КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.54

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МНОГОЛИСТНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Л. А. Аксентьев

В статье исследуются геометрические вопросы, которые относятся к простым интегральным представлениям.

В § 1 дается дополнение к решению обратной задачи для интегралов Кристоффеля—Шварца [1, с. 179—181; 2]. Рассматриваются случаи, когда показатели степеней у подынтегральной функции меняются на всей действительной оси. Приводятся условия, при выполнении которых возмущающая функция $\varphi(z)$ не увеличивает количество листов в образе.

В § 2 доказываются факты о многолистности интегралов типа Коши.

В § 3 анализируется решение смешанной краевой задачи. Показывается, что класс решений задачи Гильберта с разрывными коэффициентами, выпуклых в n направлениях, совпадает с соответствующим представлением из статьи [3] Д. В. Прохорова и Б. Н. Рахманова.

§ 1. Многолистное изменение многоугольных областей

Рассмотрим интеграл Кристоффеля—Шварца при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} dz, \tag{1}$$

для которого $-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty$, в предположении, что α_k могут быть любыми действительными числами.

Так как функция $f(z) - f(a_k)$ в полуокрестности точки a_k ведет себя как $(z - a_k)^{\alpha_k}$, то $\arg[f(z) - f(a_k)]$ будет меняться в интервале длины $\pi\alpha_k$, значит, окрестность точки $f(a_k)$ будет покрыта значениями функции $f(z)$ многократно:

$(1+[|\alpha_k|/2])$ раз, если $|\alpha_k| \neq 2p$, и $|\alpha_k|/2$ раз, если $|\alpha_k| = 2p$, причем $[\cdot]$ — знак целой части. Поэтому при условии, что $2(p-1) < |\alpha_k| \leqslant 2p$, функция $f(z)$ будет не менее чем p-листной в смысле следующего определения.

Под m-листной будем понимать такую область на многолистной римановой поверхности, накрывающей плоскость, что $q \leqslant m$ точек этой области имеют совпадающие проекции на плоскость, причем число m достигается хотя бы на некоторых подобластях. Функции, имеющие в качестве образов m-листные области, будем называть m-листными.

При $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2$ получим с помощью таких же рассуждений, как в [1, с. 179—181], что функция (1) будет отображать полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на однолистный или многолистный n-угольник. Если же $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq n-2$, то получится $(n+1)$-угольник с дополнительной угловой точкой $f(\infty)$ и с углом $\alpha(\infty)\pi$ при ней, $\alpha(\infty) = n - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k - 1$. Значит, порядок листности в полуокрестности бесконечно удаленной точки будет $[|\alpha(\infty)|/2]+1$, если $|\alpha(\infty)| \neq 2q$, и $|\alpha(\infty)|/2$, если $|\alpha(\infty)| = 2q$.

Если допустить, что в образе верхней полуплоскости появляется точка ветвления, то представление (1) для функции изменится и запишется в виде

$$f(z) = \int\limits_{z_0}^{z} (z-a)^{p-1} (z-\bar{a})^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\alpha_k - 1}\, dz, \qquad (1')$$

причем точка a, $\operatorname{Im} a > 0$, является прообразом точки ветвления. Докажем справедливость такого утверждения.

Если $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = n-2p$, то в качестве образа полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении функцией (1′) окажется m-листный n-угольник с $m \geqslant \max\{|p|, [|\alpha_k|/2] + \delta(|\alpha_k|/2)\}$, где

$$\delta(\beta) = \{0,\ \beta = q,\ q - \text{целое число};\ 1,\ \beta \neq q\}. \qquad (2)$$

Если же $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \neq n-2p$, то образом будет $(n+1)$-угольник с количеством листов

$$m \geqslant \max\{|p|, [|\alpha_k|/2] + \delta(|\alpha_k|/2),$$

$$[|\alpha(\infty)|/2] + \delta(|\alpha(\infty)|/2)\},\ \alpha(\infty) = n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - 2p + 1.$$

Доказательство проводится с учетом рассуждений относительно функции (1) и на основе поведения функции (1′) в окрестности ∞:

$$f(z) \sim z^{\omega}, \quad \omega = -\left(n - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k - 2p + 1\right).$$

В окрестности прообраза точки ветвления функция (1′) имеет представление $(z-a)^p$, и поэтому порядок листности в окрестности этой точки будет равен $|p|$ при целом p.

Дополнительно отметим, что если p будет нецелым, то в полуплоскости нужно провести разрез по отрезку $[a, \operatorname{Re} a]$, и порядок листности функции (1′) будет равен $[|p|] + \delta(|p|)$, где $\delta(\beta)$ имеет вид (2).

Функция (1′) отобразит полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внешность многоугольника при $p = -1$. Можно описать геометрически, как постепенно меняются образы при изменении p от положительных значений к отрицательным. Именно, образы переходят от внутренности многоугольника к его внешности. При этом важную роль играют образы берегов разреза $[a, \operatorname{Re} a]$, когда p меняется от 0 до -1.

Аналогичные факты получаются для комплексных показателей $\alpha_k + i\beta_k$. При таком обобщении нужно в оценках порядка листности понимать под $\alpha_k = \operatorname{Re}(\alpha_k + i\beta_k)$ вещественную часть соответствующего показателя. В самом деле, $(z-a_k)^{\alpha_k + i\beta_k} = \exp\left[(\alpha_k + i\beta_k)\ln(z-a_k)\right] = \exp\left[\alpha_k \ln|z-a_k| - \beta_k \arg(z-a_k)\right] \exp\left[i\alpha_k \arg(z-a_k) + i\beta_k \ln|z-a_k|\right]$ и при $\beta_k \neq 0$

$$\text{изм} \arg(z-\alpha_k) = \pi \Rightarrow \text{изм} \arg(z-a_k)^{\alpha_k + i\beta_k} = \alpha_k \pi.$$

Бо́льшим разнообразием в образах отличается аналог представления (1′)

$$f'(z) = z^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (z-a_k)^{\alpha_k - 1} \tag{3}$$

в круге $|z| < 1$, причем $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Проведя вычисления, как в [2], получим, что производная угла $\gamma(\theta)$ (составленного касательной в точке $f(e^{i\theta})$ к границе образа круга с положительным направлением действительной оси) выражается по формуле

$$\gamma'(\theta) = 2^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n-2p)\right\}, \quad \theta \neq \varphi_k = \arg a_k.$$

Это значит, что стороны многоугольника, в который переходит граничная окружность, будут прямолинейными, если $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2p$. Действительно, в этом случае $\gamma'(\theta) = 0$ на дугах окружности между соседними точками a_k. В случае $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k > n - 2p$ получим $\gamma'(\theta) > 0$, что приводит к выпуклости дуг, соединяющих угловые точки. При $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k < n - 2p$ имеем $\gamma'(\theta) < 0$, а это обеспечивает вогнутость дуг, соединяющих угловые точки. Детальное обоснование фактов для функции (3) провел Э. А. Илюхин в дипломной работе 1976 года.

Вопросы, связанные с построением и оценками функционалов для функций вида (3) с условием $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2p$, исследовал Гудман [4].

Теперь рассмотрим $F(z)$ — „возмущение" той функции $f(z)$, производная которой определена формулой (3), т. е.

$$F(z) = \int z^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} e^{\varphi(z)}\, dz. \tag{4}$$

Обозначим $\varphi(e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$ и $\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - (n - 2p)\}/2 = \overset{p}{\alpha}$.

Докажем утверждение, в котором используется понятие каркасного многоугольника, введенное в [2].

Теорема 1. *Функция* (4) *будет p-листной, если выполняется одно из следующих условий*:

1°. $0 < \alpha_k < 1$, $k = \overline{1, n}$, *и* $v'(\theta) \geqslant -\overset{p}{\alpha}$, $\overset{p}{\alpha} > 0$;

2°. *Каркасный многоугольник с вершинами в точках* $F(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, *является p-листным и* $v'(\theta) \leqslant -\overset{p}{\alpha}$, $\overset{p}{\alpha} < 0$.

Доказательство. 1°. Для угла, составленного касательной к образу окружности $|z| = 1$ при отображении функцией $F(z)$ с положительным направлением действительной оси, получим из (4)

$$\Gamma(\theta) = \pi/2 + p\theta + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{2} [\theta - \varphi_k - \pi \operatorname{sign}(\theta - \varphi_k)] + v(\theta),$$

где $\varphi_k = \arg a_k$. Поэтому при $\theta \neq \varphi_k$ будем иметь

$$\Gamma'(\theta) = p + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{2} + v'(\theta) = \overset{p}{\alpha} + v'(\theta), \tag{5}$$

откуда в силу условия теоремы $\Gamma'(\theta) \geqslant 0$. Это означает выпуклость каждой дуги на границе с концами в точках $F(a_k)$, $F(a_{k+1})$. Так как $0 < \alpha_k < 1$, то многоугольник, который получается из круга при отображении функцией $F(z)$, будет выпуклым и p-листным с учетом поведения около $0: F(z) \sim z^p$. Этот образ можно представить возникающим с помощью „раздувания“ прямолинейного многоугольника с вершинами в $F(a_k)$, $k = \overline{1, n}$.

2°. На основании (5) получим, что $\Gamma'(\theta) \leqslant 0$ при $\theta \neq \varphi_k$, т. е. дуги, соединяющие угловые точки, будут вогнутыми. При условии p-листности прямолинейного каркасного многоугольника искомый образ получится „втягиванием“ сторон внутрь многоугольника. При этом количество точек, имеющих одну проекцию, может только уменьшиться. Однако, в силу поведения $F(z) \sim z^p$ в окрестности начала координат, малая окрестность образа начала координат будет покрыта точно p раз. Это и дает возможность утверждать p-листность функции $F(z)$. Теорема 1 доказана.

Пункт 1° теоремы 1 можно распространить на случай $0 < \alpha_k < 2$ с требованием почти выпуклости p-листного каркасного многоугольника с вершинами $F(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, как в [2, с. 34]. При p-листном и почти выпуклом каркасном многоугольнике можно построить такие ограничения на $\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} v'(\theta)\, d\theta$ и на $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |v'(\theta)|\, d\theta$, при которых функция $F(z)$ будет отображать круг на p-листную и почти выпуклую многоугольную область. Эти ограничения имеют своим аналогом неравенства 3, 4 из теоремы 3 статьи [5].

Для случая $p = 1$ теорема 1 переходит в теорему 1 из [2]. Легко формулируется и доказывается соответствующее обобщение для теоремы 2 из [2], когда рассматривается образ внешности круга.

Аналог теоремы 1 для функции

$$F(z) = \int (z - a)^{p-1} (z - \bar{a})^{p-1} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} e^{\varphi(z)}\, dz -$$

„возмущения“ функции (1′) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, формулируется и доказывается просто. Так неравенства в условиях 1° и 2° заменятся на $v'(x) \geqslant 0$, $v'(x) \leqslant 0$ соответственно, где $v(x) = \lim\limits_{z \to x} \operatorname{Im} \varphi(z)$.

Для формулировки теоремы 1 в применении к обратным краевым задачам [6] нужно учесть соображения § 4 из [2] и обеспечить ограничения для $v(\theta)$ с помощью условий, наложенных на функцию $u(\theta) = \operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta})$.

§ 2. Многолистность интеграла типа Коши

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(\tau)\, d\tau}{\tau - z} \tag{6}$$

будет n-листной в $\mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, \ b_k]$, $a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$, *если для каждого* $k = \overline{1, n}$ *неотрицательная вещественная функция* $y_k(\tau)$ *не убывает на интервале* (a_k, c_k) *и не возрастает на интервале* (c_k, b_k) *действительной оси,* $a_k \leqslant c_k \leqslant b_k$, *причем* $y_k(a_k) \neq 0$, $y_k(b_k) \neq 0$.

Доказательство. Приблизим каждую функцию $y_k(\tau)$ функциями $y_k(l, \tau)$, $l = 1, 2 \ldots$, удовлетворяющими условию Гельдера, которые будут строго возрастать на интервале (a_k, c_k) и строго убывать на интервале (c_k, b_k), и дополнительно потребуем, чтобы $y_k(l, a_k) = y_k(l, b_k) = 0$.

Применим к функции

$$f_l(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1} \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(l, \tau)\, d\tau}{\tau - z}$$

формулу Сохоцкого на каждом интервале (a_k, b_k). Тогда будем иметь

$$\lim_{z \to x \pm} f_l(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b} \frac{y_k(l, \tau)\, d\tau}{\tau - x} \pm i y_k(l, x). \tag{7}$$

Функция

$$w_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{b_m} \frac{y_m(l, \tau)\, d\tau}{\tau - x} \pm i y_m(l, x), \quad a_m \leqslant x \leqslant b_m,$$

входящая в правую часть (7), определяет простой контур на основании теоремы 7 из [7]. Простота контура сохранится, если добавить

$$\tilde{w}_m^*(x) = \lim_{z \to x^\pm} f_l(z) - w_m(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,\, k \neq m}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(l, \tau)\, d\tau}{\tau - x},$$

так как

$$\tilde{w}_m'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1,\, k \neq m}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(l, \tau)\, d\tau}{(\tau - x)^2} \geqslant 0$$

при $x \in (a_m, b_m)$. Отсюда получаем, что образом двубережного отрезка $[a_m, b_m]$ будет простой контур, состоящий из двух дуг с монотонными ординатами и с концевыми точками $f_l(c_m^+)$, $f_l(c_m^-)$.

В целом образом внешности разрезов $[a_k, b_k]$ при отображении функцией $f_l(z)$ будет совокупность однолистных областей (овалов), зацепленных с помощью точек ветвления. Порядок листности этой области может меняться в таком промежутке: $2 \leqslant p \leqslant n$.

Однако в случае, когда на образе каждого отрезка $[a_k, b_k]$ появляется ∞ с двух сторон, то $p = n$. Так получится для функции $f(z) = \lim_{l \to \infty} f_l(z)$, потому что в концевых точках каждого отрезка функция $f(z)$ будет иметь логарифмическую особенность [8, с. 67]: ведь по условию теоремы $y_k(a_k)$ и $y_k(b_k)$ в нуль не обращаются. Теорема доказана.

При $n = 1$ имеем однолистную функцию $f(z)$ в виде интеграла типа Коши по одному отрезку оси $\operatorname{Im} z = 0$, [7]. В этом случае любая прямая, параллельная действительной оси, будет пересекать границу образа не более чем в двух точках или будет иметь с границей не более двух общих отрезков. Аналогичную достижимость границы образа по семейству прямых, параллельных вещественной оси, получим при любом n, только прямые нужно брать на каждом листе соответствующей римановой поверхности.

Частными случаями функции (6) являются

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\pi} \ln \frac{a_k - z}{b_k - z} \tag{8}$$

при постоянных $y_k(\tau) \equiv c_k$ и

$$f(z) = \frac{c}{\pi} \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{b_k - z} \tag{9}$$

при $c_k = c$, $k = \overline{1, n}$.

Функция (8) будет отображать внешность разрезов на n-листную область, каждый лист которой представляет собой полосу $-c_k < \operatorname{Im} w < c_k$. В случае функции (9) все полосы, расположенные в образе, являются одинаковыми. Функция (9) применялась ранее Н. В. Говоровым и С. П. Грушевским [9] в решении интересной экстремальной задачи.

Отметим, что если требовать только положительности функции $y_k(\tau)$ на (a_k, b_k), то функция (6) будет иметь порядок листности $2 \leqslant p \leqslant n$ (при $n \geqslant 2$) при дополнительных условиях

$$d \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(\tau)\, d\tau}{\tau - x} \geqslant 0, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Можно проследить движение образов при последовательной „стыковке“ отрезков $[a_k, b_k]$, когда количество интервалов интегрирования уменьшается. При $n = 1$ условие

$$d \int_a^b \frac{y(\tau)\, d\tau}{\tau - x} \geqslant 0, \quad x \in (a, b),$$

гарантирует однолистность функции $f(z)$, т. е. однолистность решения задачи

$$f^+(x) - f^-(x) = i2y(x), \quad x \in (a, b). \tag{10}$$

Контур с уравнением

$$w = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y(\tau)\, d\tau}{\tau - x} \pm iy(x)$$

может существенно отличаться от графика функции $\zeta = x \pm iy(x)$, причем из простоты этого графика не следует простота контура и наоборот. Совпадение контура и графика получится лишь для функции $y(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}$, решающей уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y(\tau)\, d\tau}{\tau - x} = x.$$

Вообще, геометрическое истолкование решений краевых задач вида (10) — довольно интересная проблема. Получение решений этих задач разными путями приводит к любопытным геометрическим эффектам. Отметим их в следующем параграфе.

§ 3. Геометрический анализ решения задачи Гильберта с разрывными коэффициентами

Докажем вначале один факт о решении смешанной краевой задачи в полуплоскости.

Теорема 3. *Функция*

$$f(z)=\frac{R(z)}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{a_k}^{b_k}\frac{\alpha_k d\tau}{R(\tau)(\tau-z)}+i\int_{b_k}^{a_{k+1}}\frac{\beta_k d\tau}{R(\tau)(\tau-z)}\right),\ f(z)=O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{11}$$

$a_{n+1}=a_1$, $\infty\in(b_n,\ a_1)$, α_k и β_k — *постоянные, причем ветвь*

$$R(z)=\prod_{k=1}^{n}\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)} \tag{12}$$

выбирается из условия $R(x)>0$ *при* $x>b_n$, *будет однолистной в полуплоскости* $\operatorname{Im} z>0$, *если выполняется одно из требований*:

1) *последовательность вещественных постоянных* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ *возрастает при* $1\leqslant k\leqslant q$ *и убывает при* $q\leqslant k\leqslant n$,

2) *последовательность вещественных постоянных* $\{\beta_k\}_{k=1}^{n}$ *возрастает при* $1\leqslant k\leqslant r$ *и убывает при* $r\leqslant k\leqslant n$.

Однолистность функции $f(z)$ *в замкнутой полуплоскости* $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ *получится при условии, что* $f'(z)\neq 0$ *на оси* x (*за исключением точек* $\{a_k,\ b_k\}_{k=1}^{n}$).

Доказательство. Формула (11) дает решение смешанной краевой задачи в полуплоскости с постоянными краевыми значениями. При этом предполагается ограниченность функции $f(z)$ в точках стыка краевых значений и должно выполняться $n-1$ условий разрешимости [8, с. 473]. Эти условия разрешимости приводят к поведению $f(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности ∞, записанному в (11).

Предположим вначале, что нет нулей производной функции $f(z)$ на отрезках, которые высекаются из вещественной оси точками $\{a_k,\ b_k\}_{k=1}^{n}$, и рассмотрим случай 1). Полуосям $(-\infty,\ a_1)$, $(b_q,\ \infty)$, на которых расположены отрезки $[a_{q+1},\ b_{q+1}],\ \ldots,\ [a_n,\ b_n]$ с заданными на них убывающими значениями α_k, $k=\overline{q+1,\ n}$, будет соответствовать ломаная ступенчатая линия, выпуклая в направлении мнимой оси, т. е. простая линия (без пересечений). В точках прообраза этой линии будет выполняться неравенство $d\operatorname{Re} f(x)\leqslant 0$.

На оставшейся части вещественной оси справедливо неравенство $d\,\mathrm{Re}\,f(x) \geqslant 0$. Поэтому образом оставшейся части будет тоже простая кривая, выпуклая в направлении мнимой оси, — также ступенчатая ломаная линия. Достаточно высокая Π-образная кривая, концы которой будут совпадать с точками стыка этих ломаных, будет удовлетворять условиям теоремы 1 из [7], которая утверждает однолистность $f(z)$ в замкнутой полуплоскости на основании принципа аргумента.

Нули производной будут переходить в концы разрезов, и эти разрезы не дадут возможность утверждать однолистность $f(z)$ в замкнутой полуплоскости.

Случай 2) сводится к случаю 1) умножением $f(z)$ на i. Теорема доказана полностью.

Из-за наличия разрезов в образе однолистность функции $f(z)$ оказывается неустойчивой. Поэтому замена постоянных α_k и β_k на функции, мало отличающиеся от этих постоянных, приводит, вообще говоря, к потере однолистности. Условия однолистности функции (11) в случае, когда α_k и β_k зависят от x, удается найти лишь при $n=1$, 2 [5].

Итак, функция (11) при выполнении $n-1$ условий, связывающих параметры α_k и β_k, $k=\overline{1, n}$, отображает полуплоскость на $2n$-угольник с углами $\pi/2$ и $3\pi/2$, причем возможны внутренние прямолинейные разрезы в этом многоугольнике. Дадим доказательство существования разрезов сопоставлением с формулой Кристоффеля—Шварца.

Пусть задан $2n$-угольник, на который отображается полуплоскость с $2n$ фиксированными прообразами вершин на вещественной оси. Формула Кристоффеля—Шварца определит отображающую функцию лишь при выполнении $2n-3$ условий разрешимости, так как на основании теоремы Римана можно фиксировать только 3 прообраза вершин. Полученная разность в числе условий разрешимости по формуле Кристоффеля—Шварца и по формуле (11)

$$2n-3-(n-1)=n-2$$

вызовет противоречие, если считать, что в многоугольнике нет разрезов. На самом же деле разрезы должны появиться и число их будет $\leqslant n-2$. При $n=1$ и 2 разрезы не появятся и соответствующая однолистность будет устойчивой (ср. с [5, с. 43]).

Если $n-1$ условий разрешимости, связанных с формулой (11), не выполняются совсем или выполняются частично, то функция $f(z)$ может потерять однолистность в ∞.

Отметим, что убедиться в однолистности функции (11) можно путем решения смешанной краевой задачи для $f'(z)$ с нулевыми граничными условиями, т. е. с помощью нового интегрального представления, эквивалентного (11).

Рассмотрим теперь случаи, когда функция $R(z)$ в (12) заменяется на

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)(z-b_k)\right]^{-1/2} \text{ и } \left[\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)(z-b_k)^{-1}\right]^{1/2}.$$

При $R(z)=\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)(z-b_k)\right]^{-1/2}$ все точки стыка граничных условий будут переходить в ∞. Поэтому функция вида (11) окажется неоднолистной. Действительно, каждая прямая $\operatorname{Re} f=\alpha_k$ или $\operatorname{Im} f=\beta_k$ определяет полуплоскость, которая будет принадлежать образу. Поскольку две прямые $\operatorname{Re} f=\alpha_k$ и $\operatorname{Re} f=\alpha_m$ определяют две неперекрывающиеся или две перекрывающиеся полуплоскости, то порядок листности от этих двух полуплоскостей увеличивается на 1 или на 2. Значит, общий порядок листности будет меняться в промежутке $[n, 2n]$. При $n=1$ порядок листности равен 2.

Наконец, если $R(z)=\left[\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)(z-b_k)^{-1}\right]^{1/2}$, то функция вида (11) переводит точки a_k в конечные точки, а точки b_k — в ∞. Простой геометрический анализ показывает, что функция $f(z)$ будет однолистной при $n=1$ и может сохранить однолистность при $n\leqslant 4$. Может случиться, что образы четырех полуокрестностей точек b_k будут лежать на одном и том же или на четырех различных листах. Поэтому порядок листности всего образа меняется в промежутке $[[n/4]+$ $+\delta(n/4), n]$, причем $\delta(\beta)$ имеет вид (2).

Из полученных фактов, касающихся функции $f(z)$ с тремя вариантами функций $R(z)$, видно, что геометрическая картина в случае решения одной и той же краевой задачи в разных классах существенно меняется.

Рассмотренная смешанная краевая задача является частным случаем задачи Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами. Факты об однолистной разрешимости такой задачи оказываются более содержательными. Именно, справедлива

Теорема 4. *Любое решение задачи Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами*

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\gamma_k} f(e^{i\theta})\right]=c_k(\theta),\ \theta\in(\varphi_k,\ \varphi_{k+1}),\ k=\overline{1,n}, \tag{13}$$

$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < 2\pi$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$, *в классе функций, ограниченных в точках стыка или имеющих там особенности с порядками* $\leqslant (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi$, *будет однолистным в замкнутом круге* $\{z = re^{i\theta},\ r \leqslant 1\}$, *если* $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < 2\pi$, *а* $c_k(\theta)$ *представляют собой неубывающие функции.*

Доказательство. Для решения задачи (13), ограниченного в точках стыка, теорема по существу доказана в [5] (теорема 1).

Дадим доказательство теоремы 4 для функций, имеющих в точках стыка особенности. Это доказательство даст новый способ обоснования однолистности $f(z)$ и в случае ограниченности $f(z)$ в точках стыка.

Именно, докажем эквивалентность этих двух классов решений задачи Гильберта классу $B_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ однолистных функций, который введен Д. В. Прохоровым и Б. Н. Рахмановым [3, с. 45]. Для удобства введем переобозначенный класс

$$B(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \equiv B_2(\gamma_n/\pi - 1, \gamma_{n-1}/\pi - 1, \ldots, \gamma_1/\pi - 1),$$

$0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_n < 2\pi$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad z \in E = \{z : |z| < 1\},$$

обладающих следующим свойством. Для любой точки $w_0 \notin e^{i\beta} f(E)$ по крайней мере один из лучей, образующих с положительным направлением вещественной оси углы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, не пересекает область $e^{i\beta} f(E)$ при некоторой действительной постоянной β, не зависящей от w_0. Класс $B(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ имеет структурную формулу [3, с. 46]

$$f(z) = \int\limits_0^z \prod_{k=1}^n \left(1 - \zeta e^{-i\varphi_k}\right)^{-\lambda_k} p(\zeta)\, d\zeta, \tag{14}$$

где $\lambda_k = (\gamma_k - \gamma_{k-1})/\pi$, $k = \overline{1, n}$, $\gamma_0 = \gamma_n - 2\pi$, функция $p(z)$, $p(0) = 1$ регулярна в E и удовлетворяет там условию $\operatorname{Re}(e^{i\sigma} p(z)) > 0$ с вещественной постоянной σ.

Доказательство эквивалентности $(13) \Leftrightarrow (14)$ (при дополнительных условиях на γ_k и $c_k(\theta)$; $k = \overline{1, n}$) проведем в предположении, что функция $p(z)$ является непрерывной в замкнутом круге, за исключением $e^{i\varphi_k}$, $k = \overline{1, n}$. Это будет соответствовать непрерывной дифференцируемости функции $c_k(\theta)$ в интервале $(\varphi_k, \varphi_{k+1})$, $k = \overline{1, n}$.

$(14) \Rightarrow (13)$. С учетом обозначения $a_m(\varepsilon) = \exp i(\varphi_m + \varepsilon)$, ε — малое положительное число, получим

$$f(z)-f(a_m(\varepsilon))=\int\limits_{a_m(\varepsilon)}^{z}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\zeta e^{-i\varphi_k}\right)^{-\lambda_k}p(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда, используя формулу $1-\exp(i\gamma)=2|\sin(\gamma/2)|\times\times\exp[i(\gamma-\pi\operatorname{sign}\gamma)/2]$ при $-2\pi<\gamma<2\pi$ и интегрируя вдоль окружности $z=e^{i\theta}$, будем иметь

$$f(e^{i\theta})-f(a_m(\varepsilon))=\int\limits_{\varphi_m+\varepsilon}^{\theta}\prod_{k=1}^{n}\left\{2\left|\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right|\times\right.$$

$$\left.\times\exp i\left[\theta-\varphi_k-\pi\operatorname{sign}(\theta-\varphi_k)\right]/2\right\}^{-\lambda_k}p(e^{i\theta})e^{i\theta}\,id\theta=$$

$$=e^{i\alpha}\int\limits_{\varphi_m+\varepsilon}^{\theta}\prod_{k=1}^{n}\left|2\sin\left|\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right|\right|^{-\lambda_k}\exp\left[i\frac{\pi\lambda_k}{2}\operatorname{sign}(\theta-\varphi_k)\right]p(e^{i\theta})\,d\theta,$$

поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=2$ и постоянная величина $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k/2$ обозначена через α. На интервале $(\varphi_m+\varepsilon,\ \varphi_{m+1}-\varepsilon)$ запишем

$$f(e^{i\theta})-f(a_m(\varepsilon))=\exp i\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k-\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\right)\pi/2+\alpha-\sigma\right]\times$$

$$\times\int\limits_{\varphi_m+\varepsilon}^{\theta}\prod_{k=1}^{n}\left|2\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right|^{-\lambda_k}p(e^{i\theta})e^{i\sigma}\,d\theta,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k-\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\right)/2=\gamma_m-(\gamma_0+\gamma_n)/2.$$

Теперь, обозначив $-(\gamma_0+\gamma_n)/2+\alpha-\sigma-\pi/2=-\beta$, получим

$$-ie^{-i\gamma_m}e^{i\beta}f(e^{i\theta})=-ie^{-i\gamma_m}e^{i\beta}f(a_m(\varepsilon))+$$

$$+\int\limits_{\varphi_m+\varepsilon}^{\theta}\prod_{k=1}^{n}\left|2\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right|^{-\lambda_k}e^{i\sigma}p(e^{i\theta})\,d\theta.$$

Следовательно, функция

$$\operatorname{Re}\left[-ie^{-i\gamma_m}e^{i\beta}f(e^{i\theta})\right]=\operatorname{Im}\left[e^{-i\gamma_m}e^{i\beta}f(e^{i\theta})\right]$$

ведет себя как зависимость

$$\operatorname{Re}\left[-ie^{-i\gamma_m}e^{i\beta}f(a_m(\varepsilon))\right]+\int\limits_{\varphi_m+\varepsilon}^{\theta}\prod_{k=1}^{n}\left|2\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right|^{-\lambda_k}\operatorname{Re}\left[e^{i\sigma}p(e^{i\theta})\right]d\theta, \tag{15}$$

которая является дифференцируемой и неубывающей функцией в интервале $(\varphi_m+\varepsilon,\ \varphi_{m+1}-\varepsilon)$ и, значит, в интервале $(\varphi_m,\ \varphi_{m+1})$, так как ε можно устремить к нулю.

(13)$\Rightarrow$(14). Доказательство начинается с сопоставления условия (13) для функции $e^{i\beta}f(z)$ с выражением (15). После дифференцирования полученного равенства в интервале $(\varphi_m,\ \varphi_{m+1})$ имеем

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\sigma}p(e^{i\theta})\right]=c_m'(\theta)\prod_{k=1}^{n}\left|2\sin\frac{\theta-\varphi_k}{2}\right|^{\lambda_k}. \tag{16}$$

Если взять совокупность всех интервалов $(\varphi_m,\ \varphi_{m+1})$, то условия вида (16) зададут граничное значение вещественной части функции $e^{i\sigma}p(z)$, которая определится единственным образом при нормировке $p(0)=1$ и при задании поведения $p(z)$ в окрестности точек $e^{i\varphi_k}$ — ограниченности или наличия особенности порядка $\leqslant 1$.

Дальнейшие выкладки будут повторять то, что сделано выше формулы (15) снизу вверх.

К доказанной эквивалентности можно прийти также с помощью дифференцирования по θ краевого условия (13) и решения задачи Гильберта с кусочно-постоянными коэффициентами для функции $zf'(z)$

$$\operatorname{Im}\left[e^{-i\gamma_k}izf'(z)\right]\Big|_{z=e^{i\theta}}=c_k'(\theta).$$

Итак, доказана эквивалентность решений задачи (13) и представления (14) со сглаженными функциями $c_k(\theta)$ и $p(e^{i\theta})$. Совершая предельный переход от сглаженных функций к исходным, получим эквивалентность в общем случае.

Собственно, для обоснования теоремы 4 достаточно доказать эквивалентность (13)<=>(14) для сглаженных функций. В таком случае мы получим, что решение $f_l(z)$ задачи (13) в случае гладких функций $c_k(l,\ \theta)$ будет однолистным в E. Так как из сходимости $\lim\limits_{l\to\infty}c_k(l,\ \theta)=c_k(\theta)$ почти всюду будет следовать равномерная сходимость $f(z)=\lim\limits_{l\to\infty}f_l(z)$ в любом замкнутом круге $|z|\leqslant R<1$ (ср. с доказательством теоремы 7 из [7]), то функция $f(z)$ будет тоже однолистной в открытом единичном круге.

В дополнение к доказанной теореме отметим следующее.

Если при $c_k(\varphi_{k+1}) > c_k(\varphi_k)$ функции $c_k(\theta)$ имеют участки убывания, количество которых равно m_k, то порядок листности образа круга с помощью функции $f(z)$ с условиями (13) оценивается так: $1 \leqslant p \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} m_k$.

По-видимому, порядок листности $f(z)$ можно оценить и через величину p_0 в неравенстве $|\arg p(z) - \delta| \leqslant p_0 > \pi/2$, $|z| < 1$. При этом функция $p(z)$ берется из представления вида (14), являющегося возмущенным интегралом Кристоффеля—Шварца и эквивалентного решению задачи Гильберта (13) в случае немонотонных $c_k(\theta)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., „Наука", 1973.
2. Аксентьев Л. А. Однолистное изменение многоугольных областей.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 13. Изд-во Казанского ун-та, 1976, с. 30—39.
3. Прохоров Д. В., Рахманов Б. Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций.— Математические заметки, т. 19, № 1, 1976, с. 41—48.
4. Goodman A. W. On the Schwarz—Christoffel transformation and p-valent functions.— Transactions of Amer. Math. Soc., v. 68, № 2, 1950, p. 204—223.
5. Аксентьев Л. А., Губайдуллина Н. А. Применение каркасных многоугольников для однолистной разрешимости краевых задач.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 13. Изд-во Казанского ун-та, 1976, с. 40—48.
6. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1965.
7. Аксентьев Л. А. Применение принципа аргумента к исследованию условий однолистности, I. — „Изв. вузов. Математика", 1968, № 12, с. 3—15.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., „Наука", 1977.
9. Говоров Н. В., Грушевский С. П. О некоторых метрических свойствах граничных значений функций, аналитических в полуплоскости.—ДАН СССР, т. 242, № 1, 1978, с. 21—24.

Доложено на семинаре 27 января 1978 г