КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 17 *Труды семинара по краевым задачам* *1980*

УДК 517.544

К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО КОНТУРА

Ф. Н. Гарифьянов

1. Рассмотрим гомотопное семейство простых разомкнутых гладких кривых l_λ, заполняющих на плоскости криволинейный угол D, с концами в точках $z=0$ и $z=\infty$. Пусть кривая l_λ задана уравнением $y=f(x, \lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$. Кривые l_0 и $l_{2\pi}$, соответствующие значениям $\lambda=0$ и $\lambda=2\pi$, являются границами угла D.

Понимая, как обычно, под порядком функции $w=F(z)$, аналитической внутри угла D и непрерывной на его границе, неотрицательную величину

$$\rho=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_F(r)}{\ln r}, \quad M_F(r)=\max_{|z|=r}|F(z)|, \tag{1}$$

назовем индикатором функции $F(z)$ функцию

$$h(\lambda)=\varlimsup_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{\ln|F(z)|}{[S(z)]^\rho}, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi, \tag{2}$$

где через $S(z)$ обозначена длина части кривой l_λ, соединяющей начало координат с точкой z.

Всюду в дальнейшем будем считать, что существует непрерывная монотонно возрастающая функция

$$\tilde{\lambda}=\varphi(\lambda)=\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\arg z. \tag{3}$$

Изучим некоторые свойства индикатора $h(\lambda)$. Прежде всего найдем аналог свойства тригонометрической выпуклости индикатора целой функции. Заметим, что в силу нашего определения (2) индикатор функции $E(z)=\exp[(a-bi)z^\rho]$ имеет вид

$$H(\lambda) = c(\lambda)(a\cos\rho\tilde{\lambda} + b\sin\rho\tilde{\lambda}), \tag{4}$$

где функция

$$c(\lambda) = \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}}}\, c(z, \lambda), & a\cos\rho\tilde{\lambda} + b\sin\rho\tilde{\lambda} > 0, \\ \underline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}}}\, c(z, \lambda), & a\cos\rho\tilde{\lambda} + b\sin\rho\tilde{\lambda} < 0, \end{cases}$$

$$c(z, \lambda) = |z|^\rho/[S(z)]^\rho.$$

В дальнейшем нам придется различать следующие случаи:

I. $\underline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}}}\, c(z, \lambda) = \overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}}}\, c(z, \lambda),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi.$

Пусть индикатор $h(\lambda)$ принимает на кривых l_{λ_1} и l_{λ_2} значения $h(\lambda_1)$ и $h(\lambda_2)$ соответственно. Построим функцию $E(z) = \exp[(a - bi)z^\rho]$, индикатор которой $H(\lambda)$ на кривых l_{λ_1} и l_{λ_2} принимает значения $h(\lambda_1) + \delta$ и $h(\lambda_2) + \delta$. Для этого достаточно найти a и b из системы

$$\begin{cases} c(\lambda_1)(a\cos\rho\tilde{\lambda}_1 + b\sin\rho\tilde{\lambda}_1) = h(\lambda_1) + \delta, \\ c(\lambda_2)(a\cos\rho\tilde{\lambda}_2 + b\sin\rho\tilde{\lambda}_2) = h(\lambda_2) + \delta. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) будет разрешимой, если ее определитель $\Delta = c(\lambda_1)c(\lambda_2)\sin\rho(\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1) \neq 0$. Выберем λ_1 и λ_2 на столько близкими друг к другу, чтобы выполнялось неравенство $\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 < \pi/2\rho$. Имеет место

Лемма 1. *Если выполнены условия* (3) *и* I, *то функция* $c(\lambda)$ *нигде не обращается в нуль.*

В самом деле, пусть сначала λ выбрано так, что $\operatorname{tg}\tilde{\lambda}$ есть конечное число. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/\varphi(x) = 1$, то условимся в дальнейшем писать, что $f(x) \sim \varphi(x)$. Тогда в силу (3) $|z| \sim x\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\tilde{\lambda}}$, и по теореме о среднем для определенного интеграла

$$S(z) = \int_0^x \sqrt{1 + f'^2(t, \lambda)}\, dt = x\sqrt{1 + f'^2(\alpha_x, \lambda)},\ \alpha_x \in [0, x].$$

Отсюда вытекает, что если $c(\lambda_0) = 0$, то в силу условия I выполнено равенство $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x, \lambda_0) = \infty$. Но тогда в силу правила Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x, \lambda_0)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x, \lambda_0) = \infty,$$

а это противоречит нашему предположению, что существует $\operatorname{tg}\widetilde{\lambda}_0$. Если же λ выбрано так, что $\operatorname{tg}\widetilde{\lambda}$ не существует, то можно получить аналогичный результат на основании оценки $|z| \sim f(x, \lambda)$, $z \in l_\lambda$.

В силу разрешимости системы (5) можно, считая $\delta > 0$, построить функцию $\Phi(z) = F(z)/E(z)$, индикатор которой представим в виде $\widetilde{H}(\lambda) = h(\lambda) - H(\lambda)$, $\widetilde{H}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$. Лучи $\widetilde{\lambda}_1 - \varepsilon$ и $\widetilde{\lambda}_2 + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$ не могут пересекать кривые l_{λ_1} и l_{λ_2} в бесконечном множестве точек, имеющем точку сгущения на бесконечности, поскольку выполнено (3). Следовательно, справедливы условия теоремы Фрагмена—Линделёфа [1, с. 357], откуда $\widetilde{H}(\lambda) = h(\lambda) - H(\lambda) \leqslant 0$, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Переходя к пределу в этом неравенстве при $\delta \to 0$, по аналогии со случаем целых функций [2, с. 74] получим неравенство

$$k(\lambda) = \frac{h(\lambda)}{c(\lambda)} \leqslant \frac{k(\lambda_1)\sin\rho(\widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}) + k(\lambda_2)\sin\rho(\widetilde{\lambda} - \widetilde{\lambda}_1)}{\sin\rho(\widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}_1)}. \tag{6}$$

Отсюда также, как в теории целых функций, можно сделать вывод о непрерывности функции $k(\lambda)$.

II. Пусть не выполнено условие I, но функция $F(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\varlimsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \frac{\ln|F(z)|}{[S(z)]^\rho} = \varliminf_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \frac{\ln|F(z)|}{[S(z)]^\rho},$$

$0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$. Тогда индикатор функции $\Phi(z) = F(z)/E(z)$ представим в виде

$$\widetilde{H}(\lambda) = \varlimsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \frac{\ln|F(z)| - \ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho} = \varliminf_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \frac{\ln|F(z)|}{[S(z)]^\rho} +$$

$$+ \varlimsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \left\{ -\frac{\ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho} \right\} = h(\lambda) - \varliminf_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \frac{\ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho}. \tag{7}$$

Поскольку в данном случае

$$\varliminf_{\substack{z\to\infty \\ z\in l_\lambda}} \frac{\ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho} = \widetilde{c}(\lambda)(a\cos\rho\widetilde{\lambda} + b\sin\rho\widetilde{\lambda}),$$

где функция

$$\widetilde{c}(\lambda)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}} c(z,\ \lambda), & a\cos\widetilde{\lambda}+b\sin\widetilde{\lambda}<0,\\ \underline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\, c(z,\ \lambda), & a\cos\widetilde{\lambda}+b\sin\widetilde{\lambda}>0,\end{cases}$$

то величины a и b, входящие в выражение функции $E(z)$, найдем из системы

$$\begin{cases}\widetilde{c}(\lambda_1)\,[a\cos\widetilde{\rho\lambda_1}+b\sin\widetilde{\rho\lambda_1}[=h(\lambda_1)+\delta,\\ \widetilde{c}(\lambda_2)\,[a\cos\widetilde{\rho\lambda_2}+b\sin\widetilde{\rho\lambda_2}]=h(\lambda_2)+\delta.\end{cases}\tag{8}$$

Считая, что $\widetilde{c}(\lambda_1)\widetilde{c}(\lambda_2)\neq 0$, и рассуждая аналогично случаю I, можно показать, что система (8) будет разрешимой и получить для функции $\widetilde{k}(\lambda)=\dfrac{h(\lambda)}{\widetilde{c}(\lambda)}$ все результаты, полученные для функции $k(\lambda)$.

III. Пусть не выполнены ни I ни II. Тогда вместо равенств (7) будем иметь неравенство

$$\widetilde{H}(\lambda)\leqslant h(\lambda)-\underline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\frac{\ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho}.$$

Величины a и b найдем из системы (8). Тогда $\widetilde{H}(\lambda_i)<0$, $i=1,\ 2$, и, применяя теорему Фрагмена—Линделёфа, получим неравенство

$$\overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\frac{\ln|F(z)|-\ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho}\leqslant 0,\ \lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2,$$

откуда

$$\overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\frac{\ln|F(z)|}{[S(z)]^\rho}\leqslant\overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\frac{\ln|E(z)|}{[S(z)]^\rho}$$

или, переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta\to 0$,

$$k(\lambda)\leqslant\frac{\widetilde{k}(\lambda_1)\sin\rho(\widetilde{\lambda}_2-\widetilde{\lambda})+\widetilde{k}(\lambda_2)\sin\rho(\widetilde{\lambda}-\widetilde{\lambda}_1)}{\sin\rho(\widetilde{\lambda}_2-\widetilde{\lambda}_1)}.\tag{9}$$

Рассуждая аналогично тому, как это сделано в теории целых функций, можно показать, что если функции $c_1(\lambda)=\overline{\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\,c(z,\ \lambda)$

и $c_2(\lambda)=\varliminf\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}} c(z,\lambda)$ непрерывны, то из (9) можно сделать вывод о том, что нули индикатора являются его точками непрерывности.

Функция $h^*(\lambda)=\varlimsup\limits_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{\ln|F(z)|}{|z|^\rho}$ непрерывна, поскольку индикатор функции $E(z)$

$$H^*(\lambda)=\varlimsup_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{\ln|E(z)|}{|z|^\rho}=\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{\ln|E(z)|}{|z|^\rho}=a\cos\rho\widetilde{\lambda}+b\sin\rho\widetilde{\lambda}$$

можно взять в качестве аналога тригонометрического индикатора и, считая $c(\lambda)\equiv 1$, провести те же рассуждения, что и в случае I. В силу неравенств $h(\lambda)\leqslant h^*(\lambda)$, если $h(\lambda)>0$, $h(\lambda)\geqslant h^*(\lambda)$, если $h(\lambda)<0$, можно сделать вывод об ограниченности индикатора $h(\lambda)$ в смысле определения (2).

2. Применим некоторые из полученных результатов к решению краевой задачи Римана. Пусть теперь семейство кривых $y=f(x,\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 2\pi$, заполняет всю комплексную плоскость, при этом параметр λ выбран так, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\arg z=\lambda. \tag{10}$$

Через D обозначим плоскость с разрезом по кривой $l_0\equiv l_{2\pi}$. Кроме того, предполагаем выполненным неравенство

$$|f'_x(x,\lambda)|<A(\lambda),\ x>x_0. \tag{11}$$

Будем искать аналитическую в D функцию $\Phi(z)$, граничные значения которой в каждой точке $t\in l_0$ связаны соотношением

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ t\in l_0,\ t\neq 0,\ \infty, \tag{12}$$

где $G(t)$ — заданная функция, не обращающаяся в нуль в конечных точках, причем одна из фиксированных ветвей ее логарифма удовлетворяет условию

$$\ln G(t)=2\pi i G_*(t)\,t^\rho, \tag{13}$$

где $G_*(t)$ непрерывна по Гёльдеру всюду на l_0, включая концы, при этом $G_*(\infty)=R_0e^{i\theta_0}\neq 0$, число $\rho>0$ — нецелое. Функция $\Phi(z)$ должна иметь заданный индикатор $h(\lambda)$ относительно порядка ρ.

При решении задачи прежде всего отметим, что функция $\chi(z) = \exp\Gamma(z)$, где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_0}\frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\left(\frac{z - z_0}{\tau - z_0}\right)^{[\rho]+1} d\tau, \; z_0 \notin l_0,$$

удовлетворяет условию (12), если под $\ln G(t)$ понимать ветвь (13). Как показано в статье [3], для всех z, не лежащих на l_0, справедливо представление

$$\Gamma(z) = -\frac{\pi e^{i\pi([\rho]-\rho)}G_*(\infty)}{\sin\pi(\rho - [\rho])} z^\rho + \Phi_0(z),$$

при этом поведение $\Gamma(z)$ вблизи $z = \infty$ целиком определяется первым слагаемым. На основании этой формулы

$$h_x(\lambda) = \varlimsup_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{\ln|\chi(z)|}{[S(z)]^\rho} = \lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{\operatorname{Re}\Gamma(z)}{[S(z)]^\rho} =$$

$$= \frac{(-1)^{[\rho]+1}c(\lambda)\pi R_0}{\sin\pi(\rho - [\rho])}\cos\rho(\lambda - \pi + \theta_0/\rho), \; 0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi,$$

причем она дает значения индикатора $h_x(\lambda)$ в точках $\lambda = 0$ и $\lambda = 2\pi$ в силу непрерывности функции $k(\lambda)$. Возьмем в качестве канонической функции однородной задачи (12) функцию

$$\chi_1(z) = \chi(z)/P(z),$$

где $P(z)$ — некоторая целая функция порядка ρ, представляющая собой каноническое произведение правильно распределенного множества $A = \{a_m\}$ точек a_m, не лежащих на кривой l_0. Обозначим индикатор функции $P(z)$ через $H(\lambda)$.

Лемма 2. *Если множество нулей целой функции правильно распределено, то она почти регулярного роста на каждой кривой l_λ.*

Прежде всего отметим, что в общем случае функция не будет почти регулярного роста на всем множестве кривых. Обозначим через x_1 и x_2 абсциссы точек пересечения кривой l_λ с некоторым особым кружком из множества E^0 нулевой линейной плотности [2, с. 120]. Тогда в силу (11)

$$S(z) = \int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1 + f_t'^2(t, \lambda)}\,dt \leqslant \sqrt{1 + A^2}(x_2 - x_1) \leqslant 2\sqrt{1 + A^2}r,$$

где r — радиус особого кружка. Но сумма радиусов особых кружков, лежащих внутри круга $|z| < R$, равна $R\delta(R)$, где $\lim\limits_{R\to\infty} \delta(R) = 0$. Это означает, что множество точек кривой, лежащее внутри особых кружков, является множеством нулевой относительной меры, что завершает доказательство.

Воспользовавшись теоремой Бернштейна для функций, аналитических в прямолинейных углах [2, с. 99], легко доказать ее аналог для индикатора $h(\lambda)$ определенного формулой (2). Имеет место

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна и порядка ρ внутри некоторого криволинейного угла. Произвольным числам $\varepsilon > 0$, $0 < \omega < 1$ и фиксированной кривой l_λ, лежащей внутри этого угла, отвечает число $\delta > 0$ и последовательность интервалов $S(z_n) < S < S(z_n)(1+\delta)$, $z_n \in l_\lambda$, $z_n \to \infty$, на каждом из которых неравенство*

$$\ln|f(z)| > [h(\lambda) - \varepsilon]\, S^\rho$$

выполняется всюду, кроме, быть может, некоторого множества, мера которого не превосходит $\omega\delta S(z_n)$.

В силу этой теоремы и леммы 2 индикатор произведения двух функций на кривой l_λ равен сумме индикаторов, если одна из функций почти регулярного роста на этой кривой [2, с. 207].

Назовем функцию $h(\lambda)$ индикатором единственности правильного множества N с индикатором $H_N(\lambda)$, если не существует неравной тождественной нулю целой функции $F(z)$ порядка ρ, с индикатором $h(\lambda)$, обращающейся в нуль во всех точках множества N [2, с. 249].

Лемма 3. *Функция $h(\lambda)$ не является индикатором единственности тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$h(\lambda) = H_N(\lambda) + h_1(\lambda), \tag{14}$$

где функция $\dfrac{h(\lambda)}{c(\lambda)}$ — тригонометрически выпуклая, с периодом 2π.

Доказательство. Пусть $\Phi_N(z)$ — каноническая функция правильно распределенного множества N. Тогда функция $\psi(z) = F(z)/\Phi_N(z)$ — целая и ее индикатор $h_\psi(\lambda) = h(\lambda) - H_N(\lambda)$ в силу леммы 2. Наоборот, если выполнено (14), то построим целую функцию $\psi(z)$, индикатор которой на луче λ принимает значение $h_1(\lambda)/c(\lambda)$, причем множество нулей функции $\psi(z)$

можно считать правильно распределенным [2, с. 124]. Тогда функция $\Phi(z)=\Phi_N(z)\psi(z)$ обращается в нуль на множестве N и имеет индикатор $h(\lambda)=H_N(\lambda)+h_1(\lambda)$, поскольку на основании почти регулярности роста

$$h_\psi(\lambda)=\overline{\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}}\frac{\ln|\psi(z)|}{[S(z)]^\rho}=\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in l_\lambda}}\frac{|z|^\rho h_1(\lambda)}{c(\lambda)[S(z)]^\rho}=h_1(\lambda).$$

В силу леммы 3 дальнейшее исследование задачи можно провести по схеме, предложенной Л. И. Чибриковой в статье [3]. Так как всюду на l_0 граничные значения $\chi_1^+(t)$ и $\chi_1^-(t)$ непрерывны и отличны от нуля, то краевое условие (12) можно записать в таком виде:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_1^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{\chi_1^-(t)},\quad t\in l_0.$$

Отсюда следует, что функция $\Omega(z)=\Phi(z)/\chi_1(z)$ является целой и так как множество ее нулей правильно распределено, то она имеет вполне регулярный рост на каждой кривой l_λ. Тогда индикатор функции $\Phi(z)=\Omega(z)\chi_1(z)$

$$h(\lambda)=H(\lambda)+h_1(\lambda)+h_\chi(\lambda)-H(\lambda)=h_1(\lambda)+h_\chi(\lambda).$$

Итогом наших рассуждений будет следующий результат: *однородная задача* (12) *имеет отличные от нуля решения тогда и только тогда, когда* $\frac{h(\lambda)-h_\chi(\lambda)}{c(\lambda)}$ *есть тригонометрически выпуклая функция с периодом* 2π *при показателе* ρ. *При выполнении этого условия общее решение однородной задачи определяется формулой*

$$\Phi(z)=\chi_1(z)\Omega(z)=\chi(z)\Omega_1(z),$$

где $\Omega_1(z)$ *есть целая функция порядка* ρ *с индикатором* $h(\lambda)-h_\chi(\lambda)$.

Автор благодарит профессора Л. И. Чибрикову за научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., „Наука“, 1968.

2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956.

3. Чибрикова Л. И. Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре. II.— Труды семинара по краевым задачам. Вып. 16. Изд-во Казанск. ун-та, 1979, с. 185—201.

Доложено на семинаре 29 января 1979 г.