}^l = \int_0^{2\pi} [u(\varphi) \{ \cos(i+l+1)\varphi - \cos(l+1-i)\varphi \} -$$

$$- v(\varphi) \{ \sin(i+l+1)\varphi - \sin(l+1-i)\varphi \}] d\varphi, \quad i = \overline{1, x_1 - 1};$$

$$l = \overline{0, -(x - x_1)}.$$

Здесь

$$u(\varphi) + iv(\varphi) = b(\tau(\varphi)) \cdot \chi_1^-(\tau(\varphi)).$$

Мы получили однородную систему уравнений относительно неизвестных y_k . Число уравнений здесь $2(x_1 - x)$, неизвестных $2x_1 - 1$, следовательно, однородная система будет иметь решения, отличные от нулевого, в случае, если $r < 2x_1 - 1$, где r — ранг матрицы коэффициентов в системе (14). Число решений будет $(2x_1 - 1) - r$.

Заметим, что если $2x_1 - 2x < 2x_1 - 1$, т. е. $x > 0$, ранг системы заведомо меньше $2x_1 - 1$, следовательно, система разрешима, и это значит, что в случае $-n^+ \leq x - x_1 < 0$ и $x > 0$ решение однородной задачи Маркушевича всегда существует и число решений будет $(2x_1 - 1) - r$ над полем R . Если же $x < 0$, то в этом случае число уравнений больше

числа неизвестных (напомним, что здесь $x_1 > 0$), и либо система разрешима и число решений будет $(2x_1 - 1) - r$, либо необходимо выполнение $-(x - x_1)$ условий разрешимости, который должен удовлетворять коэффициент $b(t)$.

Но, с другой стороны, так как $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ есть функция, аналитически продолжимая с контура L в область D^- , то вводя функцию $\Psi_2^-(z) = \frac{b(z)+1}{a(z)} \Psi_1^-(z)$, перепишем соотношение (9) в виде

$$\operatorname{Im} \{a(t) \Psi_2^-(t)\} = 0. \quad (15)$$

Это уже задача Гильберта для функции $\Psi_2^-(z)$, аналитической в области D^- , в бесконечно удаленной точке она должна иметь нуль первого порядка. Ее решением будет функция [12, с. 143—148]

$$\Psi_2^-(z) = \chi_1(z) [Q_{x-1}(z) + \overline{Q_{x-1}(z^*)}]. \quad (16)$$

Отсюда видно, что в случае $x > 0$ задача имеет $2x$ линейно-независимых решений, в случае $x \leq 0$ задача неразрешима.

В итоге можно сделать вывод.

Теорема 1. Если коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ однородной задачи Маркушевича такие, что $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо с контура L в область D^- , где L — единичная окружность, то задача:

1) при $x > 0$ разрешима и имеет $2x$ решений, как в случае $|b(t)| < 1$, так и в случае $|b(t)| > 1$, но в последнем случае предполагается $x_0 = x - x_1 \geq 0$, и решение записывается в виде (12);

2) при $x \leq 0$ не имеет решений, отличных от нулевого, как в случае $|b(t)| > 1$, так и в случае $|b(t)| < 1$;

3) $x - x_1 < -n^+$, $x > 0$, не будет иметь решений, отличных от нулевого (здесь n^+ — число нулей функции $\Phi^+(z)$ в D^+);

4) при $-n^+ \leq x - x_1 < 0$, $x > 0$ решение всегда существует и число решений будет $(2x_1 - 1) - r$ над полем R .

3°. Рассмотрим теперь неоднородную задачу Маркушевича (1). Перепишем соотношение (1) в виде

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t)}{b(t)+1} \Phi^-(t) + \frac{2b(t)}{b(t)+1} \operatorname{Re} \Phi^+(t) + \frac{q(t)}{b(t)+1}. \quad (17)$$

Пусть L — единичная окружность, $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо с контура L на область D^- . Рассуждая аналогично

Случаю однородной задачи, придем к вырожденному сингулярному интегральному уравнению

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \Phi^+(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ & + \frac{1}{\pi i} \int_L \left[\frac{b(t) + 1}{b(\tau) + 1} \cdot \frac{X^+(t)}{X^+(\tau)} \cdot b(\tau) - b(t) \right] \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau - t} d\tau = \\ & = \frac{b(t) + 1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + [b(t) + 1] \cdot [\chi^+(t) P_{x_0-1}(t) + iC] + \\ & + \frac{g(t)}{2} + \frac{[b(t) + 1] \cdot \chi^+(t)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{[b(\tau) + 1] \chi^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t}, \quad \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)} = \frac{a(t)}{b(t) + 1}, \\ & x_0 = \operatorname{Ind} \left[\frac{a(t)}{b(t) + 1} \right] = \begin{cases} x, & \text{если } |b(t)| < 1, \\ x - x_1, & \text{если } |b(t)| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае $x_0 < 0$ у нас $P_{x_0-1}(z) \equiv 0$ и возникает $-x_0$ условий разрешимости:

$$\int_L \left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau) + 1} \operatorname{Re} \Phi^+(\tau) + \frac{g(\tau)}{b(\tau) + 1} \right] \cdot \frac{1}{\chi^+(\tau)} \cdot \tau^k d\tau = 0.$$

$$k = 0, -x_0 - 1.$$

Учитывая, что в нашем случае $\frac{a(t)}{b(t) + 1}$ аналитически продолжимо с контура L на область D^- , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(t)}{b(t) + 1} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{[b(\tau) + 1]} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g(t)}{[b(t) + 1]} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{[b(\tau) + 1]} \cdot \frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau + iC + P_{x_0-1}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

При $x_0 < 0$ условия разрешимости тогда примут вид

$$\int_L \left[\frac{2b(\tau)}{b(\tau) + 1} \operatorname{Re} \Phi^+(\tau) + \frac{g(\tau)}{b(\tau) + 1} \right] \tau^k d\tau = 0, \quad k = 0, -x_0 - 1.$$

Перепишем соотношение (18) в виде

$$\frac{2 \operatorname{Re} \Phi^+(t) - g(t)}{2[b(t) + 1]} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2 \operatorname{Re} \Phi^+(\tau) - g(\tau)}{b(\tau) + 1} \frac{d\tau}{\tau - t} = d + P_{x_0-1}(t),$$

где

$$d = C_1 - iC + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\operatorname{Re} \Phi^+(\tau)}{\tau} d\tau = \operatorname{const}.$$

Если мы теперь введем кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2 \operatorname{Re} \Phi^+(\tau) - g(\tau)}{b(\tau) + 1} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z},$$

то согласно формулам Сохоцкого уравнение (18) примет вид $\Psi^+(t) = d + P_{x_0-1}(t)$, т. е. придем, как и в случае однородной задачи, к односторонней задаче. Решением ее [11] является функция

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) &= P_{x_0-1}(z) + d, \\ \Psi^-(z) &= -\varphi_1^-(z) + \varphi_1(\infty), \end{aligned}$$

где $\varphi_1^-(z)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция. Следовательно, на контуре L имеем

$$\frac{2 \operatorname{Re} \Phi^+(t)}{b(t) + 1} - \frac{g(t)}{b(t) + 1} = d + P_{x_0-1}(t) - \varphi^-(t). \quad (19)$$

Отсюда, полагая

$$\Psi_1^-(z) = d + P_{x_0-1}(z) - \varphi^-(z),$$

получаем

$$\operatorname{Im} [\Psi_1^-(t) \{b(t) + 1\}] = \operatorname{Im} \overline{g(t)}. \quad (20)$$

Как и в случае однородной задачи, мы пришли к задаче Гильберта для функции $\Psi_1^-(z)$, аналитической в области D^- всюду, исключая бесконечно удаленную точку, где у нее должен быть полюс порядка $x_0 - 1$. Общее решение задачи (20) запишется в виде [12, с. 143—148]

$$\begin{aligned} \Psi_1^-(z) &= \frac{\chi_1(z)}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{\chi_1^+(\tau)} \cdot \frac{\tau + z}{\tau - z} \cdot \frac{d\tau}{\tau} + \\ &+ \chi_1(z) [Q_{x_0+x'_1-1}(z) + \overline{Q_{x_0+x'_1-1}(z^*)}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда видно, что задача (20) имеет отличные от нуля решения в случае $x_0 + x'_1 \geq 0$. Если же $x_0 + x'_1 < 0$, то для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-(x_0 + x'_1)$ условий разрешимости, которым должны удовлетворять коэффициент $b(t)$ и свободный член $g(t)$:

$$\int_L \frac{\operatorname{Im} \overline{g(t)}}{b(t) + 1} \cdot \frac{dt}{t^{k+1}} = 0, \quad k = 0, \overline{-(x_0 + x'_1) - 1}.$$

Если $|b(t)| < 1$, то $x_0 = x$, $x'_1 = 0$, и при $x \geq 0$ общее решение задачи (20) зависит от $2x$ произвольных постоянных. Если

же $|b(t)| > 1$, то $x'_1 = x_1$, $x_0 = x - x_1$, и в случае $x_0 \geq 0$ и $x \geq 0$ решение задачи опять же зависит от $2x$ произвольных постоянных.

Учитывая (19), (20), имеем на L

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi^+(t) = & \frac{b(t)+1}{2} \left[\frac{\chi_1^-(t)}{2} \left\{ -\frac{g_1(t)}{\chi_1^+(t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau)}{\chi_1^+(\tau)} \cdot \frac{\tau+t}{\tau-t} \cdot \frac{d\tau}{\tau} \right\} + \right. \\ & \left. + \chi_1^-(t) \{ Q_{x_0+x'_1-1}(t) + \overline{Q_{x_0+x'_1-1}(t)} \} \right] + \frac{g(t)}{2}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{где } g_1(t) = \frac{\operatorname{Im} \overline{g(t)}}{b(t)+1}.$$

Возвращаясь к соотношению (17) и принимая во внимание (22), приходим для функции

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \frac{a(z)}{b(z)+1} \Phi^-(z), & z \in D^- \end{cases}$$

к задаче о скачке. Ее решение запишется в виде

$$\begin{aligned} \Omega(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \chi_1^-(\tau) \left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)} \cdot \frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau} \cdot \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right]}{\tau-z} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \chi_1^-(\tau) [Q_{x_0+x'_1-1}(\tau) + \overline{Q_{x_0+x'_1-1}(\tau)}]}{\tau-z} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau-z} d\tau + P_{x_0-1}(z) \end{aligned}$$

и, следовательно, общее решение неоднородной задачи Маркушевича определится формулами

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) = & \\ = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \chi_1^-(\tau) \left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)} \cdot \frac{\tau_1+\tau}{\tau_1-\tau} \cdot \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right]}{\tau-z} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau-z} d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \chi_1^-(\tau) [Q_{x_0+x_1'-1}(\tau) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}]}{\tau - z} d\tau + P_{x_0-1}(z), \quad z \in D^+, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi^-(z) &= \frac{b(z) + 1}{a(z)} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \chi_1^-(\tau) \left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)} \cdot \frac{\tau_1 + \tau}{\tau_1 - \tau} \cdot \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right]}{\tau - z} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau) \chi_1^-(\tau) [Q_{x_0+x_1'-1}(\tau) + \overline{Q_{x_0+x_1'-1}(\tau)}]}{\tau - z} d\tau + P_{x_0-1}(z) \right\}, \\ &\quad z \in D^-. \end{aligned}$$

Предполагая теперь, что в случае $|b(t)| > 1$ у нас $x_0 \geq 0$, имеем: при $x \geq 0$ неоднородная задача Маркушевича разрешима и общее решение линейно зависит от $2x$ произвольных постоянных; при $x < 0$ в случае $|b(t)| > 1$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно выполнение $-x$ условий разрешимости, которым должны удовлетворять коэффициент $b(t)$ и свободный член $g(t)$:

$$\int_L \frac{\operatorname{Im} \overline{g(t)}}{b(t) + 1} \cdot \frac{dt}{t^{k+1}} = 0, \quad k = \overline{0, -x-1}. \quad (24)$$

В этом случае $Q_{x_0+x_1'-1}(z) \equiv 0$, т. е. при выполнении условий разрешимости общее решение задачи зависит от $2(x-x_1) = 2x_0$ произвольных постоянных; при $x < 0$ в случае $|b(t)| < 1$ для разрешимости необходимо и достаточно выполнение $-x$ условий разрешимости

$$\int_L \left\{ b(\tau) \chi_1^-(\tau) \left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)} \cdot \frac{\tau_1 + \tau}{\tau_1 - \tau} \cdot \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right] + g(\tau) \right\} \tau^k d\tau = 0 \quad (25)$$

и в этом случае $Q_{x_0+x_1'-1}(z) \equiv 0$, $P_{x_0-1}(z) \equiv 0$, т. е. при выполнении этих условий имеем единственное решение.

Пусть теперь при $|b(t)| > 1$ у нас $x_0 < 0$, т. е. $x - x_1 < 0$, тогда:

а) при $x_1 < 0$ условия разрешимости задачи запишутся в виде

$$\int_L \left\{ b(\tau) \chi_1^-(\tau) \left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)} \cdot \frac{\tau_1 + \tau}{\tau_1 - \tau} \cdot \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right] + g(\tau) \right\} \tau^k d\tau = 0,$$

$$k = 0, -\overline{(x - x_1)}$$

$$\int_L \frac{g_1(\tau)}{\chi_1^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = 0, \quad k = 0, -\overline{x_1 - 1},$$

т. е. всего $-x$ условий разрешимости, в этом случае

$$Q_{x_0+x'_1-1}(z) \equiv 0, \quad P_{x_0-1}(z) \equiv 0$$

и задача при выполнении этих условий разрешимости имеет единственное решение;

б) при $x_1 \geq 0$ имеем $-(x - x_1)$ условий разрешимости вида

$$\int_L \left\{ b(\tau) \chi_1^-(\tau) \left[-\frac{g_1(\tau)}{2\chi_1^+(\tau)} + \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{g_1(\tau_1)}{\chi_1^+(\tau_1)} \cdot \frac{\tau_1 + \tau}{\tau_1 - \tau} \cdot \frac{d\tau_1}{\tau_1} \right] + g(\tau) \right\} \tau^k d\tau +$$

$$+ \int_L g(\tau) \tau^k d\tau + \int_L b(\tau) \chi_1^-(\tau) [Q_{x'_1-1}(\tau) + \overline{Q_{x'_1-1}(\tau)}] \tau^k d\tau = 0,$$

$$k = 0, -\overline{(x - x_1) - 1}.$$

При выполнении этих условий общее решение будет зависеть от $2x_1$ произвольных постоянных.

Исследуем условия разрешимости (26). Возвращаясь к исследованию условий разрешимости в случае однородной задачи и производя аналогичные преобразования, мы приходим к однородной системе линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{2x_1-1} y_k d_k^l = f_l,$$

$$l = 0, -\overline{(x - x_1) - 1}. \quad (27)$$

$$\sum_{k=0}^{2x_1-1} y_k b_k^l = \psi_l,$$

И, следовательно, в случае несовместимости системы имеем при выполнении $-(x - x_1)$ условий разрешимости, и общее решение задачи (17) зависит от $2x_1$ произвольных постоянных. Если система совместна и $r = -2(x - x_1) = 2x_1 - 1$, т. е. $2x - 1$, где r — ранг системы (27), имеем, что задача Маркушевича разрешима и имеет единственное решение. Если же в случае совместности системы $r < -2(x - x_1)$, то задача заведомо разрешима и общее решение зависит от $-2(x - x_1) - r$ произвольных постоянных. В итоге справедлива

Теорема 2. При тех же предположениях относительно коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ и контура L , что и в теореме 1, неоднородная задача Маркушевича:

1) при $x \geq 0$ разрешима и общее решение зависит от $2x$ —произвольных постоянных (в случае $|b(t)| > 1$ предполагается $x - x_1 \geq 0$), решение записывается в виде (23);

2) при $x < 0$ в случае $|b(t)| < 1$ имеем $-x$ —условий разрешимости (25), решение будет единственным;

3) при $x < 0$ в случае $|b(t)| > 1$, но $x - x_1 \geq 0$ мы также имеем $-x$ —условий разрешимости (24), общее решение при выполнении этих условий разрешимости будет зависеть от $2(x - x_1)$ произвольных постоянных;

4) при $x - x_1 < 0$, $x_1 < 0$ в случае $|b(t)| > 1$ мы имеем единственное решение, если выполняются $-(x - x_1)$ условий разрешимости (25) и $-x_1$ условий разрешимости (24);

5) при $x - x_1 < 0$, но $x_1 \geq 0$ в случае $|b(t)| > 1$ общее решение будет зависеть от $2x_1$ произвольных постоянных, если система (27) несовместна и если выполняются $-(x - x_1)$ условий разрешимости (26); в случае же совместности системы (27) и $r = -2(x - x_1) = 2x_1 - 1$ имеем единственное решение, если же $r < -2(x - x_1)$, то общее решение зависит от $-2(x - x_1) - r$ произвольных постоянных.

Отметим здесь, что в случае произвольного замкнутого, гладкого контура Ляпунова можно теперь сказать как о числе решений, так и о числе условий разрешимости, как в случае $|b(t)| > 1$, так и в случае $|b(t)| < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А. И. Об одной граничной задаче теории аналитических функций.— Учен. записки МГУ. Т. 1. Вып. 100 (1946 г.), с. 20—30.
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, с. 454—455.
3. Векуа Н. П. Об одной задаче теории функций комплексного переменного.— ДАН, 86, № 3, 1952, с. 457—460.
4. Боярский Б. В. Об обобщенной граничной задаче Гильберта.— Сообщения АН Груз. ССР, 25, № 4, 1960, с. 338—390.
5. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с ингулярными коэффициентами.— Труды АН Тадж. ССР. Душанбе. Т. 1, 1963, с. 141—164.
6. Сабитов И. Х. Об одной граничной задаче нелинейного сопряжения.— Математический сборник, 64 (106), № 2, 1964, с. 262—274.
7. Сабитов И. Х. Об одной задаче линейного сопряжения на окружности.— Сибирский математический журнал, 5, № 1, 1964, с. 124—129.
8. Салехов Л. Г. Исследование одной общей задачи линейного сопряжения методом симметрии. Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. Казань, 1969.
9. Литвинчук Г. С. Об устойчивости одной краевой задачи теории аналитических функций.— ДАН СССР, 1974, № 6, 1967, с. 1268—1270.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977, с. 111—115.
11. Гахов Ф. Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши.— Дифференциальные уравнения. Т. II. Вып. 4, Минск, „Наука и техника“, 1966, с. 533—544.
12. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Изд-во Казанск. ун-та, 1977, с. 143—148.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТИПА ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

И. Е. Плещинская

Рассмотрим систему уравнений

$$u u_y + v_x - \frac{1}{2} u = 0, \quad (1)$$

$$u_x - v_y = 0,$$

которая эллиптическая при $y > 0$ и гиперболическая при $y < 0$. Исследованию подобных систем, эквивалентных им уравнений второго порядка и решению граничных задач для них посвящены работы Бауера [1], С. А. Терсенова [2] и Ю. М. Крикунова [3]. В статье [1] для уравнения, эквивалентного системе более общего вида, чем (1), получено представление решения при $y > 0$.

Пусть область D_1 совпадает с верхней полуплоскостью $y > 0$, а область D_2 есть характеристический треугольник системы (1), ограниченный отрезком вещественной оси AB с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$ и $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$. Строя уравнение второго порядка исключением из системы (1) одной из искомым функций и привлекая [1], [3], можно получить для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следующее представление в области D_1 :

$$u(x, y) = -2\varphi_x(x, \eta_1), \quad v(x, y) = \eta_1 \cdot \varphi_{\eta_1}(x, \eta_1) - \varphi(x, \eta_1), \quad (2)$$

где $\eta_1 = 2\sqrt{-y}$, $\varphi_{xx} + \varphi_{\eta_1\eta_1} = 0$. Аналогичное представление имеем для решения системы (1) в D_2 :

$$u(x, y) = -2\psi_x(x, \eta), \quad v(x, y) = \eta \cdot \psi_\eta(x, \eta) - \psi(x, \eta), \quad (3)$$

где $\eta = 2\sqrt{-y}$, $\psi_{xx} - \psi_{\eta\eta} = 0$.

Решим следующую задачу. В области $D = D_1 \cup AB \cup D_2$ требуется найти пару функций u, v , удовлетворяющих таким условиям:

- 1) в области D при $y \neq 0$ u, v — решение системы (1);
- 2) $u \in C(\bar{D})$, v непрерывна во всех конечных точках \bar{D} ;

$$\lim_{x^2+4y \rightarrow \infty, y \geq 0} u(x, y) = 0, \quad u, v \in C'(D_1 \cup D_2), \quad u_x \in C(D_2 \cup AB),$$

u_x при стремлении x, y к точкам A и B из D_2 допускает интегрируемые особенности:

3) на отрезке $(0, 1)$ выполняется следующее условие склеивания:

$$\lim_{y \rightarrow -0} \sqrt{-y} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{y} u_y(x, y) = v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

$v(x)$ в $x = 0$ и $x = 1$ допускает интегрируемые особенности;

4) на вещественных лучах $\Gamma: y = 0, x \leq 0$, $\sigma: y = 0, x \geq 1$ и на характеристике AC функция $u(x, y)$ принимает заданные значения

$$u|_{\Gamma \cup \sigma} = f(x), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1, \quad (5)$$

$$f(0) = f_1(0),$$

$$u|_{AC} = f_1(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (6)$$

$$5) \quad v(0, 0) = 0. \quad (7)$$

Относительно граничных функций $f(x)$ и $f_1(x)$ будем предполагать следующее:

$$f(x) \in H([-\infty, 0) \cup [1, \infty]), \quad f_1(x) \in H(0, 1),$$

$$f_1(x) = 0(x^\alpha \cdot (x-1)^\beta), \quad \alpha > \frac{3}{4}, \quad \beta > \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Входящие в представление (2) и (3) функции $\varphi(x, \eta_1)$ и $\psi(x, \eta)$ определяются не однозначно, а с точностью до слагаемых $c_1 \eta_1$ или $c_2 \eta$ соответственно, где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Таким образом, формулы (2), (3) вполне определенному решению u, v системы (1) ставят в соответствие целые классы функций $\varphi(x, \eta_1)$ в D_1 и $\psi(x, \eta)$ в D_2 . С другой стороны, независимо от того, какая функция φ или ψ из некоторого класса будет подставлена в правую часть формул (2) или (3), мы всегда получим единственные u, v , соответствующие всему классу. Поэтому, с целью упрощения дальнейших рассуждений, условимся рассматривать в D_1 не весь класс функций $\varphi(x, \eta_1) + c_1 \eta_1$, а лишь одну функцию из этого класса, удовлетворяющую, например, условию

$$\varphi_{\eta_1}(0, 0) = \frac{1}{2} f(0). \quad (9)$$

В таком случае вполне определенному решению u , v системы (1) будет поставлена в соответствие в D_1 единственная функция $\varphi(x, \eta_1)$ и обратно. Из условия склеивания (4) и равенства (9) следует, что этому же решению u , v системы (1) будет соответствовать в D_2 также единственная функция $\psi(x, \eta)$, удовлетворяющая условию $\psi_{\eta}(0, 0) = -\frac{1}{2} f(0)$.

Приступим к построению функций φ и ψ . Очевидно, они должны удовлетворять следующим условиям; φ , φ_x , φ_{η} непрерывны во всех конечных точках \bar{D}_1 , $\varphi \in C^2(D_1)$, $\varphi_{x\eta_1} \in C(D_1 \cup AB)$, $\psi \in C^1(\bar{D}_2)$, ψ_{xx} , $\psi_{x\eta} \in C(D_2 \cup AB)$, $\psi_{\eta\eta} \in C(D_2)$.

Пусть $y < 0$. Тогда известно, что функцию $\psi(x, \eta)$ можно записать в виде

$$\psi(x, \eta) = \Gamma_1(x + \eta) + \Gamma_2(x - \eta), \quad (10)$$

где Γ_1 , Γ_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Используя краевое условие (6) и представление (10), получим

$$\Gamma_1'(x) = -\frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \Gamma_2'(0), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (11)$$

Тогда, с учетом (3), (10), (11), запишем

$$u(x, y) = f_1\left(\frac{x + \eta}{2}\right) - 2\Gamma_2'(x - \eta) + 2\Gamma_2'(0). \quad (12)$$

Следуя методу работы [4], продифференцируем выражение (12) и скомбинируем производные u_x и u_y , в итоге получим

$$u_x(x, y) - \sqrt{-y} u_x(x, y) = f_1'\left(\frac{x}{2} + \sqrt{-y}\right). \quad (13)$$

Устремим в соотношении (13) y к нулю. Тогда в силу непрерывности u_x в $D_2 \cup AB$ и условия склеивания (4) будем иметь

$$u_x(x, 0) - v(x) = f_1'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < 1.$$

Проинтегрируем последнее выражение в пределах $(0, x)$:

$$u(x, 0) - \int_0^x v(\xi) d\xi = 2f_1\left(\frac{x}{2}\right) - 2f_1(0) + u(0, 0), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (14)$$

Так как $u(x, y)$ непрерывна на AB и $\lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{y} u_y(x, y) = -2\varphi_{x\eta_1}(x, 0) = v(x)$, $0 < x < 1$, то соотношение (14) окончательно примет вид

$$\varphi_x(x, 0) - \varphi_{\eta_1}(x, 0) = -f_1\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{a}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (15)$$

где $a = -f(0) + 2\varphi_{\eta_1}(0, 0)$. В силу условия (9) $a = 0$.

Используя представление для u (2), краевое условие (5) можно записать так:

$$\varphi_x(x, 0) = -\frac{1}{2}f(x), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1. \quad (16)$$

Введем теперь функцию

$$C(z) = \varphi_{\eta_1}(x, \eta_1) + i\varphi_x(x, \eta_1), \quad z = x + i\eta_1, \quad (17)$$

которая в силу выбора $\varphi(x, \eta_1)$ является аналитической в D_1 . Граничные условия (15), (16) для $C(z)$ можно переписать в виде

$$\operatorname{Im} C(x) = -\frac{1}{2}f(x), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1,$$

$$\operatorname{Im} C(x) - \operatorname{Re} C(x) = -f_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

или

$$C(x) - \overline{C(x)} = -if(x), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1,$$

$$(1+i)C(x) + (1-i)\overline{C(x)} = 2f_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (18)$$

Таким образом, для нахождения $C(z)$ получили краевую задачу Гильберта с разрывными коэффициентами. В силу непрерывности u и v в точках $z=0$ и $z=1$, являющихся для коэффициентов задачи точками разрыва первого рода, функцию $C(z)$ в $z=0$ и $z=1$ будем строить непрерывной.

Полученную задачу Гильберта будем решать методом приведения ее к краевой задаче Римана. Обозначим через D_1^* область, симметричную D_1 относительно вещественной оси, и рассмотрим кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} C(z), & z \in D_1, \\ \overline{C(\bar{z})}, & z \in D_1^*. \end{cases} \quad (19)$$

Очевидно, что $\overline{\Phi(\bar{z})} = \Phi(z)$. В силу этой симметрии граничные условия (18) примут вид краевых условий задачи Римана

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (20)$$

$$G(x) = \{1, x < 0, x > 1; i, 0 < x < 1\},$$

$$g(x) = \begin{cases} -if(x), & x < 0, x > 1, \\ (1-i)f_1\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

решение которой будем искать в классе симметричных кусочно-аналитических функций, непрерывных в точках $z=0$ и $z=1$ и ограниченных на бесконечности.

В качестве канонической функции соответствующей однородной задачи Римана можно взять функцию

$$X(z) = \sqrt[4]{\frac{z-1}{z}}, \quad (21)$$

однозначно определенную в плоскости с разрезом вдоль отрезка $(0, 1)$. Очевидно, что $X(z)$ симметрична, на бесконечности ограничена, а в точках $z=0$ и $z=1$ имеет соответственно особенность и нуль порядка меньше единицы.

С помощью канонической функции общее решение задачи Римана запишется в виде

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) + c\}, \quad (22)$$

где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{X^+(x)} \frac{dx}{x-z}, \quad (23)$$

c — вещественная постоянная.

Так как решение $\Phi(z)$ должно быть в точке $z=0$ ограничено, то получаем условие для определения c : $\Psi(0) + c = 0$, где под $\Psi(0)$ понимается главное значение интеграла типа Коши (23).

Окончательно функция $\Phi(z)$ будет иметь следующий вид:

$$\Phi(z) = X(z)\{\Psi(z) - \Psi(0)\},$$

то есть

$$\Phi(z) = X(z) \cdot \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{X^+(x) \cdot x} \frac{dx}{x-z}. \quad (24)$$

Очевидно, что построенное решение задачи Римана единственно. В силу свойств $X(z)$ и функций, входящих в $g(x)$, интеграл в (24) сходится, причем поведение $\Phi(z)$ при $z = \infty$ совпадает с поведением $f(x)$ при $x = \infty$.

Обозначим $X(z) \cdot z = \tilde{X}(z)$. Тогда, учитывая вид $X(z)$ (21), нетрудно получить, что в окрестности точки $z=0$

$$\tilde{X}(z) = z^{\frac{3}{4}} \cdot X_1(z),$$

где под $z^{\frac{3}{4}}$ понимается однозначная в разрезанной по отрезку $(0, 1)$ окрестности точки $z=0$ ветвь степенной функции, а $X_1(z)$ в $z=0$ ограничена. Аналогично в окрестности $z=1$

$$\tilde{X}(z) = (z-1)^{\frac{1}{4}} \cdot X_2(z);$$

здесь в качестве однозначной ветви степенной функции выбрана ветвь в разрезанной по лучу $(1, \infty)$ окрестности точки $z=1$, $X_2(z)$ в $z=1$ ограничена. Используя теперь записанные представления $\tilde{X}(z)$ в окрестностях $z=0$ и $z=1$ и формулы Н. И. Мусхелишвили (26.22), (26.24) [5], легко получить вывод о непрерывности построенного решения задачи Римана (24) в этих точках.

В силу определения функции $\Phi(z)$ (19) при $z \in D_1$ $\Phi(z) = C(z)$, то есть при $z \in D_1$, решение задачи Гильберта запишется по формуле (24).

Чтобы получить решение исходной задачи (4)–(7) для системы (1) в эллиптической области, обратимся к представлению (2). Так как согласно (17) $\varphi_{\tau_1}(x, \tau_1) = \operatorname{Re} C(z)$, $\varphi_x(x, \tau_1) = \operatorname{Im} C(z)$ и, следовательно,

$$\varphi(x, \tau_1) = \int_{(0,0)}^{(x,\tau_1)} \operatorname{Im} C(z) dx + \operatorname{Re} C(z) d\tau_1 + \varphi(0, 0),$$

то после подстановки этих функций в формулы (2) получим

$$u(x, y) = -2 \operatorname{Im} C(z),$$

$$v(x, y) = \tau_1 \cdot \operatorname{Re} C(z) - \int_{(0,0)}^{(x,\tau_1)} \operatorname{Im} C(z) dx + \operatorname{Re} C(z) d\tau_1 - \varphi(0, 0). \quad (25)$$

Заметим, что из (24) и (25) следует $\lim_{x^2+4y \rightarrow \infty, y \geq 0} u(x, y) = 0$.

В гиперболической области с учетом соотношений (12), (25) и непрерывности $u(x, y)$ можно записать

$$u(x, 0) = f_1\left(\frac{x}{2}\right) - 2\Gamma'_2(x) + 2\Gamma'_2(0) = -2 \operatorname{Im} C(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $C(x)$ находится по формуле Сохоцкого. Отсюда

$$\Gamma'_2(x - \eta) = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x - \eta}{2}\right) + \text{Im } C(x - \eta) + \Gamma'_2(0). \quad (26)$$

Теперь, зная $\Gamma'_1(x)$ из (11) и $\Gamma'_2(x - \eta)$ из (26), легко построить $\Gamma_1(x + \eta)$ и $\Gamma_2(x - \eta)$, а, следовательно, и функцию $\psi(x, \eta)$, имеющую вид (10). Подставляя выражения для ψ , ψ_x и ψ_η в представление (3), получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f_1\left(\frac{x + \eta}{2}\right) - f_1\left(\frac{x - \eta}{2}\right) - 2 \text{Im } C(x - \eta), \\ v(x, y) &= -\frac{\eta}{2} \left[f_1\left(\frac{x + \eta}{2}\right) + f_1\left(\frac{x - \eta}{2}\right) \right] - \eta \cdot \text{Im } C(x - \eta) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{x+\eta} f_1\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^{x-\eta} f_1\left(\frac{\xi}{2}\right) d\xi - \int_0^{x-\eta} \text{Im } C(\xi) d\xi - \Gamma_1(0) - \Gamma_2(0). \end{aligned} \quad (27)$$

В силу условия (7) из (25) и (27) следует, что $\varphi(0, 0) = \Gamma_1(0) + \Gamma_2(0) = 0$.

Итак, построено единственное решение задачи типа Трикоми для системы (1). Оно дается формулами (25) при $\varphi(0, 0) = 0$ в эллиптической области и формулами (27) при $\Gamma_1(0) = -\Gamma_2(0)$ в гиперболической области.

Нетрудно проверить, что при выполнении условий (8) производная u_x непрерывна в $D_2 \cup AB$, а в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ допускает интегрируемые особенности.

Замечание 1. Для системы (1), используя представление (2), (3), совершенно аналогично тому, как это было сделано выше, можно решить задачу, отличающуюся от рассмотренной краевым условием (5). А именно, вместо условия (5) запишем

$$\sqrt{u_y}|_{\Gamma \cup \sigma} = f(x), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1, \quad (31)$$

и рассмотрим задачу (4), (31), (6), (7). При этом вместо (9) надо выбрать

$$\psi_{\eta_1}(0, 0) = \frac{1}{2} f_1(0). \quad (32)$$

Тогда вместо граничного условия (16) мы получим условие вида

$$\varphi_{x\eta_1}(x, 0) = -\frac{1}{2} f(x), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1,$$

вследствие чего краевые условия задачи Гильберта с учетом (32) запишутся следующим образом:

$$\operatorname{Re} C(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x f(\xi) d\xi + \frac{1}{2} f_1(0), \quad x \leq 0, \quad x \geq 1, \quad (33)$$

$$\operatorname{Im} C(x) - \operatorname{Re} C(x) = -f_1\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Вводя теперь кусочно-аналитическую функцию $\Phi(z)$, (19), на основании (33) придем к задаче Римана (20), где

$$G(x) = \{-1, x \in \Gamma \cup \sigma; i, 0 < x < 1\},$$

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(\xi) d\xi + f_1(0), & x < 0, \quad x > 1, \\ (1-i)f_1\left(\frac{x}{2}\right), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (35)$$

Нетрудно проверить, что в качестве канонической функции соответствующей однородной задачи Римана можно взять функцию

$$X(z) = \sqrt{z} \cdot \sqrt[4]{\frac{z-1}{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z-1}}, \quad (36)$$

в которой в качестве значений радикалов выбраны однозначные ветви в плоскости с разрезом вдоль Γ , AB и σ соответственно. А тогда единственное непрерывное симметричное решение задачи Римана запишется в виде

$$\Phi(z) = X(z) \{\Psi(z) - \Psi(1)\}, \quad (37)$$

где $X(z)$ определена (36), $\Psi(z)$ — интеграл типа Коши с плотностью $g(x)/X^+(x)$, $g(x)$ имеет вид (35).

По решению (37) функции u и v строятся уже известным образом.

Замечание 2. Рассмотрим неоднородную систему

$$u_y + v_x - \frac{1}{2} u = l_1(x, y), \quad (38)$$

$$u_x - v_y = l_2(x, y).$$

Очевидно, что зная частное решение этой системы $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ при $y > 0$ и $u_1(x, y)$, $v_1(x, y)$ при $y < 0$, можно записать следующее представление для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$:

$$y > 0 \quad \begin{cases} u(x, y) = -2\tilde{\varphi}_x(x, \eta_1) + u_0(x, \eta_1), \\ v(x, y) = \eta_1 \cdot \tilde{\varphi}_{\eta_1}(x, \eta_1) - \tilde{\varphi}(x, \eta_1) + v_0(x, \eta_1), \end{cases} \quad (39)$$

где $\tilde{\varphi}_{xx} + \tilde{\varphi}_{\eta_1\eta_1} = 0$,

$$\begin{aligned}
 y < 0 \quad u(x, y) &= -2\tilde{\psi}_x(x, \eta) + u_1(x, \eta), \\
 v(x, y) &= \eta \cdot \tilde{\psi}_\eta(x, \eta) - \tilde{\psi}(x, \eta) + v_1(x, \eta),
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

где $\tilde{\psi}_{xx} - \tilde{\psi}_{\eta\eta} = 0$.

Чтобы построить u_0 и v_0 , можно воспользоваться формулой, полученной в работе [2, с. 83], при этом функции $l_1(x, y)$ и $l_2(x, y)$ должны удовлетворять в D_1 следующим требованиям: $l_1, l_2 \in H(D_1)$; при $x \rightarrow \infty, y \geq 0$ $l_1 = 0 \left(\frac{1}{x^{2+\varepsilon}} \right)$, $l_2 = 0 \left(\frac{1}{x^\varepsilon} \right)$, $\varepsilon > 0$; при $y \rightarrow \infty \forall x$ $l_1 = 0 \left(\frac{1}{y^\varepsilon} \right)$, $l_2 = 0 \left(\frac{1}{\frac{3}{2} + \varepsilon} \right)$.

Что касается области D_2 , то, распространяя метод Г. В. Чекарарева [6] на случай системы (33), здесь также удастся найти u_1 и v_1 при следующих предположениях относительно $l_1(x, y)$ и $l_2(x, y)$: $l_1, l_2 \in H(D_2)$, при $y \rightarrow 0$ $l_1 = 0((-y)^\alpha)$, $\alpha > \frac{1}{2}$, $l_2 = 0((-y)^\beta)$, $\beta > 0$. А тогда для системы (33) можно решить задачу типа (4) — (7) (или (4), (31), (6), (7)) аналогично тому, как это было сделано выше для однородной системы (1), то есть используя представления (39) и (40), свести поставленную задачу типа Трикоми к краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами. Единственное решение задачи Римана в этом случае запишется по формуле, аналогичной (24) (или (37)), только плотность интеграла будет несколько иной (в нее войдут еще граничные значения частных решений системы (33)). После получения подобной формулы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие системе (33) и краевым условиям типа (4) — (7) (или (4), (31), (6), (7)), строятся аналогично тому, как это сделано для однородной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bauer K. W. Differential Operatoren bei einer Klasse verallgemeinerter Tricomi-Gleichungen. - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Band 54, Heft 11, 1974, s. 715—721.
2. Терсенов С. А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск, Изд-во Новосибирского ун-та, 1973.
3. Крикунов Ю. М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{2}u_y = 0$. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1979.
4. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. Изд-во АН СССР, 1959.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., „Наука“, 1968.
6. Чекарарев Т. В. Решение системы дифференциальных уравнений смешанного типа в области гиперболичности. — „Изв. вузов. Математика“, 1967, № 5.

Должено на семинаре 29 января 1979 г.

УДК 517.544

ИНТЕГРАЛЫ ТИПА КОШИ ДЛЯ
ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. В. Показеев

Полианалитическую функцию $f(z)$ в области D будем определять соотношением

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) \bar{z}^k,$$

в котором $f_k(z)$ — аналитические в D функции.

В настоящей работе вводятся и исследуются два полианалитических интеграла, играющие такую же роль в теории полианалитических функций, какую в классе аналитических функций играют интегралы типа Коши. Один из интегралов используется для решения одной краевой задачи в классе полианалитических функций.

1. Пусть $g_k(t)$, $k=0, 1, \dots, n-1$, есть непрерывные по Гёльдеру функции точек гладкого контура ∂D . Полианалитическим интегралом типа Коши будем называть интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^k \frac{g_k(t)}{t-z} dt. \quad (1)$$

Заметим, что если $n=1$, то $I(z)$ становится интегралом типа Коши.

Теорема 1. Интеграл $I(z)$ представляет собой полианалитическую функцию во всей плоскости комплексного переменного, за исключением контура ∂D , обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, имеет особую точку ограниченности [1, с. 103—104] в начале координат, а предельные значения

$$\frac{\partial^l I^+(t)}{\partial \bar{t}^l}, \frac{\partial^l I^-(t)}{\partial \bar{t}^l}, l = 0, 1, \dots, n-1,$$

определяются формулами

$$\frac{\partial^l I^+(t)}{\partial \bar{t}^l} = \frac{1}{2} g_l(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{(k-l)!} \left(\frac{\bar{t}}{t} - \frac{\bar{\tau}}{\tau} \right)^{k-l} \frac{\tau^k}{t^l} \frac{g_k(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^l I^-(t)}{\partial \bar{t}^l} = -\frac{1}{2} g_l(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{(k-l)!} \left(\frac{\bar{t}}{t} - \frac{\bar{\tau}}{\tau} \right)^{k-l} \frac{\tau^k}{t^l} \frac{g_k(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad (3)$$

$$l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что для всех $z \neq t$ производная порядка n от $I(z)$ по \bar{z} равна нулю, или из представления

$$I(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{t^\nu}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_k^{\nu-k} \left(\frac{\bar{t}}{t} \right)^{\nu-k} \frac{g_\nu(t) z^{-k}}{t-z} dt \right) \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^k.$$

В бесконечно удаленной точке интеграл $I(z)$ обращается в нуль из-за ограниченности слагаемых $(\bar{z}/z)^s$, $s = 0, 1, \dots, n-1$, а наличие особой точки ограниченности в начале координат обуславливается разложением

$$I(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_k^{\nu-k} \left(\frac{\bar{t}}{t} \right)^{\nu-k} g_\nu(t) t^{\nu-1} dt \right) \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^k. \quad (4)$$

Формулы (2) и (3) получаются из соотношений

$$\frac{\partial^l I(z)}{\partial \bar{z}^l} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{(k-l)!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^{k-l} \frac{t^k}{z^l} \frac{g_k(t)}{t-z} dt$$

предельным переходом.

Теорема 2. Если функции $g_k(t)$ являются предельными значениями полианалитических функций $\partial^k f / \partial \bar{z}^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, регулярных [1, с. 103] в D^+ и непрерывных в \bar{D}^+ , то имеет место следующая интегральная формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^k \frac{\partial^k f}{\partial \bar{t}^k} \frac{dt}{t-z}. \quad (5)$$

Утверждение теоремы следует из равенств

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^k \frac{\partial^k f(t)}{\partial \bar{t}^k} \frac{dt}{t-z} = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{t^k f_k(t) dt}{t-z} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) \bar{z}^k, & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 3. Если функции $\partial^l f / \partial \bar{z}^l$, $l=0, 1, \dots, n-1$, регулярны в D^+ и непрерывны в \bar{D}^+ , а D -конечная $(m+1)$ -связная область, граница которой представляет собой совокупность попарно не пересекающихся замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, причем кривые $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ лежат внутри области ограниченной кривой Γ_0 , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^k \frac{\partial^k f}{\partial \bar{t}^k} dt = 0. \quad (7)$$

Чтобы убедиться в справедливости теоремы 3, достаточно левую часть (7) преобразовать по схеме (6).

Теорема 4. Для того чтобы функции $g_l(t)$, $l=0, 1, \dots, n-1$, были предельными значениями полианалитических в D функций $\partial^l F / \partial \bar{z}^l$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$-\frac{1}{2} g_l(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{(k-l)!} \left(\frac{\bar{t}}{t} - \frac{\bar{\tau}}{\tau} \right)^{k-l} \frac{\tau^k}{t^l} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau-t} = 0, \quad (8)$$

$$l=0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Пусть

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^k \frac{g_k(t)}{t-z} dt. \quad (9)$$

Если $z \in D^+$, то

$$\frac{\partial^l F^+(z)}{\partial \bar{z}^l} = g_l(z), \quad l=0, 1, \dots, n-1. \quad (10)$$

Теперь для получения (8) остается, с учетом (10), применить к (9) формулу (2). Обратно. Если $g_l(t)$ удовлетворяет (8), то с учетом (3) получим

$$\frac{\partial^l F^-(t)}{\partial \bar{t}^l} = 0,$$

а затем и

$$g_l(t) = \frac{\partial^l F^+(t)}{\partial \bar{t}^l}.$$

2. Имея интегральную формулу Коши (5) и теорему 3, нетрудно получить разложение в кольце $r < |z| < R$ однозначной полианалитической функции $f(z)$ в равномерно сходящийся ряд

$$f(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s(z) z^s,$$

в котором

$$C_s(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k, s-k} \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^k$$

являются ограниченными во всей комплексной плоскости функциями, а коэффициенты $C_{k, s-k}$ определяются формулами

$$C_{k, s-k} = \frac{1}{2\pi i} \int \sum_{\substack{l=1 \\ |l|=|s-k|}}^{n-1} \frac{1}{v!} (-1)^{v-k} C_v^{v-k} \left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{v-k} \frac{t^v}{t^{s+1}} \frac{\partial^v f(t)}{\partial \bar{t}^v} dt.$$

Разложение полианалитических функций в такие ряды и определенная классификация их изолированных особых точек уже рассматривались [1, с. 103—105]. Поэтому мы ограничимся здесь лишь указанием на то, что полианалитическая функция $f(z)$, ограниченная на всей плоскости и имеющая в бесконечно удаленной точке полюс порядка не выше p , допускает представление

$$f(z) = \sum_{s=0}^p C_s(z) z^s. \quad (11)$$

3. Наряду с полианалитическим интегралом типа Коши (1) можно рассматривать и другой полианалитический аналог интеграла типа Коши

$$I_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{\overline{(z-t)}^k}{t-z} g_k(t) dt. \quad (12)$$

Интеграл $I_*(z)$, как и интеграл (1), является функцией полианалитической во всей комплексной плоскости за исключением точек контура ∂D ; он имеет, в общем случае, в окрестности бесконечно удаленной точки полюс порядка $n-2$, что следует из его разложения

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_{\nu-k} \bar{t}^{\nu-k} t^{s-1} g_{\nu} dt \right) \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^k z^{k-s}.$$

Предельные значения интеграла $I_*(z)$ и его производных $\partial^l I_* / \partial \bar{z}^l$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, определяются формулами

$$\frac{\partial^l I(t)^\pm}{\partial \bar{t}^l} = \pm \frac{1}{2} g_l(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=l}^{n-1} \frac{1}{(k-l)!} \frac{(\overline{t-\tau})^{k-l}}{\tau-t} g_k(\tau) d\tau.$$

Если функции $g_k(t)$ являются предельными значениями полианалитических функций $\partial^k f / \partial \bar{z}^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, то, как и выше, нетрудно получить еще одну, отличную от (5), интегральную формулу Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{(\overline{z-t})^k}{t-z} \frac{\partial^k f(t)}{\partial \bar{t}^k} dt,$$

принадлежащую Н. Теодореску [2].

4. Используя интеграл (1) или интеграл (12), нетрудно построить решение краевой задачи линейного сопряжения, являющейся непосредственным обобщением задачи Римана для аналитических функций.

Полианалитическую функцию $f(z)$ будем называть кусочно-полианалитической с линией скачков ∂D , если она является полианалитической всюду на комплексной плоскости, кроме, может быть, конечного числа изолированных особых точек и линии ∂D , на которой существуют непрерывные граничные значения $\partial^l f^+ / \partial \bar{t}^l$, $\partial^l f^- / \partial \bar{t}^l$, $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Рассмотрим следующую краевую задачу. Найти кусочно-полианалитическую функцию $f(z)$ с линией скачков ∂D , ограниченную на всей плоскости, кроме бесконечно удаленной точки, в которой она имеет полюс порядка не выше p по граничным условиям

$$\frac{\partial^l f^+(t)}{\partial \bar{t}^l} = G(t) \frac{\partial^l f^-(t)}{\partial \bar{t}^l} + {}_2^l g_l(t), \quad t \in \partial D, \quad G(t) \neq 0, \\ l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (13)$$

в которых $G(t)$ есть непрерывная по Гёльдеру функция точек гладкого контура ∂D .

Пусть $\chi(z)$ — каноническая функция граничной задачи $\Phi^+ = G\Phi^-$ для аналитической функции, а κ — индекс этой задачи. Заменяя $G(t)$ в краевых условиях (13) на $\chi^+(t)/\chi^-(t)$, получим

$$\frac{\partial^l \left(\frac{f}{\chi} \right)^+}{\partial \bar{t}^l} = \frac{\partial^l \left(\frac{f}{\chi} \right)^-}{\partial \bar{t}^l} + \frac{g_l(t)}{\chi^+(t)}, \quad t \in \partial D, \quad l = 0, 1, \dots, n-1. \quad (14)$$

В силу соотношений (2) и (3) кусочно-полианалитическая, исчезающая на бесконечности и ограниченная на всей комплексной плоскости функция

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{kl} \left(\frac{\bar{z}}{z} - \frac{\bar{t}}{t} \right)^k \frac{g_k(t)}{\chi^+(t)} \frac{dt}{t-z}$$

будет удовлетворять граничным условиям (14). Поэтому

$$\frac{\partial^l [f/\chi - I]^+}{\partial \bar{t}^l} = \frac{\partial^l [f/\chi - I]^-}{\partial \bar{t}^l}, \quad l = 0, 1, \dots, n-1.$$

Последние соотношения означают, что при $\alpha + p > 0$ разность $f(z)/\chi(z) - I(z)$ является полианалитической функцией, ограниченной на всей комплексной плоскости и имеющей в бесконечно удаленной точке полюс порядка не выше $p + \alpha$. Поэтому, принимая во внимание замечание, содержащееся в п. 2 относительно представления таких функций в виде (11) и разложение (4) интеграла $I(z)$, получим

$$f(z) = \chi(z) \left\{ I(z) + \sum_{k=0}^{n-1} (C_{k, -k} - b_k) \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^k + \sum_{s=1}^{p+\alpha} C_s(z) z^s \right\}, \quad (15)$$

где

$$C_s(z) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k, s-k} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)^k$$

с произвольными комплексными коэффициентами $C_{k, s-k}$, а числа

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{1}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_{k, \nu-k} \left(\frac{t}{\bar{t}} \right)^{\nu-k} g_\nu(t) t^{\nu-1} dt$$

определяются разложением (4). Если $\alpha + p = 0$, то вторую сумму в (15) следует считать пустой. Когда же $\alpha + p < 0$, решение задачи (13) будет определяться формулой

$$f(z) = \chi(z) I(z),$$

если коэффициенты краевого условия (13) подчинить следующим условиям разрешимости:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \sum_{\nu=k}^{n-1} \frac{t^\nu}{\nu!} (-1)^{\nu-k} C_{\nu-k} \left(\frac{\bar{t}}{t}\right)^{\nu-k} t^{s-1} g_\nu dt = 0, k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$s = 1, 2, \dots, -(p + \kappa) - 1.$$

Нам представляется, что приведенная схема решения является более естественной и компактной, нежели схема решения такой же задачи, приведенная в работе [1, с. 109—110], основанная на сведении задачи (13) к краевым задачам Римана для аналитических компонент $f_k(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Показеев В. И. Нерегулярные полианалитические функции.— «Изв. вузов. Математика», 1975, № 6, с. 103—113.
2. Teodorescu N. La dérivée aréolaire... Thèse, Paris, 1931.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.

УДК 517.544

**РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА
С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ КОЛЬЦА***Р. Б. Салимов, В. В. Селезнев*

Краевая задача Гильберта для многосвязной области изучалась в работах [1—6]. Случай, когда область представляет собой внешность разрезов вдоль действительной оси, рассмотрен в статьях [5, 7]. Решение краевой задачи Гильберта для кольца дано Л. И. Чибриковой [8] и Р. Д. Банцури [9].

Как известно, Ф. Д. Гахов [3, с. 264—289] дал эффективное решение краевой задачи Гильберта для односвязной области, основанное на отыскании регуляризирующего множителя. Э. И. Зверович [5] получил решение этой задачи для многосвязной области, используя метод построения однозначного регуляризирующего множителя. Аналогичный метод для случая многосвязных областей впервые был разработан И. Н. Векуа применительно к однородной краевой задаче Гильберта [2, с. 272—282].

Во всех вышеупомянутых работах, исключая [7], коэффициенты краевого условия предполагаются непрерывными.

В настоящей статье метод, разработанный Э. И. Зверовичем, с некоторыми изменениями обобщается на случай разрывных коэффициентов, когда область имеет форму кольца.

Пусть в плоскости $z = x + iy$ дано кольцо $D: q < |z| < 1$ и $L = L_0 + L_1$ — граница области D , где L_0 есть окружность $|z| = 1$, L_1 — окружность $|z| = q$. За положительное направление обхода примем такое, при котором область D остается слева. Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в D , непрерывно продолжимую на все точки контура L , кроме, быть может, заданных точек $t_{j, k_j}, k_j = \overline{m_j}, j = 0, 1, |t_{0, k_0}| = 1, |t_{1, k_1}| = q$, вблизи которых

$$|F(z)| < \frac{\text{const}}{|z - t_{j, k_j}|^\lambda}, \quad 0 \leq \lambda = \text{const} < 1,$$

по краевому условию

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \quad (1)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на L действительные функции, имеющие разрывы первого рода в точках t_{j, k_j} , $k_j = \overline{1, m_j}$, $j = 0, 1$ и удовлетворяющие условию Гельдера на каждой из дуг $t_{j, k_j} t_{j, k_{j+1}}$, $k_j = \overline{0, m_j}$, $j = 0, 1$, включая концы, причем $t_{j, 0} = t_{j, m_{j+1}} = q^j$, $j = 0, 1$. Примем, что точки $t = 1$ и $t = q$ не являются точками разрыва коэффициентов условия (1). При этом будем считать, что при обходе контура L_j в положительном направлении за точкой t_{j, k_j} следует точка $t_{j, k_{j+1}}$, $k_j = \overline{0, m_j}$, $j = 0, 1$. Предположим, что $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L .

Условие (1) перепишем в виде

$$\text{Re} \{ e^{-i\nu(t)} F(t) \} = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \quad (2)$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, а $\nu(t)$ — ветвь $\arg G(t)$, выбранная так, чтобы в точках разрыва выполнялось неравенство $0 \leq \nu(t_{j, k_j} + 0) - \nu(t_{j, k_j} - 0) < 2\pi$. Через $\nu(t_{j, k_j} - 0)$ и $\nu(t_{j, k_j} + 0)$ обозначены пределы, к которым стремится $\nu(t)$, когда точка t стремится к t_{j, k_j} соответственно в положительном и отрицательном направлении. Поскольку функция $G(t)$ непрерывна в точках $t = q^j$, $j = 0, 1$, то $\nu(t_{j, 0} - 0) - \nu(t_{j, 0} + 0) = 2\pi l_j$, где l_j — целые числа, $j = 0, 1$.

Введем функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ принимает целые значения β_{j, k_j} на каждой из дуг $t_{j, k_j} t_{j, k_{j+1}}$, $k_j = \overline{0, m_j}$, $j = 0, 1$. Значение β_{j, k_j} подберем так, чтобы число $\delta_{j, k_j} = \varphi(t_{j, k_j} + 0) - \varphi(t_{j, k_j} - 0)$ удовлетворяло неравенству $-\pi < \delta_{j, k_j} \leq 0$, если ищется решение, ограниченное вблизи точки t_{j, k_j} и неравенству $0 < \delta_{j, k_j} < \pi$, если ищется решение, неограниченное вблизи точки t_{j, k_j} . Полагая $\beta_{j, 0} = 0$, $j = 0, 1$, получим определенную на всем контуре L функцию $\beta(t)$. Очевидно, что

$$\varphi(t_{j, 0} - 0) - \varphi(t_{j, 0} + 0) = 2\pi l_j - \beta_{j, m_j} \pi = \kappa_j \pi, \quad j = 0, 1.$$

Назовем число $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1$ индексом задачи, отвечающим данному классу решений.

1. Пусть κ_0 и κ_1 — четные числа. Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{\kappa_1}{2} \arg t - \left(\frac{\kappa}{2} - 1 \right) \arg(t-p) - \arg(t-z_1) + \beta_1(t) \pi n, \quad t \in L, \quad (3)$$

где $z_1 = re^{i\alpha}$, $q < r < 1$, $0 \leq \alpha < \pi$, $q < p < 1$, $\beta_1(t) = 0$ при $t \in L_0$, $\beta_1(t) = 1$ при $t \in L_1$, n — целое число; $\arg t$ — значение на L ветви $\arg z$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль полуоси $y=0$, $x \geq 0$, $\arg(t-p)$ — значение на L ветви $\arg(z-p)$, непрерывной и однозначной в плоскости с разрезом вдоль линии $y=0$, $x \geq p$, причем $0 \leq \arg z < 2\pi$, $0 \leq \arg(z-p) < 2\pi$, $\arg(t-z_1)$ — значение на L определенной ветви $\arg(z-z_1)$, непрерывной и однозначной в плоскости с разрезом вдоль линии, соединяющей точки $z=z_1$ и $z=1$ и лежащей внутри верхнего полукольца. Здесь $z=p$ — заданная точка, $z_1 = re^{i\alpha}$ — точка, положение которой будет определено ниже.

Условие (2) можно записать так:

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{t^{\kappa_1/2} F(t)}{(t-z_1)(t-p)^{\frac{\kappa}{2}-1}} \right\} = \frac{c(t) |t|^{\kappa_1/2} \cos(\beta_1(t) \pi n)}{|G(t)| |t-z_1| |t-p|^{\frac{\kappa}{2}-1} \cos(\beta(t) \pi)}. \quad (4)$$

Будем искать однозначную и аналитическую в области D функцию $\Gamma(z)$, граничные значения мнимой части которой равны $\psi(t)$. Такая функция существует, если выполняется условие однозначности [10, с. 237]

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\gamma}) d\gamma - \int_0^{2\pi} \psi(qe^{i\gamma}) d\gamma \equiv \int_L \psi(t) \frac{dt}{it} = 0. \quad (5)$$

Подберем точку $z_1 = re^{i\alpha}$ так, чтобы это условие выполнялось.

После несложных вычислений приходим к соотношению

$$\int_L \arg(t-z_1) \frac{dt}{it} = -2\pi\alpha.$$

Учитывая это соотношение и формулу (3), условие (5) запишем в виде

$$\int_L \varphi(t) \frac{dt}{it} = -2\pi\alpha + 2\pi^2 n. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что целое число N можно подобрать так, чтобы

$$2\pi^2 N \leq - \int_L \varphi(t) \frac{dt}{it} < 2\pi^2 (N+1). \quad (7)$$

Тогда, полагая $n = -N$, из формулы (6) найдем

$$\alpha = -N\pi - \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi(t) \frac{dt}{it}, \quad (8)$$

причем, как показывает неравенство (7), $0 \leq \alpha < \pi$. Следовательно, теперь число $\alpha = \arg z_1$ выбрано так, что выполняется условие (5). Число $r = |z_1|$, $q < r < 1$, не влияет на выполнение условия (5) и оно может быть выбрано произвольно. Причем всюду в дальнейшем в случае $\alpha = 0$ будем считать $r \neq p$ для $x \neq 0$. Далее с помощью формулы Вилля находим функцию

$$\Gamma(z) = iS(\psi, z), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} S(\psi, z) &= \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\gamma}) \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z - \frac{\omega}{\pi} \gamma\right) d\gamma - \frac{i\omega}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \psi(qe^{i\gamma}) \times \\ &\times \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z - \frac{\omega}{\pi} \gamma - \omega'\right) + \eta' \right] d\gamma \equiv \\ &\equiv \frac{\omega}{\pi^2} \int_L \psi(t) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{t}, \quad q = \exp(\pi i \omega' / \omega) \end{aligned}$$

(см., например, [10, с. 238]). При $z \rightarrow t$ из D функция $\Gamma(z)$ принимает значение $\Gamma^+(t) = \Gamma_0(t) + i\psi(t)$, где

$$\Gamma_0(t) = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \psi(\tau) \left[\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln t - \frac{\omega}{\pi i} \ln \tau\right) + \beta_1(\tau) \eta' \right] \frac{d\tau}{i\tau}.$$

Умножая условие (4) на $e^{-\Gamma_0(t)}$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ e^{-\Gamma^+(t)} \frac{t^{x/2} F(t)}{(t-z_1)(t-p)^{\frac{x}{2}-1}} \right\} &= c_1(t) \equiv \\ &\equiv \frac{c(t) |t|^{x/2} \cos(\beta_1(t) \pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| \cos(\beta(t) \pi) |t-z_1| |t-p|^{\frac{x}{2}-1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

а) Пусть $\kappa \geq 2$. При $\kappa > 2$ выражение, стоящее в фигурных скобках, представляет собой граничное значение функции, аналитической в области D , кроме простого полюса в точке $z = z_1$ и полюса порядка $\frac{\kappa}{2} - 1$ в точке $z = p$. Будем искать эту функцию в виде [5, 3, с. 388]

$$\frac{e^{-\Gamma(z)} z^{\kappa/2} F(z)}{(z - z_1)(z - p)^{\frac{\kappa}{2} - 1}} = \Phi(z) + \sum_{k=1}^{\frac{\kappa}{2} - 1} \frac{\mu_k}{(z - p)^k} + \frac{\nu}{z - z_1} + iC_0, \quad (11)$$

где $\Phi(z)$ — новая неизвестная аналитическая в области D функция, C_0 — произвольная действительная постоянная, $\nu = \nu' + i\nu''$, $\mu_k = \mu'_k + i\mu''_k$ — неопределенные комплексные постоянные. С учетом формулы (11) на основании условия (10) получаем краевую задачу Шварца для функции $\Phi(z)$:

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\frac{\kappa}{2} - 1} \frac{\mu_k}{(t - p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu}{t - z_1}. \quad (12)$$

Функция $\Phi(z)$ должна быть однозначной, поэтому должно выполняться условие

$$\int_L \operatorname{Re} \Phi(t) \frac{dt}{it} = 0 \quad (13)$$

или

$$\int_L \left[c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\frac{\kappa}{2} - 1} \frac{\mu_k}{(t - p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu}{t - z_1} \right] \frac{dt}{it} = 0.$$

После ряда несложных вычислений это условие можно привести к виду

$$\frac{2\pi}{r} (\nu' \cos \alpha + \nu'' \sin \alpha) - 2\pi \sum_{k=1}^{\frac{\kappa}{2} - 1} \frac{\mu_k}{(-p)^k} = d, \quad (14)$$

здесь и всюду в дальнейшем используется обозначение $d = \int_L c_1(t) \frac{dt}{it}$. Условие (14) можно удовлетворить подбором вещественной постоянной μ'_1 , при этом

$$\mu_1' = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r} (v' \cos \alpha + v'' \sin \alpha) - \sum_{k=2}^{\frac{x}{2}-1} \frac{\mu_k'}{(-p)^{k-1}}. \quad (15)$$

Тогда функцию $\Phi(z)$, с учетом (12), найдем по формуле Вилля, и решение исходной задачи, как показывает соотношение (11), будет определяться формулой

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{\frac{x}{2}-1}}{z^{x/2}} e^{\Gamma(z)} \times \\ \times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \sum_{k=1}^{\frac{x}{2}-1} \left[\frac{\mu_k}{(z-p)^k} + \frac{v}{z-z_1} \right] \right\}, \quad (16)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\frac{x}{2}-1} \frac{\mu_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{v}{t-z_1}.$$

Это решение зависит от x произвольных действительных постоянных $C_0, v', v'', \mu_1'', \mu_k', \mu_k'', k=2, \frac{x}{2}-1$.

В случае $x=2$ в условии (14) мы должны положить $\mu_k' = 0$ для $k \geq 1$ и это условие удовлетворим подбором v'' при $\alpha > 0$ или v' при $\alpha = 0$. Тогда решение исходной задачи будет определяться формулой (16), в которой нужно положить равными нулю все μ_k . Решение будет зависеть от произвольных постоянных C_0, v' при $\alpha > 0$ и C_0, v'' при $\alpha = 0$.

б) Пусть $x=0$. Условие (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{(t-z_1)t^{x/2}}{t-p} F(t) \right\} = \frac{c(t)|t-z_1| |t|^{x/2} \cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)| |t-p| \cos(\beta(t)\pi)}, \quad (17)$$

где

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{x_1}{2} \arg t - \arg(t-p) + \arg(t-z_1) + \beta_1(t)\pi n. \quad (18)$$

Как и выше, определим число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (18) удовлетворяла условию (5) и по формуле (9) найдем $\Gamma(z)$. Далее условие (17) представим в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-\Gamma^+ (t)} \frac{(t-z_1) t^{x_1/2}}{t-p} F(t) \right\} = c_1(t) \equiv \frac{c(t) |t-z_1| |t|^{x_1/2} \cos(\beta_1(t) \pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| |t-p| \cos(\beta(t) \pi)}. \quad (19)$$

По аналогии с соотношением (11) запишем

$$\frac{e^{-\Gamma(z)} (z-z_1) z^{x_1/2}}{z-p} F(z) = \Phi(z) + \frac{\mu'_1}{z-p} + iC_0 + iC_1 g(z), \quad (20)$$

где μ'_1 , C_0 , C_1 — действительные постоянные,

$$g(z) = \frac{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{K}{\ln q} \ln p \right)}{\operatorname{sn}^2 \left(\frac{K}{\ln q} \ln z \right) - \operatorname{sn}^2 \left(\frac{K}{\ln q} \ln p \right)}, \quad q = e^{-\pi K/K'},$$

где $\operatorname{sn} z$ — эллиптическая функция с периодами $4K$ и $2iK'$, причем $w = g(z)$ — функция, отображающая конформно область D на внешность разрезов вдоль отрезков вещественной оси плоскости w и переводящая окружность $|z|=1$ в берега разреза вдоль отрезка $[-1, 0]$ [см. 10, с. 190—192].

Выражение $iC_0 + iC_1 g(z)$ дает общее решение задачи об определении функции, аналитической в области D , кроме простого полюса в точке $z=p$, граничные значения действительной части которой равны нулю [3, с. 404—405]. С учетом формул (19), (20) приходим к следующей краевой задаче для функции $\Phi(z)$:

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = c_1(t) - \mu'_1 \operatorname{Re} \frac{1}{t-p}. \quad (21)$$

Подберем постоянную μ'_1 так, чтобы функция (21) удовлетворяла условию (13) и найдем $\mu'_1 = pd/2\pi$. Тогда $\Phi(z) = S(\tilde{c}_1, z)$, где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \mu'_1 \operatorname{Re} \frac{1}{t-p}.$$

Далее из формулы (20) находим

$$F(z) = \frac{(z-p) e^{\Gamma(z)}}{(z-z_1) z^{x_1/2}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + \frac{\mu'_1}{z-p} + iC_0 + iC_1 g(z) \right\}. \quad (22)$$

Для того, чтобы формула (22) определяла решение исходной задачи, необходимо, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках, в точке $z=z_1$ обращалась в нуль:

$$S(\tilde{c}_1, z_1) + \frac{\mu'_1}{z_1 - p} + iC_0 + iC_1 g(z_1) = 0. \quad (23)$$

Выделяя в равенстве (23) действительную и мнимую части, получим

$$\operatorname{Re} S(\tilde{c}_1, z_1) + \mu'_1 \operatorname{Re} \frac{1}{z_1 - p} + C_1 \operatorname{Re} ig(z_1) = 0,$$

$$\operatorname{Im} S(\tilde{c}_1, z_1) + \mu'_1 \operatorname{Im} \frac{1}{z_1 - p} + C_0 + C_1 \operatorname{Im} ig(z_1) = 0.$$

Если $\alpha > 0$, то число $g(z_1)$ является комплексным и первое из этих равенств удовлетворим выбором постоянной C_1 , второе — выбором постоянной C_0 . После того, как найдены постоянные C_0 и C_1 , единственное решение задачи определяется формулой (22).

Пусть теперь $\alpha = 0$. Полагая в условии (19) $z_1 = p$, получим

$$\operatorname{Re} \{e^{-\Gamma^+(t)} t^{x_1/2} F(t)\} = c_1(t) \equiv \frac{c(t) |t|^{x_1/2} \cos(\beta_1(t) \pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| \cos(\beta(t) \pi)}.$$

Пусть выполняется условие

$$\int_L c_1(t) \frac{dt}{it} = 0. \quad (24)$$

Тогда решение исходной задачи определяется формулой

$$F(z) = \frac{e^{\Gamma(z)}}{z^{x_1/2}} \{S(c_1, z) + iC_0\}$$

и зависит от одной произвольной действительной постоянной C_0 . При невыполнении условия (24) рассматриваемая задача неразрешима.

в) Пусть $\alpha \leq -2$. Условие (2) запишем в виде

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{(t - z_1) t^{x_1/2}}{(t - p)^{\frac{x}{2} + 1}} F(t) \right\} = \frac{c(t) |t - z_1| |t|^{x_1/2} \cos(\beta_1(t) \pi n)}{|G(t)| |t - p|^{\frac{x}{2} + 1} \cos(\beta(t) \pi)}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \varphi(t) + \frac{x_1}{2} \arg t - \left(\frac{x}{2} + 1\right) \arg(t - p) + \\ & + \arg(t - z_1) + \beta_1(t) \pi n. \end{aligned} \quad (26)$$

Требую, чтобы функция (26) удовлетворяла условию (5), найдем число $\alpha = \arg z_1$ и по формуле (9) определим функцию $\Gamma(z)$. Затем условие (25) представим в виде

$$\begin{aligned} & \Re \left\{ e^{-\Gamma^+ (t)} \frac{(t-z_1) t^{x_1/2}}{(t-p)^{\frac{x}{2}+1}} F(t) \right\} = c_1(t) \equiv \\ & \equiv \frac{c(t) |t-z_1| |t|^{x_1/2} \cos(\beta_1(t) \pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| |t-p|^{\frac{x}{2}+1} \cos(\beta(t) \pi)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда видно, что для разрешимости рассматриваемой задачи необходимо выполнение условия

$$\int_L c_1(t) \frac{dt}{it} = 0. \quad (28)$$

При выполнении этого условия на основании формулы (27) имеем

$$e^{-\Gamma(z)} (z-z_1) (z-p)^{-\frac{x}{2}-1} z^{\frac{x_1}{2}} F(z) = S(c_1, z) + iC_0.$$

Из последнего соотношения видно, что функция, стоящая в его правой части, должна обращаться в нуль в точке $z=z_1$ и иметь в точке $z=p$ нуль порядка не ниже $-\frac{x}{2}-1$ при $x < -2$. Это будет иметь место, если выполняются условия:

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L c_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{t} + iC_0 = 0, \quad (29)$$

$$\int_L c_1(t) \zeta^{(k)} \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) \frac{dt}{t} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\frac{x}{2}-2, \quad (30)$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L c_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln z_1 - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{t} + iC_0 = 0. \quad (31)$$

Из изложенного ясно, что задача разрешима, если выполняются условия (28), (29), (30), (31). Выделяя в (29), (30), (31) действительные и мнимые части, приходим к $-x$ действительным соотношениям. Одно из них можно удовлетворить подбором постоянной C_0 . Таким образом, изучаемая задача разрешима при выполнении $-x$ действительных условий. В этом случае имеет место единственное решение, определяемое при $x < -2$ формулой

$$F(z) = e^{\Gamma(z)} [S(c_1, z) + iC_0] / (z-z_1)(z-p)^{-\frac{x}{2}-1} z^{x_1/2}.$$

При $\kappa = -2$ решение задачи определяется последней формулой, если выполняются условие (28) и условие, получаемое из (31) выделением действительных частей (выделяя в (31) мнимые части, приходим к соотношению, из которого находится C_0).

2. Рассмотрим случай, когда κ_0, κ_1 — нечетные числа. Краевое условие (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{(t-1)(t-q)t^{(\kappa_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{\kappa/2}} F(t) \right\} = \\ = \frac{c(t) |t-1| |t-q| |t|^{(\kappa_1-1)/2} \cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)| |t-z_1| |t-p|^{\kappa/2} \cos(\beta(t)\pi)}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(t) = \varphi(t) + \frac{\kappa_1 + 1}{2} \arg t - \frac{\kappa}{2} \arg(t-p) + \arg(t-1) + \\ + \arg \frac{t-q}{t} - \arg(t-z_1) + \beta_1(t)\pi n. \end{aligned} \quad (33)$$

В формуле (33) под $\arg(t-1)$ понимается значение на L ветви $\arg(z-1)$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y=0, x \geq 1$; $\arg \frac{t-q}{t} = \arg(t-q) - \arg t$, под $\arg(z-q)$ понимается значение на L ветви $\arg(z-q)$, непрерывной и однозначной в плоскости, разрезанной вдоль линии $y=0, x \geq q$, причем $0 \leq \arg(z-1) < 2\pi, 0 \leq \arg(z-q) < 2\pi$.

Определим число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (33) удовлетворяла условию (5) и с помощью формулы (9) найдем функцию $\Gamma(z)$. Затем соотношение (32) представим в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ e^{-\Gamma^+(t)} \frac{(t-1)(t-q)t^{(\kappa_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{\kappa/2}} F(t) \right\} = c_1(t) \equiv \\ \equiv \frac{c(t) |t-1| |t-q| |t|^{(\kappa_1-1)/2} \cos(\beta_1(t)\pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| |t-z_1| |t-p|^{\kappa/2} \cos(\beta(t)\pi)}. \end{aligned} \quad (34)$$

а) Предположим, что $\kappa \geq 2$. По аналогии с формулой (11) запишем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\Gamma(z)} (z-1)(z-q)z^{(\kappa_1-1)/2}}{(z-z_1)(z-p)^{\kappa/2}} F(z) = \Phi(z) + \frac{\mu'_1}{z-p} + iC_1 g(z) + iC_0 + \\ + \sum_{k=2}^{\kappa/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z-p)^k} + \frac{v' + iv''}{z-z_1}, \end{aligned} \quad (35)$$

где C_1 — действительная постоянная. Здесь вместо слагаемого $\mu_1/(z-p)$ в формуле (11) взято выражение $\frac{\mu'_1}{z-p} + iC_1g(z)$.

Нетрудно проверить, что такая замена законна. Поступая далее аналогично тому, как это сделано в пункте 1, получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{x/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-1)(z-q)z^{(x_1-1)/2}} \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \frac{\mu'_1}{z-p} + iC_1g(z) + \sum_{k=2}^{x/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z-p)^k} + \frac{v' + iv''}{z-z_1} \right\}, \quad (36)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \mu'_1 \operatorname{Re} \frac{1}{t-p} - \operatorname{Re} \sum_{k=2}^{x/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{v' + iv''}{t-z_1},$$

$$\mu'_1 = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r} (v' \cos \alpha + v'' \sin \alpha) - \sum_{k=2}^{x/2} \frac{\mu'_k}{(-p)^{k-1}}.$$

Из формулы (36) видно, что граничные значения функции, стоящей в фигурных скобках, в точках $z=1$ и $z=q$ должны обращаться в нуль. Учитывая, что $c_1(1)=0$ и $c_1(q)=0$, приходим к выводу, что это будет иметь место, если выполняются два действительных условия

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(j\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + C_0 + C_1g(q^j) + \sum_{k=2}^{x/2} \frac{\mu''_k}{(q^j - p)^k} + \operatorname{Im} \frac{v' + iv''}{q^j - z_1} = 0, \quad j=0, 1. \quad (37)$$

Рассматривая последние условия как систему двух линейных уравнений относительно неизвестных C_0 и C_1 , найдем выражения для C_0 и C_1 и подставим их в формулу (36). При этом формула (36) будет определять решение исходной задачи. Найденное решение содержит x произвольных действительных постоянных $v', v'', \mu'_k, \mu''_k, k=2, x/2$.

б) Пусть $x=0$. В этом случае в правой части формулы (35) мы отбрасываем слагаемые, имеющие полюс в точке $z=p$, и, кроме того, не нарушая общности представления (35), заменим слагаемое $(v' + iv'')/(z-z_1)$ на $v'e^{i\alpha}/(z-z_1) + iC_1\tilde{g}(z)$, где $\tilde{g}(z) = g(ze^{-i\alpha})$. Поступая далее, как и выше, будем иметь

$$F(z) = \frac{(z-z_1)e^{\Gamma(z)}}{(z-1)(z-q)z^{(x_1-1)/2}} \times \\ \times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + \frac{v'e^{i\alpha}}{z-z_1} + iC_0 + iC_1\tilde{g}(z) \right\}, \quad (38)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - v' \operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha}}{t-z_1}, \quad v' = \frac{pd}{2\pi}.$$

Для того, чтобы функция (38) являлась решением исходной задачи, необходимо соблюдение условий, аналогичных условиям (37)

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(j\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + \\ + \operatorname{Im} \frac{v'e^{i\alpha}}{q^j - z_1} + C_0 + C_1\tilde{g}(q^j) = 0, \quad j=0, 1.$$

После того, как из этой системы определены постоянные C_0 и C_1 , единственное решение задачи выражается формулой (38).

в) В случае $x \leq -2$ получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{x/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-1)(z-q)z^{(x_1-1)/2}} \times \\ \times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \frac{v'e^{i\alpha}}{z-z_1} + iC_1\tilde{g}(z) \right\}, \quad (39)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - v' \operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha}}{t-z_1}, \quad v' = \frac{pd}{2\pi}.$$

Формула (39) будет определять решение исходной задачи, если выполняются условия

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(j\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + v' \operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha}}{q^j - z_1} + \\ + C_0 + C_1g(q^j) = 0, \quad j=0, 1, \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{t} + \\
 & + iC_0 + \frac{v' e^{i\alpha}}{p - z_1} + iC_1 \tilde{g}(p) = 0 \\
 & \frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \zeta^{(k)} \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) \frac{dt}{t} + \frac{v' e^{i\alpha} (-1)^k k!}{(p - z_1)^{k+1}} + \\
 & + iC_1 \tilde{g}^{(k)}(p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\frac{\alpha}{2} - 1.
 \end{aligned} \right\} (41)$$

Условия (40) удовлетворим подбором постоянных C_0 и C_1 . Условия (41) являются условиями разрешимости задачи. При их выполнении решение рассматриваемой задачи будет определяться формулой (39), если в ней под C_0 , C_1 понимать постоянные, определяемые из (40). Выделяя в (41) действительные и мнимые части, получим $-\alpha$ действительных условий.

Таким образом, исходная задача при $\alpha \leq -2$ разрешима (единственным образом) лишь при соблюдении $-\alpha$ дополнительных условий.

3. В случае, когда α_0 — четное, α_1 — нечетное число, краевое условие (2) представим в виде

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{(t-q)t^{(\alpha_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{(\alpha_1-1)/2}} F(t) \right\} = \\
 & = \frac{c(t) |t-q| |t|^{(\alpha_1-1)/2} \cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)| |t-z_1| |t-p|^{(\alpha_1-1)/2} \cos(\beta(t)\pi)},
 \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned}
 \psi(t) = \varphi(t) + \frac{\alpha_1+1}{2} \arg t - \frac{\alpha-1}{2} \arg(t-p) + \arg \frac{t-q}{t} - \\
 - \arg(t-z_1) + \beta_1(t)\pi n.
 \end{aligned} \quad (43)$$

Определяя число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (43) удовлетворяла условию (5), найдем по формуле (9) функцию $\Gamma(z)$. Затем условие (42) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \left\{ e^{-\Gamma^+(t)} \frac{(t-q)t^{(\alpha_1-1)/2}}{(t-z_1)(t-p)^{(\alpha_1-1)/2}} F(t) \right\} = c_1(t) \equiv \\
 & \equiv \frac{c(t) |t-q| |t|^{(\alpha_1-1)/2} \cos(\beta_1(t)\pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)| |t-z_1| |t-p|^{(\alpha_1-1)/2} \cos(\beta(t)\pi)}.
 \end{aligned} \quad (44)$$

а) Пусть $x \geq 1$. При $x > 1$ аналогично предыдущему получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{(x-1)/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-q)z^{(x-1)/2}} \times \\ \times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \sum_{k=1}^{(x-1)/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z-p)^k} + \frac{\nu' + i\nu''}{z-z_1} \right\}, \quad (45)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{(x-1)/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t-z_1}, \\ \mu'_1 = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r} (\nu' \cos \alpha + \nu'' \sin \alpha) - \sum_{k=2}^{(x-1)/2} \frac{\mu'_k}{(-p)^{k-1}}.$$

Для того, чтобы функция (45) являлась решением изучаемой задачи, необходимо соблюдение условия, аналогичного условию (37) при $j=1$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + C_0 + \sum_{k=1}^{(x-1)/2} \frac{\mu''_k}{(q-p)^k} + \\ + \operatorname{Im} \frac{\nu' + i\nu''}{q-z_1} = 0. \quad (46)$$

Отсюда найдем выражение для постоянной C_0 . При этом решение исходной задачи будет даваться формулой (45). Полученное решение содержит x произвольных постоянных $\nu', \nu'', \mu''_1, \mu'_k, \mu''_k, k=2, (x-1)/2$.

При $x=1$ формула (45) будет определять решение исходной задачи, если в ней положить $\mu'_k = \mu''_k = 0$ для $k \geq 1$,

$$\nu'' = \frac{rd}{2\pi \sin \alpha} - \nu' \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} - \operatorname{Im} \frac{\nu' + i\nu''}{q-z_1}$$

в случае $\alpha > 0$ и $\mu'_k = \mu''_k = 0$ для $k \geq 1$, $\nu' = rd/2\pi$,

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta\left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t\right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} - \frac{\nu''}{q-r},$$

когда $\alpha = 0$.

Решение задачи будет содержать одну произвольную постоянную v' при $\alpha > 0$ или v'' при $\alpha = 0$.

б) В случае $x \leq -1$ получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{(x-1)/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-q) z^{(x-1)/2}} \times \\ \times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \frac{v' e^{i\alpha}}{z-z_1} + iC_1 \tilde{g}(z) \right\}, \quad (47)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - v' \operatorname{Re} \frac{e^{i\alpha}}{t-z_1}, \quad v' = \frac{pd}{2\pi}.$$

Для того, чтобы формула (47) определяла решение исходной задачи необходимо потребовать, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках, имела в точке $z = p$ нуль порядка не ниже $-\frac{x-1}{2}$. Кроме того, должно выполняться условие аналогичное условию (37) при $j=1$. Все это будет иметь место, если справедливы равенства

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(\omega' - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + \\ + v' \operatorname{Im} \frac{e^{i\alpha}}{q-z_1} + C_0 + C_1 \tilde{g}(q) = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{t} + \\ + iC_0 + \frac{v' e^{i\alpha}}{p-z_1} + iC_1 \tilde{g}(p) = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \zeta^{(k)} \left(\frac{\omega}{\pi i} \ln p - \frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) \frac{dt}{t} + \frac{v' e^{i\alpha} (-1)^k k!}{(p-z_1)^{k+1}} + \\ + iC_1 \tilde{g}^{(k)}(p) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, -\frac{x-1}{2} - 1. \quad (50)$$

Условие (48), а также условие, получающееся выделением мнимых частей из (49), удовлетворим подбором постоянных C_0, C_1 и найдем из них значение указанных постоянных. Найденные значения C_0, C_1 подставим в формулы (47), (50), значение C_1 — в условие, получающееся выделением действительных частей из (49). При этом последнее условие, а также условия (50) равносильны — x действительным условиям. Формула (47) определяет решение рассматриваемой задачи, если выполняются указанные — x действительных условий.

4. В случае, когда x_0 — нечетное, x_1 — четное число, краевое условие (2) представим в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\psi(t)} \frac{(t-1)t^{x_1/2}}{(t-z_1)(t-p)^{(x-1)/2}} F(t) \right\} &= \\ &= \frac{c(t)|t-1||t|^{x_1/2} \cos(\beta_1(t)\pi n)}{|G(t)| \cos(\beta(t)\pi) |t-z_1||t-p|^{(x-1)/2}}, \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(t) = \varphi(t) + \frac{x_1}{2} \arg t - \frac{x-1}{2} \arg(t-p) + \arg(t-1) - \\ - \arg(t-z_1) + \beta_1(t)\pi n. \end{aligned} \quad (52)$$

Определяя число $\alpha = \arg z_1$ так, чтобы функция (52) удовлетворяла условию (5), по формуле (9) найдем $\Gamma(z)$. Затем условие (51) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ e^{-\Gamma^+(t)} \frac{(t-1)t^{x_1/2} F(t)}{(t-z_1)(t-p)^{(x-1)/2}} \right\} &= c_1(t) \equiv \\ \equiv \frac{c(t)|t-1||t|^{x_1/2} \cos(\beta_1(t)\pi n) e^{-\Gamma_0(t)}}{|G(t)||t-z_1||t-p|^{(x-1)/2} \cos(\beta(t)\pi)}. \end{aligned} \quad (53)$$

а) Пусть $x \geq 1$. При $x > 1$ по аналогии с предыдущим получим

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z-z_1)(z-p)^{(x-1)/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-1)z^{x_1/2}} \times \\ &\times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \sum_{k=1}^{(x-1)/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(z-p)^k} + \frac{\nu' + i\nu''}{z-z_1} \right\}, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{(x-1)/2} \frac{\mu'_k + i\mu''_k}{(t-p)^k} - \operatorname{Re} \frac{\nu' + i\nu''}{t-z_1},$$

$$\mu'_1 = \frac{pd}{2\pi} - \frac{p}{r} (\nu' \cos \alpha + \nu'' \sin \alpha) - \sum_{k=2}^{(x-1)/2} \frac{\mu'_k}{(-p)^{k-1}}.$$

Для того, чтобы функция (54) являлась решением исходной задачи, необходимо соблюдение условия, аналогичного соотношению (37) при $j=0$

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} + C_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{(x-1)/2} \frac{\mu_k''}{(1-p)^k} + \operatorname{Im} \frac{v' + iv''}{1-z_1} = 0.$$

Это равенство удовлетворим подбором постоянной C_0 и из него найдем выражение для C_0 . Тогда решение исходной задачи определяется формулой (54) и будет содержать x произвольных постоянных $\{v', v'', \mu_1', \mu_1'', \mu_k', \mu_k'', k=2, \overline{(x-1)/2}$. При $x=1$ формула (54) будет определять решение исходной задачи, если в ней положить $\mu_k' = \mu_k'' = 0$ для $k \geq 1$,

$$v'' = \frac{rd}{2\pi \sin \alpha} - v' \operatorname{ctg} \alpha, \quad C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \times$$

$$\times \left[\zeta \left(-\frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} - \operatorname{Im} \frac{v' + iv''}{1-z_1}$$

в случае $\alpha > 0$ и $\mu_k' = \mu_k'' = 0$ для $k \geq 1$, $v' = rd/2\pi$,

$$C_0 = -\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \omega' \right] \frac{dt}{it} - \frac{v''}{1-r},$$

когда $\alpha = 0$. Решение будет содержать произвольную постоянную v' при $\alpha > 0$ или v'' при $\alpha = 0$.

б) В случае $x \leq -1$ получим

$$F(z) = \frac{(z-z_1)(z-p)^{(x-1)/2} e^{\Gamma(z)}}{(z-1)z^{x/2}} \times$$

$$\times \left\{ S(\tilde{c}_1, z) + iC_0 + \frac{v' e^{j\alpha}}{z-z_1} + iC_1 \tilde{g}(z) \right\}, \quad (55)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \tilde{c}_1(t) \equiv c_1(t) - \operatorname{Re} \frac{v' e^{j\alpha}}{t-z_1}, \quad v' = pd/2\pi.$$

Чтобы формула (55) определяла решение исходной задачи, необходимо соблюдение условия

$$\frac{\omega}{\pi^2} \int_L \tilde{c}_1(t) \left[\zeta \left(-\frac{\omega}{\pi i} \ln t \right) + \beta_1(t) \eta' \right] \frac{dt}{it} +$$

$$+ v' \operatorname{Im} \frac{e^{j\alpha}}{1-z_1} + C_0 + C_1 \tilde{g}(1) = 0.$$

а также условий (49), (50), в которых под функцией $c_1(t)$, входящей в выражение для $\tilde{c}_1(t)$, следует понимать функцию, указанную в соотношении (53). Повторяя рассуждения, приведенные в конце предыдущего пункта после формулы (47), заключаем, что решение задачи определяется формулой (55), если выполняются κ действительных условий.

Замечание. Если $\frac{1}{2\pi^2} \int_L \varphi(t) \frac{dt}{it} = N$, где N — целое число, то выполнение условия (5) можно добиться за счет выбора лишь целого числа n и не вводить в рассмотрение искомую точку $z_1 = re^{i\alpha}$, для которой в указанном случае число α оказывается равным нулю. При этом в вышеприведенные рассуждения и формулы для случая $\alpha = 0$ следует внести очевидные изменения.

Например, в формулах (4), (10), (11), (12), (16) для $\kappa > 2$ нужно отбросить множители и слагаемые, содержащие z_1 и ν и заменить $\frac{z}{2} - 1$ на $\kappa/2$ и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Квеселава Д. А. Задача Римана—Гильберта для многосвязной области.—Сообщения АН Груз. ССР, 6, 1945, № 8, с. 581—590 (на груз. яз.).
2. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука“, 1977.
4. Гахов Ф. Д., Хасабов Э. Г. О краевой задаче Гильберта для многосвязной области.—Изв. вузов. Математика“, т. 2, 1958, № 1, с. 12—21.
5. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровых классах на римановых поверхностях.—„Успехи математических наук“, т. XXVI, вып. 1, 1971, с. 113—179.
6. Боярский Б. В. Об особом случае задачи Римана—Гильберта.—ДАН СССР, т. 119, 1958, № 3, с. 411—414 (см. также в книге Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959, с. 361—380).
7. Черепанов Г. П. Задача Римана—Гильберта для внешности разрезов вдоль прямой и вдоль окружности.—ДАН СССР, 1964, т. 156, № 2, с. 275—277.
8. Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника.—Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Изд-во Казанск. ун-та, 1964, с. 15—39.
9. Банцури Р. Д. О задаче Римана—Гильберта для двусвязных областей.—Сообщения АН Груз. ССР, 80, 1975, № 3, с. 549—552.
10. Ахизер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., „Наука“, 1970.

Доложено на семинаре 26 января 1979 г.

УДК 534.222

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ВЗРЫВЕ ДВУХ СИММЕТРИЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Р. Б. Салимов, Н. К. Туктамышев

В работах [1 и 2] в рамках модели явления взрыва, предложенной М. А. Лаврентьевым и примененной В. М. Кузнецовым [3], исследована задача о взаимодействии двух точечных и плоских шнуровых зарядов при взрыве на поверхности грунта. В настоящей работе в рамках той же модели рассмотрены две задачи об определении формы выемки выброса при взрыве двух симметричных зарядов, причем, как и в [2], предполагается, что всюду в области течения скорость больше критической. Решена задача о взрыве двух поверхностных зарядов, толщина сечений которых меняется по линейному закону. Кроме того, рассмотрен случай взрыва двух плоских перпендикулярных свободной поверхности зарядов, примыкающих к свободной поверхности. В случае плоских зарядов положение и размеры, а в случае поверхностного заряда переменной толщины расстояние между зарядами определяются в процессе решения.

§ 1. Пусть при взрыве двух бесконечно длинных симметричных относительно оси y зарядов сечениями $ABB'A'$ и $A^*B^*B^*A^*$ образовалась выемка выброса грунта C^*DC с зоной покоя $NHMN^*$. В силу симметрии будем рассматривать лишь правую половину области течения (рис. 1), которую обозначим через G_z , а границу последней — через $\Gamma_z (z = x + iy)$.

Согласно модели должен существовать комплексный потенциал $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, где $\varphi = -P/\rho$, P — импульсное давление, ρ — плотность грунта. Пусть $AA' = q_1$, $BB' = q_2$, причем $q_1 > q_2$. Тогда функция, характеризующая изменение толщины заряда, запишется в виде [4]

$$\delta(x) = (q_2 - q_1)x/l + q_1 - (q_2 - q_1)L/l \quad (L < x < L + l),$$

где l — ширина заряда (т. е. длина AB), $2L$ — удаленность зарядов друг от друга. Учитывая, что $P = k\delta$ [5], где k — известный коэффициент пропорциональности, на участке AB границы Γ_z получим $\varphi = a_1x + a_2$ ($L < x < L + l$), где

$$a_1 = k(q_1 - q_2)/(l\rho),$$

$$a_2 = k(q_2 - q_1)L/(\rho l) - kq_1/\rho.$$

На остальных участках Γ_z имеем: $\psi = 0$ на $QNHMDC$, $\varphi = 0$ на CB , AQ , $v = v_0$ на NHM , DC , где $v_0 = \text{const}$ — известная критическая скорость.

Итак, требуется определить форму выемки выброса грунта по вышенаписанным граничным условиям.

Введем плоскость годографа комплексной скорости

$$\omega = \frac{dw}{dz} = v_x + i(-v_y) = \left| \frac{dw}{dz} \right| e^{-i\theta}, \text{ где } v_x, v_y \text{ — проекции скорости } \vec{v} \text{ на координатные оси.}$$

Учитывая граничные условия и то, что всюду в области G_z должно быть $v > v_0$, построим область G_ω в плоскости ω (рис. 2) (соответственные точки в различных областях обозначены одними и теми же буквами). Область G_ω будет определена полностью, если будет известно положение точек E и F . Для простоты будем считать, что положение точек E и F задано, и в процессе решения задачи будем отыскивать параметр a_2 , влияющий на форму заряда, и величину L , характеризующую удаленность зарядов. Пусть функция $\omega = \omega(\zeta)$ конформно отображает полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ на область G_ω так, что точкам $-3, -2, +1$ оси ξ соответствуют точки B, A, C границы области G_ω . Пусть точкам Q, N, M, D, H области G_ω соответствуют точки q, n, m, d, h оси ξ .

Введем в рассмотрение аналитическую в полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ функцию $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta)$, конформно отображающую эту полуплоскость на область G_z . Так как участки NHM и DC — линии тока, то на них

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \sin \theta - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cos \theta = 0 \quad (n < \xi < m, d < \xi < 1),$$

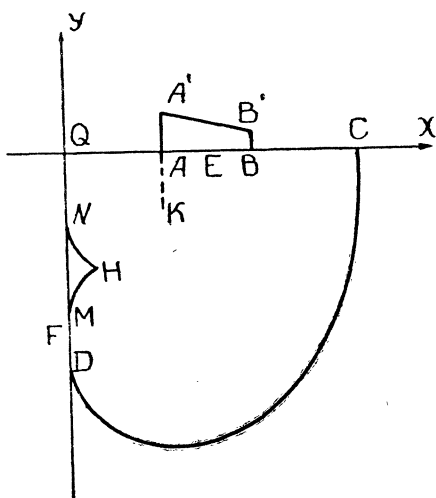


Рис. 1.

где $x = x(\xi, 0)$, $y = y(\xi, 0)$, а $\theta = \theta(\xi)$ — функция определяемая из соответствия точек границ при конформном отображении области G_ω на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$. На остальных участках имеем

$$\partial y / \partial \xi = 0 \quad (1 < \xi < \infty, -\infty < \xi < q),$$

$$\partial x / \partial \xi = 0 \quad (q < \xi < n, m < \xi < d).$$

Итак, для нахождения функции $dz/d\zeta = \partial x / \partial \xi + i \partial y / \partial \xi$ имеем однородную краевую задачу Гильберта

$$u(\xi) \frac{\partial x}{\partial \xi} - v(\xi) \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$u(\xi) = \sin \theta(\xi), \quad v(\xi) = \cos \theta(\xi) \quad (m < \xi < n, d < \xi < 1),$$

$$u(\xi) = 0, \quad v(\xi) = -1 \quad (1 < \xi < \infty, -\infty < \xi < q),$$

$$u(\xi) = 1, \quad v(\xi) = 0 \quad (q < \xi < n, m < \xi < d).$$

Так же, как это сделано в работе [6, с. 227], можно показать, что функция $z'(\zeta)$ имеет в точке C особенность порядка $1/2$, в точках N, M, D ограничена, в точке H имеет нуль второго порядка. С учетом сказанного можно записать

$$\int_{\Gamma} dz/d\zeta = (\zeta - h) \Phi(\zeta) / (\zeta + i)^3, \quad (1.2)$$

где $\Phi(\zeta) = \mu(\xi, \eta) + i\nu(\xi, \eta)$ — функция, ограниченная в точках m, n, d , а также в точке $\xi = \infty$ и, имеющая в точках $q, 1$ особенность половинного порядка. Исходя из (1.1) и (1.2), легко получить краевые условия для функции $\Phi(\zeta)$.

$$a(\xi) \mu(\xi) - b(\xi) \nu(\xi) = 0,$$

где

$$a(\xi) = (\xi^3 - 3\xi) u(\xi) - (1 - 3\xi^2) v(\xi),$$

$$b(\xi) = (1 - 3\xi^2) u(\xi) + (\xi^3 - 3\xi) v(\xi).$$

Полученную задачу Гильберта решим методом, указанным в [7]. Введем функцию $G(\xi) = a(\xi) - ib(\xi)$, причем

$$G(\xi) = -i(\xi + i)^3 e^{i\theta(\xi)} \quad \text{при } n < \xi < m, d < \xi < 1,$$

$$G(\xi) = i(\xi + i)^3 \quad \text{при } -\infty < \xi < q, 1 < \xi < \infty,$$

$$G(\xi) = (\xi + i)^3 \quad \text{при } q < \xi < n, m < \xi < d.$$

Пусть $\gamma(\xi) = \arg G(\xi)$ и $\vartheta(\xi) = \arg(\xi + i)$, причем под $\arg(\zeta + i)$ понимается ветвь, непрерывная в верхней полуплоскости $\text{Im } \zeta > 0$ которая при $\zeta = \xi \rightarrow +\infty$ стремится к нулю. Выберем значения $\gamma(\xi)$ в соответствии с установленным классом решений

$$\begin{aligned}
\gamma(\xi) &= -\pi/2 + 3\vartheta(\xi) + \theta(\xi) && \text{при } \xi_0 < \xi < 1, \\
\gamma(\xi) &= 5\pi/2 + 3\vartheta(\xi) && \text{при } 1 < \xi < \infty, \\
\gamma(\xi) &= \pi/2 + 3\vartheta(\xi) && \text{при } -\infty < \xi < q, \\
\nu(\xi) &= 3\vartheta(\xi) + 2\pi && \text{при } q < \xi < n, \\
\gamma(\xi) &= 3\pi/2 + 3\vartheta(\xi) + \theta(\xi) && \text{при } n < \xi < m, \\
\nu(\xi) &= 3\vartheta(\xi) + 4\pi && \text{при } m < \xi < d, \\
\gamma(\xi) &= 7\pi/2 + 3\vartheta(\xi) + \theta(\xi) && \text{при } d < \xi < \xi_0,
\end{aligned}$$

где $d < \xi_0 < 1$.

Введем функцию $\varphi_1(\xi) = \gamma(\xi) - \beta(\xi)\pi$, где $\beta(\xi) = 0$ при $\xi_0 < \xi < 1$, $1 < \xi < \infty$, $\beta(\xi) = 1$ при $-\infty < \xi < q$, $\beta(\xi) = 2$ при $q < \xi < n$, $n < \xi < m$, $\beta(\xi) = 3$ при $m < \xi < d$, $\beta(\xi) = 4$ при $d < \xi < \xi_0$. Отсюда видно, что индекс задачи Гильберта $\kappa = 0$, следовательно, функция $\Phi(\zeta)$ определяется с точностью до постоянного множителя

$$\Phi(\zeta) = i\gamma_0 \frac{(\zeta + i)X(\zeta)}{V(\zeta - 1)(\zeta - q)}, \quad (1.3)$$

где $\gamma_0 = \bar{\gamma}_0$ — неизвестная постоянная. Функция $X(\zeta)$ выражается формулой

$$X(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1 - \zeta} \right],$$

причем

$$\psi_1(\xi) = \gamma(\xi) - \beta(\xi)\pi + [\theta_1(\xi) + \theta_2(\xi)]/2,$$

$$\theta_1(\xi) = \arg(\xi - 1) - \arg(\xi + i), \quad \theta_2(\xi) = \arg(\xi - q) - \arg(\xi + i),$$

где $\arg(\xi - 1)$, $\arg(\xi - q)$ есть значения при $\zeta = \xi$ ветвей соответственно $\arg(\zeta - 1)$, $\arg(\zeta - q)$ непрерывных в полуплоскости $\text{Im} \zeta > 0$ и удовлетворяющих условию $0 < \arg(\zeta - 1)$, $\arg(\zeta - q) < \pi$.

Граничные значения $X(\zeta)$ определяются формулой

$$X(\xi) = \exp(i\psi_1(\xi))f(\xi),$$

где

$$f(\xi) = \exp \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\xi_1) \frac{d\xi_1}{\xi_1 - \xi} \right).$$

С учётом (1.2) и (1.3) имеем

$$z(\zeta) = i\gamma_0 \int_q^{\zeta} (\zeta - h) X(\zeta) (\zeta + i)^{-2} [(\zeta - 1)(\zeta - q)]^{-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Осуществляя в последней формуле предельный переход при $\zeta \rightarrow \xi$, выделяя действительные и мнимые части, легко получить параметрические уравнения границы Γ_z .

Как видно из предыдущего, параметры n , m , d определяются из соответствия точек при конформном отображении области G_ω на полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$. Точки N , M границы Γ_z должны лежать на одной вертикали. Учитывая это, приходим к условию $\text{Re } z(m) = 0$, которое можно удовлетворить подбором h . Получаем

$$h = \frac{\int_n^m \frac{\xi [(\xi^2 - 1) \cos \psi_1(\xi) + 2\xi \sin \psi_1(\xi)] f(\xi) d\xi}{(\xi^2 + 1)^2 \sqrt{(1 - \xi)(\xi - q)}}}{\int_n^m \frac{[(\xi^2 - 1) \cos \psi_1(\xi) + 2\xi \sin \psi_1(\xi)] f(\xi) d\xi}{(\xi^2 + 1)^2 \sqrt{(1 - \xi)(\xi - q)}}}$$

В силу соотношения $d\omega = \omega(\zeta) (dz/d\zeta) d\zeta$ будем иметь

$$\omega(\zeta) = i\gamma_0 \int_q^\zeta (\zeta - h) \omega(\zeta) X(\zeta) (\zeta + i)^{-2} [(\zeta - q)(\zeta - 1)]^{-\frac{1}{2}} d\zeta.$$

Отсюда для определения параметра q имеем уравнение

$$\text{Re } i \int_q^1 \frac{(\xi - h) \omega(\xi) X(\xi) d\xi}{(\xi + i)^2 \sqrt{(\xi - q)(\xi - 1)}} = 0. \quad (1.4)$$

Длина участка AB границы Γ_z известна и равна l , поэтому

$$l = \gamma_0 \int_{-2}^{-3} \frac{(\xi - h) f(\xi) d\xi}{(\xi^2 + 1)^2 \sqrt{(1 - \xi)(q - \xi)}}.$$

Отсюда определяется значение γ_0 .

Удаленность зарядов $2L$ друг от друга находится по формуле

$$L = \gamma_0 \int_q^{-2} (\xi - h) (\xi^2 + 1)^{-2} [(1 - \xi)(q - \xi)]^{-1/2} f(\xi) d\xi.$$

Для определения параметра a_2 , с учетом (1.4), имеем соотношение

$$a_1 L + a_2 = \lim_{\substack{\xi \rightarrow -2 \\ \xi < -2}} \text{Re } \omega(\xi).$$

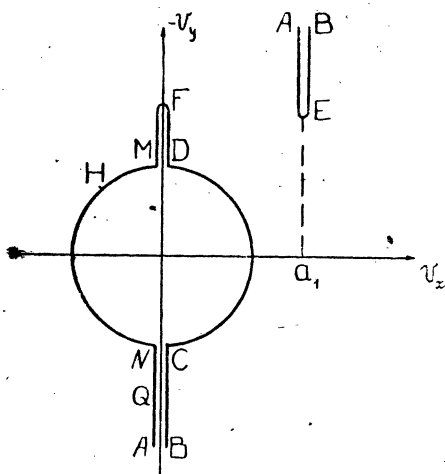


Рис. 2.

§ 2. Пусть при взрыве двух симметричных относительно оси y плоских зарядов AK и A^*K^* , перпендикулярных свободной поверхности, образовалась выемка выброса CDC^* с зоной покоя $NHMH^*N$. В силу симметрии будем рассматривать лишь правую половину области течения (рис. 1, заряд AK показан пунктирной линией), которую обозначим через G_z , а границу последней — через Γ_z .

Функция

$$\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

на границе Γ_z удовлетворяет следующим условиям:

$$\psi = 0 \text{ на } QNHMDC, \varphi = 0 \text{ на } CA, AQ, \varphi = -\varphi_0 = \text{const на } AK, \quad (2.1)$$

$v = v_0$ на NHM, DC , где величины v_0 — значение модуля критической скорости, φ_0 — значение потенциала на заряде AK будем считать известными.

Исходя из условия (2.1), построим область комплексного потенциала G_w (рис. 3). Это будет бесконечная полоса с разрезом $QNHMDC$ (соответственные точки в разных областях обозначены одними и теми же буквами). Положение конца разреза и точек N, M, D, K пока неизвестно. Для построения решения удобно ввести вспомогательную полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ переменной $\zeta = \xi + i\eta$. Обозначим эту полуплоскость через G_ζ .

Конформное отображение области G_ζ на область G_w дается интегралом Кристоффеля—Шварца. Пусть точкам $A^+, K, A^-, Q, N, M, H, D, C$ соответствуют точки $-a, k, a_1, -1, n, m, h, d, a$ оси ξ . Для производной $\omega'(\zeta)$ этого отображения получим соотношение

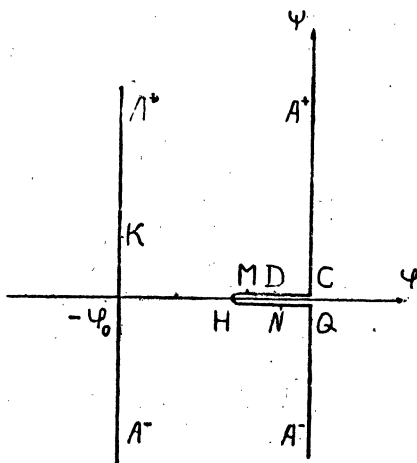


Рис. 3.

$$\omega'(\zeta) = iK_1 \frac{\zeta - h}{(\zeta + a)(\zeta - a_1) \sqrt{(\zeta - a)(\zeta + 1)}},$$

где

$$K_1 = \frac{2\varphi_0 \sqrt{2a(a-1)}}{\pi} \cdot \frac{3a^2 + 1}{a^3 + 7a^2 - a + 1},$$

$$h = \frac{a^3 - 4a^2 - a}{3a^2 + 1}, \quad a_1 = -\frac{a^4 + 7a^2 - a^3 + a}{a^3 + 7a^2 - a + 1}.$$

Введем функцию

$$X(w) = u_1 + iv_1 = \ln \frac{v_0}{\omega'(z)}, \quad (w = w(z)).$$

Для ее определения имеем следующую смешанную краевую задачу с граничными условиями: $v_1 = \pi/2$ на A^+QN , $u_1 = 0$ на NHM и DC , $v_1 = 3\pi/2$ на MD , $v_1 = +5\pi/2$ на CA^+ , $u_1 = +2\pi$ на A^+K , $v_1 = \pi$ на KA^- . Учитывая, что функция $X[\omega(\zeta)] - i5\pi/2$ должна быть ограниченной в окрестности точек N, M, D, C , определим ее по формуле Синьорини [8]

$$X[\omega(\zeta)] - i5\pi/2 = R(\zeta) \left[-\frac{1}{2} \int_{-a}^k \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} - \frac{3}{2} \int_k^{a_1} \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} - 2 \int_{a_1}^n \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + \int_m^d \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \right], \quad (2.2)$$

где $R(\zeta) = \sqrt{(\zeta - n)(\zeta - m)(\zeta - d)(\zeta - a)}$ (под $R(\zeta)$ понимается непрерывная и однозначная в области G_ζ ветвь, которая на участке (a, ∞) действительной оси принимает положительные значения). При этом должно выполняться условие разрешимости

$$\int_{-a}^k \frac{d\tau}{|R(\tau)|} + 3 \int_k^{a_1} \frac{d\tau}{|R(\tau)|} + 4 \int_{a_1}^n \frac{d\tau}{|R(\tau)|} - 2 \int_m^d \frac{d\tau}{|R(\tau)|} = 0. \quad (2.3)$$

Учитывая соотношение $w'(z) = \omega'(\zeta)/z'(\zeta)$ и формулу (2.2), получим функцию, отображающую конформно полуплоскость G_z на область G_ζ

$$z(\zeta) = \frac{1}{v_0} \int_{-1}^{\zeta} \exp(X[\omega(\zeta)]) \omega'(\zeta) d\zeta. \quad (2.4)$$

Переходя в соотношении (2.4) к пределу при $\zeta \rightarrow \xi$ и отделяя действительные и мнимые части, легко получить координаты границы Γ_z .

Требую, чтобы $\text{Re } z(m) = 0$ и точки A^+ , A^- в физической плоскости совпадали, придем к соотношениям

$$\int_n^m (\xi - h) (\xi + a)^{-1} (\xi - a_1)^{-1} [(a - \xi) (\xi + 1)]^{-1/2} \sin \Phi(\xi) d\xi = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^n \frac{\exp(\Phi(\xi)) (\xi - h) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} + \int_n^m \frac{(\xi - h) \cos \Phi(\xi) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} - \\ & - \int_m^d \frac{(\xi - h) \exp(-\Phi(\xi)) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} + \\ & + \int_d^a \frac{(\xi - h) \cos \Phi(\xi) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (\xi + 1)} = 0, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = |R(\xi)| & \left[-\frac{1}{2} \int_{-a}^k \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} - \frac{3}{2} \int_k^{a_1} \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} - \right. \\ & \left. - 2 \int_{a_1}^n \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} + \int_m^d \frac{1}{|R(\tau)|} \frac{d\tau}{\tau - \xi} \right]. \end{aligned}$$

Параметры a и k , входящие в формулу (2.4), будем считать заданными, тогда для определения m , n , d имеем систему уравнений (2.3), (2.5), (2.6).

Решая эту систему, находим параметры m , n , d по формуле (2.4) — координаты Γ_z . Ширина заряда l и расстояние между зарядами $2L$ определяются по формулам

$$l = \frac{K_1}{v_0} \int_k^{a_1} \frac{\exp(\Phi(\xi)) (\xi - h) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (-1 - \xi)},$$

$$L = -\frac{K_1}{v_0} \int_{a_1}^{-1} \frac{\exp(\Phi(\xi)) (\xi - h) d\xi}{(\xi + a) (\xi - a_1) V(a - \xi) (-1 - \xi)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. М., Поляк Э. Б., Шер Е. Н. О гидродинамическом взаимодействии шнуровых зарядов В. В.—ПМТФ, 1975, № 5, с. 93—101.

2. Ильинский Н. Б., Якимов Н. Д. О взаимодействии двух плоских шнуровых зарядов при взрыве на поверхности грунта—ПМТФ, 1977, № 1, с. 147—150.

3. Кузнецов В. М. О форме воронки выброса при взрыве на поверхности грунта.—ПМТФ, 1960, № 3, с. 152—156.

4. Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. Об одном случае взрыва симметричного поверхностного заряда переменной толщины.—ПМТФ, 1976, № 3, с. 154—161.

5. Кузнецов В. М., Лаврентьев М. А., Шер Е. И. О направленном метании грунта при помощи взрывчатого вещества.—ПМТФ, 1960, № 4, с. 49—50.

6. Салимов Р. Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкостей. Казань, 1970.

7. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979.

8. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Изд-во Казанского ун-та, 1963.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.

УДК 517.54

ОБ УЛУЧШЕНИИ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОСТОЯННЫХ В КРИТЕРИИ ОДНОЛИСТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

М. А. Севодин, П. Л. Шабалин

Пусть E_ρ — круг радиуса ρ , $\rho > 0$, с центром в начале координат, $E \equiv E_1$, $E(q, \rho) = \{q < |\zeta| < \rho\}$, $E\{q, \rho\} = \{q \leq |\zeta| < \rho\}$. Нам понадобится класс Λ_k квазигладких функций Зигмунда [1], определяемых условием $|\nu(\theta + h) - 2\nu(\theta) + \nu(\theta - h)| < kh$, $0 < h < \pi$, и класс Липшица $H(k, 1)$.

Нас будет интересовать слабая проблема однолиственности [см. 2, с. 41] общего решения внутренней обратной краевой задачи по параметру s . Как известно [3, 4], искомая область G_s в этом случае определяется отображением круга E функцией вида

$$z(\zeta) = \int_0^\zeta \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi S(\zeta e^{-i\theta}) d\nu(\theta) \right\} d\zeta, \quad \zeta \in E,$$

$$\nu(\theta) = \int p(\theta) d\theta + \nu_s(\theta), \quad S(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}. \quad (1)$$

Здесь $p(\theta)$ — суммируемая функция, определяющаяся по граничным условиям задачи, $\nu_s(\theta)$ — невозрастающая непрерывная функция с производной, почти везде на $[-\pi, \pi]$ равной нулю, — выбирается произвольно. Однолиственность отображения (1) с $\nu_s(\theta) \neq \text{const}$ впервые исследовалась в статье [5]. Было доказано существование постоянной k_0 , $0 < k_0 = k(z)$, и k_s , $k_s = k_s(z) < \infty$, таких, что включение $\nu(\theta) \in \Lambda_{k_0}$ ($\nu(\theta) \in \Lambda_{k_s}$) является достаточным (необходимым) условием однолиственности $z = z(\zeta)$ в E . В работе [6] получены равномерные по всему классу однолистных отображений (1) оценки для разделяющих постоянных:

$$1/9, 2 \leq k_0 < k_s \leq 155.$$

В. М. Миклюков при обсуждении результатов диссертации П. Л. Шабалина заметил; что в классе Λ_k^* функций, удовлетворяющих условию Зигмунда с данным k лишь локально, для малых h , оценка сверху для k_s может быть улучшена до $k_s^* < 21$. Ниже мы воспроизведем с несущественными изменениями доказательство этого факта. Обоснование ограничения для k_0 проводилось в [6] на пути подчинения функции (1) $\zeta \nu(\theta)$ из Λ_k условию однолиственности Беккера [7]:

$$|\zeta z''(\zeta)/z'(\zeta)| < (1 - |\zeta|^2)^{-1}, \zeta \in E. \quad (2)$$

В этой статье мы покажем, что неравенство для k_0 также можно несколько улучшить, если требовать выполнения (2) не во всем круге E , а лишь в кольце $E[q, 1)$, $0 < q < 1$. При этом нам понадобятся следующие условия однолиственности аналитических функций: если аналитическая в круге E функция $z(\zeta)$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$, удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \zeta \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} > -1, \zeta \in \bar{E}_q, \quad (3)$$

$$\left| \zeta \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right| < \frac{1}{1 - |\zeta|^2}, \zeta \in E[q, 1), \quad (4)$$

то $z(\zeta)$ будет однолистной в E [см. 8, 9].

В [9] доказано, что утверждение останется справедливым если условия (3), (4) заменить на

$$|\arg z'(\zeta)| < \arccos q, \zeta \in \bar{E}_q, \quad (5)$$

$$\left| \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right| < \frac{1}{1 - |\zeta|^2}, \zeta \in E[q, 1). \quad (6)$$

Отметим, что применение этих результатов позволяет не только увеличить постоянную k_0 , но дает возможность судить о некоторых геометрических свойствах отображения (1) на окружностях, близких к единичной.

В частности, из теорем 1, 2 данной статьи следует, что $k_0 = \frac{1}{3,37}$ и при этом решение обратной краевой задачи будет выпуклым в E_{q_1} , $q_1 = 0,71$, и почти выпуклым в E_{q_2} , $q_2 = 0,99$. Кроме того, в работе доказаны два условия однолиственности фундаментального решения исследуемой задачи. Эти условия получены в виде ограничений на коэффициент неравенства Липшица, которому подчинена функция

$$\nu(\theta) = \int p(\theta) d\theta.$$

Мы начнем изложение результатов статьи с доказательства вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $v(r, \theta)$ — гармоническая в E функция, представимая через свои граничные значения $v(\theta)$ интегралом Пуассона. Если $v(\theta) \in \Lambda_k$, то в кольце $E[\rho, 1]$, $0,5 < \rho < 1$, справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v(r, \varphi) \right| \leq kA(\rho) \frac{1+r}{1-r},$$

где

$$A(\rho) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2C(\rho)}{\sqrt{3}(1+4I_m)^2} + \frac{1}{1+4I_m} - 0,5 \right],$$

$$I_m = \min_{\rho \leq r \leq 1} \frac{1+4r+r^2 - \sqrt{1+34r^2+r^4}}{8(1-r)^2},$$

$$C(\rho) = \arcsin\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{12\rho}}\right) \cdot \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}.$$

Доказательство. Обозначив через $P(r, t)$ ядро Пуассона, запишем

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) P(r, \theta - \varphi) d\theta.$$

От обеих частей этого равенства возьмем вторую частную производную по φ .

$$\frac{\partial^2 v(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(r, \theta - \varphi) d\theta, \quad (7)$$

где

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) = \frac{2r(1-r^2)[2r(1+\sin^2 t) - (1+r^2)\cos t]}{(1+r^2-2r\cos t)^3}.$$

Проведем в (7) замену переменных, положив $\theta - \varphi = t$. Получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\varphi + t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) dt, \quad (8)$$

После замены в (8) t на $-t$ будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(\varphi - t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) dt. \quad (9)$$

Так как $v(\theta) \in \Lambda_k$, из (8) и (9) с учетом очевидного соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \nu(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) dt = 0$$

получим оценку

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \nu(r, \varphi) \right| \leq \frac{k}{2\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) \right| dt. \quad (10)$$

Заметим теперь, что функция $\frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t)$ меняет знак на интервале $[0, \pi]$ только в одной точке $\tau = \tau(r)$, которая определяется из уравнения $\cos \tau / (1 + \sin^2 \tau) = 2r / (1 + r^2)$. Отсюда следует, что

$$\sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) = \frac{1 + 4r + r^2 - \sqrt{1 + 34r^2 + r^4}}{8r} = \frac{(1-r)^2}{r} I(r).$$

Так как $\lim_{r \rightarrow 1} I(r)$ существует и равен $1/12$ и $0 < \rho \leq r \leq 1$, то

справедливы неравенства $I_m(1-r^2)/r \leq \sin^2 \left(\frac{\tau}{2} \right) \leq I_M(1-r)^2/r$,

где $I_m = \min_{\rho \leq r \leq 1} I(r)$, $I_M = \max_{\rho \leq r \leq 1} I(r) = I(1) = \frac{1}{12}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{\sqrt{r}} \sqrt{I_m} &\leq \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \leq \frac{1-r}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ \frac{1-r}{\sqrt{r}} \sqrt{I_m} &\leq \sin \tau \leq \frac{1-r}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{1-r}{\sqrt{r}} 2\sqrt{I_m} \leq \tau \leq \frac{1-\rho}{\sqrt{r}} \cdot C(\rho) = \frac{1-r}{\sqrt{r}} \frac{\arcsin \{(1-\rho)/\sqrt{12\rho}\} \cdot 2\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \quad (12)$$

Последняя оценка получена с помощью неравенства

$$\frac{\tau}{2} (1-\rho)/\sqrt{12\rho} \arcsin \left(\frac{1-\rho}{\sqrt{12\rho}} \right) \leq \sin \frac{\tau}{2}.$$

Перепишем теперь соотношение (10) в виде

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \nu(r, \varphi) \right| &\leq \frac{k}{2\pi} \left(- \int_0^{\tau} + \int_{\tau}^{\pi} \right) t \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(r, t) dt = \\ &= - \frac{k}{\pi} \tau \frac{\partial}{\partial t} P(r, \tau) + \frac{k}{\pi} P(r, \tau) - \frac{k}{2\pi} P(r, 0) - \frac{k}{2\pi} P(r, \pi). \end{aligned}$$

Так как $-\frac{\partial}{\partial t} P(r, \tau) = (1 - r^2) 2r \sin \tau / (1 + r^2 - 2r \cos \tau)^2$, учитывая (11), (12), получим утверждение леммы 1.

Лемма 2. Если $F(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$ регулярная в E функция, $F(0) = 0$ и в кольце $E(\rho, 1)$, $\rho \geq 0,5$, имеем $|u(\zeta)| < A(\rho)(1 + |\zeta|)/(1 - |\zeta|)$, то неравенство

$$|F(\zeta)| < \frac{8L(q)}{1 - |\zeta|^2}, \quad L(q) = \begin{cases} A \left(\frac{1+q}{2} \right) \cdot \frac{3+4q+q^2}{1+3q}, & q \leq 0,5, \\ A(0,75) \cdot 2,1, & q \geq 0,5, \end{cases} \quad (13)$$

справедливо для всех ζ , $q \leq |\zeta| < 1$, с $q = 2\rho - 1$.

Доказательство. Оценим вначале функцию $|F'(\zeta)|$. Для каждого $r = |\zeta|$, $q \leq r < 1$, рассмотрим $\rho_1 = \frac{1+r}{2}$ и аналитическую в замкнутом круге \bar{E}_{ρ_1} функцию

$$F_{\rho_1}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\rho_1, \theta) S_{\rho_1}(\zeta e^{-i\theta}) d\theta,$$

где $u(\rho_1, \theta) = \operatorname{Re} F(\rho_1 e^{i\theta})$, $S_{\rho_1}(\zeta)$ — ядро Шварца для круга E_{ρ_1} . Очевидно, что $F_{\rho_1}(\zeta) = F(\zeta)$ для $|\zeta| \leq \rho_1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} |F'(\zeta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\rho_1, \theta) S'_{\rho_1}(\zeta e^{-i\theta}) d\theta \right| < \\ &< \frac{2\rho_1}{\rho_1^2 - r^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(\rho_1, \theta)| P_{\rho_1}(r, \theta - \varphi) d\theta. \end{aligned}$$

При $\rho \leq \rho_1 < 1$ с учетом условий леммы имеем

$$|F'(\zeta)| < \frac{2\rho}{\rho^2 - r^2} A(\rho) \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{4A\tilde{L}(r)}{(1-r)^2}, \quad \tilde{L}(r) = \frac{3 + 4r + r^2}{1 + 3r} \leq \tilde{L}(q),$$

для $q \leq r < 1$.

Интегрированием по радиусу получим

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &< 4A(\rho) \tilde{L}(q) \left(\int_0^q \frac{dr}{(1-q)^2} + \int_q^r \frac{dr}{(1-r)^2} \right) = \\ &= \frac{4A(\rho) \tilde{L}(q)}{(1-r)} \cdot \left[1 + \frac{(2q-1)(1-r)}{(1-q)^2} \right] \quad q \leq r < 1. \end{aligned}$$

Несложные вычисления позволяют нам убедиться в справедливости соотношения (13) в случае $q \leq 1/2$. При $q > 1/2$ имеем

$$|F(\zeta)| < 8L \left(\frac{1}{2}\right) / (1 - |\zeta|^2)$$

для всех $\zeta \in E\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ и, следовательно, для $\zeta \in E[q, 1)$.

Лемма 3. Пусть $F(\zeta)$ — регулярная в E функция, $F(0) = 0$. Если известно, что в кольце $E[\rho, 1)$ $|\operatorname{Re} F(\zeta)| \leq kA(1+r)/(1-r)$, $|\zeta| = r$, то в E_q справедлива оценка $|\operatorname{Im} F(\zeta)| \leq kT(q)$, где

$$T(q) = \frac{2}{\pi} A \frac{(2+q)}{(1-q)} \ln \frac{(1+5q)}{1-q}, \quad \rho = \frac{0,5+q}{1,5}.$$

Доказательство. Функция $F(\zeta)$ регулярна в замкнутом круге \bar{E}_ρ , $\rho = \frac{0,5+q}{1,5}$, и, следовательно, ее мнимая часть представляется формулой

$$\operatorname{Im} F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(\rho, \theta) \frac{2\rho \sin(\varphi - \theta)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)} d\theta, \quad \zeta = re^{i\varphi} \in \bar{E}_\rho.$$

Поэтому при $\zeta = qe^{i\varphi}$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{Im} F(\zeta)| \leq \frac{kA(1+\rho)}{(1-\rho) \cdot 2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{2q\rho \sin(\varphi - \theta)}{q^2 + \rho^2 - 2q\rho \cos(\varphi - \theta)} \right| d\theta = kT(q).$$

Лемма доказана.

Приступим к изложению основных результатов данной работы.

Теорема 1. Решение (1) обратной краевой задачи будет однолиственным в E , если $\nu(\theta) \in \Lambda_k$ с

$$k \leq \min \left\{ \frac{1}{T(q)}, \frac{1}{L(q)} \right\}, \quad 0 \leq q < 1,$$

и выпуклым в E_{q_1} , где q_1 — корень уравнения

$$1 = kT(q).$$

Доказательство. Обозначим через $g(\zeta)$ интеграл Шварца с плотностью $\nu(\theta)$. Не ограничивая общности, можно считать, что на концах интервала $[-\pi; \pi]$ значения функции $\nu(\theta)$ совпадают.

Из (1) следует равенство

$$\ln z'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\zeta e^{-i\theta}) d\nu(\theta),$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\ln z'(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} S(\zeta e^{-i\theta}) d\theta. \quad (14)$$

В силу очевидного соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} S(re^{-i(\theta-\varphi)}) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} S(re^{-i(\theta-\varphi)}), \quad \zeta = re^{i\varphi},$$

выражение (14) запишется следующим образом:

$$\ln z'(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta) S(\zeta e^{-i\theta}) d\theta = \frac{\partial}{\partial \varphi} g(\zeta). \quad (15)$$

После дифференцирования по φ получим

$$i\zeta \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} g(\zeta), \quad \zeta = re^{i\varphi}.$$

Последовательно применяя к функции $g(\zeta)$ утверждения лемм 1, 2 и 3, убедимся в справедливости для $z(\zeta)$ соотношений (3) и (4).

Заметим, что наибольшее k_0 , которое удается получить из теоремы 1 при $q=0,71$, равно $1/3,37$. При этом функция (1) будет выпуклой в E_q , $q \geq 0,71$.

Теорема 2. Решение (1) обратной краевой задачи будет однолиственным в E и почти выпуклым в E_{q_1} , где q_1 — корень уравнения $k\pi = 2M(q_1)$, если $\nu(\theta) \in \Lambda_k$ с

$$k \leq \min \left\{ \frac{\arccos q}{M(q)}, \frac{q}{L(q)} \right\}, \quad 0 \leq q < 1.$$

Обоснование этого результата проводится аналогично доказательству теоремы 1. Только условие однолиственности в виде соотношений (3), (4) заменяется неравенствами (5), (6) и вместо леммы 3 нам понадобится

Лемма 4. Пусть $z(\zeta)$ в круге E определена формулой (1) с $\nu(\theta) \in \Lambda_k$. Тогда для $|\zeta| \leq q$, $0 < q < 1$, справедливо соотношение

$$|\arg z'(\zeta)| < kM(q), \quad \zeta \in \bar{E}_q,$$

$$M(q) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{4q}{1-q^2} \arccos \frac{2q}{1+q^2} + \ln \frac{(1+q^2)^2}{(1-q^2)(1+q)^2} \right\}.$$

Доказательство. Из (1) получим

$$\arg z'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(r, \theta - \varphi) d\nu(\theta),$$

где

$$Q(r, \theta - \varphi) = \operatorname{Im} S(\zeta e^{-i\theta}) = \frac{2r \sin(\theta - \varphi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi)}, \quad \zeta = r e^{i\varphi}.$$

После интегрирования по частям будем иметь

$$\arg z'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} Q(r, \theta - \varphi) d\theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Q(r, \theta - \varphi) = \frac{2r(1+r^2) \cos(\theta - \varphi) - 2}{(1+r^2 - 2r \cos(\theta - \varphi))^2}.$$

Используя четность функции $\frac{\partial}{\partial \theta} Q(r, \theta - \varphi)$, преобразуем последнее соотношение к виду

$$\arg z'(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\nu(\varphi + t) - 2\nu(\varphi) + \nu(\varphi - t)] \frac{\partial}{\partial t} Q(r, t) dt.$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t} Q(r, t)$ меняет знак в точке $\tau = \tau(r) = \arccos \left[\frac{2r}{1+r^2} \right]$, запишем неравенство

$$\begin{aligned} |\arg z'(\zeta)| &< \frac{k}{2\pi} \left\{ \left(\int_0^{\tau} - \int_{\tau}^{\pi} \right) t \frac{\partial}{\partial t} Q(r, t) dt \right\} = \\ &= \frac{k}{2\pi} \left\{ 2\tau Q(r, \tau) - \pi Q(r, \pi) - \int_0^{\tau} Q(r, t) dt + \int_{\tau}^{\pi} Q(r, t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$|\arg z'(\zeta)| < \frac{k}{2\pi} \left\{ \frac{4r}{1-r^2} \arccos \frac{2r}{1+r^2} + \ln \frac{1+r^2}{1-r^2} - \ln \frac{(1+r)^2}{1+r^2} \right\} \leq kM(q)$$

для всех $r \leq q < 1$.

Докажем необходимое условие однолиственности отображения (1).

Теорема 3. Если функция $z(\zeta)$ однолистна в E , то $\nu(\theta) \in \Lambda_{k_s}^*$, $k_s = 21$.

Доказательство. После дифференцирования равенства (15) по ζ с использованием необходимого условия однолиственности [10, с. 52]

$$\left| \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right| \leq \frac{6}{1-|\zeta|^2}, \quad |\zeta| < 1, \quad (16)$$

имеем

$$\left| \frac{d}{d\zeta} (i\zeta g'(\zeta)) \right| = \left| \frac{z''(\zeta)}{z'(\zeta)} \right| \leq \frac{6}{1-|\zeta|^2}, \quad |\zeta| < 1. \quad (17)$$

Пусть h — вещественное число, $0 < h < 1$, и $r_h = 1 - h$. Следуя [1, с. 421], рассмотрим тождество

$$g(e^{i\theta}) \equiv g(r_h e^{i\theta}) + (e^{i\theta} - r_h e^{i\theta}) g'(r_h e^{i\theta}) + \int_{r_h e^{i\theta}}^{e^{i\theta}} (e^{i\theta} - \zeta) g''(\zeta) d\zeta.$$

Заменяя θ на $\theta + h$ и $\theta - h$, получим аналогичные выражения для $g(e^{i(\theta+h)})$ и $g(e^{i(\theta-h)})$.

Составим для функции $g(e^{i\theta})$ конечную разность второго порядка, которую запишем в виде

$$g(e^{i(\theta+h)}) - 2g(e^{i\theta}) + g(e^{i(\theta-h)}) = I_1(h) + I_2(h) + I_3(h),$$

где

$$I_1(h) = \int_0^h dt \int_{r_h e^{i(\theta-t)}}^{r_h e^{i(\theta+t)}} \frac{d}{d\zeta} (\zeta g'(\zeta)) d\zeta,$$

$$I_2(h) = \frac{h}{r_h} \int_0^h dt \int_{r_h e^{i(\theta-t)}}^{r_h e^{i(\theta+t)}} \frac{d}{d\zeta} \left[\zeta \frac{d}{d\zeta} (\zeta g'(\zeta)) \right] d\zeta,$$

$$I_3(h) = \int_{r_h e^{i(\theta+h)}}^{e^{i(\theta+h)}} (e^{i(\theta+h)} - \zeta) g''(\zeta) d\zeta -$$

$$- 2 \int_{r_h e^{i\theta}}^{e^{i\theta}} (e^{i\theta} - \zeta) g''(\zeta) d\zeta + \int_{r_h e^{i(\theta-h)}}^{e^{i(\theta-h)}} (e^{i(\theta-h)} - \zeta) g''(\zeta) d\zeta.$$

С учетом (17) получим

$$|I_1(h)| \leq \frac{3r_h h^2}{(1-r_h)(1+r_h)} = 3h + o(h).$$

Условие (17) и лемма 1 из [5] позволяют заключить, что

$$\left| \frac{d^2}{d\zeta^2} (\zeta g'(\zeta)) \right| \leq \frac{24}{(1-|\zeta|^2)^2}.$$

Поэтому

$$\left| \frac{d}{d\zeta} \left[\zeta \frac{d}{d\zeta} (\zeta g'(\zeta)) \right] \right| \leq \frac{24}{(1-|\zeta|^2)^2} + \frac{6}{1-|\zeta|^2}.$$

Применяя это неравенство к оценке $I_2(h)$, будем иметь $|I_2(h)| \leq 6h + o(h)$. Далее нам потребуется следующее ограничение:

$$|g''(\zeta)| \leq \frac{6}{r(1-r^2)} + \frac{3}{r^2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad \zeta = re^{i\varphi},$$

для доказательства которого достаточно заметить, что

$$|g'(\zeta)| \leq \frac{1}{|\zeta|} \left| \int_0^\zeta \frac{d}{d\zeta} [\zeta g'(\zeta)] d\zeta \right| \leq \frac{1}{r} \int_0^r \frac{6}{1-r^2} dr = \frac{3}{r} \ln \frac{1+r}{1-r},$$

и воспользоваться соотношением (17).

Теперь оценим $I_3(h)$:

$$|I_3(h)| \leq 4 \int_{r_h}^1 (1-r) |g''(\zeta)| dr \leq 12h + o(h).$$

Итак, мы получили, что граничные значения функции $g(\zeta)$ принадлежат классу $\Lambda_{k_s}^*$, $k_s = 21$. С другой стороны, всюду на границе E выполняется равенство $v(\theta) = \operatorname{Re} g(e^{i\theta})$. Следовательно, $v(\theta) \in \Lambda_{k_s}^*$.

Теперь рассмотрим случай, когда $v_s(\theta) \equiv \text{const}$ и $v(\theta) \in H(k, 1)$. При таких $v(\theta)$ получается фундаментальное решение, допускающее счетное множество особых точек на границе. Для обоснования аналогов теорем 1, 2 нам потребуется следующая

Лемма 5. Пусть $F(r, e^{i\varphi}) = v(r, \varphi) + iu(r, \varphi)$ — регулярная в E функция, представимая через граничные значения своей действительной части $v(\theta)$ интегралом Шварца, $F(0) = 0$. Если $v(\theta) \in H(k, 1)$, то в $E[q, 1)$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v(r, \varphi) \right| \leq 2kA(q) \frac{1+r}{1-r}, \quad (18)$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right| \leq \frac{k\sqrt{12}}{\pi \cdot (1-r^2)} \left[1 + \frac{1}{2} B(q) \right], \quad (19)$$

где $A(q)$ из леммы 1,

$$B(q) = \arcsin \left[\sqrt{\frac{(1-q)^2(q^2+4q+1)}{4q(1+q^2)}} \right] / \sqrt{\frac{(1-q)^2(q^2+4q+1)}{4q(1+q^2)}}.$$

Доказательство. Неравенство (18) легко получается из леммы 1 с учетом того, что из $v(\theta) \in H(k, 1)$ следует $v(\theta) \in \Lambda_{2k}$. Для обоснования соотношения (19) запишем

$$\frac{\partial}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Q(r, \theta - \varphi) d\theta, \quad (20)$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{Im} S(re^{it}) = \\ &= - \frac{2r \sin t [(1+r^2)^2 - 8r^2 + 2r(1+r^2) \cos t]}{(1+r^2 - 2r \cos t)^3}. \end{aligned}$$

Заменяя в (20) $\theta - \varphi$ на t , с учетом равенства

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \nu(\varphi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t) dt$$

получим

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\nu(\varphi + t) - \nu(\varphi)) \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t) dt.$$

В силу принадлежности $\nu(\theta)$ классу $H(k, 1)$ будем иметь

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right| \leq \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi} t \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t) \right| dt. \quad (21)$$

Легко видеть, что функция $\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t)$ не меняет знак в интервале $[0, \pi]$ при $0 < r < 2 - \sqrt{3}$, если же $2 - \sqrt{3} \leq r < 1$, то смена знака у этой функции происходит в единственной точке $\tau = \tau(r)$, которая определяется из уравнения

$$\cos \tau = - \frac{1 + r^4 - 6r^2}{2r(1 + r^2)}. \quad (22)$$

Пусть $0 < r < 2 - \sqrt{3}$. Тогда неравенство (21) примет вид

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right| \leq - \frac{k}{\pi} \pi \frac{\partial}{\partial t} Q(r, \pi) = \frac{2kr}{(1+r^2)}. \quad (23)$$

Нетрудно увидеть, что мажорирующая функция в (23) не больше, чем соответствующая функция из (19). Поэтому в случае $r < 2 - \sqrt{3}$ лемма доказана. Пусть теперь $2 - \sqrt{3} \leq r < 1$. Из (22) находим

$$\sin \frac{\tau}{2} = (1-r) \sqrt{r^2 + 4r + 1} / \sqrt{4r(1+r^2)}.$$

Так как функция $(1-r) \sqrt{r^2 + 4r + 1} / \sqrt{4r(1+r^2)}$ убывает в интервале $2 - \sqrt{3} \leq r < 1$, получим

$$\tau \leq B(q) (1-r) \sqrt{r^2 + 4r + 1} / \sqrt{r(1+r^2)}.$$

Перепишем неравенство (21) в виде

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right| \leq -\frac{k}{\pi} \int_0^\tau t \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t) dt + \frac{k}{\pi} \int_0^\pi t \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q(r, t) dt =$$

$$= \frac{2k}{\pi} \frac{2r \sin \tau}{1+r^2-2r \cos \tau} - \frac{k}{\pi} \tau \frac{4r(1+r^2) \cos \tau - 8r^2}{(1+r^2-2r \cos \tau)^2} - \frac{2kr}{(1+r)^2}. \quad (24)$$

Подставляя (22) в (24) и привлекая ограничение на τ , запишем

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right| \leq \frac{k}{\pi} \frac{\sqrt{14r^2 - r^4 - 1}}{(1-r^2)} +$$

$$+ \frac{k}{\pi} B(q) \frac{(1+r^2)}{(1+r)} \sqrt{\frac{(r^2 + 4r + 1)(1+r^2)}{r(1-r^2)^2}} - \frac{2kr}{(1+r)^2} = kN(r). \quad (25)$$

Исследование на экстремум функций

$$(1+r^2) \sqrt{(r^2 + 4r + 1)(1+r^2)} / (1+r) \sqrt{r} \text{ и } \sqrt{14r^2 - r^4 - 1}$$

показывает, что в интервале $[2 - \sqrt{3}, 1]$ они достигают максимума при $r=1$. Поэтому (25) можно переписать следующим образом:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right| \leq \frac{k}{1-r^2} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\pi} \left[1 + \frac{1}{2} B(q) \right], \quad 0 \leq q < 1.$$

Сформулируем подобные теоремам 1, 2 утверждения.

Теорема 4. Пусть $\nu(\theta) \in H(k, 1)$, причем

$$k \leq \min \left\{ \frac{1}{N(q)}, \left[64A^2(q) + \frac{12}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2} B(q) \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Тогда решение (1) обратной краевой задачи будет однолиственным в E и выпуклым в E_{q_1} , где q_1 — корень уравнения $kN(q) = 1$.

Теорема 5. Пусть $\nu(\theta) \in H(k, 1)$, причем

$$k \leq \min \left\{ \frac{\arccos q}{2M(q)}, q \left[64A^2(q) + \frac{12}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2} B(q) \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\},$$

$$0 \leq q < 1.$$

Тогда решение (1) обратной краевой задачи будет однолиственным в E и почти выпуклым в E_{q_1} , где q_1 — корень уравнения $2kM(q) = \frac{\pi}{2}$.

Для обоснования этих результатов заметим, что выполнение условия (3) обеспечивается неравенством (25), а условие (5) следует из леммы 4 в силу включения: $\nu(\theta) \in H(k, 1) \subset \subset \Lambda_{2k}$. Справедливость неравенств (4), (5) очевидна.

Отметим, что наибольшее $k_0 = \frac{1}{2,32}$ получается из теоремы 1 при $q = 0,66$.

Авторы искренне благодарны проф. Л. А. Аксентьеву за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1. М., „Мир“, 1965.
2. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолиственности аналитических функций. — Успехи математических наук, т. 30, вып. 4, 1975, с. 3—60.
3. Андрианов С. Н. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций. — Ученые записки КГУ, т. 113, кн. 10, 1953, с. 21—30.
4. Гахов Ф. Д. Об обратных краевых задачах. — Ученые записки КГУ, т. 113, кн. 10, 1953, с. 9—20.
5. Duren P., Shapiro M., Shields A. Singular measures and domains not of Smirnov type. Duke Math. J. 33:2, 1966, с. 247—254.
6. Шабалин П. Л. Исследование общего решения обратной краевой задачи теории аналитических функций. Автореферат канд. дисс. Казань, 1977.
7. Becker I. Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen. — J. Reine und Angew. Math., 255, 1972, с. 23—43.
8. Авхадиев Ф. Г., Шабалин П. Л. Об отображениях на многосвязные области, не принадлежащие классу В. И. Смирнова. — № 2550-76 ДЕП.
8. Шабалин П. Л. Классы однолиственности и области В. И. Смирнова. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979, с. 218—226.
10. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1966.

Доложено на семинаре 30 января 1979 г.

УДК 517.544:517.862

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА
ДЛЯ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНО-СВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ
В КЛАССЕ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ***В. В. Сильвестров*

В настоящей работе для конечносвязной или бесконечносвязной области, граница которой состоит из конечного или счетного множества окружностей, конгруэнтных между собой относительно некоторой функциональной группы Γ дробно-линейных преобразований [1], и множества точек сгущения этих окружностей, решается краевая задача Гильберта в классе функций, автоморфных относительно Γ . С помощью метода симметрии и закона автоморфности эта задача сводится к эквивалентной задаче Римана для автоморфных функций относительно новой группы $\tilde{\Gamma}$, определяемой группой Γ . При условии, что $\tilde{\Gamma}$ является группой первого класса [2, с. 391—397], решения задачи Гильберта записываются через интегралы и ряды, выражаемые явно через преобразования группы $\tilde{\Gamma}$.

§ 1. Постановка задачи

1°. Пусть Γ — конечнопорожденная функциональная группа дробно-линейных преобразований $\sigma_0(z) \equiv z$, $\sigma_k(z)$, $k = 1, 2, \dots$ с областью инвариантности S . Обозначим через R фундаментальное множество группы Γ , расположенное в S . Оно получается присоединением к R_0 (R_0 — внешность всех изометрических окружностей группы, расположенная в S) всех неконгруэнтных между собой точек границы ∂R_0 .

В фундаментальной области R_0 возьмем окружность или прямую L_0 , ограничивающую односвязную область, принадлежащую R_0 . Внешность всех окружностей $L_k = \sigma_k(L_0)$, $k = 0, 1, \dots$, расположенную в S , обозначим через D . Так как

окружности L_k расположены вне друг друга, то D является конечносвязной (случай конечной группы Γ) или бесконечносвязной (Γ — бесконечная группа) областью с границей $\partial D = \partial S \cup \{L_k\}_{k=0}^{\infty}$. ∂S есть множество точек сгущения окружностей L_k , $k = 0, 1, \dots$

В дальнейшем будем рассматривать функции $f(z)$, однозначные и аналитические на множестве D^* , получаемом присоединением к D всех параболических точек p границы ∂S , удовлетворяющие условиям

$$f[\sigma_k(z)] = f(z), \quad \forall z \in D^*, \quad \forall \sigma_k \in \Gamma. \quad (1)$$

Аналитичность $f(z)$ в точке $p \in D^*$ означает, что $f(z)$ при $z \rightarrow p$ по точкам области D имеет вполне определенный конечный предел. Такие функции будем называть Γ -автоморфными на множестве D^* или автоморфными на D^* относительно группы Γ .

Особый класс функций на D^* образуют решения следующей краевой задачи Гильберта:

Найти все аналитические Γ -автоморфные на множестве D^ функции $f(z) = u(z) + iv(z)$, непрерывно продолжимые на $L_0 \subset R_0$, по граничному условию*

$$a(t)u(t) + b(t)v(t) = c(t), \quad t \in L_0, \quad (2)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — действительные функции, удовлетворяющие на L_0 условию Гёльдера; причем $a^2(t) + b^2(t) = 1$.

Используя соотношения (1), легко записать краевые условия для $f(z)$ на всех окружностях L_k . Они имеют вид

$$a[\sigma_k^{-1}(t)]u(t) + b[\sigma_k^{-1}(t)]v(t) = c[\sigma_k^{-1}(t)], \quad t \in L_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно, задача (1), (2) представляет собой задачу Гильберта для конечносвязной или бесконечносвязной области D в классе Γ -автоморфных функций.

В иной постановке задача (1), (2) и более общая задача в случае фуксовых групп второго рода рассматривалась Л. И. Чибриковой [3—5]. В этих работах условие (2) задается на свободных дугах главной окружности, которые в силу конгруэнтности концов играют роль замкнутых кривых, а функция $f(z)$ ищется внутри главной окружности. Используя метод симметрии и закон автоморфности, автор этих работ исследует задачу (1), (2) сведением к эквивалентной краевой задаче Римана для автоморфных функций заданной группы.

§ 2. Сведение к эквивалентной задаче Римана

Без ограничения общности можем считать, что L_0 совпадает с действительной осью $(-\infty; +\infty)$, ибо в противном случае можем брать изоморфную группу $W \circ \Gamma \circ W^{-1}$, подобрав дробно-линейное преобразование $W(z)$ так, чтобы $W(L_0) = (-\infty; +\infty)$.

2°. Итак, пусть $L_0 = (-\infty; +\infty)$ и ограничивает односвязную область, принадлежащую R_0 , т. е. граница ∂R_0 расположена по одну сторону от L_0 . Для определенности будем считать, что ∂R_0 расположена в верхней полуплоскости. Преобразование $T(z) = \bar{z}$ ($T^{-1} = T$) преобразует ∂R_0 в ∂R_0^* , симметричную с ∂R_0 относительно L_0 . ∂R_0^* является границей фундаментальной области R_0^* группы $\Gamma^* = T \circ \Gamma \circ T$ дробно-линейных преобразований $T\sigma_k T(z)$, $k=0, 1, \dots$, которая также функциональна. Так как ∂R_0 и ∂R_0^* расположены по разные стороны от L_0 , то внешность и граница области R_0 содержатся полностью внутри области R_0^* , а внешность и граница области R_0^* — внутри R_0 . Поэтому [1, с. 65—68] группа $\tilde{\Gamma}$, порожденная группами Γ и Γ^* , является функциональной и имеет фундаментальную область $\tilde{R}_0 = R_0 \cap R_0^*$, симметричную относительно L_0 . $\tilde{\Gamma}$ называется группой типа Шоттки. Обозначим преобразования группы $\tilde{\Gamma}$ через

$$w_0(z) \equiv z, \quad w_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \quad \alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Лемма 1. Если $w \in \tilde{\Gamma}$, то $TwT \in \tilde{\Gamma}$.

Возможны три случая:

- 1) $w \in \Gamma$. Тогда $TwT \in \Gamma^* \subset \tilde{\Gamma}$.
- 2) $w \in \Gamma^*$. Тогда найдется преобразование $\sigma \in \Gamma$, что $w = T\sigma T$. Следовательно, $TwT = T\sigma T = \sigma \in \tilde{\Gamma}$.
- 3) $w \notin \Gamma \cup \Gamma^*$. Представим w в виде $w = w_{k_1} w_{k_2} \dots w_{k_n}$, где $w_{k_j} \in \Gamma \cup \Gamma^*$. Тогда преобразование

$$TwT = Tw_{k_1} T \circ Tw_{k_2} T \circ \dots \circ Tw_{k_n} T,$$

являясь суперпозицией преобразований $Tw_{k_j} T \in \Gamma \cup \Gamma^*$, снова будет принадлежать группе $\tilde{\Gamma}$.

Лемма 2. Область инвариантности \tilde{S} группы $\tilde{\Gamma}$, а также множество $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$, $\tilde{L} = \bigcup_{k=0}^{\infty} w_k(L_0)$ симметричны относительно L_0 .

Доказательство. Пусть $z \in \tilde{S}$. Тогда найдется преобразование $w \in \tilde{\Gamma}$, что $z = w(\xi)$, $\xi \in \tilde{R}$. Имеем

$$\bar{z} = T(z) = Tw(\xi) = T\omega T(\xi) = T\omega T(\bar{\xi}),$$

где $T\omega T \in \tilde{\Gamma}$, а $\bar{\xi} \in \tilde{R}$, так как фундаментальное множество \tilde{R} симметрично относительно L_0 . Следовательно, $\bar{z} \in \tilde{S}$, т. е. \tilde{S} симметрична относительно L_0 .

Аналогично доказывается и симметричность множества $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$ относительно L_0 .

3°. Рассмотрим функцию $\Phi(z)$, которая на множестве $\tilde{R} \setminus L_0$ определяется формулой

$$\Phi(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_0, \\ f(\bar{z}), & z \in D_0^* \end{cases} \quad (3)$$

(D_0 — часть множества R , расположенная в верхней полуплоскости; $D_0^* = T(D_0)$), а на всем множестве $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$ получается согласно закону $\tilde{\Gamma}$ -автоморфности

$$\Phi(z) = \Phi[\omega_k^{-1}(z)], \quad z \in \omega_k(\tilde{R}) \setminus \omega_k(L_0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

В области D функция $\Phi(z) \equiv f(z)$. Это следует из теоремы единственности и тождества $\Phi(z) \equiv f(z)$, $z \in D_0 \subset D$.

Записав краевое условие (2) в виде

$$(a - ib)f(t) + (a + ib)\overline{f(t)} = 2c(t),$$

с учетом равенств $\Phi^+(t) = f(t)$, $\Phi^-(t) = \overline{f(t)}$, $t \in L_0$, получаем

$$\Phi^+(t) = -\frac{a + ib}{a - ib}\Phi^-(t) + \frac{2c(t)}{a - ib}, \quad t \in L_0. \quad (5)$$

В точках множества $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$ функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию симметрии

$$\overline{\Phi(z)} = \Phi(z), \quad \forall z \in \tilde{S} \setminus \tilde{L}. \quad (6)$$

Действительно, для $\forall z \in \tilde{S} \setminus \tilde{L}$ найдется преобразование $w \in \tilde{\Gamma}$, что $z = w(\xi)$, $\xi \in \tilde{R} \setminus L_0$. Согласно свойству (4), леммы 1 и формулы (3) имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(z)} &= \overline{\Phi[w(\xi)]} = \overline{\Phi(\xi)}, \\ \overline{\Phi(z)} &= \overline{\Phi[T(z)]} = \overline{\Phi[Tw(\xi)]} = \overline{\Phi[T\omega T(\xi)]} = \overline{\Phi(\bar{\xi})} = \\ &= \begin{cases} f(\bar{\xi}), & \bar{\xi} \in D_0, \\ f(\xi), & \bar{\xi} \in D_0^* \end{cases} = \Phi(\xi) = \Phi(z). \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(z)$ является ограниченным $\tilde{\Gamma}$ -автоморфным решением краевой задачи Римана (5), удовлетворяющим условию симметрии (6). Очевидно, имеет место и обратное, т. е. любое ограниченное $\tilde{\Gamma}$ -автоморфное решение задачи (5), (6) определяет в области D Γ -автоморфное решение задачи Гильберта (2).

§ 3. Построение канонической функции

4°. В дальнейшем будем считать, что $\tilde{\Gamma}$ является группой I класса, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^{-2} < \infty. \quad (7)$$

Группы Γ , для которых выполняется это условие, образуют достаточно широкий класс. Укажем некоторые из них.

1) Γ — фуксова группа второго рода, неподвижная (т. е. главная) окружность C_0 которой ортогональна L_0 . Ясно, что C_0 будет неподвижной окружностью и для Γ^* . Каждое преобразование группы $\tilde{\Gamma}$, являясь суперпозицией конечного числа преобразований, принадлежащих Γ или Γ^* , будет оставлять C_0 на месте. Значит, $\tilde{\Gamma}$ также является фуксовой группой второго рода, т. е. принадлежит I классу.

2) Γ — группа Шоттки, фундаментальная область R_0 которой ограничена $2n$ окружностями одинакового радиуса r_0 , расположенными вне друг друга на расстоянии большем, чем $(4n - 5/2)r_0$ и удаленными от действительной оси L_0 на расстояние, большее, чем $\frac{1}{2}(4n - \frac{5}{2})r_0$. Тогда $\tilde{\Gamma}$ также явля-

ется группой Шоттки. Фундаментальная область \tilde{R}_0 группы $\tilde{\Gamma}$ ограничена $4n$ окружностями одинакового радиуса r_0 , расстояние между которыми больше, чем $(4n - 5/2)r_0$. Как показал Т. Аказа [6], для таких групп тета-ряды Пуанкаре измерения -1 , значит, и измерения -2 , сходятся. Так как выполнение условия (7) разнositельно сходимости тета-рядов Пуанкаре измерения -2 , то $\tilde{\Gamma}$ является группой I класса.

Пусть ρ — род фундаментальной области R_0 . Тогда фундаментальная область \tilde{R}_0 группы $\tilde{\Gamma}$ будет иметь род $\tilde{\rho} = 2\rho$.

5°. Решение задачи (5), (6) для $\tilde{\Gamma}$ — автоморфных функций начнем с построения канонической функции $X(z)$ однородной задачи, удовлетворяющей условию симметрии (6) (схема Л. И. Чибриковой [5]). Обозначив через

$$2\kappa = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a+ib}{a-ib} \right]_{L_0} - \frac{1}{\pi} [\arg(a+ib)]_{-\infty}^{+\infty}$$

индекс задачи (5), рассмотрим в классе $\tilde{\Gamma}$ -автоморфных функций вспомогательную однородную задачу Римана

$$X_0^+(t) = i(a+ib)X_0^-(t), \quad t \in L_0, \quad (8)$$

имеющую индекс κ . Краевое условие (8) задано на бесконечном контуре. Это создает некоторое неудобство при решении задачи. Поэтому в силу $\tilde{\Gamma}$ -автоморфности $X_0(z)$ запишем рассматриваемую задачу так:

$$X_0^+(t) = i(a[\sigma_1^{-1}(t)] + ib[\sigma_1^{-1}(t)])X_0^-(t), \quad t \in L_1 = \sigma_1(L_0). \quad (8')$$

Приняв точку $t_1 = \sigma_1(\infty)$ за начало обхода L_1 , будем искать $X_0(z)$ в виде

$$X_0(z) = e^{\Gamma(z)} E^{-\kappa} [z, t_1, \sigma_1(\theta_0)] \prod_{j=1}^{2p} E(z, \theta_j, \theta_0) \prod_{j=1}^{2n} E^{m_j} [z, \omega_j(\theta_0), \theta_0],$$

где $\theta_0 \in \tilde{R}_0 \setminus L_0$ — фиксированная точка; $\theta_j \in \tilde{R}_0 \setminus L_0$, $\theta_j \neq \theta_0$, $j = 1, 2p$; m_j — целые числа; $\omega_1(z), \dots, \omega_{2n}(z)$ — порождающие преобразования группы $\tilde{\Gamma}$;

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \ln \{i(a[\sigma_1^{-1}(\tau)] + ib[\sigma_1^{-1}(\tau)])\} K(z, \tau) d\tau,$$

$$E(z, \theta, \theta_0) = \exp \left(\int_{\theta_0}^{\theta} K(z, \tau) d\tau \right),$$

а ядро $K(z, \tau)$ определяется рядом [7, 8]

$$K(z, \tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - \omega_j(z)} - \frac{1}{\tau - \omega_j(\infty)} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_j'(\tau)}{\omega_j(\tau) - z}, \quad (9)$$

сходящимся абсолютно и равномерно по z на любом компакте множества $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$. При преобразованиях $\omega_k(z)$ ядро $K(z, \tau)$ приобретает слагаемые

$$\eta_k(\tau) = K[\omega_k(z), \tau] - K(z, \tau) = K[\omega_k(\infty), \tau], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

среди которых $2p$ слагаемых (пусть это $\eta_1(\tau), \dots, \eta_{2p}(\tau)$) линейно независимы, а все остальные выражаются через них. Интегралы [9]

$$\varphi_k(z) = \int_{\theta_0}^z \eta_k(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, 2p}, \quad (11)$$

рассматриваемые как функции компактной римановой поверхности $\tilde{S}^*/\tilde{\Gamma}$, $\tilde{S}^* = \tilde{S} \cup \{p\}$, образуют базис интегралов первого рода. Каждый из слагаемых

$$\eta_{k,j} = \varphi_k[\omega_j(z)] - \varphi_k(z) = \varphi_k[\omega_j(\theta_0)] = \int_{\theta_0}^{\omega_j(\theta_0)} \eta_k(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots$$

функции $\varphi_k(z)$ либо совпадает с одним из циклических периодов интеграла $\varphi_k(z)$ на $\tilde{S}^*/\tilde{\Gamma}$, либо является линейной комбинацией с целыми коэффициентами от этих периодов. Обратно, все циклические периоды интеграла $\varphi_k(z)$ надо искать среди слагаемых $\eta_{k,j}$, $j = 1, 2n$ и числа $2\pi i$, так как значения функции $\varphi_k(z)$ определяются, вообще говоря, с точностью до $2\pi i$. Значит, все периоды интеграла $\varphi_k(z)$ представляют собой линейную комбинацию с целыми коэффициентами от слагаемых $\eta_{k,j}$, $j = 1, 2n$ и $2\pi i$.

Функция $E(z, \theta, \theta_0)$ в области \tilde{S} однозначна и в случае неконгруэнтных между собой точек θ_0 и θ в этих точках имеет простой полюс и нуль кратности 1 соответственно. Если точки θ_0 и θ между собой конгруэнтны, то $E(z, \theta, \theta_0)$ в области \tilde{S} ограничена и нигде не обращается в нуль.

Учитывая соотношение

$$K[z, \sigma_1(\tau)] d[\sigma_1(\tau)] = K(z, \tau) d\tau,$$

запишем $X_0(z)$ в виде

$$X_0(z) = e^{\Gamma(z)} E^{-x}(z, \infty, \theta_0) \prod_{j=1}^{2p} E(z, \theta_j, \theta_0) \prod_{j=1}^{2n} E^{m_j}[z, \omega_j(\theta_0), \theta_0],$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} K(z, \tau) \ln [i(a + ib)] d\tau. \quad (12)$$

$X_0(z)$, удовлетворяя краевым условиям (8) и (8'), вообще говоря, не будет $\tilde{\Gamma}$ -автоморфной, ибо в силу (10)

$$X_0[\omega_k(z)] = X_0(z) e^{H_k},$$

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \eta_k(\tau) \ln [i(a + ib)] d\tau - x \int_{\theta_0}^{\infty} \eta_k(\tau) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^{2p} \int_{\theta_0}^{\theta_j} \eta_k(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{2n} m_j \int_{\theta_0}^{\omega_j(\theta_0)} \eta_k(\tau) d\tau = \\ &= -h_k - x\varphi_k(\infty) + \sum_{j=1}^{2p} \varphi_k(\theta_j) + \sum_{j=1}^{2n} m_j \eta_{k,j}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Потребовав, чтобы все $H_k \equiv 0 \pmod{2\pi i}$, с учетом линейной зависимости функций $\eta_1(\tau), \dots, \eta_{2\rho}(\tau), \eta_k(\tau)$ при $k > 2\rho$ для определения точек $\theta_j, j = \overline{1, 2\rho}$ и целых чисел $m_j, j = \overline{1, 2n}, n_k, k = \overline{1, 2\rho}$, получим следующую проблему обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^{2\rho} \varphi_k(\theta_j) + \sum_{j=1}^{2n} m_j \eta_{k,j} + n_k 2\pi i = -h_k + \kappa \varphi_k(\infty), \quad k = \overline{1, 2\rho}, \quad (13)$$

интегралов (11). Как известно [10, с. 296—322], проблема (13) всегда разрешима и решениями ее с точностью до периодов интегралов (11) являются нули Θ -функции Римана, явно выражаемой через базис (11) (значит, и через преобразования группы $\tilde{\Gamma}$), или некоторой ее частной производной по интегралам (11). Вычислив нули Θ -функции или соответствующей производной Θ -функции, подберем числа m_j и n_k так, чтобы все равенства (13) выполнялись. Причем, используя произвол точки θ_0 , всегда можем добиться, чтобы точки $\theta_j, j = \overline{1, 2\rho}$, принадлежали множеству $\tilde{R}_0 \setminus L_0$ и не совпадали с точками $\theta_0, \bar{\theta}_0$, а также с точками $\bar{\theta}_k, k = \overline{1, 2\rho}$. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_m$ все эти точки с кратностями $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 2\rho$) соответственно, различные между собой. Тогда функция $X_0(z)$ $\tilde{\Gamma}$ -автоморфна, удовлетворяет граничному условию (8) и имеет в точках $\theta_1, \dots, \theta_m$ нули кратностей $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ соответственно, а в точке θ_0 имеет порядок $\kappa - 2\rho$.

Рассмотрим функцию $X_1(z) = \overline{X_0(\bar{z})}$. Согласно лемме 2 областью определения $X_1(z)$ является множество $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$. Из $\tilde{\Gamma}$ -автоморфности функции $X_0(z)$ и леммы 1 следует, что

$$X_1[w(z)] = \overline{X_0[\overline{w(z)}]} = \overline{X_0[Tw\Gamma(\bar{z})]} = \overline{X_0(\bar{z})} = X_1(z),$$

$$\forall z \in \tilde{S} \setminus \tilde{L}, \forall w \in \tilde{\Gamma},$$

т. е. $X_1(z)$ автоморфна относительно $\tilde{\Gamma}$. Так как вдоль L_0 $X_1^\pm(t) = \overline{X_0^\mp(t)}$, а $X_0(t)$ удовлетворяет условию (8), то

$$X_1^+(t) = \frac{1}{-i(a-ib)} X_1^-(t), \quad t \in L_0. \quad (14)$$

Из краевых условий (8) и (14) следует, что

$$X(z) = X_0(z) X_1(z) = X_0(z) \overline{X_0(\bar{z})}$$

является $\tilde{\Gamma}$ -автоморфной канонической функцией однородной задачи (5), $c(t) \equiv 0$, удовлетворяющей на множестве $\tilde{S} \setminus \tilde{L}$

условию симметрии $\overline{X(z)} = X(z)$. В точках $\theta_k, \overline{\theta}_k, k = \overline{1, m}$ $X(z)$ имеет нули кратностей $\lambda_k, k = \overline{1, m}$, соответственно, а в каждой из точек θ_0 и $\overline{\theta}_0$ имеет порядок $\kappa - 2\rho$.

§ 4. Общее решение задачи

6°. Используя соотношение

$$-\frac{a+ib}{a-ib} = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}, t \in L_0,$$

запишем краевое условие (5) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{2c(t)}{X^+(t)(a-ib)}, t \in L_0. \quad (15)$$

Это есть задача о нахождении $\tilde{\Gamma}$ -автоморфной кусочно-мероморфной функции $\Phi(z)/X(z)$ по скачку (15), имеющей в точках $\theta_1, \overline{\theta}_1, \dots, \theta_m, \overline{\theta}_m$ множества $\tilde{R} \setminus L_0$ полюсы порядков не выше $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ соответственно, в каждой из точек $\theta_0, \overline{\theta}_0$ имеющей порядок $2\rho - \kappa$ и удовлетворяющей условию симметрии (6).

Решение полученной задачи Римана будем проводить по схеме, указанной Л. И. Чибриковой [11, с. 179], используя автоморфный аналог ядра Коши [8]

$$A(z, \tau) = K(z, \tau) - \sum_{j=1}^{2\rho} \omega_j(\tau) K(z, a_j).$$

Точки $a_j, j = \overline{1, 2\rho}$, выберем так, чтобы они принадлежали множеству $\tilde{R}_0 \setminus L_0$, не совпадали с точками $\theta_q, \overline{\theta}_q, q = \overline{0, m}$, и, кроме того, удовлетворяли условию $a_{\rho+j} = \overline{a_j}, j = \overline{1, \rho}$. Такой выбор возможен. Очевидно, функция $X(z) [F_0(z) + \overline{F_0(z)}]$, где

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} A(z, \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} K(z, \tau) d\tau - \sum_{j=1}^{2\rho} d_j K(z, a_j), \\ d_j &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)(a-ib)} \omega_j(\tau) d\tau, j = \overline{1, 2\rho}, \end{aligned} \quad (16)$$

$\tilde{\Gamma}$ -автоморфна и удовлетворяет условиям (15), (6). Теперь через коэффициенты

$$\zeta_\nu(z; \theta_q) = \frac{1}{(z - \theta_q)^\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[\omega_k(z) - \theta_q]^\nu} - \frac{1}{[\omega_k(\infty) - \theta_q]^\nu} \right\} -$$

$$- \sum_{j=1}^{2\rho} d_{j,\nu}^{(q)} K(z, a_j), \quad d_{j,\nu}^{(q)} = -\omega_j^{(\nu-1)}(\theta_q)/(\nu-1)!, \quad (17)$$

$$q = \overline{0, m}; \quad \nu = 1, 2, \dots$$

тейлоровского разложения

$$A(z, \tau) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta_\nu(z; \theta_q) (\tau - \theta_q)^{\nu-1}, \quad \theta_q \in \tilde{R}_0 \setminus L_0,$$

общее решение задачи (5), (6) запишется формулой

$$\Phi(z) = X_0(z) \overline{X_0(z)} [F_0(z) + \overline{F_0(z)} + \Psi_0(z) +$$

$$+ \overline{\Psi_0(z)} + \Psi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)}],$$

$$\Psi_0(z) = c_0 + \sum_{q=1}^m \sum_{\nu=1}^{\lambda_q} c_{q,\nu} \zeta_\nu(z; \theta_q), \quad (18)$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{\nu=1}^{x-2\rho} c_\nu \zeta_\nu(z; \theta_0), \quad x > 2\rho; \quad \Psi_1(z) \equiv 0, \quad x \leq 2\rho,$$

где постоянные $c_{q,\nu}$, а также постоянные c_ν при $x > 2\rho$ должны удовлетворять системе

$$\sum_{q=1}^m \sum_{\nu=1}^{\lambda_q} (c_{q,\nu} d_{j,\nu}^{(q)} + \overline{c_{q,\nu}} \overline{d_{\rho+j,\nu}^{(q)}}) + \sum_{\nu=1}^{x-2\rho} (c_\nu d_{j,\nu}^{(0)} + \overline{c_\nu} \overline{d_{\rho+j,\nu}^{(0)}}) =$$

$$= -d_j - \overline{d_{\rho+j}}, \quad j = \overline{1, \rho}. \quad (19)$$

При $x < 2\rho$, кроме системы (19), где все $c_\nu = 0$, должны выполняться еще $2\rho - x$ комплексных условий

$$\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\Psi_0(z) + \overline{\Psi_0(z)}] = b_j, \quad b_j = -\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [F_0(z) + \overline{F_0(z)}], \quad (20)$$

$$j = 1, \overline{2\rho - x}.$$

Так как при любом x число полюсов функции $\Psi(z) = \Psi_0(z) + \overline{\Psi_0(z)} + \Psi_1(z) + \overline{\Psi_1(z)}$ не меньше $4\rho = 2\tilde{\rho}$, т. е. всегда больше $2\rho - 2$, то в силу теоремы Римана—Роха [10, с. 125—131] и соотношения $\overline{\Psi(z)} = \Psi(z)$ функция $\Psi(z)$ при $x \geq 2\rho$ содержит $2x - 2\rho + 1$ произвольных вещественных постоянных, а при $x < 2\rho$ число этих постоянных равно $2\rho + 1$.

Притом эти постоянные при $x < 2\rho$ должны удовлетворять системе $4\rho - 2x$ вещественных линейных уравнений (20). Обозначим через r ранг матрицы вещественной системы (20)

$$0 < r \leq \min \{4\rho - 2x; 2\rho + 1\}.$$

Если система (20) неоднородна, т. е. $c(t) \neq 0$, то ее разрешимость эквивалентна выполнению следующих $4\rho - 2x - r$ вещественных условий

$$\sum_{j=1}^{2\rho-x} (M_{j,k} \operatorname{Re} b_j + M_{j+2\rho-x,k} \operatorname{Im} b_j) = 0, \quad k = \overline{1, 4\rho - 2x - r}, \quad (21)$$

где $M_{1,k}, M_{2,k}, \dots, M_{4\rho-2x,k}$, $k = \overline{1, 4\rho - 2x - r}$ — полная система линейно-независимых решений соответствующей однородной транспонированной вещественной системы. При выполнении этих условий система (20) имеет $l = 2\rho - r + 1$ линейно-независимых над полем вещественных чисел решений. Причем при $r = 2\rho + 1$ решение будет единственным.

Пусть теперь $c(t) \equiv 0$. При $\rho \leq x < 2\rho$ число уравнений всегда меньше числа неизвестных. Поэтому однородная система (20) имеет $l_0 = 2\rho - r + 1$ решений, линейно-независимых над полем вещественных чисел. Однородная система (20) имеет нетривиальные решения и тогда, когда $0 \leq x < \rho$ и $r < 2\rho + 1$. Если же $r = 2\rho + 1$, то нетривиальных решений нет. Если $x < 0$, то $\tilde{\Gamma}$ -автоморфная функция $\Phi(z)/X(z)$ в \tilde{R} должна иметь 4ρ полюсов и $4\rho - x$ нулей, что не может быть, ибо $4\rho - x > 4\rho$. Поэтому $\Phi(z) \equiv 0$. Это значит, что однородная система (20) имеет лишь тривиальное решение, т. е. $r = 2\rho + 1$.

Итогом изложенного является следующая таблица.

	l_0	l	l_*
$x > 2\rho$	$2x - 2\rho + 1$	$2x - 2\rho + 1$	нет
$0 \leq x < 2\rho, r < 2\rho + 1$	$2\rho - r + 1$	$2\rho - r + 1$	$4\rho - 2x - r$
$0 \leq x < \rho, r = 2\rho + 1$	нет	единственно	$2\rho - 2x - 1$
$x < 0$	нет	единственно	$2\rho - 2x - 1$

В таблице через l_0 и l обозначены числа линейно-независимых над полем вещественных чисел решений однородной и неоднородной задач Гильберта (1), (2) соответственно;

l — число условий разрешимости (21) неоднородной задачи (1), (2); r — ранг матрицы вещественной системы (20); x — индекс задачи (1), (2).

Для получения общего решения задачи Гильберта (1), (2) (если задача разрешима) просто надо положить $f(z) = \Phi(z)$, $z \in D$, где $\Phi(z)$ определяется формулами (16) — (20), (12).

7°. Используя изложенный выше метод решения задачи (1), (2), сведением к эквивалентной задаче Римана можно решать и более общие задачи. Не останавливаясь на самих решениях, укажем 2 такие задачи.

1) Краевая задача Римана — Гильберта для конечносвязной или бесконечносвязной области D в классе кусочно-мероморфных функций, которые при преобразованиях группы Γ приобретают мероморфные в D слагаемые и множители, когда на окружности L_0 задается краевое условие Гильберта, а на кусочно-гладкой линии $\Lambda_0 \subset D$ — краевое условие Римана.

Одна подобная задача рассмотрена в [5].

2) Краевая задача Римана — Гильберта — Карлемана для фундаментальной области функциональной группы дробно-линейных преобразований, из которой выкинута односвязная область, ограниченная окружностью L_0 . В этом случае краевое условие Гильберта задается на L_0 , краевое условие Римана — на кусочно-гладкой линии Λ_0 , расположенной в рассматриваемой области, а краевое условие Карлемана, в котором сдвиг определяется порождающими преобразованиями группы, — на границе фундаментальной области. Кроме того, у искомой функции допускаются полюсы в конечном числе точек рассматриваемой области.

Частные случаи задачи 2) для прямоугольника и фундаментальных областей фуксовых групп первого рода, когда окружность L_0 отсутствует или отсутствуют L_0 и линия разрыва Λ_0 , рассмотрены в работах [4, 12 — 15].

§ 5. Задача Шварца

8°. Рассмотрим частный случай задачи (1), (2), когда $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$, т. е. задачу восстановления аналитической Γ -автоморфной в конечносвязной или бесконечносвязной круговой области D функции $f(z)$ по значениям ее действительной части на границе $L_0 = (-\infty; +\infty)$.

Для конечносвязных круговых областей, удовлетворяющих различным геометрическим условиям, эта задача различными методами решалась многими авторами, подробный обзор результатов которых имеется в [16]. В работе [17] указана схема решения этой задачи в одном классе аналитических функций, определенных в счетно-связных круговых областях, удовлетворяющих некоторым геометрическим условиям. Решения этой задачи записываются в виде рядов интегралов, ядра

которых определяются функциями Гильберта. Однако явный вид этих функций не приводится. Е. Л. Пацевич [18], используя метод симметрии, построила эти функции в явной форме в виде равномерно сходящихся рядов в случае, когда все центры граничных окружностей расположены на одной прямой.

В нашем случае, как было показано в § 2, эта задача эквивалентна задаче Римана

$$\Phi^+(t) = -\Phi^-(t) + 2c(t), \quad t \in L_0, \quad (22)$$

в классе $\tilde{\Gamma}$ -автоморфных функций, удовлетворяющих условию (6). Непосредственно проверяем, что канонической функцией однородной задачи $X^+(t) = -X^-(t)$, $t \in L_0$, удовлетворяющей условию (6), является кусочно-постоянная $\tilde{\Gamma}$ -автоморфная функция $X^+(z) = i$, $X^-(z) = -i$. Функция

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= X(z) [F_0(z) + \overline{F_0(\bar{z})} + c_0], \\ F_0(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\tau)}{i} A(z, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

где c_0 — вещественная постоянная, удовлетворяющая условиям (22), (6), имеет в точках a_j и $\overline{a_{j+\rho}} = \overline{a_j}$, $j = \overline{1, \rho}$, простые полюсы с вычетами $d_j + \overline{d_{j+\rho}}$ и $\overline{d_j} + d_{j+\rho}$ соответственно:

$$d_j = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) \omega_j(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, 2\rho}.$$

Для того, чтобы она была аналитическим решением задачи (22), (6), необходимо и достаточно, чтобы все $d_j + \overline{d_{j+\rho}}$ были равны нулю, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) [\omega_j(\tau) + \overline{\omega_{j+\rho}(\tau)}] d\tau = 0, \quad j = \overline{1, \rho}. \quad (24)$$

При выполнении условий (24) решение задачи Шварца дается формулой $f(z) = \Phi^+(z)$, $z \in D$. Из (23) и (24) находим

$$f(z) = i \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) K(z, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) \overline{K(\bar{z}, \tau)} + c_0 \right].$$

По формуле (9)

$$\begin{aligned} \overline{K(z, \tau)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\bar{\tau} - \overline{w_j(z)}} - \frac{1}{\bar{\tau} - \overline{w_j(\infty)}} \right] = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - T w_j T(z)} - \frac{1}{\tau - T w_j T(\infty)} \right], \quad \tau \in L_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно лемме 1 преобразование $T w_j T$ также принадлежит группе $\tilde{\Gamma}$, причем когда w_j пробегает все преобразования группы $\tilde{\Gamma}$, преобразование $T w_j T$ также пробегает все преобразования группы $\tilde{\Gamma}$, не повторяя дважды ни одно из них. Поэтому в силу абсолютной сходимости ряда (25) $\overline{K(z, \tau)} = K(z, \tau)$ и

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau) K(z, \tau) d\tau + i c_0, \quad (26)$$

где c_0 — вещественная постоянная.

На основе изложенного можем сделать такое заключение:

Задача Шварца для области D в классе Γ -автоморфных функций разрешима и имеет решение, определяемое формулами (26), (9), тогда и только тогда, когда выполнены ρ условий разрешимости (24).

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. И. Чибриковой за помощь и постоянное внимание к работам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Форд Р. Автоморфные функции. М.—Л., ОНТИ, 1936.
2. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М., Физматгиз, 1961.
3. Чибрикова Л. И. О краевой задаче Гильберта на конечной римановой поверхности. — Сб.: Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Изд-во Казанского ун-та, 1962, с. 59—72.
4. Чибрикова Л. И. К решению краевой задачи Гильберта. — Труды семинара по обратным краевым задачам. Вып. 2. Изд-во Казанского ун-та, 1964, с. 201—212.
5. Чибрикова Л. И. Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем. — Ученые записки Казанского ун-та, т. 123, кн. 9, 1964, с. 3—14.
6. Akaza T. Poincare theta series and singular sets of Schottky groups. — Nagoya mathematical journal, v. 24, 1964, p. 43—65.
7. Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В. К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций. — „Известия вузов. Математика“, 1978, № 12.
8. Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В. Построение автоморфного аналога ядра Коши для одного класса собственно разрывных групп. — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979, с. 202—217.

9. Сильвестров В. В. Построение кусочно-мероморфных квази-автоморфных функций. Деп. в ВИНТИ, № 3701-78 ДЕП.

10. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

11. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1977.

12. Чибрикова Л. И. О граничных задачах для прямоугольника. — Ученые записки Казанского ун-та, т. 123, кн. 9, 1964, с. 15—39.

13. Показеев В. И. Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника. — Там же, с. 40—57.

14. Показеев В. И. Задача Римана для одного класса аналитических функций, определенных на фундаментальном многоугольнике. — Там же, с. 58—70.

15. Кабайла В. Условия существования обобщенных автоморфных функций и краевая задача Карлемана. — Литовский математический сборник, т. 7, № 1, 1967, с. 45—55.

16. Александров И. А., Сорокин А. С. Задача Шварца для многосвязных круговых областей. — Сибирский математический журнал, т. 13, № 5, 1972, с. 971—1001.

17. Дундученко Л. Е. Интеграл Шварца для одного класса функций, регулярных в счетно-связной круговой δ -области. — Математические заметки, т. 12, № 4, 1972, с. 349—354.

18. Пацевич Е. Л. Экстремальные свойства гармонических функций и применение к обратным краевым задачам. Автореф. канд. дисс. Казань, 1976.

Доложено на семинаре 20 декабря 1978 года.

УДК 517.5

БИГОЛОМОРФНОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В C^n

Ю. Е. Хохлов

1. Введение. Данная работа является непосредственным продолжением статьи [8], посвященной рассмотрению вопросов биголоморфной разрешимости обратной краевой задачи в C^n . Основные определения, формулировка проблемы биголоморфной разрешимости и некоторые подходы к ее решению даны в [8] (см. также основополагающую работу [6]), к которой и отсылается читатель.

В настоящей работе получены (раздел 2) новые достаточные условия биголоморфности решений обратной краевой задачи по параметру x , имеющих вид $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, где

$$f_k(z) = i\beta_k + S[x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

$\beta_k \in \mathbb{R}^1$, а $x = (x_1, x_2, \dots, x_n): T^n \rightarrow P_x$, $x_k(\theta) = x_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Здесь $S[x_k]$ — оператор Шварца [3] для поликруга $U^n = \{z \in C^n \mid |z_k| < 1, k = 1, \dots, n\}$, $T^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ — n -мерный тор, являющийся остовом поликруга U^n . При доказательстве использованы точные оценки для n -гармонических функций, полученные в [8] и один результат Островского [5].

Третий раздел посвящен рассмотрению внешней обратной краевой задачи в классе областей, бимероморфно эквивалентных внешности поликруга $\Delta^n = \{z \in C^n \mid |z_k| > 1, k = 1, \dots, n\}$. В этом случае для взаимнооднозначности отображения необходимо, чтобы оно имело полярную особенность не выше первого порядка, поэтому мы проводим исследование в классе Σ^n мероморфных отображений, имеющих в Δ^n разложение в кратные ряды вида

¹⁾ Отметим, что внешность Δ^n и дополнение CU^n до C^n (при $n > 1$) не одно и то же, имеет место строгое включение $\Delta^n \subset CU^n$.

$$F(z) = Bz + \begin{pmatrix} c_0(1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}(1) z^{-\nu} \\ c_0(n) + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu}(n) z^{-\nu} \end{pmatrix}, \quad z \in \Delta^n, \quad (2)$$

где B — неособое линейное преобразование, $B \in GL(n, \mathbb{C})$. Для интегральных представлений вида (1), дающих решение внешней обратной краевой задачи по параметру x , получены достаточные условия бимероморфности, выражаемые через плотности оператора Шварца.

2. Плотности с положительным якобианом. Как известно [см. 6, 8], обратная краевая задача по параметру x биголоморфно разрешима в классе \mathcal{H} , если оператор Шварца (1) осуществляет биголоморфное отображение поликруга U^n . Для изучения биголоморфности оператора Шварца воспользуемся одним результатом, полученным Островским [5]. Предварительно напомним понятия, используемые в теореме Островского.

Норма $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ вектора x из \mathbb{R}^n называется \mathbb{R} -однородной, если для нее выполнены свойства: 1) $\|x\| > 0$, $x \neq 0$, 2) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$ для ненулевого $c \in \mathbb{R}^1$, 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Далее, пусть A принадлежит $GL(n, \mathbb{R})$ -группе квадратных матриц порядка n , тогда определим матричную норму $\|A\|: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, согласованную с векторной нормой $\|\cdot\|$, свойствами 1)–3) и постулатом

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad (3)$$

для любого вектора x из \mathbb{R}^n [см. 4].

Теорема 1 [5]. Пусть G — выпуклая область в \mathbb{R}^n и $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ — непрерывно дифференцируемое отображение G в \mathbb{R}^n . Если существует матрица $A \in GL(n, \mathbb{R})$ такая, что для всех $x \in G$ имеем

$$\|DF(x)A^{-1} - E\| < 1, \quad (4)$$

$E = \text{id } GL(n, \mathbb{R})$, $DF(x) = (D_k f_j(x))$, $k, j = 1, \dots, n$, тогда отображение $F(x)$ — диффеоморфизм.

Замечание 1. Эту теорему нетрудно обобщить на случай отображений комплексных пространств (вообще говоря, даже банаховых), при этом необходимо рассматривать \mathbb{C} -однородные нормы векторов z из \mathbb{C}^n (они также характеризуются свойствами 1)–3), только скаляры нужно брать из поля комплексных чисел), а матричные нормы вводить так, чтобы выполнялось свойство (3).

Матричными нормами, согласованными с векторной нормой $\|z\|_{\infty} = \max |z_k|$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, являются, например,

$$\|A\|_{\infty} = n \cdot \max_{k, j} |A_{kj}|,$$

$$S(A) = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_{\infty} / \|x\|_{\infty} = \max_k \sum_j |A_{kj}|$$

и другие.

Введем класс n -гармонических функций $\mathcal{R}\mathcal{P}(U^n)$, следы которых на T^n обладают той или иной дифференциально-разностной характеристикой. Наиболее подходящим для наших целей является класс $C_{N_1}^{k, \alpha}(T^n)$ непрерывно дифференцируемых до порядка k включительно функций с гельдеровыми k -ми производными. Мы говорим, что 2π -периодическая функция $u_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in C_{N_1}^{k, \alpha}(T^n)$, если для любых $\theta, \theta^* \in T^n$ функция $p_1(\theta) = \frac{\partial^{|\beta|} u_1(\theta)}{\partial \theta_1^{\beta_1} \partial \theta_2^{\beta_2} \dots \partial \theta_n^{\beta_n}}$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = k$, удовлетворяет неравенству

$$|p_1(\theta) - p_1(\theta^*)| \leq \sum_{e=1}^n N_{1e} |\theta_e - \theta_e^*|^{\alpha_e},$$

$N_1 = (N_{11}, \dots, N_{1n})$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Класс $C_{N_1}^{k, \alpha}(T^n)$ при $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ обозначается в дальнейшем через $C^{k, 1}(N_1)$, $C^{0, 1}(N_1) \equiv \text{Lip}(N_1)$.

Примером применения теоремы 1 к исследованию биголоморфности решения обратной краевой задачи служит

Теорема 2. Пусть решение обратной краевой задачи по параметру x в классе \mathcal{K} получено в виде (1) и выполнены $(n \cdot m)$ условий для $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), \dots, x_n(\theta))$

$$\int_{T^n} x(\theta) \exp[-2\pi i \langle \theta, \gamma \rangle] d\theta = \pi, \quad |\gamma| = 1, \quad (5)$$

$$\int_{T^n} x(\theta) \exp[-2\pi i \langle \theta, \gamma \rangle] d\theta = 0, \quad |\gamma| = 2, 3, \dots, m, \quad (6)$$

где $\langle \theta, \gamma \rangle = \theta_1 \gamma_1 + \theta_2 \gamma_2 + \dots + \theta_n \gamma_n$. Если $p(\theta) = (p_1(\theta), p_2(\theta), \dots, p_n(\theta)) = x(\theta) - \text{Re } z|_{T^n}$, $p_k(\theta) \in C^{1, 1}(N_k)$ и $N = (N_{kj})$, $k, j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяет условию

1°. $S(N) < 2(m+1)/\pi$ или 2°. $\|N\|_{\infty} < 2(m+1)/\pi n$, тогда обратная задача в классе \mathcal{K} разрешима и ее решением является биголоморфный образ полукруга U^n при отображении $F(z)$, определенном в (1).

Доказательство. Рассмотрим сужение отображения $F(z)$, у которого $\text{Re } F(z) \in \mathcal{R}\mathcal{P}(U^n)$, на остове полукруга T^n . Имеет место соотношение

$$\text{Re } f_k(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = x_k(\theta_1, \dots, \theta_n), \quad k = 1, \dots, n.$$

Введем вспомогательное отображение $H(z) = (h_1(z), \dots, h_n(z)) = F(z) - z$. Если $S(DH(z)) < 1$, то в силу теоремы 1, применяемой в случае S -нормы с матрицей $A \equiv E$, отображение $F(z)$ будет осуществлять биголоморфное отображение поликруга U^n . Для нормы $\|\cdot\|_\infty$ доказательство проводится аналогично, поэтому мы на нем не останавливаемся.

На остове поликруга T^n для $H(z)$ выполнено соотношение

$$\operatorname{Re} h_j(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = x_j(\theta_1, \dots, \theta_n) - \cos \theta_j,$$

отсюда

$$\operatorname{Re} i e^{i\theta_k} D_k h_j(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = D_k x_j(\theta_1, \dots, \theta_n) + \delta_{kj} \cdot \sin \theta_k = p_{kj}(\theta).$$

Условия (5) обеспечивают разложение $p_{kj}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ в кратные ряды Фурье, у которых отсутствуют первые m слагаемых. По предположению теоремы $p_{kj}(\theta) \in \operatorname{Lip}(N_k)$, поэтому в силу утверждения леммы 2 из [8] получаем

$$|iz_k D_k h_j(z_1, \dots, z_n)| \leq \frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj} |z_k|^{m+1}.$$

Здесь k фиксировано. Таким образом, в $\bar{U}_r^n = \{z \in C^n \mid |z_k| \leq r, k = 1, \dots, n\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} S(DH(z)) &= \max_k \sum_j |D_k h_j(z)| \leq \max_k \sum_j \left(\frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj} |z_k|^m \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2} \|z\|_\infty^m \max_k \sum_j (N_{kj}) \cdot \frac{\pi S(N)}{2(m+1)} \|z\|_\infty^m. \end{aligned}$$

В силу требования 1° теоремы $S(N) < 2(m+1)/\pi$, поэтому сразу же делаем вывод, что $S(DH(z)) < 1$ во всем замкнутом поликруге \bar{U}^n , откуда и следует окончательное утверждение теоремы.

Замечание 2. В случае $n = 1$ мы приходим к условию однолистности интеграла Шварца в единичном круге, полученному ранее Ф. Г. Авхадиевым [1].

Выбор в качестве матрицы A^{-1} в теореме 1 матрицы (A_{kj}) , где $A_{kj} = (\epsilon_k)^j$ — корни k -ой степени из единицы, возведенные в степень j , приводит нас, как показано в п. 4 из [8], к достаточному условию биголоморфности вида $\sum_{k=1}^n |D_k f_j - 1|^2 < 1$ при всех $j = 1, 2, \dots, n$. В применении к отображениям типа (1), легко устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть решение обратной задачи в классе \mathcal{H} получено в виде (1). Если $x(\theta) = (x_1(\theta), x_2(\theta), \dots, x_n(\theta))$,

$x_k(\theta) \in C^{1,1}(N_k)$, выполнены условия (5) и $\|N_k\|_2 = (\sum_{l=1}^n N_{kl}^2)^{1/2} \leq 2t/\pi$ для всех $k=1, 2, \dots, n$, тогда обратная краевая задача разрешима в классе \mathcal{H} и ее решением является биголоморфный образ U^n при отображении $F(z)$.

3. Отображения класса Σ^n . В данном разделе мы обращаемся к рассмотрению бимероморфных отображений внешности поликруга Δ^n , имеющих разложения вида (2). Решение внешней обратной краевой задачи по параметру x в этом случае строится с помощью оператора Шварца для Δ^n и имеет вид $F(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))$, где

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^n b_{kj} z_j - S[x_k], \quad z \in \Delta^n, \quad (7)$$

$k=1, 2, \dots, n$. Как и в одномерном случае [2], для однозначной разрешимости задачи нужно потребовать выполнимости условия

$$\int_{T^n} x(\theta) \exp[-2\pi i \langle \theta, \gamma \rangle] d\theta = 0, \quad |\gamma| = 1. \quad (8)$$

Мы будем предполагать это условие всегда выполненным.

Исследование бимероморфности отображения (7) будет основано на второй теореме Островского [5], которая в отличие от теоремы 1 применима и в том случае, когда область G невыпукла. Напомним еще одно полезное понятие из теории граничных свойств аналитических функций [2].

Расстоянием Мазуркевича между двумя точками z_1, z_2 из $G \subset C^n$ называется величина $\rho_M(z_1, z_2) = \inf_{l \in G} \rho(z_1, z_2)$, равная нижней грани длин гладких кривых l , соединяющих две точки z_1, z_2 и принадлежащих области G . Если рассмотреть теперь отношение $\rho_M(z_1, z_2)/\rho_E(z_1, z_2)$, где ρ_E — евклидова метрика в C^n , то число

$$\lambda_G = \sup_{z_1, z_2 \in G} \rho_M(z_1, z_2)/\rho_E(z_1, z_2)$$

назовем характеристикой невыпуклости области G . Оно играет важную роль во второй теореме Островского. Учитывая сказанное в замечании 1, мы сразу сформулируем ее для случая C^n .

Теорема 4 [5]. Пусть G — область из C^n с характеристикой невыпуклости $\lambda_G < \infty$ и $F(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z))$ — голоморфное отображение G в C^n . Если существует матрица $A \in GL(n, C)$ такая, что для всех $z \in G$ имеем

$$\|DF(z)A^{-1} - E\| < \lambda_G^{-1}, \quad (9)$$

то $F(z)$ — биголоморфное отображение.

Замечание 3. Эта теорема распространяется и на отображения класса Σ^n в Δ^n . Для Δ^n характеристику невыпуклости легко подсчитать — она равна $\lambda_{\Delta^n} = \pi/2$, поэтому условие (9) для отображений класса Σ^n переписывается в виде

$$\| DF(z)A^{-1} - E \| < 2/\pi. \quad (10)$$

В частности, если в качестве $\| M \|$ взять $(\sum_{k,j} |M_{kj}|^2)^{1/2}$, то получится условие бимероморфности теоремы 6 из [8], найденное другим способом.

Перейдем к исследованию бимероморфности решений внешней обратной краевой задачи.

Теорема 5. Пусть решение внешней обратной краевой задачи по параметру x получено в виде (7) и выполнены $(n-m)$ условий (6), (8). Если $x_k(\theta) \in C^{1,1}(N_k)$ и для $N = (N_{kj})$ справедливы оценки

$$1^\circ. S(N) < 4(m+1)/\pi^2 S(B^{-1})$$

или

$$2^\circ. \| N \|_\infty < 4(m+1)/\pi^2 n \| B^{-1} \|_\infty,$$

тогда внешняя обратная задача разрешима и ее решением является бимероморфный образ Δ^n при отображении $F(z)$, заданном (7).

Доказательство. Введем отображение $H(z) = F(z) - Bz$. Если $S(DH(z)) < 2/\pi S(B^{-1})$, то бимероморфность отображения $F(z)$ в Δ^n будет следовать из теоремы 4 при $A \equiv B$ в случае нормы $\| \cdot \| = S(\cdot)$ из-за эквивалентности (10) условию

$$\| DF(z) - B \| < (\pi \| B^{-1} \| / 2)^{-1}.$$

На остове поликруга T^n выполнено соотношение

$$\operatorname{Re} h_j(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = x_j(\theta_1, \dots, \theta_n),$$

откуда

$$\operatorname{Re} i e^{i\theta_k} D_k h_j(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) = D_k x_j(\theta_1, \dots, \theta_n) = q_{kj}(\theta).$$

Условия (6), (8) гарантируют отсутствие первых m слагаемых в разложении функций $q_{kj}(\theta)$ в кратные ряды Фурье. Так как $q_{kj}(\theta) \in \operatorname{Lip}(N_k)$, то опять, применяя лемму 2 из [8], приходим к оценке

$$|i D_k h_j(z_1, \dots, z_n)| \leq \frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj} |z_k|^m.$$

Таким образом, в $\bar{\Delta}_\rho^n = \{z \in C^n \mid |z_k| \geq \rho, k = 1, \dots, n\}$ справедливы оценки

$$S(DH(z)) = \max_k \sum_j |D_k h_j(z)| \leq \max_k \sum_j \left(\frac{\pi}{2(m+1)} N_{kj} |z_k|^m \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(m+1)} \|z\|_{\infty}^m \max_k \sum_j (N_{kj}) = \frac{\pi S(N)}{2(m+1)} \|z\|_{\infty}^m.$$

В силу требования 1° теоремы $S(N) < 4(m+1)/\pi^2 S(B^{-1})$, поэтому можно сделать вывод, что $S(DH(z)) < 2/\pi S(B^{-1})$ во всей замкнутой внешности поликруга $\bar{\Delta}^n$, откуда и вытекает окончательное утверждение теоремы.

Замечание 4. Выбор матрицы $B = (\delta_{kj})$, приводит к условию бимероморфности отображения (6) вида $S(N) < 4(m+1)/\pi^2$, что при $n=1$ дает достаточное условие, найденное В. С. Рогожиным [7]. На других частных случаях, связанных с конкретным выбором матрицы B в теореме 5, мы не останавливаемся.

В заключение автор выражает признательность своему научному руководителю профессору Л. А. Аксентьеву за постоянное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г. Радиусы выпуклости и почти выпуклости некоторых интегральных представлений. — Математические заметки, 1970, т. 7, № 5, с. 581–592.
2. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций. — УМН, 1975, т. 30, № 4, с. 3–60.
3. Какичев В. А. Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных. — Изв. вузов. Математика, 1953, № 2, с. 80–93.
4. Ланкастер П. Теория матриц. М., „Наука“, 1978.
5. Ostrowski A. Un nouveau critere d'univalence des transformations dans un R^n . — Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1959, t. 248, p. 348–350.
6. Пивень Н. Н. Основная обратная краевая задача для областей биголоморфно эквивалентных бикругу, I, II. — Изв. вузов. Математика, 1–1974, № 4, с. 17–26; II–1977, № 6, с. 16–25.
7. Рогожин В. С. Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач. — ПММ, 1958, т. 22, № 6, с. 804–807.
8. Тихонов А. П., Хохлов Ю. Е. Биголоморфность решений обратной краевой задачи в C^n . — Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979.

Должено на семинаре 30 января 1979 г.

УДК 536.24.01

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА НА ПОВЕРХНОСТИ ПЛАВЛЕНИЯ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ БУРЕНИИ

С. А. Фокин

Постановка задачи. Основными величинами, определяющими затраты энергии при термическом бурении методом плавления, являются скорость движения V термобура и плотность теплового потока, подводимого к поверхности плавления. Эти характеристики связаны с температурным режимом коронки термобура, с процессами тепло- и массопереноса в слое расплава между рабочей поверхностью термобура и породами [1], с распределением температуры в окружающем горном массиве. В общем случае при теоретическом исследовании процесса бурения плавлением определению подлежит также уравнение поверхности плавления.

По предварительным оценкам [2] толщина жидкого слоя под рабочей поверхностью термобура на три-четыре порядка меньше его характерных размеров. Таким образом, можно

считать, что поверхность плавления повторяет форму коронки термобура, которая известна. Схематично вертикальный разрез поверхности фазового перехода S_m и горного массива Ω представлен на рис. 1. Область, являющуюся дополнением области Ω до всего пространства, обозначим Ω' и будем считать, что поперечные размеры ее конечны. Плотность теплового потока определяется температурным полем окружающего коронку пород с учетом граничного условия на S_m , $t|_{S_m} = t_{пл}$, где $t_{пл}$ — температура плавления.

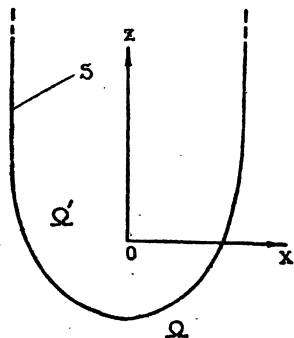


Рис. 1.

Свяжем с поверхностью плавления декартову систему координат так, чтобы направление оси z было противоположно направлению движения термобура. Тогда задача о распределении температуры в области Ω математически формулируется как задача решения уравнения теплопереноса

$$\Delta_m \theta - \text{Pe} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad m = 2, 3, \quad (1)$$

где

$$\theta = \frac{t - t_\infty}{t_{\text{пл}} - t_\infty}; \quad Z = \frac{z}{S}; \quad X = \frac{x}{S}; \quad Y = \frac{y}{S}; \quad \text{Pe} = \frac{VS}{a};$$

t_∞ — невозмущенная температура горного массива, a — коэффициент температуропроводности пород, S — характерный размер коронки, Δ_m — оператор Лапласа (индекс $m = 2, 3$ указывает на размерность задачи), ϵ граничными условиями

$$\theta|_{S_m} = 1, \quad \lim_{X^2+Y^2+Z^2 \rightarrow \infty} \theta = 0.$$

Сведение задачи к интегральному уравнению. Для функции θ — решения краевой задачи (1) справедливо следующее интегральное представление, являющееся аналогом формулы Грина для гармонических функций [3]

$$\theta(P_0) = \frac{1}{2^{m-1} \pi} \int_{S_m} \left[\varphi(P, P_0) \frac{\partial \theta(P)}{\partial n} - \theta(P) \frac{\partial \varphi(P, P_0)}{\partial n} - \text{Pe} \varphi(P, P_0) \theta(P) \frac{\partial Z}{\partial n} \right] dS_m, \quad (2)$$

где P_0 — некоторая внутренняя точка области Ω , P — точка на поверхности S_m , n — внешняя нормаль к поверхности S_m ,

$\varphi(P, P_0)$ — фундаментальное решение уравнения $\Delta_m \varphi + \text{Pe} \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = 0$,

то есть такое решение, которое при $P \rightarrow P_0$ ведет себя как $\text{Ln}[1/\rho(P, P_0)]$, если $m=2$, и как $1/\rho(P, P_0)$, если $m=3$ ($\rho(P, P_0)$ — расстояние между точками P и P_0). Непосредственной проверкой можно убедиться, что фундаментальным решением сопряженного уравнения является функция

$$\varphi = \varphi_m(\rho) e^{\frac{\text{Pe}}{2}(z_0 - z)}, \quad (3)$$

где $\varphi_2 = K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2}\rho\right)$, $\varphi_3 = e^{-\frac{\text{Pe}}{2}\rho}/\rho$, $K_0\left(\frac{\text{Pe}}{2}\rho\right)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. С учетом формулы (3) преобразуем выражение (2) к виду

$$\theta(P_0) = \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{S_m} \left[\varphi \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} - \varphi_m \frac{\partial e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)}}{\partial n} \right) \right] dS_m, \quad (4)$$

$$P_0 \in \Omega, \quad m = 2, 3.$$

С другой стороны, нетрудно показать, что справедлива формула

$$1 = \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{S_m} \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial n} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} - \varphi_m \frac{\partial e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)}}{\partial n} \right) dS_m, \quad (5)$$

$$P_0 \in \Omega', \quad m = 2, 3,$$

где нормаль n по отношению к Ω' является внутренней.

Формулы (4), (5) после перехода к пределу при $P_0 \rightarrow M \in S_m$ приводят к интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно $\frac{\partial \theta}{\partial n}$

$$1 = \frac{1}{2^{m-1}\pi} \int_{S_m} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial n} dS_m, \quad P_0 \in S_m, \quad m = 2, 3. \quad (6)$$

Система (4), (6) полностью определяет распределение температуры в горном массиве и приведенную плотность теплового потока $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ на поверхности плавления.

В случае $m = 2$, подставляя в (6) вместо φ ее выражение (3), получим

$$2\pi = \int_{S_2} \frac{\partial \theta}{\partial n} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} K_0 \left(\frac{Pe}{2} \sqrt{(X-X_0)^2 + (Z-Z_0)^2} \right) dS_2. \quad (7)$$

$$(X_0, Z_0) \in S_2.$$

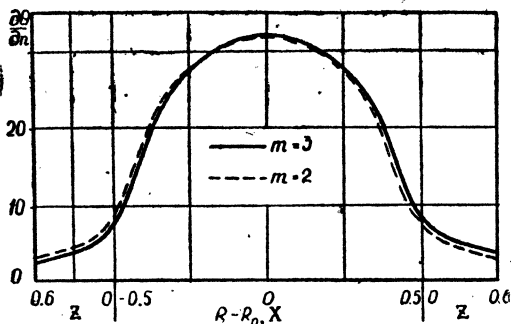


Рис. 2.

Был разработан алгоритм численного решения этого интегрального уравнения. В качестве примера на рис. 2 пунктирной линией приведено распределение плотности теплового потока $\frac{\partial \theta(X, Z)}{\partial n}$ на поверхности плавления, заданной в виде полуокружности

$$Z = -\sqrt{0,25 - X^2},$$

($|X| \leq 0,5$), сопряженной с вертикальными образующими $X = 0,5$ и $X = -0,5$ при $Pe = 30$.

Исследование трехмерной задачи ($m=3$). Рассмотрим случай, когда S_3 — поверхность вращения с осью симметрии Z , образующей S_2 . Тогда, переходя в (6) к цилиндрическим координатам $X=R \cos \alpha$, $Y=R \sin \alpha$, $Z=Z$ и вводя новую переменную $t=\sqrt{R^2+R_0^2-2RR_0 \cos \alpha+(Z_0-Z)^2}$, приведем уравнение (6) к виду

$$\pi = \int_{S_2} \frac{d\theta(R, Z)}{dn} I(R, Z, R_0, Z_0) e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} R dS_2, \quad (R_0, Z_0) \in S_2, \quad (8)$$

где

$$I(R, Z, R_0, Z_0) = \int_c^d e^{-\frac{Pe}{2}t} dt / \sqrt{(t^2 - c^2)(d^2 - t^2)},$$

$$c = \sqrt{(R - R_0)^2 + (Z - Z_0)^2}, \quad d = \sqrt{(R + R_0)^2 + (Z - Z_0)^2}.$$

Будем считать, что при всех $R \in S_2$ выполняется строгое неравенство $d > c$, которое эквивалентно тому, что ось Z не пересекает контур S_2 . Физически это соответствует наличию в центре коронки отверстия для отбора проб породы. В этом случае при $Pe \rightarrow \infty$ удастся вывести асимптотическую формулу и значительно упростить ядро уравнения (8).

Асимптотическое разложение интегралов типа $I(R, Z, R_0, Z_0)$ удобно искать методом интегрирования по частям, изложенным в [4]. Так как интеграл I имеет на концах особенности, в [4] предлагается применить нейтралizador Ван дер Корпута $\nu(t)$, который обладает свойствами $\nu(t) \in C^\infty [c, d]$; $\nu(c) = 1$; $\nu^{(k)}(c) = 0$; $\nu^{(k)}(d) = 0$.

Левый $\nu_0(t)$ и правый $\nu_1(t)$ нейтралзаторы определяются следующим образом:

$$\nu_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [c, c_1], \\ \nu(t) & \text{при } t \in [c_1, d_1], \\ 0 & \text{при } t \in [d_1, d], \end{cases} \quad \nu_1(t) = 1 - \nu_0(t), \quad c < c_1 < d_1 < d.$$

Тогда после n -кратного интегрирования по частям исследуемого интеграла с учетом свойств нейтралзаторов получим формулу [4]

$$\int_c^d K(\beta, t) h(\beta, t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k K_{-k-1}^{(1)}(\beta, d) h_k^{(1)}(\beta, d) - \sum_{k=0}^n (-1)^k K_{-k-1}^{(0)}(\beta, c) h_k^{(0)}(\beta, c) + (-1)^{n+1} \int_c^{d_1} K_{-n-1}^{(0)}(\beta, t) \times$$

$$\times h_{n+1}^0(\beta, t)(dt) + (-1)^{n+1} \int_{c_1}^d K_{-n-1}^{(1)}(\beta, t) h_{n+1}^{(1)}(\beta, t) dt, \quad (9)$$

где

$$K_0^{(i)}(\beta, t) = K^{(i)}(\beta, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} K_{-n-1}^{(i)}(\beta, t) = K_{-n}^{(i)}(\beta, t),$$

$$h_0^{(i)}(\beta, t) = h^{(i)}(\beta, t), \quad h_n^{(i)}(\beta, t) = \frac{\partial}{\partial t} (h_{n-1}^{(i)}(\beta, t) v_i(t)), \quad i = 0, 1. \quad (10)$$

В [4] также показано, что для интегрированных ядер $K_{-n-1}(\beta, t)$, стремящихся к нулю при $\beta \rightarrow \infty$, справедливо следующее представление:

$$K_{-n-1}(\beta, t) = - \int_t^\infty \frac{(t-\tau)^n}{n!} K(\beta, \tau) d\tau.$$

Полагая

$$K^{(0)}(\beta, t) = e^{-\frac{Pe}{2}t} / \sqrt{t^2 - c^2}, \quad h^{(0)}(t) = v_0(t) / \sqrt{d^2 - t^2}, \quad \beta = \frac{Pe}{2},$$

получим

$$K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, t\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} e^{-\frac{Pe}{2}c} (2c)^n \int_0^\infty u^{n-1/2} (u+t-c)^{-1/2} \times \\ \times (u+t+c)^{-1/2} du. \quad (11)$$

Полагая в (11) $t=c$, найдем искомое интегрированное ядро

$$K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, c\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (2c)^n e^{-\frac{Pe}{2}c} \int_0^\infty u^{n-1/2} (u+1)^{-1/2} e^{-Pe \cdot c \cdot u} du.$$

Интеграл в правой части выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ [5]. Таким образом,

$$K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, c\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \Gamma(n+1/2) e^{-\frac{Pe}{2}c} \times \\ \times \psi(1/2, 1-n, Pe \cdot c) \left(\frac{Pe}{2}\right)^{-n}.$$

Из формул (10), с учетом свойств нейтрализатора $v_0(t)$, найдем

$$h_n^{(0)}(c) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} [(d^2 - t^2)^{-1/2}]_{t=c}.$$

Следовательно, вторую сумму в правой части формулы (9) можно представить в виде

$$\Phi_n = e^{-\frac{Pe}{2}c} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+1/2)}{k!} \psi(1/2, 1-k, Pe \cdot c) h_k^{(0)}(c) \left(\frac{Pe}{2}\right)^{-k}.$$

Для оценки остатка $R_n\left(\frac{Pe}{2}\right)$ необходимо оценить $K_{-n-1}\left(\frac{Pe}{2}, t\right)$.

Разобьем интервал интегрирования в (11) на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$.

Так как

$$|t - c + u|^{-1/2} \leq |t - c|^{-1/2}, \quad |t + c + u|^{-1/2} \leq |t + c|^{-1/2},$$

нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \left| K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, t\right) \right| &\leq |t^2 - c^2|^{-1/2} \left[\int_0^1 u^n e^{-\frac{Pe}{2}uc} du + \right. \\ &\quad \left. + \int_1^\infty u^n e^{-\frac{Pe}{2}uc} du \right] e^{-\frac{Pe}{2}c} = \\ &= |t^2 - c^2|^{-1/2} \left[O\left(\frac{Pe^{-n-1}}{2}\right) + O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c} \cdot \frac{Pe^{-1}}{2}\right) \right] e^{-\frac{Pe}{2}c} = \\ &= |t^2 - c^2|^{-1/2} O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c} \cdot \frac{Pe^{-n-1}}{2}\right) \text{ и } \left| R_n^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}\right) \right| = \\ &= \left| \int_c^{d_1} K_{-n-1}^{(0)}(\beta, t) |h_0^{(0)}(t) \nu_0(t)|^{(n+1)} dt \right| = \\ &= |\text{Ln}(t - \sqrt{t^2 - c^2})|_c^{d_1} O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c} \frac{Pe^{-n-1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Тогда найдется такое k , что при всех $n \in N$

$$R_{n+k}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}\right) = o\left(K_{-n-1}^{(0)}\left(\frac{Pe}{2}, c\right)\right).$$

Положим

$$\begin{aligned} K^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}, t\right) &= e^{-\frac{Pe}{2}t} / \sqrt{d-t}, \\ h^{(1)}(t) &= \nu_1(t) / \sqrt{(t^2 - c^2)(d+t)}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные оценки для $K_{-n-1}^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}, d\right)$ и $R_n^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}\right)$, можно показать, что

$$\begin{aligned} |R_n^{(1)}| &= O\left(e^{-\frac{Pe}{2}c_1} \cdot \frac{Pe^{-n-1}}{2}\right), \quad |K_{-n-1}^{(1)}\left(\frac{Pe}{2}, d\right)| = \\ &= O\left(e^{-\frac{Pe}{2}d} \cdot \frac{Pe^{-n-1/2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, все другие слагаемые в правой части формулы (9), кроме Φ_n , при $d > c_1 > c$ входят в любой остаток ряда

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1/2) e^{-\frac{Pe}{2}c} h_n^{(0)}(c) \psi(1/2, 1-n, Pe \cdot c) \left(\frac{Pe}{2}\right)^{-n} / n!$$

Если ограничиться первым членом этого асимптотического ряда и выразить ψ через модифицированную функцию Бесселя второго рода по известной формуле [5], то уравнение (8) примет вид

$$2\pi = \int_{S_2} \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial n} \sqrt{\frac{R}{R_0}} e^{\frac{Pe}{2}(Z_0-Z)} K_0 \left[\frac{Pe}{2} \sqrt{(R-R_0)^2 + (Z-Z_0)^2} \right] dS_2 \quad (12)$$

Сравнивая уравнения (7) и (12), видим, что они отличаются лишь множителем $\sqrt{R/R_0}$, учитывающим радиальный характер распределения тепла в породах.

При численном решении уравнения (12) задавалась та же форма образующей и тоже значение $Pe = 30$, что и при решении уравнения (7). Причем радиус внутреннего отверстия r_0 выбирался равным ширине кольца S горизонтального сечения коронки, то есть $\bar{R}_0 = r_0/S = 1$. Распределение плотности теплового потока на S_2 приведено сплошной линией на рис. 2.

Результаты численных расчетов показывают, что при некоторых значениях параметров, определяющих процесс бурения кольцевым термобуром, например, при $\bar{R}_0 \geq 1$ и достаточно больших Pe , можно ограничиться решением двумерной задачи для $m = 2$.

В заключение хочу выразить глубокую признательность А. Н. Саламатину за интерес, проявленный к работе и ряд ценных замечаний в ходе решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин С. А. Уравнения тепло- и массопереноса в слое расплава под рабочей поверхностью термопенетратора. Казань, 1978 (Рукопись депонирована в ВИНТИ № 1534—78 Деп.).
2. Чистяков В. К., Чугунов В. А. Исследование процесса бурения методом плавления горных пород.—Сб.: Физические проблемы горного производства. Вып. 4. Л., 1977, с. 97—103.
3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИИЛ, 1957.
4. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т. I. Рига, 1974.
5. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз. 1963.

Доложено на семинаре 6 декабря 1978 г.

УДК 517.544.8

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С АВТОМОРФНЫМИ И КВАЗИАВТОМОРФНЫМИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И СТЕПЕННЫМИ ЯДРАМИ, I

Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б.

В этой работе методом аналитического продолжения решаются в замкнутой форме некоторые интегральные уравнения первого рода, заданные на кусочно-гладкой линии L_0 , лежащей внутри фундаментальной области R_0 некоторой конечнопорожденной функциональной группы Γ дробно-линейных преобразований

$$\sigma_0(z) \equiv z, \sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \alpha_k \beta_k - \beta_k \gamma_k = 1, k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Группу Γ считаем принадлежащей 1 классу, для которого

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^{-2} < \infty. \quad (2)$$

Штрих у знака суммы означает, что при суммировании опускается конечное число членов ряда, для которых $\gamma_k = 0$. Область R_0 считаем областью Форда, т. е. внешностью всех изометрических окружностей $|\gamma_k z + \delta_k| = 1, k = 1, 2, \dots$ группы, расположенной в одной из областей разрывности S группы Γ . Предполагаем, что бесконечно удаленная точка есть обыкновенная точка группы. Для групп 1 класса в работе [1] построен квазиавтоморфный аналог ядра Коши

$$\begin{aligned} K(z, \tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sigma_j(\tau) - z} - \frac{1}{\sigma_j(\tau) - z_0} \right] \sigma_j'(\tau) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - \sigma_j(z)} - \frac{1}{\tau - \sigma_j(z_0)} \right], z_0 \in R_0 \setminus L_0, \end{aligned} \quad (3)$$

с основным групповым свойством

$$K[\sigma_k(z), \tau] = K(z, \tau) + \eta_k(\tau), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

и автоморфный аналог ядра Коши

$$A(t, \tau) = \begin{vmatrix} K(z, \tau), K(z, a_1), \dots, K(z, a_\rho) \\ \eta_1(\tau), \eta_1(a_1), \dots, \eta_1(a_\rho) \\ \dots \\ \eta_\rho(\tau), \eta_\rho(a_1), \dots, \eta_\rho(a_\rho) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \eta_1(a_1), \dots, \eta_1(a_\rho) \\ \dots \\ \eta_\rho(a_1), \dots, \eta_\rho(a_\rho) \end{vmatrix} \quad (5)$$

с простыми полюсами в обыкновенных точках a_1, \dots, a_ρ области R_0 ; число полюсов ρ равно роду (жанру) области R_0 . Ядра рассматриваемых в данной работе интегральных уравнений на каждой дуге $\alpha_k \beta_k$, входящей в состав линии L_0 , либо совпадают со значениями интегралов

$$F_k(z, \tau) = \int_{\alpha_k \tau} \varphi_k(\zeta) K(z, \zeta) d\zeta, \quad \psi_k(z, \tau) = \int_{\alpha_k \tau} \varphi_k(\zeta) A(z, \zeta) d\zeta, \quad (6)$$

либо с показательной функцией от таких интегралов. Решения уравнений отыскиваются в классах H^* по Н. И. Мусхелишвили. Устанавливается зависимость числа линейно-независимых решений однородных уравнений и числа условий разрешимости неоднородных уравнений от индекса уравнения κ , рода ρ фундаментальной области и числа особенных концов линии L_0 .

§ 1. Интегралы с логарифмическими ядрами

1°. Предположим сначала, что L_0 есть простая гладкая разомкнутая дуга $\alpha\beta$ и что заданная на ней функция $\varphi(\zeta) \in H$ нигде не обращается в нуль. Полагая

$$F_\alpha(z, \tau) = \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) K(z, \zeta) d\zeta, \quad (7)$$

рассмотрим свойства криволинейного интеграла

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(z, \tau) d\tau, \quad (8)$$

когда $\nu(t)$ принадлежит классу $H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$.

Теорема 1. Если $\varphi(t) \in H$ и $\nu(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$ на гладкой дуге $\alpha\beta$, то интеграл

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_{\alpha}(t, \tau) d\tau. \quad (9)$$

всюду на $\alpha\beta$, кроме, может быть, концов, удовлетворяет условию H .

При доказательстве теоремы надо учесть, что вблизи дуги $\alpha\beta$

$$K(z, \tau) = (\tau - z)^{-1} + B(z, \tau), \quad (10)$$

где $B(z, \tau)$ аналитическая по z и τ не только вблизи $\alpha\beta$, но и на $\alpha\beta$. Поэтому в представлении

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) B(t, \zeta) d\zeta$$

второй интеграл равномерно по t сходится и как аналитическая по t функция принадлежит классу $H(1)$ всюду на $\alpha\beta$, включая концы. Равномерная сходимость первого интеграла и его принадлежность классу $H(\mu)$, $\mu < 1$, всюду на $\alpha\beta$, исключая, может быть, концы, доказаны в работе [2] (теорема 1).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 интеграл (8) представляет собой исчезающую в точке $z = z_0$ квазиавтоморфную кусочно-голоморфную функцию с линией скачков $\alpha\beta$, ограниченную на $R \setminus \alpha\beta$ и на конце $z = \beta$ и почти ограниченную на конце $z = \alpha$. Во всех внутренних точках дуги $\alpha\beta$ предельные значения функции (8) вычисляются по формулам

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) \int_{t\beta}^{\alpha} \nu(\tau) d\tau + \Phi(t). \quad (11)$$

Доказательство. В криволинейном интеграле (8) подынтегральная функция $\nu(\tau) F_{\alpha}(z, \tau)$ является аналитической по z в плоскости с разрезом по дуге $\alpha\beta$ и кусочно-непрерывной по τ на дуге $\alpha\beta$. Значит, интеграл $\Phi(z)$ будет аналитической функцией в плоскости с разрезом $\alpha\beta$, если он будет равномерно сходящимся для всех $z \in R$, отличных от точек дуги $\alpha\beta$. Обозначим через R фундаментальное множество группы Γ ; оно получается присоединением к R_0 всех неконгруэнтных между собой точек ее границы ∂R_0 . На множестве $R \setminus \alpha\beta$ ядро $K(z, \tau)$ по z ограничено, а вблизи $\alpha\beta$ имеем представление (10). Поэтому в любой области $\bar{D} \subset R \setminus \alpha\beta$ интеграл (7) ограничен по модулю, так что имеет место оценка

$$|\nu(\tau) F_{\alpha}(z, \tau)| \leq M |\nu(\tau)|, \quad M > 0.$$

Отсюда и из абсолютной интегрируемости функции $\nu(\tau)$ следует равномерная сходимость интеграла (8).

Так как стремление функции $F_\alpha(z, \tau)$ к нулю при $z \rightarrow z_0$ равномерно относительно $\tau \in \alpha\beta$ и интеграл (8) сходится равномерно, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \lim_{z \rightarrow z_0} F_\alpha(z, \tau) d\tau = 0,$$

так что $\Phi(z_0) = 0$.

Равномерная сходимостъ интеграла (8) позволяет путем перехода к пределу под знаком интеграла получить заключение, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на все внутренние точки дуги $\alpha\beta$. Будем обозначать, что $z \rightarrow t^+$, если $z \rightarrow t \in \alpha\beta$, оставаясь все время слева от $\alpha\beta$, и $z \rightarrow t^-$, если $z \rightarrow t$, оставаясь справа от $\alpha\beta$. В силу условия $\varphi(t) \in H$ и представления (10)

$$\lim_{z \rightarrow t^\pm} F_\alpha(z, \tau) = F_\alpha(t^\pm, \tau) = \begin{cases} F_\alpha(t, \tau), & \tau \in \alpha t, \\ \pm i\pi\varphi(t) + F_\alpha(t, \tau), & \tau \in t\beta, \end{cases} \quad (12)$$

причем стремление к пределу равномерно относительно $\tau \in \alpha\beta$. На основании этих формул переходом к пределу под знаком интеграла (8) при $z \rightarrow t^\pm$ убеждаемся в справедливости формул (11)

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t^\pm, \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha t} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{t\beta} \nu(\tau) [\pm i\pi\varphi(t) + F_\alpha(t, \tau)] d\tau = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau) d\tau + \Phi(t). \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что предельные значения $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют условию H всюду на $\alpha\beta$, кроме, может быть, конца $t = \alpha$. На этом конце ядро $F_\alpha(z, \tau)$ на основании (10) ведет себя как $-\varphi(\alpha) \ln(z - \alpha)$. Поэтому

$$\bullet \lim_{z \rightarrow \alpha} |z - \alpha|^\epsilon F_\alpha(z, \tau) = 0, \quad \forall \epsilon > 0,$$

причем стремление к пределу равномерное относительно τ . Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} |z - \alpha|^\epsilon \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \lim_{z \rightarrow \alpha} |z - \alpha|^\epsilon F_\alpha(z, \tau) d\tau = 0. \quad (13)$$

Значит, интеграл (8) в точке $z = \alpha$ почти ограничен. На конце $z = \beta$ интеграл (8) принимает вполне определенное конечное значение

$$\Phi(\beta) = \lim_{z \rightarrow \beta} \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(\beta, \tau) d\tau. \quad (14)$$

Свойство Γ -квазиавтоморфности интеграла (8) есть следствие такого же свойства ядра $K(z, \tau)$. Из соотношений (4) вытекают аналогичные соотношения

$$\Phi[\sigma_k(z)] = \Phi(z) + \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

но с постоянными слагаемыми

$$\Omega_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) \eta_k(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) \eta_k(\zeta) d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau. \quad (16)$$

В соотношениях (4) циклические слагаемые ядра $K(z, \tau)$

$$\eta_k(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau - \sigma_{jk}(z_0)} - \frac{1}{\tau - \sigma_j(z_0)} \right] = K[\sigma_k(z_0), \tau] \quad (17)$$

есть автоморфные формы измерения -2 , обращающиеся в нуль во всех параболических точках группы [1]; они образуют векторное пространство измерения ρ , так что

$$\eta_k(\tau) = \sum_{q=1}^{\rho} M_{kq} \eta_q(\tau), \quad k > \rho. \quad (18)$$

Из формул (16) и (18) следует, что

$$\Omega_k = \sum_{q=1}^{\rho} M_{kq} \Omega_q, \quad k > \rho, \quad (19)$$

Значит, циклические постоянные $\{\Omega_k\}$ интеграла (8) образуют ρ -мерное векторное пространство с базисом $\Omega_1, \dots, \Omega_\rho$.

Замечание 1. В условиях теоремы 1 интеграл (8) представим в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \left[\varphi(\zeta) \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau \right] K(z, \zeta) d\zeta. \quad (20)$$

В самом деле, из формул (11)

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau) d\tau, \quad (21)$$

и интегральное представление (20) получается как единственное решение задачи о скачке (21) в классе Γ -квазиавтоморфных функций с циклическими слагаемыми (16), исчезающих в точке $z = z_0$, ограниченных на конце $z = \beta$ и почти ограниченных на конце $z = \alpha$.

Представление (20) можно получить другим путем, вставив под знак интеграла (8) значение интеграла (7) и переставив в полученном повторном интеграле порядок интегрирования по формуле Дирихле.

Замечание 2. В интеграле (8) вместо обобщенного Γ -квазиавтоморфного логарифмического ядра (7) можно брать такой же интеграл с переменным нижним пределом

$$F_{\beta}(z, \tau) = \int_{\tau\beta}^{\cdot} \varphi(\zeta) K(z, \zeta) d\zeta. \quad (22)$$

Для вычисления предельных значений интеграла (8) с ядром (22) вместо формул (11) будем иметь

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} \varphi(t) \int_{at}^{\cdot} \nu(\tau) d\tau + \Phi(t); \quad (23)$$

сам интеграл $\Phi(z)$ в этом случае ограничен в точке $z = \alpha$, а в точке $z = \beta$ может иметь логарифмическую особенность; в формулах (16) при вычислении циклических постоянных Ω_k дуги $a\tau$ и $\tau\beta$ надо поменять местами.

2°. Пусть теперь L_0 есть кусочно-гладкая линия, состоящая из m простых гладких разомкнутых дуг $\alpha_j\beta_j$, не имеющих общих точек, за исключением, может быть, концов и расположенных внутри фундаментальной области R_0 . Возьмем на первых r дугах $\alpha_j\beta_j$ интегралы вида (7) с переменным верхним пределом

$$F_j(z, \tau) = \int_{\alpha_j\tau}^{\cdot} \varphi(\zeta) K(z, \zeta) d\zeta, \quad j = \overline{1, r}, \quad (24)$$

а на остальных — интегралы вида (22) с переменным нижним пределом

$$F_j(z, \tau) = \int_{\tau\beta_j}^{\cdot} \varphi(\zeta) K(z, \zeta) d\zeta, \quad j = \overline{r+1, m}, \quad (25)$$

считая, что всюду не равная нулю на L_0 функция $\varphi(\zeta) = \varphi_j(\zeta)$, $\zeta \in \alpha_j\beta_j$ принадлежит классу H_0 , если дуги $\alpha_j\beta_j$ имеют общие концы, и классу H на прерывистой гладкой линии L_0 . В предположении, что $\nu(t) \in H^*$ на L_0 , под Γ -квазиавтоморфным интегралом с обобщенным логарифмическим ядром будем понимать сумму интегралов

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j\beta_j}^{\cdot} \nu(\tau) F_j(z, \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau) F(z, \tau) d\tau, \quad (26)$$

где

$$F(z, \tau) = F_j(z, \tau), \quad \tau \in \alpha_j\beta_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

В точках дуги $\alpha_k \beta_k$ только k -тое слагаемое в сумме (26) имеет разрыв, остальные слагаемые в точках этой дуги непрерывны и аналитичны. Поэтому для предельных значений интеграла (26) на дуге $\alpha_k \beta_k$ на основании теоремы 2 получаем аналоги формул Сохоцкого в виде

$$2\pi i \Phi^\pm(t) = \pm i\pi \varphi(t) \int_{i\beta_k} \nu(\tau) d\tau + \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau) d\tau, \quad k = \overline{1, r}, \quad (27)$$

$$2\pi i \Phi^\pm(t) = \pm i\pi \varphi(t) \int_{\alpha_k t} \nu(\tau) d\tau + \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau) d\tau, \quad k = \overline{r+1, m}. \quad (28)$$

Вместо (27) и (28) можно брать равносильные формулы

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau) d\tau, \quad t \in L_0, \quad (29)$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \int_{\alpha_k \beta_k} \nu(\tau) \delta(\tau, t\beta_k) d\tau, \quad t \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{1, r}, \quad (30)$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \int_{\alpha_k \beta_k} \nu(\tau) \delta(\tau, \alpha_k t) d\tau, \quad t \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{r+1, m}. \quad (31)$$

Если на L_0 ввести функцию

$$\Delta(t, \tau) = \begin{cases} \delta(\tau, t\beta_k), & t, \tau \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{1, r}, \\ \delta(\tau, \alpha_k t), & t, \tau \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{r+1, m}, \\ 0, & t \in \alpha_k \beta_k, \quad \tau \in \alpha_j \beta_j, \quad k \neq j, \end{cases} \quad (32)$$

то вместо формул (29) — (31) можно записать

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau) d\tau, \quad (33)$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \int_{L_0} \nu(\tau) \Delta(t, \tau) d\tau. \quad (34)$$

Эти формулы справедливы во всех обыкновенных точках линии L_0 .

Интеграл (26) ограничен в точках β_1, \dots, β_r и $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$ и, самое большее, почти ограничен (логарифмически) в остальных узлах. Во всех точках множества $R \setminus L_0$ этот интеграл также ограничен. Квазиавтоморфность интеграла (26) характеризуется тем же соотношением (15) с циклическими постоянными

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^r \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \varphi(\zeta) \eta_k(\zeta) d\zeta \int_{\zeta \beta_j} \nu(\tau) d\tau + \\ + \sum_{j=r+1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \varphi(\zeta) \eta_k(\zeta) d\zeta \int_{\alpha_j \zeta} \nu(\tau) d\tau, \quad (35)$$

обладающими свойством (19).

3°. В дальнейшем надо знать, при каких условиях заданная квазиавтоморфная кусочно-голоморфная функция с линией скачков $L_0 = \bigcup_{j=1}^m \alpha_j \beta_j$ представима интегралом вида (26). Справедлива

Теорема 3. Для того чтобы ограниченная в $R \setminus L_0$ Γ -квазиавтоморфная кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, $\Phi(z_0) = 0$, с линией скачков $L_0 \subset R_0$ и циклическими постоянными $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ была представима в виде интеграла (26) с логарифмическим ядром и плотностью $\nu(t)$ из класса $H^(c_1, \dots, c_n)$, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$\psi(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{\varphi(t)} \quad (36)$$

1) была непрерывна на L_0 и обращалась в нуль в точках β_1, \dots, β_r и $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$;

2) была дифференцируема во всех обыкновенных точках линии L_0 ;

3) ее производная $\psi'(t)$ принадлежала классу $H^*(c_1, \dots, c_n)$;

4) чтобы циклические слагаемые Ω_k выражались через скачок по формулам

$$\Omega_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)] \eta_k(\tau) d\tau. \quad (37)$$

При выполнении этих условий плотностью интегрального представления (26) будет функция

$$\nu(t) = \mp \psi'(t), \quad t \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (38)$$

где верхний знак соответствует первым r дугам.

Доказательство. Если Γ -квазиавтоморфная кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$ представима в виде интеграла (26) с плотностью из класса H^* , то в силу формул (34), (35) ее циклические слагаемые действительно имеют значения (37), а функция

$$\psi(t) = \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{\varphi(t)} = \int_{L_0} \nu(\tau) \Delta(t, \tau) d\tau,$$

как интеграл с переменным пределом от интегрируемой функции на каждой дуге $\alpha_k \beta_k$, непрерывна во всех обыкновенных точках линии L_0 , обращается в нуль на концах β_1, \dots, β_r и $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$, дифференцируема и во всех обыкновенных точках линии L_0 производная ее $\psi'(t) = \mp \nu(t)$.

Обратно, пусть для функции $\Phi(z)$ выполнены все условия теоремы. Построим интеграл с логарифмическим ядром вида (26), взяв в качестве плотности функцию (38)

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau) F(z, \tau) d\tau. \quad (39)$$

Разность предельных значений такого интеграла в силу (34) равна

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \varphi(t) \int_{L_0} (\mp \psi'(\tau)) \Delta(t, \tau) d\tau = \varphi(t) \psi(t).$$

С другой стороны, из (36)

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \psi(t).$$

Значит, обе функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ имеют одинаковые скачки на L_0 и в силу формул (35) и (37) одинаковые циклические слагаемые, так что их разность $\Phi(z) - \Phi_1(z) \equiv 0$ как простая Γ -автоморфная функция, не имеющая особенностей на фундаментальном множестве R и обращающаяся в нуль в точке z_0 . Теорема доказана.

4°. Если под знаком интеграла (26) ядро $F(z, \tau)$ заменить ядром

$$\Psi(z, \tau) = \Psi_j(z, \tau) = \begin{cases} \int_{\alpha_j \tau} \varphi(\zeta) A(z, \zeta) d\zeta, & \tau \in \alpha_j \beta_j, j = \overline{1, r}, \\ \int_{\tau \beta_j} \varphi(\zeta) A(z, \zeta) d\zeta, & \tau \in \alpha_j \beta_j, j = \overline{r+1, m}, \end{cases} \quad (40)$$

где $A(z, \tau)$ есть Γ -автоморфный аналог ядра Коши, имеющий вид (5), то полученная таким образом функция

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \nu(\tau) \Psi_j(z, \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau) \Psi(z, \tau) d\tau \quad (41)$$

будет Γ -автоморфной кусочно-мероморфной функцией с линией скачков L_0 и с простыми полюсами a_1, \dots, a_ρ из области $R_0 \setminus L_0$. Интегралы (40) сходятся равномерно относительно z в любой ограниченной области $D \subset R \setminus L_0$, не содержащей точек a_1, \dots, a_ρ . Поэтому функция (41) непрерывно продолжима на все обыкновенные точки линии L_0 и для вычисления ее предельных значений остаются справедливыми формулы (27), (28) или, что все равно, формулы (33), (34), если в них заменить $F(t, \tau)$ на $\Psi(t, \tau)$.

Вычислим вычет функции (41) в точке a_k . Представив $A(z, \tau)$ в виде

$$A(z, \tau) = K(z, \tau) - \omega_1(\tau)K(z, a_1) - \dots - \omega_\rho(\tau)K(z, a_\rho), \quad (42)$$

видим, что функции $\omega_1(\tau), \dots, \omega_\rho(\tau)$ связаны с $\eta_1(\tau), \dots, \eta_\rho(\tau)$ системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\rho} \eta_k(a_j) \omega_j(\tau) = \eta_k(\tau), \quad k = \overline{1, \rho}, \quad (43)$$

с определителем $\Delta = \det \|\eta_k(a_j)\| \neq 0$. Значит, функции $\omega_1(\tau), \dots, \omega_\rho(\tau)$ также составляют наряду с $\eta_1(\tau), \dots, \eta_\rho(\tau)$ базис множества $\{\eta_k(\tau)\}$. Из представления (42) следует, что

$$\operatorname{res}_{z=a_k} A(z, \tau) = \omega_k(\tau). \quad (44)$$

Поэтому, опираясь на свойство равномерной сходимости интегралов (40), из (41) получим

$$\begin{aligned} V_k = \operatorname{res}_{a_k} \Phi_1(z) &= \sum_{j=1}^r \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha_j \tau} \varphi(\zeta) \omega_k(\zeta) d\zeta + \\ &+ \sum_{j=r+1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_j \beta_j} \nu(\tau) d\tau \int_{\tau \beta_j} \varphi(\zeta) \omega_k(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (45)$$

Если в каждом из входящих сюда интегралов поменять порядок интегрирования по формуле Дирихле и принять во внимание формулы (30) и (31), то формулу (45) можно переписать в виде

$$V_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} [\Phi^+(\zeta) - \Phi^-(\zeta)] \omega_k(\zeta) d\zeta, \quad k = \overline{1, \rho}. \quad (46)$$

Из формул (45) и (46) видно, что функции $\omega_1(\tau), \dots, \omega_\rho(\tau)$ при вычислении вычетов интеграла (41) в точках a_1, \dots, a_ρ

играют точно такую роль, как функции $\eta_1(\tau), \dots, \eta_p(\tau)$ при вычислении циклических слагаемых интеграла (26). Благодаря этой аналогии тем же путем, что и теорема 3, может быть доказана

Теорема 4. Для того чтобы заданная Γ -автоморфная функция $\Phi(z)$, $\Phi(z_0) = 0$, с линией скачков L_0 и голоморфная в $R \setminus L_0$ всюду, за исключением полюсов a_1, \dots, a_p ядра $A(z, \tau)$, в которых она имеет простые полюсы с вычетами V_1, \dots, V_p , была представима в виде интеграла (41) с логарифмическим ядром (40) и плотностью $\nu(t)$ из класса $H^*(c_1, \dots, c_n)$, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(z)$ удовлетворяла условиям 1) — 3) теоремы 3 и чтобы ее вычеты V_k выражались через разность предельных значений $\Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ по формулам (46).

Следствием теорем 3 и 4 является

Теорема 5. Γ -автоморфная кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, $\Phi(z_0) = 0$, с линией скачков $L_0 \subset R_0$, ограниченная в $R \setminus L_0$, тогда и только тогда представима в виде интеграла (26) или интеграла (41) с логарифмическим ядром и плотностью $\nu(t)$ из класса $H^*(c_1, \dots, c_n)$, если она удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 3 и если выполнены условия

$$\int_{L_0} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] \eta_k(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, p}, \quad (47)$$

или равносильные им условия

$$\int_{L_0} [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] \omega_k(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, p}. \quad (48)$$

§ 2. Дифференцирование некоторых особых интегралов

В дальнейшем нам придется при различных предположениях относительно плотности дифференцировать по параметру $t \in L_0$ автоморфные и квазиавтоморфные аналоги интеграла типа Коши, а также исследованные в § 1 интегралы с логарифмическими ядрами. Полученные здесь формулы будут обобщением известных формул дифференцирования обычного интеграла типа Коши [2, 4].

1°. При дифференцировании интеграла

$$\int_{a^3} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{a^3} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{a^3} \psi(\tau) B(t, \tau) d\tau$$

при условии $\psi'(\tau) \in H^*$ используем известную формулу дифференцирования первого интеграла и возможность дифференцирования по параметру под знаком второго. Получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = \frac{\psi(\beta)}{t-\beta} - \frac{\psi(\alpha)}{t-\alpha} + \int_{\alpha\beta} \frac{\psi'(\tau)}{\tau-t} d\tau + \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) B'_t(t, \tau) d\tau. \quad (49)$$

На основании первого представления (3)

$$B'_t(t, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma'_j(\tau)}{[\sigma_j(\tau) - t]^2}$$

и в силу равномерной сходимости этого ряда всюду в области R_0 , в том числе на дуге $\alpha\beta$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) B'_t(t, \tau) d\tau &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \frac{\sigma'_j(\tau) d\tau}{[\sigma_j(\tau) - t]^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ - \frac{\psi(\tau)}{\sigma_j(\tau) - t} \Big|_{\tau=\alpha}^{\tau=\beta} + \int_{\alpha\beta} \frac{\psi'(\tau) d\tau}{\sigma_j(\tau) - t} \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\psi(\beta)}{t - \sigma_j(\beta)} - \frac{\psi(\alpha)}{t - \sigma_j(\alpha)} - \int_{\alpha\beta} \frac{\psi'(\tau) d\tau}{t - \sigma_j(\tau)} \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \psi(\beta) \left[\frac{1}{t - \sigma_j(\beta)} - \frac{1}{t - \sigma_j(z_0)} \right] - \psi(\alpha) \left[\frac{1}{t - \sigma_j(\alpha)} - \frac{1}{t - \sigma_j(z_0)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) \left[\frac{1}{t - \sigma_j(\tau)} - \frac{1}{t - \sigma_j(z_0)} \right] d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (49), убеждаемся, что справедлива

Теорема 6. Если на гладкой разомкнутой дуге $\alpha\beta$ имеем $\psi(t) \in H$, $\psi'(t) \in H^(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$, то во всех обыкновенных точках этой дуги имеет место формула*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau &= \psi(\beta) K(\beta, t) - \psi(\alpha) K(\alpha, t) - \\ &\quad - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, t) d\tau. \end{aligned} \quad (50)$$

Замечание 3. Нетрудно убедиться, что при условиях $\psi(t) \in H_0(c_1, \dots, c_n)$, $\psi'(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$ вместо формулы (50) имеет место формула

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = \psi(\beta) K(\beta, t) - \psi(\alpha) K(\alpha, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \Delta_j K(c_j, t) - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, t) d\tau, \quad (51)$$

$$\Delta_j = \psi(c_j - 0) - \psi(c_j + 0),$$

а при условиях $\psi(t, \tau) \in H_0$, $\psi'_t(t, \tau) \in H^*$, $\psi'_\tau(t, \tau) \in H^*$

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = \psi(t, \beta) K(\beta, t) - \psi(t, \alpha) K(\alpha, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \Delta_j(t) K(c_j, t) - \int_{\alpha\beta} \{\psi'_t(t, \tau) + \psi'_\tau(t, \tau)\} K(\tau, t) d\tau. \quad (52)$$

2°. При дифференцировании интеграла с логарифмическим ядром вида (9) удобнее всего предварительно выразить его через главное значение интеграла с ядром $K(t, \tau)$. Для этого на основании (10) запишем этот интеграл в таком виде:

$$\int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) K(t, \zeta) d\zeta = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{\zeta - t} +$$

$$+ \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) B(t, \zeta) d\zeta \quad (53)$$

и в каждом из этих повторных интегралов поменяем порядок интегрирования. Ко второму интегралу, очевидно, применима формула перестановки Дирихле. Покажем, что она применима и к первому интегралу.

В первом интеграле значение внутреннего определяется по любой из формул

$$\int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(t)}{\zeta - t} d\zeta \mp i\pi\varphi(t) \delta(t, \alpha\tau) + \varphi(t) \ln \frac{\tau - t^\pm}{\alpha - t^\pm},$$

$$(54)$$

где $\delta(t, \alpha\tau) = \{1, t \in \alpha\tau; 0, t \notin \alpha\tau\}$. Поэтому

$$\int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(t)}{\zeta - t} d\zeta \mp$$

$$\mp i\pi\varphi(t) \int_{\alpha\beta} \delta(t, \alpha\tau) \nu(\tau) d\tau + \varphi(t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \ln \frac{\tau - t^\pm}{\alpha - t^\pm} d\tau =$$

$$= \int_{\alpha\beta} \frac{\varphi(\zeta) - \varphi(t)}{\zeta - t} d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau \mp$$

$$\mp i\pi\varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau) d\tau + \varphi(t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \ln \frac{\tau - t^{\pm}}{\alpha - t^{\pm}} d\tau.$$

Но на основании известной формулы интегрирования по частям [5, с. 32—33; 6, с. 33—36], примененной к главному значению интеграла типа Коши с плотностью $\int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau$, при нашем понимании $\ln(\tau - t)$ имеем

$$\int_{\alpha\beta} \frac{\int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau}{\zeta - t} d\zeta = \pm i\pi \int_{t\beta} \nu(\tau) d\tau + \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \ln \frac{\tau - t^{\pm}}{\alpha - t^{\pm}} d\tau. \quad (55)$$

Значит, к первому интегралу в правой части равенства (53) формула перестановки Дирихле действительно применима

$$\int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \int_{\alpha\beta} \frac{\varphi(\zeta) \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau}{\zeta - t} d\zeta, \quad (56)$$

и нами установлена

Теорема 7. Если на гладкой дуге $\varphi(\zeta) \in H$ и $\nu(\tau) \in H^(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$, то во всех точках дуги, отличных от концов, имеет место формула перестановки*

$$\int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \int_{\alpha\tau} \varphi(\zeta) K(t, \zeta) d\zeta = \int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) K(t, \zeta) d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau. \quad (57)$$

Формулы (57) и (56) можно рассматривать и как формулы интегрирования по частям интегралов типа Коши в их правых частях. Подтверждением служит известная формула (55), получающаяся из (57) как частный случай, когда группа Γ является тождественной и $\varphi(\zeta) \equiv 1$; при этом спуске не надо только забывать, что в силу формулы (54) в данном случае

$$\int_{\alpha\tau} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \mp i\pi\delta_+(t, \alpha\tau) + \varphi'(t) \ln \frac{\tau - t^{\pm}}{\alpha - t^{\pm}}. \quad (58)$$

На основании равенства (57) производную от интеграла (53) с Γ -квазиавтоморфным логарифмическим ядром можно вычислить с помощью формулы (50), так как при $\nu(t) \in H_{\pm}^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$ плотность $\varphi(t) \int_{t\beta} \nu(\tau) d\tau$ интеграла

в правой части формулы (57) принадлежит классу H . Предполагая $\varphi'(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$, после применения формулы (50) и повторного применения формулы (57) получим

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) K(t, \zeta) d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau = \\
& = -\varphi(\alpha) K(\alpha, t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau - \int_{\alpha\beta} \left[\varphi(\zeta) \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau \right]' K(\zeta, t) d\zeta = \\
& = -\varphi(\alpha) K(\alpha, t) \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau + \int_{\alpha\beta} \varphi(\zeta) \nu(\zeta) K_\zeta(\zeta, t) d\zeta - \\
& \quad - \int_{\alpha\beta} \varphi'(\zeta) K(\zeta, t) d\zeta \int_{\zeta\beta} \nu(\tau) d\tau = \\
& = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) d\tau \left\{ -\varphi(\alpha) K(\alpha, t) + \varphi(\tau) K(\tau, t) - \right. \\
& \quad \left. - \int_{\alpha\tau} \varphi'(\zeta) K(\zeta, t) d\zeta \right\} = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \frac{\partial}{\partial t} F_\alpha(t, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Этим доказана

Теорема 8. На гладкой дуге $\alpha\beta \subset R_0$ при условиях

$$\nu(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta), \quad \varphi'(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$$

во всех точках $t \in \alpha\beta$, отличных от концов, справедлива формула

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) F_\alpha(t, \tau) d\tau = \int_{\alpha\beta} \nu(\tau) \frac{\partial}{\partial t} F_\alpha(t, \tau) d\tau. \quad (59)$$

3°. Формулы дифференцирования автоморфного аналога интеграла типа Коши с ядром $A(t, \tau)$ более громоздки. Чтобы получить аналог формулы (50), на основании представления (42) записываем

$$\int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau) d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau - \sum_{k=1}^p K(t, a_k) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \omega_k(\tau) d\tau$$

и дифференцированием с применением формулы (50) получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau) d\tau = \psi(\beta) K(\beta, t) - \psi(\alpha) K(\alpha, t) - \\
& \quad - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, t) d\tau - \sum_{k=1}^p \frac{d}{dt} K(t, a_k) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \omega_k(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

В интеграле с плотностью $\psi'(\tau)$ производим элементарные преобразования

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, t) d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t) d\tau + \\
& + \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) K(\tau, a_k) d\tau = \\
& = \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t) d\tau + \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \psi(\beta) K(\beta, a_k) - \\
& - \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \psi(\alpha) K(\alpha, a_k) - \sum_{k=1}^{\rho} \omega_k(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \frac{d}{d\tau} K(\tau, a_k) d\tau
\end{aligned}$$

и убеждаемся, что имеет место

Теорема 9. *Если на гладкой разомкнутой дуге $\alpha\beta \subset R_0$ имеем $\psi(t) \in H$ и $\psi'(t) \in H^*(\alpha, c_1, \dots, c_n, \beta)$, то при всех $t \in \alpha\beta$, отличных от концов, имеет место формула*

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau) d\tau = \psi(\beta) A(\beta, t) - \\
& - \psi(\alpha) A(\alpha, t) - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t) d\tau + \\
& + \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \left\{ \sum_{k=1}^{\rho} \left[\omega_k(t) \frac{d}{d\tau} K(\tau, a_k) - \omega_k(\tau) \frac{d}{dt} K(t, a_k) \right] \right\} d\tau. \quad (60)
\end{aligned}$$

В частном случае, когда $\rho=0$, формула (60) упрощается

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) A(t, \tau) d\tau = \psi(\beta) A(\beta, t) - \\
& - \psi(\alpha) A(\alpha, t) - \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) A(\tau, t) d\tau. \quad (61)
\end{aligned}$$

Род $\rho=0$ имеют фундаментальные области всех конечных групп и всех бесконечных элементарных, за исключением двоякопериодической, для которой $\rho=1$. Все конечные группы, в том числе состоящие только из целых преобразований (все $\gamma_k=0$), можно отнести к рассматриваемому здесь 1 классу, так как само определение этого класса (условие (2)) допускает наличие в группе конечного числа целых преобразований. Убедиться в справедливости формулы (61) в случае любой конечной группы можно и непосредственно, опираясь на функциональную структуру ядра $A(t, \tau)$. Известно [6, с. 181], что для конечных групп

$$\begin{aligned}
 A(z, \tau) &= \sum_{j=0}^m \left[\frac{1}{\sigma_j(\tau) - z} - \frac{1}{\sigma_j(\tau) - z_0} \right] \sigma_j'(\tau) = \\
 &= \sum_{j=0}^m \left[\frac{1}{\tau - \sigma_j(z)} - \frac{1}{\tau - \sigma_j(z_0)} \right], \quad z_0 \in R_0 \setminus \alpha\beta. \quad (62)
 \end{aligned}$$

Общий член каждой из этих сумм совпадает с общим членом соответствующего ряда (3), определяющего ядро $K(z, \tau)$. Значит, все вычисления, проделанные при выводе формулы (50), останутся без изменения в случае автоморфного ядра (62) и приведут к формуле (61).

Бесконечные элементарные группы, состоящие целиком из целых преобразований или содержащие подгруппу из таких преобразований, к 1 классу не относятся, но для них выражение ядра $A(z, \tau)$ через преобразования группы известно и справедливость формулы (61) проверяется по той же схеме, как в случае конечных групп. Иногда вычисления при проверке упрощаются за счет специальных свойств $A(z, \tau)$.

Возьмем в качестве примера однопериодическую с периодом 2π группу. Для нее [6, с. 200] ядро

$$A(z, \tau) = \frac{1}{\tau - z} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\tau - z + 2\pi k} - \frac{1}{2\pi k} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2}$$

в силу свойства нечетности котангенса обладает свойством $A(z, \tau) = -A(\tau, z)$ и, следовательно, $A_t'(t, \tau) = -A_\tau'(\tau, t)$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau &= \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \\
 + \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \left[A(t, \tau) - \frac{1}{\tau - t} \right]'_t d\tau &= \frac{\psi(\alpha)}{\alpha - t} - \frac{\psi(\beta)}{\beta - t} + \\
 + \int_{\alpha\beta} \frac{\psi'(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \left[A(\tau, t) - \frac{1}{\tau - t} \right]'_\tau d\tau.
 \end{aligned}$$

После интегрирования по частям в последнем интеграле получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau &= \psi(\beta) \operatorname{ctg} \frac{t - \beta}{2} - \\
 - \psi(\alpha) \operatorname{ctg} \frac{t - \alpha}{2} + \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Отметим кстати, что в случае двоякопериодической группы с основными периодами h_1 и h_2 квазипериодическим ядром является

$$K(z, \tau) = \zeta(\tau - z), \quad \zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{(h)}' \left\{ \frac{1}{z-h} + \frac{1}{h} + \frac{z}{h^2} \right\}, \quad (64)$$

$$h = m_1 h_1 + m_2 h_2.$$

Циклические слагаемые этого ядра постоянны и обычно выражаются через две из них, соответствующие порождающим преобразованиям группы $z + h_1$ и $z + h_2$ в виде линейной комбинации с целочисленными коэффициентами, так что

$$\zeta(z + h) = \zeta(z) + \eta, \quad \eta = m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2.$$

Но среди постоянных η_1, η_2 одна через другую может быть выражена на основании соотношения Лежандра $h_1 \eta_2 - h_2 \eta_1 = 2\pi i$. Поэтому здесь $\rho = 1$. Из нечетности функции $\zeta(z)$ следует, что для ядра (64) имеет место соотношение $K(z, \tau) = -K(\tau, z)$ и, как следствие, соотношение $K'_t(t, \tau) = -K'_\tau(\tau, t)$. Поэтому формула

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) \zeta(\tau - t) d\tau &= \psi(\beta) \zeta(t - \beta) - \psi(\alpha) \zeta(t - \alpha) + \\ &+ \int_{\alpha\beta} \psi'(\tau) \zeta(\tau - t) d\tau, \end{aligned} \quad (65)$$

являющаяся аналогом формулы (50), получается путем тех же вычислений, что и формула (63).

4°. Исследуем возможность дифференцирования квазиавтоморфного аналога интеграла типа Коши в более общем случае, когда плотность $\psi(\tau) \in$ классу H^* или H^*_e , а в точках, отличных от отмеченных, дифференцируема.

Пусть $\psi(\tau) \in H^*(c_1, \dots, c_n)$, при этом к числу отмеченных точек для простоты рассуждений отнесем и концы дуги $\alpha\beta$. В дальнейшем нам понадобится простая автоморфная функция $Q(z)$, для которой все точки c_1, \dots, c_n являются простыми нулями, а полюсы не лежат на дуге $\alpha\beta$. Такую функцию можно взять в виде

$$Q(z) = \exp \sum_{q=1}^N \int_{z_q}^{c_q} K(z, \tau) d\tau, \quad (66)$$

выбрав точки $z_q \in R \setminus \alpha\beta$ так, чтобы

$$\sum_{q=1}^N \int_{z_q}^{t_q} \eta_j(\tau) d\tau = 2\pi i p_j, \quad j = \overline{1, \rho}, \quad (67)$$

где p_j — любые целые числа. При $N \geq \rho$ такие точки z_1, \dots, z_N всегда существуют и являются решением классической проблемы обращения Якоби. Поэтому при $n \geq \rho$ в равенствах (66) и (67) будем брать $N = n$, а при $n < \rho$ положим $N = \rho$. В последнем случае у функции $Q(z)$ простые нули, кроме точек $c_1, \dots, c_n \in \alpha\beta$, будут еще в точках c_{n+1}, \dots, c_ρ ; эти точки на $R_0 \setminus \alpha\beta$ можно взять произвольными и лишь после их выбора решать проблему обращения (67).

Рассмотрим произведение

$$Q(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K_1(t, \tau) d\tau. \quad (68)$$

Здесь ядро

$$K_1(t, \tau) = \frac{Q(t)}{Q(\tau)} K(t, \tau)$$

по переменному τ есть Γ -автоморфная форма измерения — 2 с простыми полюсами t, c_1, \dots, c_N , которую всегда можно представить в виде.

$$K_1(t, \tau) = K(t, \tau) + \sum_{q=1}^N \xi_q(t) K(c_q, \tau), \quad (69)$$

где $\xi_q(t)$ — вполне определенные непрерывно дифференцируемые на $\alpha\beta$ функции; в случае надобности их можно определить из условий $K_1(t, z_q) = 0$, $q = \overline{1, N}$. На основании разложения (69) равенство (68) можно записать в таком виде:

$$Q(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K(t, \tau) d\tau + \\ + \sum_{q=1}^N \xi_q(t) \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K(c_q, \tau) d\tau.$$

Так как $\psi_1(\tau) = \psi(\tau) Q(\tau) \in H$ и $\psi_1(c_q) = 0$, то дифференцированием этого равенства по t в силу формулы (50) получим

$$Q(t) \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau = -Q'(t) \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau - \\ - \int_{\alpha\beta} \psi_1'(\tau) K(\tau, t) d\tau + \sum_{q=1}^N \xi_q'(t) \int_{\alpha\beta} \psi_1(\tau) K(c_q, \tau) d\tau. \quad (70)$$

Затем из разложения (69) находим

$$\sum_{q=1}^N \xi'_q(t) K(c_q, \tau) = \frac{Q'(t)}{Q(t)} K(t, \tau) + \frac{Q(t) - Q(\tau)}{Q(\tau)} K'_t(t, \tau),$$

что позволяет записать равенство (70) в такой форме:

$$\begin{aligned} Q(t) \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) K(t, \tau) d\tau &= - \int_{\alpha\beta} [\psi(\tau) Q(\tau)]' K(\tau, t) d\tau + \\ &+ \int_{\alpha\beta} \psi(\tau) [Q(t) - Q(\tau)] K'_t(t, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (71)$$

Нами доказана

Теорема 10. Пусть на гладкой дуге $\alpha\beta \in R_0$ функция $\psi(\tau)$ принадлежит классу H^* или H^*_ε с отмеченными точками c_1, \dots, c_n , к числу которых относятся и концы дуги $\alpha\beta$, и пусть к этому же классу H^* или H^*_ε принадлежит $[\psi(\tau) Q(\tau)]'$, где $Q(z)$ есть простая автоморфная функция вида (66). Тогда для всех точек $t \in \alpha\beta$, отличных от c_1, \dots, c_n , имеет место формула дифференцирования (71).

Формула (71) остается по форме той же самой и в случае конечных групп; надо помнить лишь, что в этом случае ядро $K(z, \tau) \equiv A(z, \tau)$ является автоморфным и определяется формулой (62), а функцию $Q(z)$ можно записать в виде

$$Q(z) = \prod_{q=1}^n [f(z) - f(c_q)], \quad (72)$$

где $f(z)$ — основной инвариант группы с единственным простым полюсом в точке z_0 , через который ядро (62) выражается следующим образом [6, с. 184]:

$$A(z, \tau) = \frac{f'(\tau)}{f(\tau) - f(z)}. \quad (73)$$

Когда плотность интеграла в равенстве (68) зависит еще от параметра t , формула дифференцирования в условиях теоремы 10 несколько усложняется. В данном случае на основании разложения (69) имеем равенство

$$\begin{aligned} Q(t) \int_{\alpha\beta} \psi(t, \tau) K(t, \tau) d\tau &= \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) K(t, \tau) d\tau + \\ &+ \sum_{q=1}^N \xi'_q(t) \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) K(c_q, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $\psi_1(t, \tau) = Q(\tau) \psi(t, \tau)$. Из него дифференцированием получаем

$$\begin{aligned}
& Q(t) \int_{\alpha\beta} \frac{d}{dt} \psi(t, \tau) K(t, \tau) d\tau + Q'(t) \int_{\alpha\beta} \psi(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = \\
& = \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) K(t, \tau) d\tau + \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) \sum_{q=1}^N \xi'_q(t) K(c_q, \tau) d\tau + \\
& \quad + \int_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t, \tau) \sum_{q=1}^N \xi_q(t) K(c_q, \tau) d\tau. \quad (74)
\end{aligned}$$

Так как $\psi_1(t, \tau)$ обращается в нуль при $\tau = c_q$, $q = \overline{1, n}$, то по формуле (52) находим

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi_1(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = - \int_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1(t, \tau) \right\} K(\tau, t) d\tau.$$

На основании этой формулы и равенства (69) из соотношения (74) получим

$$\begin{aligned}
& Q(t) \frac{d}{dt} \int_{\alpha\beta} \psi(t, \tau) K(t, \tau) d\tau = \\
& = \int_{\alpha\beta} [Q(t) - Q(\tau)] \frac{\partial}{\partial t} \{ \psi(t, \tau) K(t, \tau) \} d\tau - \\
& - \int_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_1(t, \tau) \right\} K(\tau, t) d\tau. \quad (75)
\end{aligned}$$

Значит справедлива

Теорема 11. Если на гладкой разомкнутой дуге $\alpha\beta$ функция $\psi(t, \tau)$ по каждому из переменных принадлежит классу H^* или H_*^* с отмеченными точками c_1, \dots, c_n , в число которых входят концы дуги $\alpha\beta$, и этим же классам принадлежат произведения $Q(t)\psi'_t(t, \tau)$ и $Q(\tau)\psi'_\tau(t, \tau)$, то при всех $t \in \alpha\beta$, отличных от точек c_1, \dots, c_n , справедлива формула (75).

§ 3. Интегральные уравнения с логарифмическими ядрами на кусочно-гладких линиях

1°. Пусть L_0 есть кусочно-гладкая линия, состоящая из m гладких разомкнутых дуг $\alpha_j\beta_j$, не имеющих общих точек, кроме, может быть, концов. Рассмотрим заданное на $L_0 \subset R_0$ интегральное уравнение с Γ -квазиавтоморфным ядром

$$C(t) \int_{L_0} \nu(\tau) \Delta(t, \tau) d\tau + \frac{D(t)}{\pi i} \int_{L_0} \nu(\tau) F(t, \tau) d\tau = f(t), \quad (76)$$

где характеристическая функция $\Delta(t, \tau)$ определяется равенствами (32), а ядро $F(z, \tau)$ формулами (24), (25) и соотношениями $F(z, \tau) = F_j(z, \tau)$, $\tau \in \alpha_j \beta_j$. Предположим, что коэффициенты уравнения $C(t)$, $D(t)$ и правая часть $f(t)$ удовлетворяют условию H_0 на L_0 , допуская разрывы первого рода в узлах линии L_0 и в конечном числе ее обыкновенных точек. Решения уравнения (76) будем искать в классе $H^*(c_1, \dots, c_n)$, относя к отмеченным точкам c_1, \dots, c_n , вблизи которых у $\nu(t)$ допустимы интегрируемые особенности, все узлы линии L_0 и точки разрыва коэффициентов.

Введем вспомогательную функцию $\Phi(z)$ в виде интеграла (26) и, учитывая формулы (33) и (34), уравнение (76) запишем в виде

$$C(t) [\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] + \varphi(t) D(t) [\Phi^+(t) + \Phi^-(t)] = \varphi(t) f(t). \quad (77)$$

При условии, что всюду на L_0

$$\Omega(t) = C^2(t) - \varphi^2(t) D^2(t) \neq 0, \quad (78)$$

соотношение (77) можно разрешить относительно $\Phi^+(t)$ и получить краевое условие задачи Римана в обычной форме

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0 \setminus \{c_1, \dots, c_n\}, \quad (79)$$

$$G(t) = \frac{C(t) - \varphi(t) D(t)}{C(t) + \varphi(t) D(t)}, \quad g(t) = \frac{\varphi(t) f(t)}{C(t) + \varphi(t) D(t)}. \quad (80)$$

Очевидно, $G(t) \in H_0(c_1, \dots, c_n)$ и в силу предположения (78) $G(t) \neq 0$ всюду на L_0 .

Формула (26) всякому решению $\nu(t) \in H^*$ уравнения (76) ставит в соответствие Γ -квазиавтоморфное решение $\Phi(z)$ задачи Римана (79), ограниченное в $R \setminus L_0$, удовлетворяющее условию $\Phi(z_0) = 0$ и ограниченное или почти ограниченное в узлах линии L_0 . С другой стороны, если нам известно решение задачи Римана (77) с указанными свойствами и представимые в виде интеграла с Γ -квазиавтоморфным ядром $F(z, \tau)$, то плотность этого представления в силу теоремы 3 равная

$$\nu(t) = \mp \frac{d}{dt} \frac{\Phi^+(t) - \Phi^-(t)}{\varphi(t)}, \quad t \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (81)$$

где верхний знак соответствует первым r дугам $\alpha_k \beta_k$, будет решением уравнения (76), что сразу следует из краевого условия (79) и формул (27) и (28), имеющих место для кусочно-голоморфных функций вида (26). Этим установлена

Теорема 12. Интегральные уравнения (76) и краевая задача Римана (79) эквивалентны в том смысле, что между решениями уравнения из класса H^* и решениями задачи Римана, представимыми в виде интеграла с логарифмическим ядром и плотностью из класса H^* , существует взаимно однозначное соответствие. При этом плотность интегрального представления и решение интегрального уравнения совпадают.

Значит, чтобы получить все решения интегрального уравнения (76) класса $H^*(c_1, \dots, c_n)$, надо найти все решения краевой задачи (79), ограниченные в $R \setminus L_0$ и представимые в виде интеграла с Γ -квазиавтоморфным логарифмическим ядром. Эти интегралы обращаются в нуль в точке z_0 и ограничены или почти ограничены в узлах линии интегрирования. Поэтому надо построить сначала общее решение задачи (79) с постоянными циклическими слагаемыми Ω_k , исчезающее в точке z_0 и принадлежащее самому узкому классу h_q по Н. И. Мусхелишвили, так как при определении классов h_q требования ограниченности и почти ограниченности равносильны [7, с. 327]. Затем из этого общего решения нужно выделить те решения, которые удовлетворяют условиям теоремы 3. Каждому такому решению задачи (79) по формуле (81) соответствует решение уравнения (76) класса $H^*(c_1, \dots, c_n)$.

2°. Циклические слагаемые Ω_k искомой функции $\Phi(z)$, как следует из ее интегрального представления (26), имеют вид (35) или, что все равно, вид (37) и образуют ρ -мерное векторное пространство, в котором имеют место соотношения (19). Считая их пока известными, введем вспомогательную функцию

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) - \sum_{j=1}^{\rho} V_j K(z, a_j), \quad (82)$$

где точки $a_1, \dots, a_{\rho} \in R_0 \setminus L_0$ выберем так, чтобы $\det \|\eta_k(a_j)\| \neq 0$, что возможно [1]. На основании этого условия постоянные V_1, \dots, V_{ρ} в (82) можно подобрать так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\rho} V_j \eta_k(a_j) = \Omega_k, \quad k = \overline{1, \rho}. \quad (83)$$

Тогда функция $\Phi_1(z)$ будет Γ -автоморфной, ограниченной всюду в $R \setminus L_0$, за исключением точек a_1, \dots, a_{ρ} , где у нее простые полюсы с вычетами V_1, \dots, V_{ρ} . Как видно из (82), при переходе через L_0 функция $\Phi_1(z)$ претерпевает разрыв с разностью предельных значений

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \quad (84)$$

Если в равенство (82) вместо $\Phi(z)$ подставить интеграл (26), под знаком которого ядро $K(z, \tau)$ выразить по формуле (42) через ядро $A(z, \tau)$ с простыми полюсами в выбранных нами точках a_1, \dots, a_ρ , то в силу равенств (83) суммы, содержащие функции $K(z, a_j)$, $j = \overline{1, \rho}$, взаимно уничтожатся и для автоморфной функции $\Phi_1(z)$ получится интегральное представление вида (41). Теперь подставим $\Phi(z)$ из (82) в краевое условие (79). Для функции $\Phi_1(z)$ получим краевое условие задачи Римана

$$\Phi_1^+(t) = G(t) \Phi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in L_0 \setminus \{c_1, \dots, c_n\}, \quad (85)$$

с тем же коэффициентом $G(t)$, но с новым свободным членом

$$g_1(t) = [G(t) - 1] \sum_{j=1}^{\rho} V_j K(t, a_j) + g(t). \quad (86)$$

Поведение интегралов (26) и (41) в узлах линии L_0 одинаково. Значит, справедлива

Теорема 13. *Отыскание всех решений интегрального уравнения (76) класса $H^*(c_1, \dots, c_n)$ равносильно построению всех Γ -автоморфных решений задачи Римана (85) класса $h_n = h(c_1, \dots, c_n)$ с простыми полюсами a_1, \dots, a_ρ и представимых интегралом (41).*

3°. Схема построения общего решения задачи Римана в различных классах автоморфных функций известна [8, 9]. В отличие от указанных работ мы запишем здесь общее решение интересующей нас задачи (85) через интегралы с ядром $K(z, \tau)$, а не с ядром $A(z, \tau)$, так как на последнем этапе вычислений при определении решения исходного уравнения (76) по формуле (81) надо осуществить дифференцирование функции с интегралами в смысле главного значения, а в § 2 мы видели, что формулы дифференцирования для интегралов с ядрами $K(z, \tau)$ проще.

На всех дугах $\alpha_k \beta_k$ линии L_0 выберем непрерывно изменяющееся значение одной из ветвей функции $\ln G(t)$ и для всех узлов вычислим числа

$$\lambda_j + i\mu_j = - \sum_{(k)} \frac{\ln G(\alpha_k)}{2\pi i} + \sum_{(k)} \frac{\ln G(\beta_k)}{2\pi i}, \quad (87)$$

где суммирование ведется по всем концам α_k и β_k , образующим рассматриваемый узел c_j . Для узлов, не являющихся узлами в геометрическом смысле, а точками разрыва коэффициента $G(t)$ или угловыми точками линии L_0 ,

$$\lambda_j + i\mu_j = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(c_j - 0) - \ln G(c_j + 0)]. \quad (88)$$

Разделяем все узлы на особенные, которым соответствуют целые или равные нулю числа λ_j в (87) и (88), и неособенные в противном случае. Допустим, что среди всех узлов c_1, \dots, c_n первые p неособенные, остальные—особенные ($p \leq n$). Значит, нам надо построить общее решение задачи (85) класса h_p . Полагая

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) K(z, \tau) d\tau \quad (89)$$

и принимая во внимание (10), заключаем, что в окрестности любого узла c_j имеет место представление

$$\gamma(z) = (\lambda_j + i\mu_j) \ln(z - c_j) + \gamma_1(z).$$

Значит, во всех неособенных узлах и в особенных с $\lambda_j \neq 0$ функция $\exp \gamma(z)$ обращается в нуль или в бесконечность. Возьмем функции

$$E(z, \theta_0, c_j) = \exp \int_{c_j}^{\theta_0} K(z, \tau) d\tau \quad (90)$$

с нулем первого порядка в точке $\theta_0 \in R_0 \setminus L_0$, отличной от точек a_1, \dots, a_p и z_0 . Целые числа x_j в произведении

$$X(z) = \exp \gamma(z) \prod_{j=1}^n E^{x_j}(z, \theta_0, c_j) \prod_{k=1}^p E(z, \theta_k, \theta_0) \quad (91)$$

подберем так, чтобы оно принадлежало классу h_p :

$$0 < \lambda_j - x_j < 1, \quad j = \overline{1, p}; \quad \lambda_j - x_j = 0, \quad j = \overline{p+1, n}. \quad (92)$$

Во втором произведении точки $\theta_1, \dots, \theta_p$ подбираем так, чтобы функция (91) была автоморфной. Это дает для определения точек $\theta_1, \dots, \theta_p$ проблему обращения Якоби

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \int_{\theta_0}^{\theta_k} \eta_j(\tau) d\tau &= 2\pi i p_j - \sum_{q=1}^n x_q \int_{c_q}^{\theta_0} \eta_j(\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) \eta_j(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, p}. \end{aligned} \quad (93)$$

Целыми числами p_j можно распорядиться так, чтобы решением этой проблемы были точки, не лежащие на L_0 и не совпадающие с точками a_1, \dots, a_ρ и z_0 . Функция $X(z)$, удовлетворяющая однородному граничному условию $X^+(t) = G(t)X^-(t)$, и будет в классе h_p канонической. На фундаментальном множестве $X(z)$ имеет порядок $(-x)$, $x = x_1 + \dots + x_n$; в точках $\theta_1, \dots, \theta_\rho$ у нее ρ нулей, а в точке θ_0 при $x \geq \rho$ нуль порядка $x - \rho$ и полюс порядка $\rho - x$ при $x < \rho$.

При помощи $X(z)$ краевое условие (85) приводится к виду

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi_1^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g_1(t)}{X^+(t)}$$

и остается решить задачу о скачке для функции $\Phi_1(z)/X(z)$, обращающейся в нуль в точке z_0 , голоморфной и ограниченной в $R \setminus L_0$ всюду, кроме точек a_1, \dots, a_ρ и $\theta_1, \dots, \theta_\rho$, в которых должны быть простые полюсы, и точки θ_0 , где при $x > \rho$ должен быть полюс порядка $x - \rho$. Таким путем получим общее решение задачи (85) класса h_p с нужными свойствами в таком виде:

$$\Phi_1(z) = X(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(z, \tau) d\tau + W(z) \right\}, \quad (94)$$

$$W(z) = \sum_{j=1}^{\rho} P_j K(z, a_j) + \sum_{k=1}^{\rho} M_k K(z, \theta_k) + \sum_{q=1}^{x-\rho} N_q \xi_q(z, \theta_0),$$

где через $\xi_q(z, \theta_0)$ обозначена квазиавтоморфная функция

$$\xi_q(z, \theta_0) = (z - \theta_0)^{-q} + \sum_{j=1}^{\infty} \{ [\sigma_j(z) - \theta_0]^{-q} - [\sigma_j(z_0) - \theta_0]^{-q} \} \quad (95)$$

с циклическими постоянными

$$\eta_{qk} = -\eta_k^{(q-1)}(\theta_0)/(q-1)!$$

и с полюсом порядка q в точке θ_0 . К формуле (94) надо присоединить еще равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\rho} P_l \eta_j(a_l) + \sum_{k=1}^{\rho} M_k \eta_j(\theta_k) + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} \eta_j(\tau) d\tau + \sum_{q=1}^{x-\rho} N_q \eta_{qj} = 0, \quad j = \overline{1, \rho}, \end{aligned} \quad (96)$$

обеспечивающие автоморфность функции (94), а в случае $x < \rho$ еще равенства

$$\frac{d^j}{dz^j} \left[\frac{\Phi_1(z)}{X(z)} \right]_{z=\theta_0} = 0, \quad j=0, \quad \rho - \kappa - 1, \quad (97)$$

обеспечивающие ее голоморфность в точке θ_0 .

Из (94) легко находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) &= g_1(t) \frac{1+G(t)}{2G(t)} + \\ &+ \frac{G(t)-1}{G(t)} X^+(t) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau + W(t) \right\}. \end{aligned} \quad (98)$$

Предельное значение $X^+(t)$ вычисляется из формулы (91). Легко убедиться, что

$$X^+(t) = \tilde{X}(t) \prod_{j=1}^n (t - c_j)^{\lambda_j - \kappa_j + i\mu_j}, \quad (99)$$

где $\tilde{X}(t)$ — функция класса H_0 , не обращающаяся в нуль нигде на L_0 .

На основании (10) также, как для обычной задачи Римана [7, с. 320], легко показать, что решение (94) задачи (85) ограничено вблизи особых, которым соответствуют числа $\mu_j \neq 0$, и почти ограничено (логарифмически) вблизи особых узлов, для которых $\mu_j = 0$. Вблизи всех неособенных концов, определяющих класс h_p , решение (94) также ограничено.

Займемся исследованием разности $\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$ вблизи этих узлов и прежде всего в случае ограниченности $\Phi_1(z)$ вблизи узла c_j найдем значение разности (98) в этом узле и определим, при каких условиях эти значения равны нулю.

4°. Рассмотрим сначала случай, когда c_j — конец линии L_0 , то есть конец только одной дуги, входящей в L_0 .

Если c_j — неособенный конец, то в его окрестности, как следует из (99),

$$X^+(t) = \omega(t) (t - c_j)^{\sigma_j}, \quad \sigma_j = \lambda_j - \kappa_j + i\mu_j, \quad 0 < \lambda_j - \kappa_j < 1, \quad (100)$$

где принадлежащая классу H_0 функция $\omega(t)$ не обращается в нуль в c_j . Используя представление интеграла типа Коши в окрестности конца линии интегрирования, на котором у плотности степенная особенность [7, с. 32], имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \pm \frac{1}{2i} \frac{g_1(c_j)}{\omega(c_j)} \frac{\operatorname{ctg} \pi \sigma_j}{(t - c_j)^{\sigma_j}} + \Phi^*(t), \quad (101)$$

где функция $\Phi^*(t)$ в c_j может иметь степенную же особенность, но порядка меньшего, чем $\lambda_j - \alpha_j$; здесь и далее верхний знак соответствует случаю $c_j = \alpha_k$, нижний — $c_j = \beta_k$. Значит, на основании (100) и (101) при $t \rightarrow c_j$ предел разности (98) равен

$$\frac{g_1(c_j)}{2G(c_j)} \left\{ 1 + G(c_j) \pm \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \pi \sigma_j [G(c_j) - 1] \right\}. \quad (102)$$

Так как

$$\frac{1}{i} \operatorname{ctg} \pi \sigma_j = \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \pi (\lambda_j + i\mu_j) = \frac{[G(c_j)]^{\mp 1} + 1}{[G(c_j)]^{\mp 1} - 1},$$

то

$$1 + G(c_j) \pm \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \pi \sigma_j [G(c_j) - 1] = 0. \quad (103)$$

В силу этого соотношения второй множитель в (102) равен нулю и, следовательно, при $t \rightarrow c_j$ по L_0 разность (98) стремится к нулю.

Пусть c_j — особенный конец линии L_0 , что будет иметь место, если $G(c_j)$ — вещественное положительное число. Если $G(c_j) \neq 1$, то есть если $\mu_j \neq 0$, то в окрестности конца c_j в силу (101)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \pm \frac{\operatorname{ctg} i\pi\mu_j}{2i} \frac{g_1(c_j)}{\omega(c_j)} (t - c_j)^{-i\mu_j} + \Phi^*(t), \quad (104)$$

где $\Phi^*(t) \in H$ вблизи c_j и, как в случае неособенного конца, имеет место равенство (103). Тогда в правой части формулы (98) будет стоять почти ограниченная функция

$$\frac{G(t) - 1}{G(t)} \omega(t) (t - c_j)^{i\mu_j} \{\Phi^*(t) + W(t)\}.$$

Следовательно, предел разности (98) при $t \rightarrow c_j$ существует и равен нулю тогда и только тогда, если

$$\Phi^*(c_j) + W(c_j) = 0. \quad (105)$$

При $W(z) \neq 0$ этого можно добиться за счет подбора одной из входящих в $W(z)$ постоянных; при $W(z) \equiv 0$ равенство (105) дает дополнительное условие на функцию $g_1(t)$.

Если $G(c_j) = 1$, то есть если $\mu_j = 0$, то в окрестности конца c_j [7, с. 91]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mp \frac{g_1(c_j)}{2\pi i \omega(c_j)} \ln(t - c_j) + \Phi_0(t), \quad (106)$$

где $\Phi_0(t) \in H$ вблизи c_j . Значит, при $t = c_j$ вся разность (98) принимает конечное значение $g_1(c_j)$. Итогом исследования является

Теорема 14. Разность (98) предельных значений решения краевой задачи (85), ограниченного вблизи конца c_j линии L_0 , обращается в нуль на этом конце тогда и только тогда, если

- 1) c_j — неособенный конец;
- 2) c_j — особенный конец, на котором $G(c_j) \neq 1$ и выполнено условие (105);
- 3) c_j — особенный конец, на котором $G(c_j) = 1$ и $g_1(c_j) = 0$.

Естественно задать вопрос, не сохраняются ли свойства разности (98), описанные этой теоремой, при наличии у свободного члена $g_1(t)$ интегрируемой особенности на конце c_j .

Пусть вблизи c_j

$$g_1(t) = g_*(t) (t - c_j)^{-(\delta_j + i\Delta_j)}, \quad 0 \leq \delta_j < 1, \quad g_*(t) \in H, \quad g_*(c_j) \neq 0, \quad (107)$$

При помощи тех же рассуждений, что и при доказательстве теоремы 14, легко убедиться, что разность (98) при условии (107) на конце c_j обращается в бесконечность всегда, за исключением одного случая, когда c_j — особенный конец, на котором $G(c_j) = 1$ и в представлении (107) $\delta_j = 0$. Вблизи такого особенного конца c_j разность (98) почти ограничена и ведет себя как

$$g_*(c_j) (t - c_j)^{-i\Delta_j}. \quad (108)$$

Пусть теперь вблизи c_j

$$g_1(t) = g_*(t) \ln(t - c_j), \quad g_*(t) \in H, \quad g_*(c_j) \neq 0. \quad (109)$$

При исследовании свойств интеграла в (98) в этом случае надо привлечь формулы И. М. Мельника [5, с. 74–76], характеризующие поведение интегралов с ядром Коши, когда плотность имеет логарифмическую или степенно-логарифмическую особенность. В окрестности неособенного конца c_j в этом случае имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \pm \frac{g_*(c_j)}{\omega(c_j)} (t - c_j)^{-\sigma_j} \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \pi \sigma_j}{2i} \ln(t - c_j) + \frac{\pi}{2i \sin^2 \pi \sigma_j} \right\} + \Phi^*(t), \quad (110)$$

где вблизи c_j функция $\Phi^*(t)$ также имеет степенно-логарифмическую особенность, но с порядком степени меньше $\lambda_j - \alpha_j$. Если правую часть (110) подставить в (98), то в силу равенства (103) коэффициент при $\ln(t - c_j)$, когда $t \rightarrow c_j$, обратится в нуль и пределом разности (98) будет отличное от нуля конечное число

$$\pm \frac{G(c_j) - 1}{G(c_j)} \frac{\pi g_*(c_j)}{2i \sin^2 \pi \alpha_j} \quad (111)$$

В случае особенного конца c_j , на котором $G(c_j) \neq 1$, то есть $\mu_j \neq 0$, на основании того же представления (110) мы получим тот же предел (111), если на этом конце выполнено условие (105). Если же $G(c_j) = 1$, так что $\mu_j = 0$, то вблизи c_j вместо (110)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \mp \frac{g_*(c_j)}{4\pi i \omega(c_j)} \ln^2(t - c_j) + \Phi_0(t),$$

где $\Phi_0(t) \in H$ вблизи c_j . Тогда вся разность (98) вблизи c_j ведет себя как

$$g_*(c_j) \ln(t - c_j). \quad (112)$$

Итогом является

Теорема 15. При условии (109) разность предельных значений задачи Римана (85) будет на конце c_j конечной и равной значению (111), если

- 1) c_j — неособенный конец, на котором $X(c_j) = 0$;
- 2) c_j — особенный конец, на котором $G(c_j) \neq 1$ и выполнено условие (105).

Исследование общего случая, когда в узле c_j сходятся несколько гладких дуг $\alpha_k \beta_k$ линии L_0 , проводится по той же схеме. Только формулы, определяющие значения разности (98) в рассматриваемом узле, имеют более сложный вид. Рассмотрим только наиболее часто встречающийся случай, когда в узле c_j сходятся две дуги, для одной из которых точка c_j является концом (входящая дуга), а для другой — началом (исходящая дуга). Предел любой заданной на линии L_0 функций $u(t)$ при $t \rightarrow c$ по входящей дуге, если он существует, будем обозначать $u(c - 0)$, а предел при $t \rightarrow c$ по исходящей дуге — $u(c + 0)$.

Пусть коэффициенты $G(t)$ и $g_1(t)$ краевой задачи удовлетворяют условию H_0 вблизи узла c (для краткости будем писать $\in H_0(c)$). Вообще говоря, разность (98) решения (94), ограниченного вблизи узла c , также имеет разрыв 1-го рода в самом узле. Пусть c — неособенный узел. В его окрестности

$$X^+(t) = \omega(t)(t-c)^\sigma, \quad \sigma = \lambda - \chi_c + i\mu, \quad 0 < \lambda - \chi_c < 1, \quad (113)$$

где $\omega(t) \in H_0(c)$ и не обращается в нуль в самом узле. На основании известных формул, характеризующих в этом случае интеграл Коши [7, с. 116], для интеграла в формуле (98) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \\ & = \left\{ \frac{e^{i\pi\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} \frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)} - \frac{\operatorname{ctg} \pi\sigma}{2i} \frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)} \right\} (t-c)^{-\sigma} + \Phi^*(t) \quad (114) \end{aligned}$$

на входящей дуге,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \\ & = \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \pi\sigma}{2i} \frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)} - \frac{e^{-i\pi\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} \frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)} \right\} (t-c)^{-\sigma} + \Phi^*(t) \quad (115) \end{aligned}$$

на исходящей дуге, где функция $\Phi^*(t)$ может иметь в точке c особенность порядка меньшего, чем $\lambda - \chi_c$. Учитывая, что на основании (88)

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\pi\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} &= \frac{e^{i\pi\sigma}}{e^{i\pi\sigma} - e^{-i\pi\sigma}} = \frac{1}{e^{2\pi i(\lambda+i\mu)} - 1} = \frac{G(c+0)}{G(c+0) - G(c-0)} = S, \\ \frac{e^{-i\pi\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} &= \frac{G(c-0)}{G(c+0) - G(c-0)} = T, \quad \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \pi\sigma = S + T, \end{aligned}$$

в качестве предела разности (98) при $t \rightarrow c$ слева получим

$$\begin{aligned} & \frac{1+G(c-0)}{2G(c-0)} g_1(c-0) + \frac{G(c-0)-1}{G(c-0)} \omega(c-0) \times \\ & \times \left\{ S \frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)} - \frac{S+T}{2} \frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)} \right\}, \quad (116) \end{aligned}$$

а при $t \rightarrow c$ справа —

$$\begin{aligned} & \frac{1+G(c+0)}{2G(c+0)} g_1(c+0) + \frac{G(c+0)-1}{G(c+0)} \omega(c+0) \times \\ & \times \left\{ \frac{S+T}{2} \frac{g_1(c+0)}{\omega(c+0)} - T \frac{g_1(c-0)}{\omega(c-0)} \right\}. \quad (117) \end{aligned}$$

Пусть c — особенный узел, так что $\lambda - \chi_c = 0$. Если $\mu \neq 0$, то поведение интеграла в формуле (98) определяется теми же формулами (114) и (115), в которых $\Phi^*(t) \in H_0(c)$. Пределы разности (98) при $t \rightarrow c \pm 0$ существуют только тогда, когда существуют пределы произведения

$$\frac{G(t)-1}{G(t)} \omega(t)(t-c)^{\mu} \{\Phi^*(t) + W(t)\},$$

то есть когда

$$\Phi^*(c \pm 0) + W(c) = 0. \quad (118)$$

Тогда значения разности (98) слева и справа в узле c будут равны тем же числам (116) и (117).

Если $\mu = 0$, то $X^+(t) \in H_0(c)$ и $X^+(c \pm 0) \neq 0$. Имеет место представление

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g_1(\tau)}{X^+(\tau)} K(t, \tau) d\tau = \left[\frac{g_1(c-0)}{X^+(c-0)} - \frac{g_1(c+0)}{X^+(c+0)} \right] \ln(t-c) + \Phi^*(t). \quad (119)$$

Если $G(c) \neq 1$, то из формулы (119) следует: чтобы пределы при $t \rightarrow c \pm 0$ разности (98) были конечны, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{g_1(c-0)}{X^+(c-0)} - \frac{g_1(c+0)}{X^+(c+0)} = 0. \quad (120)$$

Тогда этими пределами будут значения

$$\frac{1+G(c \pm 0)}{2G(c \pm 0)} g_1(c \pm 0) + \frac{1-G(c \pm 0)}{G(c \pm 0)} \times \\ \times X^+(c \pm 0) \{\Phi^*(c \pm 0) + W(c)\}. \quad (121)$$

Если $G(c) = 1$, то второе и третье слагаемые в правой части формулы (98) обратятся в нуль и пределами при $t \rightarrow c \pm 0$ будут числа

$$g(c \pm 0). \quad (122)$$

5°. Возвратимся к уравнению (76). Построим сначала все его решения в случае, когда L_0 — прерывистая гладкая линия, состоящая из m гладких дуг $\alpha_{h\beta}$ без общих концов. Предположим, что функция $\varphi(t)$, коэффициенты $D(t)$, $C(t)$ и правая часть $f(t)$ уравнения (76) имеют на L_0 производные $\varphi'(t)$, $D'(t)$, $C'(t)$, $f'(t)$, принадлежащие классу $H^*(c_1, \dots, c_{2m})$, где c_1, \dots, c_{2m} — концы линии L_0 , расположенные в некотором порядке. В силу этого предположения коэффициенты $G(t)$ и $g_1(t)$ краевой задачи Римана (85) принадлежат классу H и узлов, отличных от концевых точек c_1, \dots, c_{2m} , задача (85) не имеет. Пусть среди концов c_1, \dots, c_p ($p \leq 2m$) будут особенные, остальные c_{p+1}, \dots, c_{2m} — особенные. На основании теоремы 13 из Γ -автоморфного решения (94) класса h_p надо выбрать те, которые удовлетворяют условиям теоремы 4.

Возьмем разность предельных значений решения (98) и, подставив в нее выражения коэффициентов $G(t)$ и $g_1(t)$ через коэффициенты интегрального уравнения (76), получим функцию

$$\psi(t) = \frac{\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)}{\varphi(t)} = \frac{C(t)}{\Omega(t)} f_1(t) - \frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau) f_1(\tau)}{Z(\tau)} K(t, \tau) d\tau + W(t) \right\}, \quad (123)$$

где

$$f_1(t) = f(t) - 2D(t) \sum_{k=1}^p V_k K(t, a_k), \quad (124)$$

$$Z(t) = X^+(t) [C(t) + \varphi(t) D(t)],$$

а функция $\Omega(t)$ определяется формулой (78).

Функция (123) в точках β_1, \dots, β_r и $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$ должна обращаться в нуль. По теореме 14 это будет выполняться автоматически в тех из них, которые являются неособенными концами, и при выполнении условий вида

$$\Phi^*(c_j) + W(c_j) = 0 \quad (125)$$

или вида

$$f(c_j) = 0, \quad (126)$$

если они являются концами особенными.

В предположении дифференцируемости функций $\varphi(t)$, $C(t)$, $D(t)$ и $f(t)$ во всех точках $t \in L_0$, отличных от концов, функция (123) тоже дифференцируема в этих точках. При вычислении производной от $\psi(t)$ используем теорему 10. После несложных вычислений с применением формулы (71) получим

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{C(t)}{\Omega(t)} f_1'(t) + \frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)Q(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} f_1'(\tau) \frac{\varphi(\tau)Q(\tau)}{Z(\tau)} K(\tau, t) d\tau - \\ &- \left[\frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)} W(t) \right]' + \left[\frac{C(t)}{\Omega(t)} \right] f_1(t) - \left[\frac{D(t)}{\Omega(t)} \right]' \frac{Z(t)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau) f_1(\tau)}{Z(\tau)} K(t, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)Q(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau) f_1(\tau)}{Z(\tau)} \left\{ Q(\tau) \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} - \right. \\ &- \left. \left[Q(\tau) \frac{Z'(\tau)}{Z(\tau)} K(\tau, t) + Q(t) \frac{Z'(t)}{Z(t)} K(t, \tau) \right] \right\} d\tau - \\ &- \frac{D(t)Z(t)}{\Omega(t)Q(t)} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\varphi(\tau) f_1(\tau)}{Z(\tau)} \{ [Q(t) - Q(\tau)] K(\tau, t) \}' d\tau. \end{aligned} \quad (127)$$

В силу принадлежности функций $\psi'(t)$, $C'(t)$, $D'(t)$ и $f'(t)$ классу $H^*(c_1, \dots, c_{2m})$ функция (127) будет, очевидно, удовлетворять условию $H^*(c_j)$ вблизи всех неособенных концов c_j и вблизи тех особенных, в которых выполняются условия (125) и (126). Поэтому, если среди $\beta_{r+1}, \dots, \beta_m$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ есть концы особенные, мы для обеспечения принадлежности $\psi'(t) \in H^*$ вблизи этих концов в соответствии с теоремой 14 должны потребовать выполнения условий вида (125) для тех из них, в которых $G(c_j) \neq 1$, и условий вида (126) для тех, на которых $G(c_j) = 1$. Значит функция (123) будет удовлетворять требованиям 1) — 3) теоремы 3, если на каждом особенном конце выполняется условие (125) и (126). Последнее требование теоремы 4 — выполнение равенств (46). Подставив в эти равенства значение разности $\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)$ из (98) или из (123), получим еще ρ соотношений, связывающих между собой постоянные, входящие в правую часть (127). При выполнении этих ρ соотношений (46) все требования теоремы 4 будут выполнены и мы можем все решения уравнения (76) класса $H^*(c_1, \dots, c_{2m})$ получить по формулам

$$\nu(t) = \mp \psi'(t), \quad t \in \alpha_k \beta_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (128)$$

где верхний знак соответствует первым r дугам $\alpha_k \beta_k$, а $\psi'(t)$ имеет вид (127).

Подсчитаем число условий разрешимости уравнения (76) и число произвольных постоянных, вошедших в формулы (128), (127).

Когда все концы линии L_0 неособенные, условия теоремы 4 для функций (123) и (127) выполняются автоматически и, значит, в общем решении задачи Римана (94) класса h_{2m} представимыми в виде интеграла (41) с логарифмическим ядром будут те решения, для которых выполняются соотношения (46). При $\kappa \geq \rho$ в формулу (94) входят линейно постоянные P_j , M_k , N_q и вычеты V_s , которые нам тоже неизвестны. Всего имеем $2\rho + \kappa$ постоянных. Все они связаны 2ρ соотношениями (46) и (96). Этим соотношениям можно удовлетворить подбором 2ρ постоянных, после чего в формуле (94) и в формуле (127) останется κ произвольных постоянных. При $\kappa < \rho$ функция $W(z)$ в формуле (94) не содержит последней суммы, так что имеем 3ρ произвольных постоянных P_j , M_k , V_s и $3\rho - \kappa$ связывающих их соотношений (46), (96) и (97); когда $\kappa \geq 0$, число соотношений не превосходит числа постоянных, и в случае $\kappa > 0$ после удовлетворения всем соотношениям в формулах (94) и (127) останется κ произвольных постоянных, а в случае $\kappa = 0$ число уравнений и число неизвестных постоянных одинаково, поэтому когда из систем (46) и (96), например, мы выразим P_j и M_k через V_s и эти значения подставим

в уравнения (97), то получим систему ρ уравнений с ρ неизвестными, ранг которой $\xi \leq \rho$ и, следовательно, в данном случае либо все постоянные определяются ($\xi = \rho$) и единственной вполне определенной функции (94) по формулам (127) и (128) будет соответствовать единственное решение $v(t)$ интегрального уравнения (76), либо определяются лишь ξ постоянных и в формулы (94) и (127) войдет $\rho - \xi$ произвольных постоянных при $\rho - \xi$ условиях разрешимости. При $\kappa < 0$ число соотношений $3\rho - \kappa$ превосходит число произвольных постоянных и здесь, как в случае $\kappa = 0$, либо все постоянные определяются и мы получим единственное решение при $(-\kappa)$ дополнительных условиях разрешимости вида (97), либо $\rho - \xi$ постоянных останутся произвольными и войдут в формулы (94) и (127), число же условий разрешимости будет $\rho - \kappa - \xi$.

Пусть среди концов неособенных $p < 2m$, остальные $2m - p$ особенные. Предположим, что в l особенных концах $G(c_j) = 1$, что равносильно выполнению равенства $D(c_j) = 0$, и в остальных s особенных концах $G(c_j) \neq 1$ или, что все равно, $D(c_j) \neq 0$, так что $l + s = 2m - p$. Пусть $\kappa > \rho$ и мы, проведя только что изложенные рассуждения, имеем κ произвольных постоянных в формулах (94) и (127); когда $\kappa > s$, всем s условиям вида (125) можно удовлетворить подбором этих постоянных, после чего в формулах (94) и (127) останется произвольных постоянных $\kappa - s$; значит, в общее решение уравнения (76) при выполнении l дополнительных условий Унда (126) входит $\kappa - s$ произвольных постоянных. Когда $v \leq s$, из условий (125) определяются ξ_1 постоянных, где κ_1 — ранг системы (125), $0 \leq \xi_1 \leq s$, $\kappa - \xi_1$ постоянных остаются произвольными и появятся $s - \xi_1$ условий разрешимости, к которым надо присоединить и l условий вида (126); значит, в этом случае уравнение (76) имеет либо единственное решение при l условиях (126), либо в решение войдет $\kappa - \xi_1$ произвольных параметров при $l + s - \xi_1$ условиях разрешимости. Аналогичный вывод можно получить и при $\kappa \leq 0$.

Итогом проведенного исследования является

Теорема 16. Пусть на прерывистой гладкой линии $L_0 \subset R_0$ с концами c_1, \dots, c_{2m} задано интегральное уравнение (76) с Γ -квазиавтоморфным логарифмическим ядром и пусть $\varphi'(t)$, $C'(t)$, $D'(t)$, $f'(t)$ принадлежат классу $H^*(c_1, \dots, c_{2n})$. Разрешимость и число решений уравнения в классе $H^*(c_1, \dots, c_{2m})$ определяется числом особенных концов линии L_0 и величиной индекса задачи Римана (85) класса h_p , где $2m - p$ — число особенных концов, а также рангом системы (97) или (46) и родом фундаментального многоугольника.

Если все концы c_1, \dots, c_{2m} неособенные и κ — индекс класса h_{2m} , то при $\kappa > 0$ уравнение (76) безусловно разрешимо и его общее решение содержит κ произвольных

постоянных. При $x=0$ решение может быть единственным ($\xi = \rho$), либо будет содержать $\rho - \xi$ произвольных постоянных, если при этом $f(t)$ удовлетворяет $\rho - \xi$ условиям разрешимости системы (97). При $x < 0$ для разрешимости уравнения (76) необходимо и достаточно выполнение $\rho - x - \xi$ дополнительных условий, которым должна удовлетворять $f(t)$; при их выполнении в общее решение может войти $\rho - \xi$ произвольных постоянных.

Если среди концов c_1, \dots, c_{2m} имеется $2m - \rho$ особых, а среди них l характеризуется условием $D(c_j) = 0$ и $s -$ условием $D(c_j) \neq 0$, то при $l \neq 0$ необходимо выполнение условий (126), сужающих класс правых частей $f(t)$ уравнения (76). При их выполнении в случае $x > s > 0$ в общее решение уравнения (76) входит линейно $x - s$ произвольных постоянных; в случае $0 < x \leq s$ общее решение уравнения может содержать их $x - \xi_1$, $0 \leq \xi_1 \leq s$, при выполнении $s - \xi_1$ дополнительных условий разрешимости; при $x \leq 0$ возможно наличие $\rho - \xi - \xi_1$ произвольных постоянных при $\rho - x - \xi - \xi_1$ условиях разрешимости.

6°. Может ли функция $\psi(t)$, определенная формулами (127), (128) в окрестности некоторого конца c_j по-прежнему удовлетворять условию $H^*(c_j)$, если, сохраняя прежние требования на $\varphi(t)$, $C(t)$ и $D(t)$, считать $f(t) \in H^*(c_j)$?

Пусть в окрестности c_j

$$f(t) = f_*(t) \ln(t - c_j), f'_*(t) \in H,$$

$$f'(t) = f_{**}(t)/(t - c_j), f_{**}(t) \in H, f_{**}(c_j) \neq 0. \quad (129)$$

На основании теоремы 15 на неособенном конце c_j можно допустить у $f(t)$ логарифмическую особенность только в том случае, если этот конец относится к совокупности $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_{r+1}, \dots, \beta_m$; функция (123) принимает на таком конце постоянное отличное от нуля значение и потому этот неособенный конец c_j не может относиться к совокупности β_1, \dots, β_r и $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_m$, в каждой точке которой в силу теоремы 4 функция (123) должна обращаться в нуль. Из формулы (127) сразу видно, что в этом случае все интегралы в ее правой части существуют и что все слагаемые удовлетворяют условию $H^*(c_j)$, за исключением двух, содержащих $f'_1(t)$. Вблизи c_j

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{Q(\tau) \varphi(\tau) f'_1(\tau)}{Z(\tau)} K(\tau, t) d\tau = \mp \frac{R_j Q_*(c_j) f_{**}(c_j) \operatorname{ctg} \pi s_j}{2i(t - c_j)^{s_j}} + \Phi^*(t),$$

где верхний знак в правой части соответствует случаю $c_j = \alpha_k$, нижний — $c_j = \beta_k$; R_j и $Q_*(c_j)$ — постоянные

$$R_j = \lim_{t \rightarrow c_j} (t - c_j)^{q_j} Z(t), \quad Q_*(c_j) = \lim_{t \rightarrow c_j} Q(t)(t - c_j)^{-1};$$

$\Phi^*(t)$ может в точке c_j иметь степенную особенность, но порядка ниже $\lambda_j - \kappa_j = \operatorname{Re} \sigma_j$. При помощи этого представления выделяем неинтегрируемый член из слагаемых правой части формулы (127), содержащих $f'_1(t)$. Получим

$$\frac{f_{**}(c_j)}{Q(c_j)} \frac{C(c_j) \pm iD(c_j) \varphi(c_j) \operatorname{ctg} \pi \sigma_j}{t - c_j}.$$

Но на основании (80) и (103) числитель второй дроби оказывается равным нулю, поэтому в формуле (127) этот член исчезает и $\nu(t) \in H^*(c_j)$.

В силу той же теоремы 15 логарифмическая особенность у $f(t)$ допустима на особенном конце c_j , на котором $D(c_j) \neq 0$, но при выполнении условия вида (125). И, наконец, из исследований 4° этого параграфа заключаем, что на особенном конце, где $D(c_j) = 0$, допускать логарифмическую особенность нельзя, так как на таком конце функция (123) будет иметь особенность вида (112) в качестве слагаемого и производная (127) будет неинтегрируемой вблизи этого конца; в этом же можно убедиться прямым исследованием правой части формулы (127), взаимного погашения неинтегрируемых особенностей у слагаемых, содержащих $f'(t)$, здесь не происходит.

Таким образом, имеет место

Теорема 17. *Утверждения теоремы 16 остаются в силе, если правая часть $f(t)$ уравнения (76) имеет логарифмическую особенность вида (129) на неособенных концах совокупности $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и $\beta_{r+1}, \dots, \beta_m$ или на особенных концах при условиях $D(c_j) \neq 0$ и (125).*

7°. Рассмотрим случай, когда на одной из дуг $\alpha_k \beta_k$ у $G(t)$ и $g_1(t)$ задачи (85) имеется точка разрыва c первого рода. По теореме 4 функция (123) должна быть непрерывной в этой точке. В 4° было показано, что разность (98) в такой точке терпит разрыв и были вычислены значения (116) и (117) ее левого и правого пределов. Значит, при совпадении этих пределов решения задачи Римана (85) класса h_p будут представимы интегралом вида (41).

Учтем, что когда c есть точка гладкости дуги $\alpha_k \beta_k$, в представлении (113) функция $\omega(t)$ непрерывна в точке c и $\omega(c) \neq 0$. В силу этого выражения (116) и (117) упрощаются и их приравнивание приводит к соотношению

$$[G(c-0) + G(c+0)] [g(c-0) - g(c+0)] = 0, \quad (130)$$

когда c — точка неособенная или особенная при условии $\mu \neq 0$; в последнем случае к соотношению (130) надо присоединить условие (118), обеспечивающее существование пределов (116) и (117). В случае особой точки с условием $\mu = 0$ непрерывность функции (123) в точке c обеспечивается только совпадением значений (122). Значит, справедлива

Теорема 18. При наличии точек разрыва первого рода у коэффициентов и правой части уравнения (76) во внутренних точках линии L_0 эквивалентность между этим уравнением и краевой задачей Римана (85) в смысле теоремы 12 сохраняется тогда и только тогда, если для коэффициентов задачи (85) в неособенных точках разрыва выполняется соотношение (130), в особенных точках при $\mu \neq 0$ соотношения (130) и (118), в особенных точках при $\mu = 0$ соотношение

$$g(c-0) = g(c+0). \quad (131)$$

В особенных точках разрыва при $\mu \neq 0$ условие (130) сводится к условию (131), так как равенство $G(c-0) + G(c+0) = 0$ возможно только в неособенных точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чибрикова Л. И., Сильвестров В. В. Построение автоморфного аналога ядра Коши для одного класса собственно разрывных групп. — Труды семинара по краевым задачам, вып. 16. Изд-во Казанского ун-та, 1979, с. 202—217.
2. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами. — "Изв. вузов. Математика", 1976, № 6, с. 91—104.
3. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, II. — "Изв. вузов. Математика", 1977, № 10, с. 150—162.
4. Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, III. — "Изв. вузов. Математика", 1978, № 6, с. 129—146.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., "Наука", 1977.
6. Чибрикова Л. И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Изд-во Казанского ун-та, 1977.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., "Наука", 1968.
8. Чибрикова Л. И. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами. — "Изв. вузов. Математика", 1961, № 6, с. 121—131. Письмо в редакцию. — "Изв. вузов. Математика", 1962, № 3, с. 81—94.
9. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. — Сб.: Краевые задачи теории аналитических функций. Изд-во Казанск. ун-та, 1962, с. 95—124.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.

УДК 532.546

**ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ
С НАЧАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ***Е. Г. Шешуков*

В работе [1] введен специальный закон фильтрации, позволяющий сводить исходные задачи нелинейной фильтрации с начальным градиентом к крайевым задачам для аналитической функции. Автор [1] ищет решение соответствующей краевой задачи методом разложения в бесконечные ряды. В настоящей работе на примере решения задачи фильтрации к системе стоков показывается, как можно в таких случаях строить решение методом крайевых задач. Исследуется влияние физических параметров на форму границ застойных зон.

1. Постановка задачи. В горизонтальном однородном нефтяном или водоносном пласте постоянной мощности имеются две галереи нагнетательных скважин, расположенных вдоль осей $x = -L_1$ и $x = L_2$. Система координат x, y находится в горизонтальном сечении пласта. Интенсивность галерей обозначена соответственно через q_1 и q_2 (дебиты единицы длины). Пласт эксплуатируется при $x = 0$ равномерной батареей эксплуатационных скважин, дебиты которых $2Q$, где $Q = (q_1 + q_2) T$, $2T$ — расстояние между центрами соседних скважин батареи. Пусть $L_i \gg T$, $i = 1, 2$, $r \ll T$, где r — радиус эксплуатационной скважины. При таких условиях математическое исследование фильтрации достаточно проводить, заменяя батарею эксплуатационных скважин равномерной системой стоков и считая нагнетательные галереи расположенными на бесконечности, т. е. $r = 0$, L_1 и $L_2 = \infty$. Характерным элементом такого течения является полоса ширины T (рис. 1). Здесь сток расположен в точке E , в бесконечно удаленных точках A и D скорости фильтрации соответственно равны $v_A = q_1$, $v_D = q_2$.

Фильтрация в пласте подчиняется нелинейному закону [1]

$$f(v) = |\text{grad } h| = \sqrt{\lambda_0^2 + (v/\lambda_1)^2}, \quad (1.1)$$

где h — напор, v — скорость фильтрации, λ_0 — начальный градиент напора, λ_1 — постоянная размерности скорости. При $|\text{grad } h| \leq \lambda_0$ в плоскости течения образуются застойные зоны (см. $BmCB$ на рис. 1), которые требуется определить.

Заметим, что при $Q_1 = Q_2$ и при $Q_1 = 0$ (или $Q_2 = 0$) исходная задача превращается в детально рассмотренные ранее задачи для закона фильтрации $f = \lambda_0 + v/\lambda_1$ [2].

2. Основные уравнения. Сведение к краевой задаче. Плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости, не следующая закону Дарси, описывается системой уравнений [3]

$$\text{grad } h = -\frac{f(v)}{v} \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0. \quad (2.1)$$

После перехода к безразмерным переменным: $u = v/\lambda_0\lambda_1$, $\varphi = -h/\lambda_0 T$, $\psi = \psi_0/\lambda_0\lambda_1 T$, $\mu = x/T$, $\nu = y/T$, ψ_0 — функция тока, система (2.1) при законе (1.1) запишется в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}. \quad (2.2)$$

С помощью преобразования видоизмененного годографа скорости уравнения (2.2) линейризуются

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \text{cth}^2 s \frac{\partial \psi}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\text{cth}^2 s \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (2.3)$$

где $s = \text{Arsh } u$, θ — аргумент вектора скорости.

Каноническая система (2.3) всесторонне исследована Г. А. Домбровским [4]. Ее решениями являются функции

$$\begin{aligned} \varphi &= -\Phi(\theta, s) + \text{cth } s \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \\ \psi &= -\Psi(\theta, s) + \text{th } s \frac{\partial \Psi}{\partial s}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\Phi(\theta, s)$ и $\Psi(\theta, s)$ — сопряженно гармонические функции.

Области течения G_σ ($\sigma = \mu + i\nu$) в плоскости видоизмененного годографа скорости соответствует полуполоса G_χ ($\chi = \theta + is$) шириной π (рис. 2). Параметры $s_A = \text{Arsh } Q_1$,

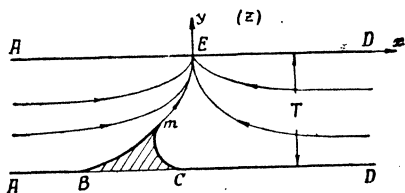


Рис. 1.

$s_D = \text{Arsh } Q_2$, где $Q_1 = q_1/\lambda_0\lambda_1$, $Q_2 = q_2/\lambda_0\lambda_1$. Будем считать $\psi = 0$ на границе $ABmCD$. Тогда на AE функция $\psi = Q_1$ на DE $\psi = -Q_2$.

В области G_χ ищется аналитическая функция $W(\chi) = \Phi(\theta, s) + i\Psi(\theta, s)$ по значению ее мнимой части на границе, вытекающему из второго соотношения (2.4):

$$\begin{aligned} \Psi &= 0 && \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad s = 0, \\ \Psi &= R_1 \text{sh } s && \text{при } \theta = 0 \quad 0 \leq s \leq s_A, \\ \Psi &= -Q_1 && \text{при } \theta = 0, \quad s_A < s < \infty, \\ \Psi &= R_2 \text{sh } s && \text{при } \theta = \pi, \quad 0 \leq s < s_D, \\ \Psi &= Q_2 && \text{при } \theta = \pi, \quad s_D < s < \infty, \end{aligned} \quad (2.5)$$

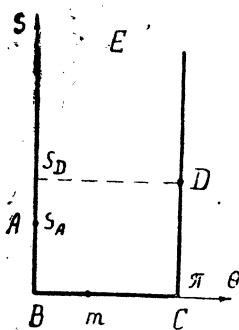


Рис. 2.

где R_1 и R_2 — постоянные интегрирования, определяемые ниже из физических соображений.

Связь области годографа G_χ с физической областью течения G_σ осуществляется по формуле

$$d\sigma = \frac{e^{i\theta}}{u} \left[\frac{ud\varphi}{\sqrt{1+u^2}} + id\psi \right]$$

или после интегрирования, следуя [4],

$$\sigma = \sigma_0 - e^{i\theta} \left[\frac{1}{\text{sh } s} \text{Im } W'(\chi) - \frac{i}{\text{ch } s} \text{Re } W'(\chi) \right]. \quad (2.6)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо построить аналитическую функцию $W(\chi) = \Phi(\theta, s) + i\Psi(\theta, s)$. Ниже для ее определения применяется метод краевых задач, позволяющий находить аналитическое решение в простой форме.

3. Решение краевой задачи. Аналитическая функция $W(\chi)$ ищется в параметрической форме $W = W(\zeta)$, $\chi = \chi(\zeta)$. Для этого с помощью функции

$$\chi(\zeta) = \pi/2 + \text{arc sin } \zeta = \pi + i \ln(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (3.1)$$

область годографа конформно отображается на вспомогательную полуплоскость G_ζ переменного $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 3). Точкам A и D в полуплоскости ζ соответствуют координаты $\zeta = -a$ и $\zeta = d$, где $a = \text{ch } s_A = \sqrt{1 + Q_1^2}$, $d = \text{ch } s_D = \sqrt{1 + Q_2^2}$.

Далее записывается $W(\zeta) = W_1(\zeta) + W_2(\zeta)$, где аналитические функции $W_1(\zeta) = \Phi_1(\xi, \eta) + i\Psi_1(\xi, \eta)$ и $W_2(\zeta) = \Phi_2(\xi, \eta) + i\Psi_2(\xi, \eta)$ определяются в G_ζ по условиям на оси $\eta = 0$:

$\Psi_1 = 0$ при $-a < \xi < d$, $\Psi_1 = -Q_1$ при $-\infty < \xi < -a$, $\Psi_1 = Q_2$ при $d < \xi < \infty$ и $\Psi_2 = 0$ при $-\infty < \xi < -a$, $-1 < \xi < 1$, $d < \xi < \infty$, $\Psi_2 = R_1 \operatorname{sh} s(\xi) = -R_1 \sqrt{\xi^2 - 1}$ при $-a < \xi < -1$,

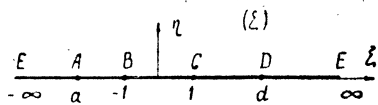


Рис. 3.

$\Psi_2 = R_2 \operatorname{sh} s(\xi) = R_2 \sqrt{\xi^2 - 1}$ при $1 < \xi < d$. Легко заметить, что $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ будет удовлетворять условиям (2.5).

Функция $W_1(\zeta)$ строится методом особых точек [5], если поместить в точки $\xi = -a$, $\eta = 0$ и $\xi = d$, $\eta = 0$ стоки обильности $2Q_1$ и $2Q_2$,

$$W_1(\zeta) = -\frac{Q_1}{\pi} \ln(\zeta + a) - \frac{Q_2}{\pi} \ln(\zeta - d) + iQ_2. \quad (3.2)$$

Применяя интеграл Шварца для полуплоскости [6], восстанавливаем функцию $W_2(\zeta)$

$$W_2(\zeta) = \frac{R_1}{\pi} \int_{-a}^{\zeta-1} \frac{\sqrt{t^2-1} dt}{t-\zeta} + \frac{R_2}{\pi} \int_1^d \frac{\sqrt{t^2-1} dt}{t-\zeta} + \text{const.}$$

После вычисления интегралов получаем

$$W_2(\zeta) = \frac{R_1}{\pi} [\zeta N(a) + \sqrt{\zeta^2-1} M(\zeta, a)] + \frac{R_2}{\pi} [\zeta N(d) - \sqrt{\zeta^2-1} M(\zeta, d)] + \text{const.}, \quad (3.3)$$

где

$$N(p) = \ln(p + \sqrt{p^2-1}), \quad M(\zeta, q) = \ln\left(\frac{\zeta q \mp \sqrt{(\zeta^2-1)(q^2-1)} \pm 1}{\zeta \pm q}\right)$$

при $q = a$ берутся верхние знаки, при $q = d$ — нижние знаки.

Формулы (2.6), (3.1) — (3.3) позволяют найти решение исходной задачи.

4. Определение границы застойной зоны. Обсуждение результатов расчета. Постоянная σ_0 определяется из условия, что сток расположен в начале координат. Устремляя ζ к бесконечности ($s \rightarrow \infty$), из (2.6) получим $\sigma \rightarrow \sigma_0$. Следовательно, $\sigma_0 = 0$.

Для нахождения границы застойной зоны следует воспользоваться формулой (2.6). Так как на границе застойной зоны $\psi = 0$, $s = 0$, а также $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0$, то, раскрывая неопределенность в (2.6), получим формулу

$$\sigma = ie^{i\theta} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} + i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial s} \right)_{s=0}. \quad (4.1)$$

По формулам (3.1) — (3.3) определяется функция

$$\frac{dW}{d\lambda} = \frac{dW/d\lambda}{d\zeta/d\lambda}:$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\lambda} = & \frac{i\sqrt{\zeta^2-1}}{\pi} \left[\frac{Q_1(1+R_1)}{\zeta+a} + \frac{Q_2(1-R_2)}{\zeta-d} - R_1 s_A - R_2 s_D \right] - \\ & - \frac{i\zeta}{\pi} \left[R_1 \ln \frac{1+a\zeta + \sqrt{(\zeta^2-1)(a^2-1)}}{\zeta+a} - \right. \\ & \left. - R_2 \ln \frac{d\zeta-1 + \sqrt{(\zeta^2-1)(d^2-1)}}{\zeta-d} \right], \end{aligned}$$

из которой

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} = & - \frac{V\sqrt{1-\xi^2}}{\pi} \left[\frac{Q_1(1+R_1)}{\xi+a} + \frac{Q_2(1-R_2)}{\xi-d} - R_1 s_A - R_2 s_D \right] - \\ & - \frac{R_1 \xi}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{Q_1 V\sqrt{1-\xi^2}}{1+a\xi} + \alpha \right) + \frac{R_2 \xi}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{Q_2 V\sqrt{1-\xi^2}}{1-\xi d} + \beta \right), \quad (4.2) \end{aligned}$$

где $-1 < \xi = -\cos \theta < 1$; $\alpha = 0$ при $1+a\xi > 0$; $\alpha = \pi$ при $1+a\xi < 0$; $\beta = 0$ при $1-\xi d > 0$; $\beta = \pi$ при $1-\xi d < 0$.

Смешанная производная $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial s}$ при $s=0$ вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial s} \Big|_{s=0} = \frac{d\xi}{d\theta} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) = \sin \theta \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right). \quad (4.3)$$

Входящие в решение постоянные R_1 и R_2 определяются из условий, что при обходах точек A и D в области годографа $G\lambda$ функция $\nu(\theta, s)$ получает приращение, равное 1, т. е.

$$\nu_{AE} - \nu_{AB} = 1, \quad \nu_{DE} - \nu_{CD} = 1. \quad (4.4)$$

Тогда, на основании формул (2.6) с учетом (2.5), из соотношений (4.4) имеем $R_1 = -1$, $R_2 = 1$.

Параметрические уравнения границы застойной зоны, как следует из (4.1) и (4.3), записываются в виде

$$\begin{aligned} \mu = & -\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} - \sin \theta \cos \theta \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right), \\ \nu = & \cos \theta \frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} - \sin^2 \theta \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \Big|_{s=0} \right), \end{aligned}$$

$\xi = -\cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Учитывая (4.2), получаем простые формулы, не имеющие квадратур;

$$\mu = \frac{1}{\pi} \ln \frac{Q_1 + a}{Q_2 + d} - \frac{\cos^2 \theta}{\pi} \left(\frac{Q_1}{a - \cos \theta} - \frac{Q_2}{d + \cos \theta} \right),$$

$$\nu = -\frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{Q_1 \sin \theta}{1 - a \cos \theta} + \operatorname{arctg} \frac{Q_2 \sin \theta}{1 + d \cos \theta} + \alpha + \beta \right) -$$

$$-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\pi} \left(\frac{Q_1}{a - \cos \theta} - \frac{Q_2}{d + \cos \theta} \right), \quad (4.5)$$

где $a = \sqrt{1 + Q_1^2}$, $d = \sqrt{1 + Q_2^2}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

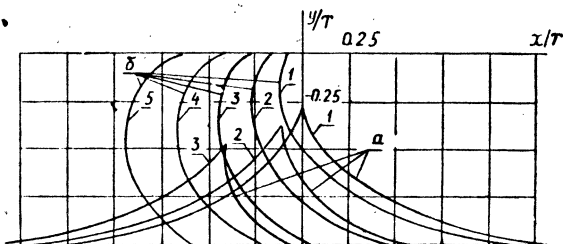


Рис. 4.

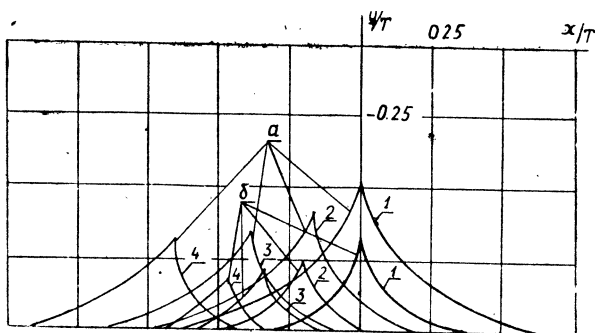


Рис. 5.

Для иллюстрации влияния параметров Q_1 и Q_2 на форму границы застойной зоны проведены по формулам (4.5) расчеты для следующих вариантов: 1. $Q_2 = Q_1 = 0,5$. 2. $Q_2 = 2Q_1 = 1$. 3. $Q_2 = 6Q_1 = 3$ (кривые „а“ рис. 4); 1. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0,5$. 2. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$. 3. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 2$. 4. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 4$. 5. $Q_1 = 0$, $Q_2 = 10$ (кривые „б“ на рис. 4); 1. $Q_2 = Q_1 = 1$. 2. $Q_2 = 2Q_1 = 2$. 3. $Q_2 = 4Q_1 = 4$. 4. $Q_2 = 10$ $Q_1 = 10$ (кривые „а“ на рис. 5); 1. $Q_2 = Q_1 = 2$. 2. $Q_2 = 2Q_1 = 4$. 3. $Q_2 = 3Q_1 = 6$. 4. $Q_2 = 5Q_1 = 10$ (кривые „б“ на рис. 5). На рис. 6 приведены зависимости площади застойной зоны $VmCB$ (см. рис. 1) от параметров Q_1 и Q_2 . Расчеты проводились по формуле

$$s = \int_0^{\pi} (1 + \nu) \mu'(\theta) d\theta,$$

где $\mu(\theta)$, $\nu(\theta)$, $(0 \leq \theta \leq \pi)$ — параметрические уравнения границы застойной зоны.

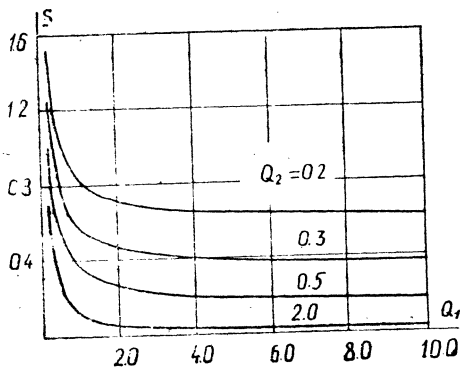


Рис. 6.

Результаты расчетов показывают, что увеличение Q_2 ведет:

- 1) при $Q_1 = Q_2$ — к уменьшению симметричной застойной зоны,
- 2) при $Q_2 > Q_1$ — к уменьшению застойной зоны и ее смещению в сторону потока с меньшим дебитом,
- 3) при $Q_2 < Q_1$ — к уменьшению застойной зоны и ее смещению в сторону потока с большим дебитом до симметричного положения при $Q_2 = Q_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панько С. В. О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4, с. 177—181.
2. Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М., «Наука», 1975.
3. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. — ПММ, 1940, т. 4, вып. 1, с. 33—52.
4. Домбровский Г. А. Метод аппроксимации адиабаты в теории плоских течений газа. М., «Наука», 1964.
5. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., ГИФМЛ, 1961.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.

Доложено на семинаре 26 января 1978 г.

УДК 532.546.001.57

ФИЛЬТРАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ВЫСОТЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЕРЕМЫЧКИ НА ПРОНИЦАЕМОМ ОСНОВАНИИ АНАЛОГОВО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Ф. И. Шешукова

Основной частью высокой каменно-земляной плотины является ядро, проницаемость которого в общем случае является переменной величиной. Фильтрационный расчет такого ядра аналитическими методами крайне сложен. В работе [1] для решения задачи фильтрации через неоднородную по высоте земляную перемычку, расположенную на водопоре, предложен аналогово-аналитический метод, который намного упрощает решение. Ниже этот метод обобщается на случай проницаемого основания.

Постановка задачи. Рассматривается задача плоской установившейся фильтрации, подчиняющейся закону Дарси, в неоднородной по высоте прямоугольной перемычке, подстилаемой однородным проницаемым основанием (рис. 1). Область

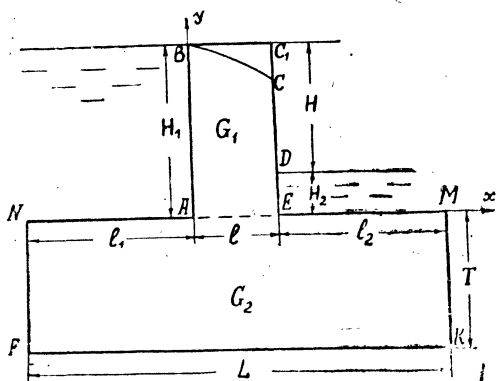


Рис. 1.

фильтрации в перемычке ABC_1CDE обозначим через G_1 , а в основании $NAEMKF$ — через G_2 ($G_1 \cup G_2 = G$). В области G_1 коэффициент фильтрации имеет специальную зависимость $\kappa_1 = a(y-b)^{-2}$ (a, b — постоянные), в области G_2 — постоянен, т. е. $\kappa_2 = \text{const}$. Действующий на гидросооружение напор $H = H_1 - H_2$, где H_1 и H_2 — уровни жидкости соответственно в верхнем и нижнем бьефах. На рис. 1 NAB — граница верхнего бьефа, DEM — граница нижнего бьефа, CD — промежуток высачивания, BC — неизвестная кривая депрессии, $NFKM$ — водоупор. Ось y направлена вдоль верхового откоса плотины, ось x — вдоль линии раздела грунтов AE .

В данной постановке фильтрация жидкости описывается следующей системой уравнений эллиптического типа (см., например, [2])

$$\kappa \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

где h — пьезометрический напор, ψ — функция тока, $\kappa = \kappa_1$ в G_1 , $\kappa = \kappa_2 = \text{const}$ в G_2 .

После перехода к безразмерным параметрам $\tilde{h} = -h/H$, $\tilde{x} = x/H_1$, $\tilde{y} = y/H_1$, $\tilde{\kappa} = \kappa/\kappa_0$, $\tilde{\psi} = \psi/\kappa_0 H$ в G_1 , $\tilde{\psi} = \psi/\kappa_2 H$ в G_2 система (1) запишется в виде

$$\tilde{\kappa} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{\kappa} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_1 = \tilde{b}^2 (\tilde{b} - \tilde{y})^{-2}, \quad \tilde{b} = b/H_1, \quad 0 < \tilde{y} \leq 1, \quad (3)$$

$\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_2 = \text{const}$, $-T/H_1 \leq \tilde{y} < 0$, $\kappa_0 = a/b^2$ — значения κ_1 при $\tilde{y} = 0$.

Требуется достроить границу области G и найти в ней решение системы (2) по следующим граничным условиям: $\tilde{h} = -1$ на NAB , $\tilde{h} = 0$ на DEM , $\tilde{\psi} = 0$ и $\tilde{h} = -\frac{H_1}{H} \tilde{y} + \frac{H_2}{H}$ на BC и DC , $\tilde{\psi} = -\tilde{Q} = Q/\kappa_2 H$ на $NFKM$ и условиям сопряжения $\tilde{h}^+ = \tilde{h}^-$ и $\tilde{\psi}^+ = \tilde{\kappa}_2 \tilde{\psi}^-$ на AE , где \tilde{Q} — приведенный общий фильтрационный расход, знаки „+“ и „-“ указывают значения искомых функций при подходе к линии $\tilde{y} = 0$ соответственно сверху и снизу. В дальнейшем знак „~“ над безразмерными параметрами будем опускать.

Переход к гармоническим функциям. Как и в [1], введем в рассмотрение гармоническую в G_1 функцию

$$\Psi = \frac{b-y}{bx_2} \psi \quad (4)$$

и сопряженно-гармоническую ей $\Phi(x, y)$.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Тогда функции $h(x, y)$, $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ будут связаны выражением

$$dh = \frac{(b-y)x_2}{b} d\Phi - \frac{x_2}{b} \Psi dx. \quad (5)$$

В области G_2 сопряженно-гармонические функции $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ введем соотношениями

$$\Phi = h + 1, \quad \Psi = \psi. \quad (6)$$

Тогда на линии раздела сред AE будут выполняться условия сопряжения:

$$\Psi^+ = \Psi^- = \Psi_0, \quad (7)$$

$$x_2 \frac{\partial \Psi^+}{\partial y} + \frac{x_2}{b} \Psi^+ = \frac{\partial \Psi^-}{\partial y}, \quad (8)$$

где Ψ_0 — значение $\Psi(x, y)$ при $y = 0$.

Функция $\Psi(x, y)$ на границе области G , согласно формул (5), (6), удовлетворяет условиям:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad \text{и } x = l, \quad 0 \leq y \leq H_2/H_1;$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } -l_1 \leq x < 0, \quad y = 0 \quad \text{и } l < x \leq l + l_2, \quad y = 0;$$

$$\Psi = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq l, \quad y_C \leq y \leq 1; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{H_1 b}{x_2 H} \cdot \frac{1}{b-y} \quad \text{при } x = l, \quad H_2/H_1 \leq y \leq y_C;$$

$$\Psi = -Q \quad \text{при } x = -l_1, \quad -T \leq y \leq 0; \quad -l \leq x \leq l + l_2, \\ y = -T; \quad x = l + l_2, \quad -T \leq y \leq 0.$$

Кроме того, на кривой депрессии BC

$$\Phi = \frac{H_1 b}{x_2 H} \ln \left| \frac{b-y}{b-1} \right|. \quad (10)$$

О методе моделирования¹⁾. Так как $\Psi(x, y)$ в G является кусочно-гармонической, то для ее нахождения проще всего применять метод ЭГДА с использованием электропроводной бумаги.

¹⁾ В отличие от работ [1, 3] здесь моделирование приходится проводить для функции $\Psi(x, y)$, а не $\Phi(x, y)$, которая не является непрерывной при переходе через линию $y = 0$.

Условия сопряжения (7), (8) будем выполнять на модели дискретно. Для этого на малом расстоянии δ сверху и снизу от линии AE проводятся две вспомогательные линии, на которых $\Psi(x, y)$ принимает некоторые значения $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ соответственно. Тогда условие (8) в конечно-разностной форме с точностью до членов порядка δ запишется

$$\Psi_0 = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2, \quad (11)$$

где $\alpha = \kappa_2 b / (\kappa_2 b + b - \kappa_2 \delta)$, $\beta = b / (\kappa_2 b + b - \kappa_2 \delta)$.

Модель области G изготавливается из электропроводной бумаги одной проводимости. Выполнение условия (11) осуществляется с помощью специального аналогового устройства [3]

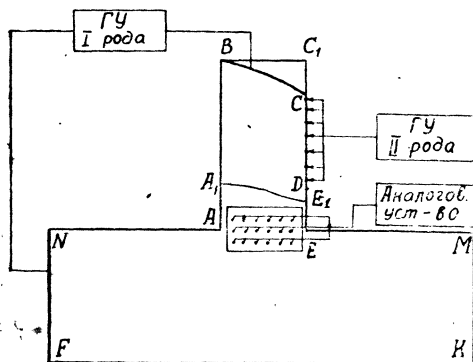


Рис. 2.

(рис. 2). Функция $\Psi(x, y)$ моделируется электрическим потенциалом $U = c\Psi$, где c — константа подобия. Кривая депрессии и водоупор являются линиями равного потенциала: $U = 0$ на BC , $U = U_{\max} = cQ$ на $NFKM$. Заметим, что потенциал U_{\max} определяется в процессе моделирования.

Так как на NAB и DEM $\frac{\partial u}{\partial n} = c \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$, то

в модели они являются

линиями изоляции. Вдоль промежутка высачивания CD для функции $\Psi(x, y)$ выполняются граничные условия II рода (9). Плотность тока вдоль CD равна [4]

$$j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{c}{\rho} \cdot \frac{H_1 b}{\kappa_2 H} \cdot \frac{1}{b-y},$$

где ρ — удельное сопротивление модели.

Разбиваем границу C_1CD на n участков точками $y = y_k$ ($k = 0, n$). Ток, приходящийся на каждый участок (y_k, y_{k+1}) границы, равен

$$i_k = \int_{y_k}^{y_{k+1}} j dy = \frac{c}{\rho} \frac{H_1 b}{\kappa_2 H} \ln \left| \frac{y_{k+1} - b}{y_k - b} \right|. \quad (12)$$

При моделировании ток i_k подается через контакты, расположенные в середине участков разбиения, с помощью блока граничных условий II рода.

Общий ток, протекающий через модель, принимает вполне определенное значение

$$I = \frac{c}{\rho} \int_{NFKM} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{c}{\rho} (\Phi_M - \Phi_N) = \frac{c}{\rho}, \quad (13)$$

где σ — дуговая абсцисса контура. С помощью блока граничных условий 1 рода между металлическими шинами на BC и $NFKM$ подбираем разность потенциалов U_{\max} , соответствующую общему току.

Неизвестная линия депрессии отыскивается методом последовательных приближений. За нулевое приближение принимается такая кривая, которая лежит заведомо выше истинной линии депрессии. После реализации на модели граничных условий (9) и условий сопряжения (7), (8) необходимо проверить выполнение условия (10). Для этого в G_1 строится эквипотенциальная линия A_1E_1 (рис. 2) и в области A_1BCDE_1 ставится краевая задача для $\Phi(x, y)$ по граничным условиям: $\Phi = 0$ на A_1B , $\Phi = \frac{H_1 b}{\alpha_2 H} \ln \left| \frac{b - H_2/H_1}{b - 1} \right|$ на DE , $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ на A_1E_1 , $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$, $\Phi = \frac{H_1 b}{\alpha_2 H} \ln \left| \frac{b - y}{b - 1} \right|$ на BC , $\Phi = \frac{H_1 b}{\alpha_2 H} \ln \left| \frac{b - y}{b - 1} \right|$ на CD . Строится модель этой области из электропроводной бумаги и задаются соответствующие граничные условия. Замеряя значения $\Phi(x, y)$ вдоль BC и используя условие (10), выбираем положение кривой депрессии в первом приближении. Устанавливая шину вдоль границы BC , найденной в первом приближении, решаем краевую задачу для $\Psi(x, y)$ в G в следующем приближении. Эту процедуру повторяем до тех пор, пока не выполнится с заданной точностью условие (10).

После нахождения кривой депрессии функция $\Psi(x, y)$ легко определяется во всей области простым замером потенциала. Учитывая условия (4) и (6), найдем функцию $\psi(x, y)$, общий фильтрационный расход $Q = -\psi_{NFKM} \cdot \alpha_2$, расход через участки нижнего бьефа $Q_{EM} = (\psi_E - \psi_M) \cdot \alpha_2$, $Q_{DE} = \psi_D - \psi_E$, а также расход через промежуток высачивания $Q_{CD} = Q - (Q_{EM} + Q_{DE})$.

Пример. Пусть $l/H_1 = 0,5$; $l_1/H_1 = l_2/H_1 = 1$; $H_2/H_1 = 0,25$; $T/H_1 = 0,75$; $L/H_1 = 2,5$, $b = 1,4625$, $\alpha_2 = 3$. Коэффициент фильтрации в перемычке, согласно (3), изменяется в пределах $1 \leq \alpha_1(y) \leq 10$ при $0 \leq y \leq 1$.

На рис. 3 показана найденная линия депрессии (кривая 2). Для сравнения на этом же рисунке построены кривые депрессии для случая фильтрации в однородном грунте, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ (кривая 4),

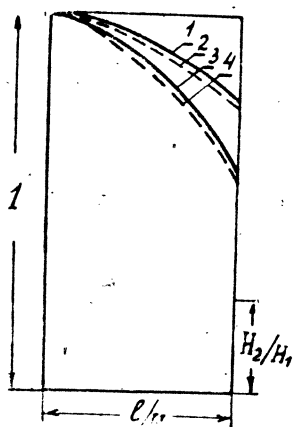


Рис. 3.

В неоднородной перемычке при $\alpha_1(y)$, расположенной на водоупоре (кривая 1) и в однородной перемычке с $\alpha_1 = 1$, подстилаемой водоупором (кривая 3). В таблице 1 приведены фильтрационные расходы для всех четырех случаев. Расчеты показывают влияние неоднородности грунта перемычки и наличия проницаемого основания на положение линии депрессии, участка высачивания и фильтрационного расхода.

Таблица 1

№ п/п	Q	Q_{CD}	Q_{DE}	Q_{EM}
1	2,73	1,9	0,83	—
2	4,29	1,809	1,344	1,137
3	0,97	0,52	0,45	—
4	1,55	0,51	0,434	0,606

ЛИТЕРАТУРА

1. Шешукова Ф. И. Об электро моделировании краевых задач напорной и безнапорной фильтрации в неоднородном грунте.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., „Наука“, 1977.
3. Шешукова Ф. И. Аналоговый метод решения краевых задач напорной фильтрации в неоднородном грунте.—Труды семинара по краевым задачам. Вып. 15. Изд-во Казанск. ун-та, 1978.
4. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959.

Доложено на семинаре 25 января 1979 г.

УДК 517.54

Достаточные условия многолистности интегральных представлений. *Аксентьев Л. А.*—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В статье приведено решение обратной задачи для интеграла Кристоффеля—Шварца, когда показатели степеней у подынтегральных функций изменяются на всей действительной оси. Получены условия, при которых „возмущение“ интеграла Кристоффеля—Шварца не приведет к увеличению порядка листности.

Доказаны также теоремы об однолистности и многолистности интеграла типа Коши и аналитических функций, решающих задачу Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами, в частности, смешанную краевую задачу в полуплоскости и круге.

Библ. 9.

УДК 532.546.001.57

Разработка метода электромоделирования обратных задач теории фильтрации во вспомогательных плоскостях. *Виниченко А. А.*—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В работе предлагается искать решение обратных краевых задач моделированием не в физической плоскости, где область неизвестна, а во вспомогательной, где область полностью определяется исходными условиями задачи. Решен ряд обратных краевых задач теории фильтрации. Проведены сравнения с аналитическими решениями.

Библ. 9, рис. 5.

УДК 517.544

К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура. *Гарифьянов Ф. Н.*—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанского ун-та, 1980.

Рассмотрено гомотопное семейство простых разомкнутых гладких кривых, заполняющих на плоскости криволинейный угол. Вводится понятие индикатора функции, аналитической в криволинейном углу и непрерывной на его границе, доказывается свойство тригонометрической выпуклости индикатора. Найдено решение однородной задачи Римана для неограниченного контура в классе функций, имеющих заданный индикатор на некотором гомотопном семействе кривых.

Библ. 3.

О структурном методе решения задачи Гильберта. Глазов А. В., Костерин А. В.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Рассматривается задача Гильберта для системы уравнений, отличной от системы Коши—Римана. Приближенное решение задачи ищется методом наименьших квадратов с использованием аппарата R -функций. При некоторых ограничениях на исходные данные доказана сходимость приближенного решения к точному в пространстве Соболева W_2^1 .

Библ. 4.

Доказательство разрешимости задачи о растекании струи тяжелой жидкости по горизонтальной плоскости. Гуревич И. Л.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В статье рассматривается плоская струя тяжелой жидкости, вытекающая из щели между двумя наклонными плоскостями и растекающаяся по горизонтальной плоскости. Задача сводится к линейной системе уравнений, разрешимость которой доказывается с помощью теоремы Лере—Шаудера при любых числах Фруда и достаточно большом расстоянии точки отрыва струи от горизонтальной плоскости.

Илл. 2. Библ. 4.

Исследование вопросов корректности внешних смешанных обратных краевых задач. Елизаров А. М.—Тр. семинара по краевым задачам вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В статье рассматривается новый класс внешних смешанных обратных краевых задач теории аналитических функций, в граничных условиях которых фигурируют только действительная и мнимая части искомой функции, причем одно краевое условие задано в зависимости от полярного угла единичного круга (т. е. в форме Демченко), а другое—Тв зависимости от параметра $\alpha = \arg z$.

Теорема существования решений доказана с использованием метода полигональной аппроксимации В. Н. Монахова, а теорема единственности—путем получения краевой задачи Римана для разности двух функций, определяющих решения, и доказательства, что она имеет лишь тривиальное решение.

При определенных ограничениях на начальные данные доказана устойчивость решения в смысле введенного определения.

Библ. 10.

О смешанной обратной краевой задаче обтекания произвольного профиля. Елизаров А. М.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В статье рассматривается смешанная обратная краевая задача нахождения формы неизвестного замкнутого профиля, расположенного над криволинейным дном и обтекаемого установившимся потоком несжимаемой невесомой жидкости. На профиле задано распределение скорости в зависимости от дуговой абсциссы s .

Показано, что рассматриваемая задача разрешима лишь в случае разрешимости нелинейного интегрального уравнения второго рода, решением которого является функция $s(t)$, t принадлежит отрезку нижнего основания прямоугольника в вспомогательной плоскости.

Разрешимость уравнения задачи доказана на основании принципа неподвижной точки Шаудера.

Библ. 8, рис. 3.

УДК 517.956.6

К задачам со смещениями для уравнений смешанного типа. Жегалов В. И.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В области, типичной для задачи Трикоми, рассматривается задача, отличающаяся от предшествующих задач подобного рода тем, что вместо одного условия в гиперболической части области задаются два соотношения, связывающих значения искомой функции в 7 точках характеристического треугольника. Задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений. Указываются частные случаи, допускающие полное исследование вопросов разрешимости.

Библ. 9.

УДК 517.541

Об устойчивости решения обратной краевой задачи с параметром в случае многосвязной области. Журбенко Л. Н.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В работе рассматривается обратная краевая задача об отыскании конечной m -связной области, когда исходные комплексные функции от дуговой абсциссы удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование общего решения. Показана устойчивость решения задачи, принадлежащего определенному классу функций, отображающих круговую каноническую область на искомую область, на паре пространств $(C^{(1)}, \tilde{C})$, (\tilde{C}, \tilde{C}) , где \tilde{C} —пространство абсолютно непрерывных на границе функций. Необходимо отметить, что во втором случае приходится налагать дополнительное ограничение на исходные функции.

Библ. 19.

УДК 517.558

О разрешимости одной краевой задачи теории взрыва на выброс. Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В рамках твердо-жидкостной модели взрыва на выброс с обобщенным краевым условием исследована разрешимость задачи нахождения формы выемки при взрыве заглубленного шнурового заряда, моделируемого в плоскости, перпендикулярной оси заряда, гидродинамическим источником.

Библ. 2.

О задаче Римана с коэффициентом, допускающим особенность типа нуль-полюс. Б. А. Кац.— Труды семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Исследуется краевая задача Римана, коэффициент которой $G(t)$ имеет в некоторой точке t_0 границы нуль-полюс, т. е. принимает в окрестности этой точки как сколь угодно малые, так и сколь угодно большие значения. При этом отношение $G/|G|$ предполагается удовлетворяющим условию Гёльдера, а граница области считается контуром Ляпунова. При таких предположениях число линейно независимых решений однородной задачи в классе ограниченных функций выражается через индекс отношения $G/|G|$ и величину $\nu = \lim_{t \rightarrow t_0} |\ln |G(t)| / |\ln |t - t_0||$. Неоднородная задача решена для случая, когда свободный член дифференцируем в точке t_0 по Тейлору не менее $2[\nu/2] + 2$ раз.

Библ. 7.

УДК 621.9.047.7

Предельное анодное формообразование при изоляции на аноде. Клоков В. В.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Получено точное решение задачи по определению формы анодной границы с изоляцией, нанесенной на анод, при достижении на нем предельной плотности тока. Установлено, что характер границы зависит от расстояния между катодом и изоляцией. Получены параметрические уравнения границы, выражения для подтравливания и заглупления под изоляцией. Предложены быстро сходящиеся итерационные процессы вычисления геометрических характеристик зазора. Выполнены числовые расчеты, представленные в таблицах и на графиках.

Ил. 5. Табл. 4. Библ. 5.

УДК 517.544

К задаче Маркушевича для односвязной области. Патрушев А. А.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Для единичного круга решается задача Маркушевича

$$\Phi^+(t) = a(t)\Phi^-(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t).$$

Решение ищется в замкнутой форме при дополнительных ограничениях.

на коэффициенты. $\frac{a(t)}{b(t)+1}$ аналитически продолжимо с контура L в область D^- . Способ решения задачи состоит в сведении ее к сингулярному интегральному уравнению относительно $\operatorname{Re} \Phi^t(t)$. В случае произвольного гладкого контура Ляпунова определяется число решений и условий разрешимости как в случае $|b(t)| < 1$, так и в случае $|b(t)| > 1$.

Библ. 12.

Задача типа Трикоми для одной системы уравнений смешанного типа второго рода. Плещинская И. Е.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Для системы уравнений

$$\begin{aligned} u_i y + v_x - \frac{1}{2} u &= 0, \\ u_x - v_y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

в области, эллиптическая часть которой совпадает с верхней полуплоскостью, а гиперболическая часть есть характеристический треугольник системы (1), решена задача типа Трикоми. Метод решения — приведение исходной задачи к краевой задаче Гильберта с разрывными коэффициентами. Единственное решение граничной задачи построено в явном виде.

Библ. 6.

УДК 517.544

Интегралы типа Коши для полианалитических функций. Показев В. В.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. университета, 1980.

Исследуются два интеграла, представляющие собой определенные полианалитические аналоги интеграла типа Коши. Для этих интегралов получены формулы Сохоцкого и на их основе в комплексной плоскости с разрезами построен специальный класс кусочно-полианалитических функций.

Библ. 2.

УДК 517.544

Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца. Салимов Р. Б., Селезнев В. В.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В статье предлагается метод разрешения краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для функции, аналитической в кольце.

Библ. 10.

УДК 534.222

Некоторые задачи о взрыве двух симметричных зарядов. Салимов Р. Б., Туктамышев Н. К.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В рамках гидродинамической модели взрыва, предложенной академиком Лаврентьевым М. А., рассмотрены задачи об определении формы выемки выброса грунта при взрыве двух симметричных зарядов. Решена задача о взрыве двух поверхностных зарядов, толщина сечений которых меняется по линейному закону. Также рассмотрена задача о взрыве двух плоских перпендикулярных свободной поверхности зарядов, примыкающих к свободной поверхности. Получены параметрические уравнения границ выемок.

Ил. 3. Библ. 8.

Об улучшении разделяющих постоянных в критерии однолистности решения одной обратной краевой задачи. *Севодин М. А., Шабалин П. Л.*—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Рассматривается функция

$$z(\zeta) = \int \left\{ \exp \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\nu(\theta) \right\} d\zeta, \quad \zeta \in E,$$

реализующая отображение единичного круга E на искомую область. Доказаны два достаточных условия однолистности функции $z(\zeta)$, если $\nu(\theta)$ — ограниченного изменения и принадлежит классу Δ_k . Эти условия имеют вид некоторых ограничений на коэффициент k , которые лучше известного ранее. При этом указаны изменения коэффициента k , при которых отображение $z(\zeta)$ будет выпуклым или почти выпуклым в круге E_q , с любым q , $0 < q < 1$. Аналогичные вопросы рассмотрены в случае, когда функция $\nu(\theta)$ абсолютно непрерывна.

Библ. 10.

Краевая задача Гильберта для одной бесконечносвязной области в классе автоморфных функций. *Сильвестров В. В.*—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанского ун-та, 1980.

Для конечносвязной или бесконечносвязной области, граница которой состоит из конечного или счетного множества окружностей, конгруэнтных между собой относительно некоторой функциональной группы Γ дробнолинейных преобразований, и множества точек сгущения этих окружностей, решается задача Гильберта в классе функций, автоморфных относительно Γ . С помощью метода симметрии и закона автоморфности эта задача сводится к эквивалентной задаче Римана для автоморфных функций относительно новой группы $\tilde{\Gamma}$, определяемой группой Γ . При условии, что $\tilde{\Gamma}$ является группой первого класса по В. В. Голубеву, решения задачи Гильберта записываются через интегралы и ряды, выражаемые явно через преобразования группы $\tilde{\Gamma}$. Проведено качественное исследование задачи. Рассмотрена задача Шварца.

Табл. 1. Библ. 18.

О распределении теплового потока на поверхности плавления при термическом бурении. *Фомин С. А.*—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Исследуется задача о температурном поле горного массива окружающего коронку термобура при бурении-плавлении. Распределение температуры в породах описывается уравнением эллиптического типа с граничным условием первого рода на криволинейной поверхности плавления. Эта краевая задача сводится к интегральному уравнению первого рода со сложным интегральным ядром. При больших значениях основного параметра,

характеризующего процесс бурения-плавления, строится асимптотическое разложение ядра, которое представляется в виде ряда по вырожденным гипергеометрическим функциям второго рода. С полученным более простым ядром интегральное уравнение решается численно. В качестве примера приводятся результаты численных расчетов для термобура с рабочей поверхностью, имеющей форму полусферы.

Ил. 2. Библ. 5.

УДК 517.5

Биголоморфность решений обратной краевой задачи в S^n . Хохлов Ю. Е.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Данная работа является непосредственным продолжением статьи А. П. Тихонова и автора с одноименным названием. В ней с помощью точных оценок n -гармонических функций и одного результата Островского рассмотрены вопросы биголоморфной разрешимости внутренних и внешних обратных краевых задач по многомерному параметру x в классах областей, биголоморфно эквивалентных поликругу или его внешности.

Библ. 8.

УДК 517.544.8

Сингулярные интегральные уравнения с автоморфными и квазиавтоморфными логарифмическими и степенными ядрами. I. Чибрикова Л. И., Плецинский Н. Б.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

В этой части работы методом аналитического продолжения решаются в замкнутой форме интегральные уравнения первого рода, заданные на кусочно-гладкой линии, лежащей внутри фундаментальной области конечно-порожденной функциональной группы дробно-линейных преобразований I класса, с ядрами в виде интеграла с переменным верхним или нижним пределом, представляющего собой квазиавтоморфный аналог интеграла типа Коши. Решения уравнений отыскиваются в классах H^* по Н. И. Мухелишвили. Установлена зависимость числа линейно-независимых решений однородных уравнений и числа условий разрешимости неоднородных уравнений от индекса уравнения, рода фундаментальной области и числа особых концов уравнения. Попутно получены формулы дифференцирования сингулярного интеграла с квазиавтоморфным или автоморфным ядром, когда плотность принадлежит классам H , H^* или H_* .

Библ. 9.

УДК 532.546

Об одном случае решения задач нелинейной фильтрации с начальным градиентом. Шешуков Е. Г.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Для исследования задач нелинейной фильтрации при законе с начальным градиентом, введенном в работе Панько С. В. (О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4,

с. 177—181), применяется метод краевых задач. Иллюстрация этого метода проводится на примере задачи фильтрации к системе стоков. Показывается влияние физических параметров на форму границ застойных зон.

Ил. 6. Библ. 6.

УДК 532.546.001.57

Фильтрационный расчет неоднородной по высоте прямоугольной перемычки на проницаемом основании аналогово-аналитическим методом. Шешукова Ф. И.—Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

Работа посвящена решению задачи фильтрации через неоднородную по высоте прямоугольную перемычку, коэффициент фильтрации которой имеет специальный вид, расположенной на однородном проницаемом основании. Переход к преобразованным гармоническим функциям позволяет получить решение методом ЭГДА на электропроводной бумаге одной проводимости. Приводятся результаты расчетов.

Ил. 3. Библ. 4. Табл. 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Аксентьев Л. А. Достаточные условия многолистности интегральных представлений	3
Виниченко А. А. Разработка метода электро моделирования обратных задач теории фильтрации во вспомогательных плоскостях	18
Гарифьянов Ф. Н. К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура	27
Глазов А. В., Костерин А. В. О структурном методе решения задачи Гильберта	35
Гуревич И. Л. Доказательство разрешимости задачи о растекании струи тяжелой жидкости по горизонтальной плоскости	39
Елизаров А. М. Исследование вопросов корректности внешних смешанных обратных краевых задач	44
Елизаров А. М. О смешанной обратной краевой задаче обтекания произвольного профиля	56
Жегалов В. И. К задачам со смещениями для уравнений смешанного типа	63
Журбенко Л. Н. Об устойчивости решения обратной краевой задачи с параметром z в случае многосвязной области	74
Ильинский Н. Б., Лабуткин А. Г. О разрешимости одной краевой задачи теории взрыва на выброс	85
Кац Б. А. О задаче Римана с коэффициентом, допускающим особенность типа нуль-полюс	89
Клоков В. В. Предельное анодное формообразование при изоляции на аноде	100
Патрушев А. А. К задаче Маркушевича для односвязной области	110
Плещинская И. Е. Задача типа Трикоми для одной системы уравнений смешанного типа второго рода	124
Показеев В. В. Интегралы типа Коши для полианалитических функций	133
Салимов Р. Б., Селезнев В. В. Решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца	140
Салимов Р. Б., Туктамышев Н. К. Некоторые задачи о взрыве двух симметричных зарядов	158
Севодин М. А., Шабалин П. Л. Об улучшении разделяющих постоянных в критерии однолистности решения одной обратной краевой задачи	167
Сильвестров В. В. Краевая задача Гильберта для одной бесконечно-связной области в классе автоморфных функций	180
Хохлов Ю. Е. Биголоморфность решений обратной краевой задачи в C^n	195
Фомин С. А. О распределении теплового потока на поверхности плавления при термическом бурении	202
Чибрикова Л. И., Плещинский Н. Б. Сингулярные интегральные уравнения с автоморфными и квазиавтоморфными логарифмическими и степенными ядрами, I	210

Шешуков Е. Г. Об одном случае решения задач нелинейной фильтрации с начальным градиентом	248
Шешукова Ф. И. Фильтрационный расчет неоднородной по высоте прямоугольной перемычки на проницаемом основании анало- гово-аналитическим методом	255
Рефераты	261

**ТРУДЫ СЕМИНАРА
ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ**

Выпуск 17

Редактор *Шарафутдинова Р. З.*
Техн. редактор *Семенова Г. М.*
Корректор *Кузнецова Э. А.*

ИБ № 425

Сдано в набор 29/III-79 г. Подписано к печати 17/XII-80 г. ПФ 13404.
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Печ. л. 17,0. Уч.-изд. л. 16,3. Заказ А-224.
Тираж 800 экз. Цена без переплета 2 р. 25 к. Переплет 14 к.

Издательство Казанского университета. Казань, Ленина, 4/2.
Полиграфический комбинат им. Камиля Якуба Государственного комитета
Татарской АССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Казань, ул. Баумана, 19.